論文の内容の要旨

論文題目　Primitive ideals of Bost-Connes systems
（ ボスト・コンヌ系の原始イデアルについて ）

氏　　名　武石　拓也

Ha-Paugam, Laca-Larsen-Neshveyev, Yalkinoglu らの研究により，各代数体 K に対しその類体論と関係のある C*-力学系が構成された（C*-力学系とは C*-環と実数体の作用の対のことであり，この実数体の作用は時間発展と呼ばれる）．これはボスト・コンヌ系と呼ばれており，最初にこのような C*-力学系を有理数体に対して定義した Bost と Connes の名前に由来する．Bost-Connes が定義した C*-力学系を一般の代数体に対して拡張するのは永らく未解決問題であったが，近年上記のように解決を見た．ボスト・コンヌ系の研究に於いて，これまでの主な研究テーマはこの一般化問題であったが，今はこの C*-力学系の数論的あるいは作用素環論的な特性を詳しく調べる段階に入っている．特に作用素環論的な見地から，このような C*-力学系の分類問題がつねに問題に上がる．つまり，体 K, L に対応するボスト・コンヌ系が同型だったとき，元々の体 K と L は同型であるか，という問題である．この問題に関して，これまで知られていたもっともよい不変量は，ボスト・コンヌ系の分配関数として現れる体のゼータ関数である．これは Laca-Larsen-Neshveyev による KMS 状態の分類定理の帰結として得られる．ゼータ関数がどの程度体を分類するかについては Perlis らによる研究があり，とくに 6 次以下の体に対しては完全不変量であることが知られている．このため KMS 状態分類定理は，それ自体はボスト・コンヌ系の分類問題とは独立な研究だったにせよ，実際には非常に強力なボスト・コンヌ系の分類定理として解釈できる．

この論文の目的はいくつかの数論的な不変量がボスト・コンヌ系の不変量でもあることを示すことにある．正確には，実数体の作用を無視したボスト・コンヌ C*-環の不変量について調べる．主要な道具となるのは，特に非単純 C*-環の研究に於いて基礎的な不変量である原始イデアル空間(primitive ideal space)である．原始イデアルとは既約表現の核のことであり，原始イデアル全体はイデアルの包含関係から決まる位相によって位相空間として扱うことができ，これが原始イデアル空間と呼ばれる．ボスト・コンヌ C*-環は可換群による接合積と森田同値であることが分かっているが，このような場合は Williams による原始イデアル空間の構造定理があり，各軌道の閉包や固定部分群などを決定することによってこの構造定理が適用できる．本論文ではセクション 4 においてそれを実際に行っており，その後の章における原始イデアルに関する議論の基礎になる原始イデアル空間の抽象的な

描像をここで準備している．過去には Laca- Raeburn による有理数体のボスト・コンヌ系に対しての原始イデアル空間の結果があったが，セクション 4 は彼らの結果の一般化に相当する．

本論文の主結果の一つは，代数体 K,L に対するボスト・コンヌ C*-環が同型だったとき，体の狭義類数が等しいというものである．つまり狭義類数がボスト・コンヌ系の不変量であることになる．これは実際に新しい不変量であることが確かめられる．つまり，体のゼータ関数が等しくても狭義類数が異なるような代数体 K,L の例が存在する．セクション 5 で示すように，狭義類数は有限次元既約表現の次元として現れる．原始イデアル空間の中で見ると，極大な原始イデアルによる商は行列環となり，そのサイズは極大原始イデアルのとり方によらず狭義類数と等しくなる．

ここで，我々が無視した時間発展の寄与を極大原始イデアルのなす部分空間に制限して見ることで，さらに新たな不変量として無限次元トーラスの上の力学系を取り出すことができる．この不変量が何を意味するのかについてはセクション 5.4 で考察されているが，基本的には分配関数としてゼータ関数を取り出す操作の亜種である．KMS 状態分類定理はボスト・コンヌ系の時間発展の情報をほぼ全て拾っており，上記のような操作で得られる不変量は，ゼータ関数によく似た情報に土台となった C*-環論的な構造を付加したようなものとなる．

本論文のもう一つの主結果は，代数体 K,L に対するボスト・コンヌ C*-環が同型だったとき，K と L のゼータ関数が等しいというものである．つまり，これまでゼータ関数はボスト・コンヌ系の C*-力学系の不変量としてこれまで知られていたが，実際には時間発展を無視したボスト・コンヌ C*-環それ自体の不変量であることがわかった，ということを意味する．本論文ではセクション 6 に於いてこの定理の証明を与える．セクション 5 では極大な原始イデアルについて調べたが，セクション 6 では二番目に極大な原始イデアルたちを見る．二番目に極大な原始イデアルについて，セクション 4 で与えた描像から次のようなことが読み取れる．二番目に極大な原始イデアル全体を原始イデアル空間全体の部分位相空間として見ると，その各連結成分は（次元が一般には不明な）トーラスと同相であり，それぞれの連結成分は代数体の有限素点でラベル付けされている．すると各連結成分は対応する有限素点（つまり整数環の素イデアル）の情報を保持していることが期待される．定理 6.11 では実際にそのことを確かめている．やや複雑で人工的な操作をするが，C*-環論的に意味づけられる商の特定の部分環を構成し，各素点に対しその下にある有理数体の素点が何であるかを，その環の K-理論的な不変量として取り出すことができる．つまり，我々は各有理素数に対し，その上にある体 K の素点の数を知ることができる．これは Perlis-Stuart の結果によって，体のゼータ関数を復元するのに十分な情報であることが分かっている．

以上の結果を整理すると，体の情報がボスト・コンヌ C*-環のなかでどのように配置されているかについて，非常に明確な描像が見て取れる．体の狭義類数の情報は極大原始イデアル全体の空間に格納されており，商の C*-環の次元としてそれを取り出すことができる．

体の各素イデアルの情報は二番目に極大な原始イデアルの空間の各連結成分に格納されており，それぞれ元の素イデアルの情報を K-理論によって取り出すことができる．全体として二番目に極大な原始イデアルの空間はゼータ関数の情報を保持している．

セクション 6 の元になったアイディアは，X. Li による半群 C*-環の分類結果である．代数体から C*-環を構成するより直接的な方法として，整数環の ax+b 型半群を考えその半群 C*-環を取るという手法があり，そのような C*-環が適当な単数に関する仮定のもとでゼータ関数の情報を保持している，というのが Li の結果である．彼の手法は極小な原始イデアルを見るというもので，各有限素点でラベル付けされた極小原始イデアルの商の K-群のなかで，特定の元の位数として各有限素点の情報が取り出せる，という流れになっている．半群 C*-環の K-群は Cuntz-Echterhoff-Li の結果によって比較的整理されており，Li の手法はそれに基づいている．対照的にボスト・コンヌ C*-環の K-群の構造はあまりよく分かっておらず，それどころか複雑怪奇であることが容易に想像できるため，全く同じようにというわけにはいかなかった．しかし，原始イデアル空間の特定の部分空間の中でイデアルと有限素点の対応を見るという枠組み自体は有効なアプローチであり，定式化は X. Li のものと大幅に異なるにせよ，同種の定理（定理 6.11）がこの方針で得られた．半群 C*-環とボスト・コンヌ C*-環は構成方法が全く異なるが，それらの背景に共通の原理が見えるところが，面白いところである．