論文審査の結果の要旨

武石拓也

本論文において論文提出者は，代数体の Bost-Connes 系と呼ばれる C^*-力学系がどの程度元の代数体の情報を覚えているかという問題について興味深い結果を得た．

作用素環論では，共役演算と適当な位相で閉じた，Hilbert 空間上の有界線形作用素のなす環を考える．この環は一般には非可換であるが，特に可換な場合にはコンパクト・ハウスドルフ空間上の複素数値連続関数環や，測度空間上の L^∞-関数環が現れる．そこで一般の非可換な作用素環の場合も，何らかの意味での「非可換な空間」上の関数環にあたるものと考えよう，というアイディアが古くからあり，非可換積分論，非可換位相幾何学などと言われる．Connes の非可換幾何学は，これをさらに推し進めて多様体上の微分幾何学を「非可換化」しようとするものである．この方法は，通常の幾何学のみならず，理論物理学まで含めたきわめて広い範囲の応用があるが，その中でも非可換幾何学の整数論への応用は Connes の重要な研究テーマの一つである．

Connes は Bost と共に，有理数体から，ある C^*-環とその上の実数群作用を構成した．この両者を合わせて Bost-Connes 系と呼ぶ．これは Riemann ζ-関数についての Riemann 予想を研究するために導入されたもので，Riemann ζ-関数はこの Bost-Connes 系から簡単に取り出せる情報である．

その後，一般の代数体からも Bost-Connes 系の一般化を構成すること，それが期待されるよい性質を持つことを示すことが問題となり，Ha-Paugam, Laca-Larsen-Neshveyev, Yalkinoglu らによって解決された．期待されるよい性質を持っている，ということを実際に証明することがかなり困難であったが，その部分は Yalkinoglu の有名な論文で証明されている．この方法によって一般の代数体から構成された C^*-環と，その上の実数群作用も Bost-Connes 系と呼ばれる．

この Bost-Connes 系が元の代数体の情報をどのくらい覚えているか，という問題が近年注目を集めている．これまでに知られていたもっともよい結果は Laca-Larsen-Neshveyev によるもので，Bost-Connes 系から代数体の Dedekind ζ-関数が復元できるというものであった．論文提出者はこの問題について研究し，元の代数体の狭義類数も Bost-Connes 系から復元できることを証明した．Dedekind ζ-関数と狭義類数は代数体の独立な不変量なので，これは確かに新しい結果になっている．この証明には Bost-Connes 系の表現論を用い，有限次元表現の次元を見ることによって狭義類数を復元するものである．このためには C^*-環の原始イデアル空間を詳しく調べることが重要になる．

次に論文提出者は Bost-Connes 系のうち，実数群作用の情報を使わなくても C^*-環を調べるだけで元の代数体の Dedekind ζ-関数が決まることを証明した．これまでの研究では実数群作用の方に重要な情報が含まれていると考えられており，そちらの方面からの研究が主流であったため，これはかなり意外な結果である．この証明では，C^*-環の第 2 極大原始イデアルというものを考え，元の代数体の整数環の原始イデアルと対応させる．その後 K 理論的な論法によって主結果が証明される．

この結果は，これまでの研究の流れとは違って，Bost-Connes 系のうちの実数群作用は C^*-環から一意的に定まるのかもしれないという期待を抱かせるものであり，大変独創的である．さらに，Bost-Connes 系の C^*-環は，代数体の Dedekind ζ-関数と狭義類数から一意的に定まるかもしれないという問題も考えられ，もしこの通りであれば，論文提出者の見出した不変量がすべての情報を含んでいることになる．この問題はこれからの大変興味深い研究テーマである．

よって，論文提出者武石拓也は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．