論文の内容の要旨

論文題目　Actions of locally compact abelian groups on factors with the Rohlin property

（ロホリン性をもつ局所コンパクト可換群の因子環への作用）

氏名　嶌田　洸一

この論文では，作用素環への群作用の分類を取り扱います．作用素環とは，Hilbert 空間の上の有界線形作用素たちが生成する「しかるべき位相」で閉じた環であって，しかも共役作用素をとるという操作で閉じているもののことです.「しかるべき位相」として作用素ノルムが定める位相を考える流儀と，作用素の強収束が定める位相を考える流儀の二つがあります. 前者の定義を満たすものを C*-環, 後者の定義を満たすものを von Neumann 環といいます．実は，強収束位相で閉じていれば自動的に作用素ノルムで閉じているとわかるので，論理的には von Neumann 環は C*-環の一種です．しかし von Neumann 環を単に C*-環と思っただけでは，あまり詳細な情報が得られません．従って，両者を調べる手法は（共通部分や，お互いの影響はあるものの）かなり違うものです．この論文では，von Neumann 環を主に調べます．

Von Neumann 環の簡単な具体例としては，行列環や，$L^\infty(X,\mu)$ （Hilbert 空間 $L^2(X,\mu)$ に掛け算で作用する）などがあります．これらはそれほど面白い例ではないかもしれませんが，これらに色々な操作をすることで，様々な例を得ることができます．こうした例や，その部分環，群作用などを分類してみたいというお話を考えてみます．こうした興味はとても自然なことで，そのような研究が古くから行われてきました．しかし，すべての von Neumann 環を分類しようというのは，あまりにも数が多すぎて厳しいので，「従順性」という条件の下でこれらを分類する研究が発展してきました．

このような研究は，理論の創始者である， Murray と von Neumann の時代(1930-40 年代)からされていました. 彼らはまず, von Neumann 環として単純であるようなもの（因子環という）は，I， II_1，II_∞，III 型にざっくり分類できて，しかも I 型のものはすべて（無限次元かもしれない）行列環に同型であるということを証明しました．さらに，Approximately finite dimensionality （略して AFD，従順性の一種）と呼ばれる性質をもつ II_1 型因子環はすべて互いに同型であることを証明しました．その後しばらく停滞していましたが，再び大きな進展がありました． 1970 年代に Connes は AFD 型因子環を完全に分類しようと試みました．この問題自体は 1987 年に Connes と Haagerup によって完全に解決されたのですが，この Connes の試みの中で，群作用の分類の研究が始ま

りました．Connes は，AFD II 型の von Neumann 環上の整数群作用を分類し，これともう一つの決定的な結果を組み合わせて，大半の AFD 型因子環の分類に成功しました．これは大変素晴らしいことで，Connes はこれによってフィールズ賞を受賞しました．

このように，群作用の分類は，もともと因子環自体を分類することが目的で始まりました．ここで，群作用をどのような意味で分類するかを少し説明しておきます．群作用を分類するといったら「共役」による分類が自然なように思えます．しかし，これでは細かすぎてあまりきれいに分類できません．そこで，「コサイクル共役」による分類を考えます．作用素環論以外ではあまり見かけないものかもしれませんが，互いにコサイクル共役な二つの群作用から新しい von Neumann 環を作ると互いに同型になるなど，作用素環論では自然だとみなされている分類です．さて，このコサイクル共役の違いを無視した群作用の分類ですが， Connes の後にも色々な人を惹きつけました．例えば， Jones は有限群の AFD II 型因子環への作用を分類しました．因子環への有限群作用から，自然に部分環が得られますから，この研究での考察が，subfactor の Jones index の理論につながっていきます．さらに，Ocneanu，片山，河東，Sutherland，竹崎などの努力により，離散従順群の （II 型とは限らない）AFD 環への作用の分類が完成しました．

さて，次の目標の一つは，連続群の作用の分類です．中でも，実数群作用は von Neumann 環の構造定理にも自然に現れる重要な対象です．すでに離散群の場合に相当色々なことがわかっているのだから，それを真似すればできるのではないかと思われるかもしれませんが，実はそうはいきません．実際，80 年代の河東による先駆的な結果があって以来，ごく最近に至るまであまり進展はみられませんでした．難しさの原因の一つは，Connes のテクニックの一つにあります． Connes は，整数群作用を分類するために，外部的な作用に対して，非可換 Rohlin 型定理と呼ばれる主張を証明しました．これが離散群の場合，作用を分類する上でカギとなった部分の一つです．当然，実数群の場合でも同様のことが言えないかと期待してしまいます．しかし残念なことに，作用が普通に思いつくような外部性を持っている程度では（例えば，群の 0 秒目以外の各点で作用が外部的など），非可換 Rohlin 型定理が言えません（努力が足りないのではなくて，本当に成立しない）．この難局を打開するために，岸本によって実数群作用の Rohlin 性が導入されました．本当は，岸本は C*-環上の実数群作用に対して Rohlin 性を定義していて，後に川室が von Neumann 環の設定に輸入しました．Rohlin 性は，大体非可換 Rohlin 型定理の結論部分に相当するものです．そして，近年，増田―戸松によって Rohlin 性をもつ実数群の von Neumann 環への作用の分類定理が得られ，群作用の分類は大きく前進しました．彼らの結果は，二つの実数群作用がコサイクル共役になる比較的一般的な条件を与えるもので，過去に知られていた具体例の多くに適用できるものです．このような定理を見たとき，やや脊髄反射的ではありますが，もっと一般の群の作用で同様のことが言えるだろうか．という疑問が発生します．そこで，まず我々は彼らの分類定理を一般の局所コンパクト可換群作用に一般化しました． Rohlin 性の定義は，実数の場合を単に真似すれば

