論文の内容の要旨

論文題目　Rational singularities, ω-multiplier ideals and cores of ideals
（ 有理特異点、ω-乗数イデアルとイデアルのコア ）

氏　　名　柴田　康介

Rees と Sally は [10] の中でイデアルのコアを定義した。奥間、渡辺と吉田は [9] の中でイデアルのコアを使って 2 次元の有理特異点を特徴付けをした。しかし、この特徴付けは高次元に一般化はできない。この論文ではイデアルのコアを使って別の有理特異点の特徴づけを示す。

定理 1. $(A, \mathfrak{m})$ を n 次元の *Cohen-Macaulay* 局所環で孤立特異点であるとする。このとき A が有理特異点であることと任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアルに対して $\overline{I^n} \subset \mathrm{core}(I)$ が成り立つことは同値である。

この定理によって Cohen-Macaulay 局所環で孤立特異点であるものに対して Briançon-Skoda 定理が成り立てば有理特異点であることがわかる。Lipman と Teissier は [7] の中で有理特異点ならば Briançon-Skoda 定理が成り立つことを示した。これにより Cohen-Macaulay 局所環で孤立特異点であるものが有理特異点であることと Briançon-Skoda 定理が成り立つことは同値であることがわかる。

乗数イデアルは双有理幾何学の重要な道具である。この論文では乗数イデアルと似た性質をもつ ω-乗数イデアルというものを定義する。一般的には乗数イデアルは ω-乗数イデアルとは異なる。この論文の主な目的は ω-乗数イデアルの性質を示し、いくつかの応用を示すことである。

乗数イデアルを定義するには食い違い係数が必要となる。食い違い係数を定義するには代数多様体が正規であり $\mathbb{Q}$-Gorenstein である必要がある。しかし ω-乗数イデアルは代数多様体が正規であれば定義できる。もし代数多様体が正規かつ Gorenstein ならば任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して ω-乗数イデアル $\mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{a}^c)$ は乗数イデアル $\mathcal{J}(X, \mathfrak{a}^c)$ と等しくなる。

乗数イデアルで最も重要な定理の一つは Skoda の定理である。この論文では 2 次元の局所環で有理特異点であるものに対して ω-乗数イデアルの Skoda の定理が成り立つことを示した。

命題 2. (A, m) を 2 次元局所環で有理特異点、$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアル、J を $\mathfrak{a}$ の *reduction* とする。このとき、 2 以上の自然数 n に対して

$$\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^n) = \mathfrak{a}\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^{n-1}) = J\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^{n-1}).$$

が成り立つ。

Huneke と Swanson は [3] の中で 2 次元正則局所環に対してイデアルのコアと乗数イデアルの関

係を示した。この論文では彼らの結果を有理特異点に一般化した。

命題 3. (A, m) を 2 次元局所環で有理特異点、$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアルとする。このとき、
(1) $\mathrm{core}(\mathfrak{a}) = \mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^2) = \mathfrak{a}\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a})$.
(2) $\mathrm{e}(\mathfrak{a}) = \ell(A/\mathrm{core}(\mathfrak{a})) - 2\ell(A/\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}))$.
(3) $\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathrm{core}(\mathfrak{a})) = (\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}))^2$.
(4) $\mathrm{core}(\mathfrak{a}^n) = \mathfrak{a}^{2n-1}\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a})$.
(5) $\mathrm{core}^n(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}(\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}))^{2^n-1}$. 特に $\mathrm{core}(\mathrm{core}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}(\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}))^3$.

Demailly、Ein と Lazarsfeld は [1] の中で非特異点代数多様体に対して劣加法性が成り立つことを示した。高木と渡辺は [11] の中で 2 次元高々ログ端末特異点は劣加法性が成り立つことを示した。さらに彼らは 2 次元ログ端末特異点を劣加法性を使って特徴づけした。この論文ではω-乗数イデアルの劣加法性について調べ、次の結果を得た。

定理 4. (A, m) を 2 次元正規局所環とする。このとき、$X = \mathrm{Spec}A$ が有理特異点であることと、ω-乗数イデアルの劣加法性が成り立つこと、すなわち任意のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_X$ に対して

$$\mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset \mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{a})\mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{b}).$$

が成り立つことは同値である。

ω-乗数イデアルの劣加法性を使ってイデアルのコアの劣加法性について調べ、次の結果を得た。

系 5. (A, m) を 2 次元正規局所環とする。このとき、$X = \mathrm{Spec}A$ が有理特異点であることと、任意の $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_X$ に対して

$$\mathrm{core}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset \mathrm{core}(\mathfrak{a})\mathrm{core}(\mathfrak{b})$$

