

論文の内容の要旨

論文題目 Constructions of amenable dynamical systems and their applications to nuclearity of C^* -algebras

(従順位相力学系の構成と C^* 環の核型性への応用)

氏 名 鈴木 悠平

本論文では従順な位相力学系の興味深い性質をもつ例の構成とその研究を行った。系として、 C^* 環の核型性に関するいくつかの新しい結果を得ることができた。本要旨では、これらの成果およびその背景にあるものの紹介を行う。

従順性はもともと群に対して von Neumann が導入した概念である。これにより、Banach—Tarski の病理を群の性質として理解することが可能となった。従順群はその後現在に至るまで研究されており、エルゴード論、トポロジー、関数解析、作用素環論など、分野の垣根を超えたさまざまな状況で重要な応用がある。従順群の応用が多くの分野で現れるため、その現象の本質を抽出した“従順性”がさまざまな対象について導入されてきた。この論文の主題である位相力学系の従順性は、そのようなものの一例である。(本要旨では、力学系とは、離散群の空間への作用を意味する.)

作用素環論にも従順性の概念は存在し、 C^* 環の場合は核型性、von Neumann 環の場合には単射性と呼ばれる条件と同値である。これらの性質は 70 年代から 80 年代にかけて深い研究があり、いくつかの重要な性質と同値であることが知られている。これらの性質は分類問題などの深い構造解析には不可欠である。従順でない作用素環の解析においても、従順環への埋め込みや、従順な部分環の構造を理解することが重要な手がかりを与えてきた。

本論文の結果は大きく四つに分けられる。本論文ではそれぞれを第二章から第五章に振り分けた。次はこれらの結果についてそれぞれ説明を行う。

位相力学系からは、その情報の表現を用いて(被約)接合積とよばれる C^* 環が構成される。第二章では、接合積の同型類が完全に決定可能な自由群の従順コントロール系(コントロール集合上の位相力学系)の構成を行った。我々は自由群の理想境界と、副有限作用の対角作用を研究し、それらの K 群をいくつかの場合に完全に決定した。これには境界作用の組み合わせの構造を理解する必要があり、それなりに大変な計算が必要である。これらの接合積が分類可能なものである

ことは既存の技術から簡単にわかる。これより特に、接合積が分類可能かつ互いに非同型な自由群の従順位相力学系の非可算な族を初めて与えることができた。接合積が理想境界と異なるような例は Elliott—Sierakowki が 2011 年に一つ構成していたが、我々の結果は彼らの研究を大きく推し進めるものである。

第三章では、斜積拡大とよばれる構成法を研究した。Glasner—Weiss の定理は、極小自己同相写像の極小な斜積拡大の存在を、ゆるい条件の下で保証する定理である。位相力学系の従順性を Følner 集合の代替として用いることで、この定理を従順位相力学系の場合に拡張した。さらに得られた極小位相力学系の接合積が、 K 群で分類可能なクラスに含まれているかについても研究した。その成果として、任意の完全群が、広いクラスの空間(例えば閉多様体とコントロール集合の直積など)の上に、従順極小自由かつ接合積が分類可能である力学系を持つことがわかった。この結果はコントロール集合である場合に得られていた Rørdam—Sierakowski の定理の拡張を与える。(我々の位相力学系は、彼らの構成したコントロール系を基に構成される。) 彼らのもともとの結果は、離散群の構造が接合積の分類可能性の障害とならないことを意味している。我々の成果はこれをさらに推し進め、離散群および空間の構造が接合積の分類可能性の障害とならないことを示している。

第四章では、従順位相力学系の応用として、核型 C^* 環のなすクラスが単調族でないことを示した。より強く、核型 C^* 環の減少列の交叉が、核型性はおろか、それより弱い作用素近似性質 (OAP) さえ失いうることを具体例の構成により証明した。従順 von Neumann 環のなすクラスが単調族であることはよく知られており、 C^* 環特有の繊細な現象である。

第五章では、第四章の結果に触発されて、核型でない C^* 環がどの程度まで“きつい”核型包囲環をもちうるか研究した。私はこの問題にコントロール系という対象から研究に取り組み、無限自由積群の群 C^* 環について最良の解を得た。つまり、近似性質をもつ無限自由積群 (たとえば無限階の自由群) の被約群 C^* 環に対して、包含の間に非自明な部分 C^* 環がまったく存在しない核型包囲環を構成することができた。近年の C^* 環の分類理論のめざましい発展により、核型 C^* 環に関するまったく非自明な、信じがたい埋め込みや同型の存在が数多く知られている。我々の構成した核型包囲環も分類理論の守備範囲にある C^* 環である。そのため、著しく性質の異なる部分環でありながら、中継する部分環をまったくもたないものが存在したことは驚きである。

このような包含を構成するため、コントロール系全体がなす空間を調べた。Baire の範疇定理により、典型的な作用が、従順性や、非常に強力なある種の推移性をもつことを示した。この推移性と Powers による群 C^* 環の単純性を調べるための技術を用いて接合積を解析した。

我々の構成したものは極小な核型包囲環の例としても最初である。von Neumann 環の場合には、「極小な従順包囲環を探す」という問題は、二重交換子定理より、多くの研究者の関心を集め研究されている「極大単射部分環を探す」という問題と本質的には同値である。我々は彼らの手法や技術とは異なるアプローチをとった。von Neumann 環の場合にも中間部分環を全く許さないものが存在するのかは、まだ知られていない。