論文審査結果の要旨

氏名 柴田康介

問題意識：柴田康介の目指しているものは，双有理幾何学的概念（不変量）を環論的な概念で記述することによって，双有理幾何学と環論の橋渡しをするということである．

主結果１： コアを用いた特異点の特徴づけ

孤立特異点が有理的である（双有理的概念）ということをイデアルのコア（環論的概念）によって表現した次の結果を証明した．

定理 1. $(A, \mathfrak{m})$ を n 次元の *Cohen-Macaulay* 局所環で孤立特異点であるとする．このとき A が有理特異点であることと任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して $\overline{I^n} \subset \mathrm{core}(I)$ が成り立つことは同値である．

これにより Cohen-Macaulay 局所環で孤立特異点であるものが有理特異点であることと Briançon-Skoda 定理が成り立つことは同値であることがわかる．

主結果２： ω-乗数イデアル の導入とその応用

乗数イデアルは双有理幾何学において極めて有用な概念であることはよく知られているが，この論文では乗数イデアルと似た性質をもつ ω-乗数イデアルというものを新たに導入し，それを用いて特異点の特徴づけを行った．

通常の乗数イデアルは，定義する代数多様体が正規であり $\mathbb{Q}$-Gorenstein でなければ定義できないが，この ω-乗数イデアルは任意の正規な代数多様体上に定義され，さらに代数多様体が Gorenstein 的であれば　両者は一致する．

乗数イデアルで最も重要な定理の一つは Skoda の定理である．この論文では 2 次元の局所環で有理特異点を持つものに対して ω-乗数イデアルの Skoda の定理が成り立つことを示した．

命題 2. $(A, \mathfrak{m})$ を 2 次元局所環で有理特異点，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアル，J を $\mathfrak{a}$ の *reduction* とする．このとき，２以上の自然数 n に対して

$$\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^n) = \mathfrak{a}\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^{n-1}) = J\mathcal{J}^{\omega}(A, \mathfrak{a}^{n-1}).$$

が成り立つ．

また以下の命題は Huneke と Swanson が示した 2 次元正則局所環に対してイデアルのコアと乗数イデアルの関係を有理特異点に一般化したものである．

命題 3. $(A,\mathfrak{m})$ を 2 次元局所環で有理特異点，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアルとする．このとき，
(1) $\mathrm{core}(\mathfrak{a})=\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a}^2)=\mathfrak{a}\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a})$.
(2) $\mathrm{e}(\mathfrak{a})=\ell(A/\mathrm{core}(\mathfrak{a}))-2\ell(A/\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a}))$.
(3) $\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathrm{core}(\mathfrak{a}))=(\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a}))^2$.
(4) $\mathrm{core}(\mathfrak{a}^n)=\mathfrak{a}^{2n-1}\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a})$.
(5) $\mathrm{core}^n(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}(\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a}))^{2^n-1}$. 特に $\mathrm{core}(\mathrm{core}(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}(\mathcal{J}^{\omega}(A,\mathfrak{a}))^3$.

高木と渡辺は 2 次元高々ログ端末特異点は劣加法性が成り立つことを示し 2 次元ログ端末特異点を劣加法性を使って特徴づけした．本論文ではこの結果の ω-乗数イデアル版を示した.

定理 4. $(A,\mathfrak{m})$ を 2 次元正規局所環とする．このとき，$X=\mathrm{Spec}A$ が有理特異点であることと，ω-乗数イデアルの劣加法性が成り立つこと，すなわち任意のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\subset\mathcal{O}_X$ に対して

$$\mathcal{J}^{\omega}(X,\mathfrak{a}\mathfrak{b})\subset\mathcal{J}^{\omega}(X,\mathfrak{a})\mathcal{J}^{\omega}(X,\mathfrak{b}).$$

が成り立つことは同値である.

また正則局所環の特徴づけも下記のように得られた.

定理 5. $(A,\mathfrak{m})$ を 2 次元正規局所環とする．このとき，$X=\mathrm{Spec}A$ が正則であることと，任意のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\subset\mathcal{O}_X$，任意の正の有理数 $c,d>0$ に対して

$$\mathcal{J}^{\omega}(X,\mathfrak{a}^c\mathfrak{b}^d)\subset\mathcal{J}^{\omega}(X,\mathfrak{a}^c)\mathcal{J}^{\omega}(X,\mathfrak{b}^d).$$

が成り立つことは同値である.

乗数イデアルは整閉イデアルであるが，一般には逆は通常は成立しない．しかし特に，2 次元の対数的端末特異点については正しいことが知られている．ここではこの問題を ω-乗数イデアルについて考えた.

定理 6. $(A,\mathfrak{m})$ を 2 次元局所環であり，A が有理特異点であるとする．このとき全ての整閉イデアルは ω-乗数イデアルである.

主結果３： Du Bois 特異点の重複度の上限 （Huneke-渡辺の予想の条件付き解決）

Huneke と渡辺は有理特異点の重複度の上限を与える公式を得たがその公式を少しずらした形で Du Bois 特異点の重複度が上から押さえられることを予想した（Huneke-渡辺の予想）

この論文では代数多様体が正規かつ Cohen-Macaulay のとき，この問題に対しての解答を与えた.

定理 7. X を n 次元正規 *Cohen-Macaulay* 代数多様体で高々*Du Bois* 特異点とする．このとき閉点 $x\in X$ に対して

$$\mathrm{e}(\mathfrak{m}_x)\leq\binom{\mathrm{emb}(X,x)}{n}$$

が成り立つ.

上記いずれの結果も極めて興味深く，代数多様体の研究に新しい視点を与えるものである．よって論文提出者 柴田康介 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.
(座長：高木俊輔准教授)