できます.

定理 1. G を局所コンパクト可換群作用とし，α，β を G の因子環 M への作用であって Rohlin 性を持つものとする．もし各 G の点 g において，M の自己同型 $\alpha_g\beta_{-g}$ が内部自己同型たちの列の極限で書けているならば，α と β は互いにコサイクル共役である.

しかし，こういうことはやればできそうな話です．本当にしなくてはならないことは他にあります. Rohlin 性の定義は, 非可換 Rohlin 型定理の結論を仮定する, というものです. これだけだと，群作用の「普通の」不変量からわかる外部性と，Rohlin 性の関係が不明なので，これらの関係をはっきりさせないことには分類は完成しようがありません．しかし悲しいことに，普通の群作用の不変量を使って Rohlin 性がどのように書けるのかといったことは全くわかっていませんでした．そこで我々はこれを調べ，Connes—竹崎 module と呼ばれる群作用の不変量で書ける， Rohlin 性の十分条件を見つけました.

定理 2. Connes—竹崎 module が忠実な AFD 型因子環上の実数群作用は Rohlin 性をもつ.

これは, 大雑把に言って, 群作用が群の各点で「ものすごく外部的」ならば, それは Rohlin 性をもつ，というものです．この定理は，今までに知られていなかった III 型因子環上の Rohlin 性をもつ実数群作用の例をたくさん与えた，という意義もありますが, 群作用のよく知られた不変量と Rohlin 性の関係が一つ分かったという点も重要です．実は，コンパクト群作用の場合には, 泉による Connes—竹崎 module が忠実な作用の分類定理があります．証明の方法なども我々のものとは違うのですが，それ以外にもいろいろ違いがあります．例えば，コンパクト群作用で忠実な Connes—竹崎 module が忠実なものの場合，コサイクル共役から共役が出てしまいます．驚異的なことですが，見ようによっては，群がコンパクトなときは Connes—竹崎 module が忠実な作用の数が少ないとも言えます. これは我々の実数群の場合には成立しないとわかりました．また，泉の路線を一般化した方法で, 山ノ内が局所コンパクト群作用の分類を得ていますが, Connes—竹崎 module に強い制約がかかることがわかっています（が，我々の定理ではそのようなことはない)．これらのことから，少なくとも実数群作用の場合に限れば，我々の分類定理はかなり広範囲をカバーしていると言えます.

最後に, 分類とは少し違った用途で Rohlin 性を応用してみましょう．とある実数群作用の Rohlin 性を利用して，AFD 型因子環の自己準同型のとある性質の特徴づけ定理を与えました.

定理 3. AFD III 型因子環上の有限指数自己準同型 ρ，σ について，次の二つの条件

は同値である．

（１）因子環内のユニタリ作用素の列 $\{u_n\}$ が存在して，$\mathrm{Ad}\, u_n \cdot \rho \to \sigma$ となる．

（２）二つの自己準同型の，（一般化された） Connes—竹崎 module が一致する．

この性質は，近似的内部性と呼ばれる性質ですが，自己同型の場合は河東—Sutherland—竹崎によって証明されていて，片山—Sutherland—竹崎をはじめとする（III型）因子環への群作用の分類定理に用いられてきました．これを自己準同型に拡張することにはちゃんと理由があります．現在，コンパクト群の極小作用の分類が進められています．そのために，その双対作用を分類すべきだと考えられています．これらは，自己同型ではなく，自己準同型たちの集まりです．ですから，上記の定理３．のような自己準同型の解析的な性質の特徴づけが重要です．また定理 3．を証明する上で新しい点として，III型因子環の細かい分類による場合分けが不要である点があります．気付いてしまえば，河東—Sutherland—竹崎の定理の最も簡単な場合の整数群作用を用いた戦略を，実数群作用を用いてやるだけのことですが，定理が成立する理由がよくわかる証明だと思います．