が成り立つことは同値である。

さらに高木と渡辺は劣加法性を使って 2 次元正則局所環の特徴付けをしている。この問題をω-乗数イデアルに対して考えみた結果次のことを示した。

定理 6. (A, m) を 2 次元正規局所環とする。このとき、$X = \mathrm{Spec}A$ が正則であることと、任意のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_X$、任意の正の有理数 $c, d > 0$ に対して

$$\mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{a}^c\mathfrak{b}^d) \subset \mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{a}^c)\mathcal{J}^{\omega}(X, \mathfrak{b}^d).$$

が成り立つことは同値である。

乗数イデアルは整閉イデアルである。逆に整閉イデアルは乗数イデアルなのだろうか。一般的には整閉イデアルは乗数イデアルではない ([5],[6])。しかし Favre, Jonsson, Lipman と渡辺は [2]、[8] の中で正則局所環のときのこの疑問に肯定的な答えを与えた。つまり、2 次元の正則局所環の整閉イデアルは乗数イデアルであることを示した。さらに Tucker は [12] の中でこの結果をログ端末

特異点に拡張した。一方でこの論文では彼らの結果を有理特異点に拡張した。つまり次のことを示した。

定理 7. (A, m) を 2 次元局所環であり、A が有理特異点であるとする。このとき全ての整閉イデアルはω-乗数イデアルである。

他の ω-乗数イデアルの応用としてこの論文では Du Bois 特異点の重複度の上限を与えた。Huneke と渡辺は [4] の中で有理特異点の重複度の上限を与えた。つまり彼らは次のことを示した

定理 8. ([4]) X を n 次元代数多様体で高々有理特異点であるとする。このとき閉点 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{e}(\mathfrak{m}_x) \leq \binom{\mathrm{emb}(X, x) - 1}{n - 1}$$

が成り立つ。

Huneke と渡辺は [4] の中で次の問題を聞いている。

問題 9. X を n 次元代数多様体で高々 *Du Bois* 特異点とする。このとき閉点 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{e}(\mathfrak{m}_x) \leq \binom{\mathrm{emb}(X, x)}{n}$$

は成り立つか？

この論文では代数多様体が正規かつ Cohen-Macaulay のとき、この問題に対しての解答を与えた。つまり次のことを示した。

定理 10. X を n 次元正規 *Cohen-Macaulay* 代数多様体で高々 *Du Bois* 特異点とする。このとき閉点 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{e}(\mathfrak{m}_x) \leq \binom{\mathrm{emb}(X, x)}{n}$$

が成り立つ。

参考文献

[1] J.-P. Demailly, L. Ein and R. Lazarsfeld, A subadditivity property of multiplier ideals, Michigan. Math. J. 48 (2000), 137-156.

[2] Charles Favre and Mattias Jonsson, Valuations and multiplier ideals, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), 655-684

[3] C. Huneke and I. Swanson, Cores of ideals in 2-dimensional regular local rings, Michigan Math. J. 42 (1995), no. 1, 193-208.

[4] C. Huneke, and K-i Watanabe, Upper bound of multiplicity of F-pure rings. Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), no. 12, 5021-5026.

[5] R. Lazarsfeld and Kyungyong Lee, Local syzygies of multiplier ideals, Inventiones Math. 167 (2007) 409-418.

[6] R. Lazarsfeld, K. Lee, and K. E. Smith: Syzygies of multiplier ideals on singular varieties, Michigan Math. J. 57 (2008), 511-521

[7] J. Lipman and B. Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda, Michigan Math. J. 28 (1981), 97-116.

[8] Joseph Lipman and Kei-ichi Watanabe, Integrally closed ideals in two-dimensional regular local rings are multiplier ideals, Math. Res. Lett. 10 (2003), no. 4, 423-434.

[9] T. Okuma, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, A characterization of two-dimensional rational singularities via core of ideals, arXiv:1511.01553.

[10] D. Rees and Judith D. Sally, General elements and joint reductions, Michigan Math. J. 35 (1988), no. 2, 241-254.

[11] S. Takagi, K-i. Watanabe, When does the subadditivity theorem for multiplier ideals hold? Trans. Amer. Math. Soc. 356(10):3951—3961(2004).

[12] K. Tucker, Integrally closed ideals on log terminal surfaces are multiplier ideals Math. Res. Lett. 16 (2009), 903-908