論文内容の要旨

論文題目　Derivation of Stefan problem and large deviation principles for lattice-gas

(格子気体に対するステファン問題の導出と大偏差原理)

氏 名　角田 謙吉

数理物理の基本的な問題の一つとして, 特に統計物理学に関連する問題として, 偏微分方程式で記述されるような巨視的な系を微視的な系と関連づける事が考えられている. 微視的な系は莫大な数の自由度や, 自己相互作用する構造を持つ事が自然に想定される. 確率論においてそのような微視的な系は大規模相互作用系と呼ばれる. 流体力学極限と呼ばれる, 大規模相互作用系に対する時空間に関する極限操作は, 先の問題に対して一つの数学的解答を与える. 例えば流体力学極限の手法によりある種の大規模相互作用系から, ステファン自由境界問題で記述される偏微分方程式を, 数学的に導出することが可能である. また流体力学極限の理論は, 熱力学における一つの主要な対象である非平衡定常状態の研究においても, 重要な役割を果たしている. この理由から近年では流体力学極限に対する大偏差原理は数学者のみでなく, 物理学者にも盛んに研究されている. 特に Bertini らによって提唱されている "Macroscopic fluctiuation theory" は, 流体力学極限に対する大偏差原理の理論を用いる事により, 大規模相互作用系から考えた非平衡定常状態に対して統一した研究法を与えている. 流体力学極限の理論はこの物理的理論を, 数学的な手法で定式化する事にも使われている.

本博士論文では, 格子気体と呼ばれる大規模相互作用系について研究した. 本博士論文で考える格子気体は次のような確率過程として構成される. 各自然数 N に対して, $\mathbb{T}_N$ を一次元離散トーラス $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ とする. 確率過程の状態空間を $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ とし, その元を η で表す. 頂点 $x \in \mathbb{T}_N$ と配置 $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ に対して, $\eta(x) = 1$ は頂点 x に粒子がある事を意味し, $\eta(x) = 0$ は頂点 x に粒子が存在しない事を意味する. また $\eta(x)$ をスピンと呼ぶ. いま $\mathbb{T}_N$ 上で粒子の出生と死滅を伴う速度変化のある排他過程を考える. 正確にはその無限小生成作用素 L_N が次により与えられる Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ を考える:

$$L_N f \;=\; (N^2/2) L_K f + L_G f \;,$$

ただし, L_K は速度変化のある排他過程に対応する無限小生成作用素

$$(L_K f)(\eta) \;=\; \sum_{x \in \mathbb{T}_N} c_{0,1}(\tau_x \eta)[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] \;,$$

であり, L_G は粒子の出生と死滅に対応する無限小生成作用素である.

$$(L_G f)(\eta) \;=\; \sum_{x \in \mathbb{T}_N} c_0(\tau_x \eta)[f(\eta^{x}) - f(\eta)] \;.$$

ここで $\eta^{x,x+1}$, η^x, $\tau_x\eta$ はそれぞれ配置 η より, x と $x+1$ におけるスピンを交換, x におけるスピンを反転, x だけ平行移動, して得られる配置である. また $c_{0,1}$ と c_0 は $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の局所関数とする. 第 2 章では $c_0 \equiv 0$ である場合を考え, 第 3 章と第 4 章では $c_{0,1} \equiv 1$ である場合を考える. 後者の場合粒子の出生と死滅を伴うため, その模型を反応拡散模型と呼ぶ.

本博士論文は次のように構成されている: 第 1 章は本博士論文全体を総括する導入となっている. 第 2 章では速度変化のある排他過程を考え, 一つの着目粒子に対するスケール極限を証明する. またこの結果を用いて, Bertsch らにより研究されているステファン問題を, 特別な場合に, この粒子系から導出している. 第 3 章では反応拡散模型を考え, 流体静力学と流体力学極限からのずれに対応する動的な大偏差原理を証明

する. 第 4 章では再び反応拡散模型を考え, 流体静力学のずれに対応する静的な大偏差原理を証明する.

速度変化のある排他過程からのステファン問題の導出

第 2 章では速度変化のある排他過程を考え, 一つの着目粒子に対してスケール極限を証明し, それを用いて Bertsch らにより考えられている次のステファン問題を特別な場合に導出する:

$$\begin{cases} w_t = (w(\chi(w))_x)_x + w(1-w) & \text{if } -L < x < \zeta(t), t > 0, \\ w_t = d(w(\chi(w))_x)_x + \gamma w(1-w/k) & \text{if } \zeta(t) < x < L, t > 0, \\ \zeta'(t) = -(\chi(w))_x(\zeta(t)^-, t) = -d(\chi(w))_x(\zeta(t)^+, t) & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

ただし境界条件は 0-Neumann 境界条件を考える.

始めに速度変化のある排他過程に対する, Funaki らによる流体力学極限についての結果を紹介する. この系の巨視的な粒子密度の経験分布 $\pi_t^N(du)$ は, 拡散型の時空スケール変換を施して,

$$\pi_t^N(du) \ = \ \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta_t^N(x) \delta_{x/N}(du) \ ,$$

により与えられる. 時間に関するスケール因子 N^2 は無限小生成作用素の中に既に組み込まれていることに注意する. Funaki らは, 飛躍率 $c_{0,1}$ と初期条件に関する適当な仮定の下で, 経験分布過程 $\pi_t^N(du)$ が, 次の非線形偏微分方程式

$$\partial_t \rho(t,u) \ = \ \partial_u (D(\rho(t,u)) \partial_u \rho(t,u)) \ ,$$

の一意的な弱解 $\rho(t,u)$ を密度に持つ測度に確率収束する事を示した. ここで D は拡散係数と呼ばれる $c_{0,1}$ から決まる $[0,1]$ 上のある関数である.

ステファン問題の見地からすると, $\pi_t^N(du)$ はステファン問題の未知関数 w に対応する. よって自由境界点を記述する未知関数 ζ を微視的な系より導出する事が残っている. この未知関数 ζ を導出するために, 速度変化のある排他過程に対して一つの粒子について着目する. 時刻 $t \geq 0$ における, 一つの着目粒子の微視的な位置を X_t^N とすると, 巨視的な着目粒子の位置 x_t^N は, 再び拡散型のスケール変換を施して, $x_t^N = X_t^N/N$ となる. このとき, 初期値に関する適当な設定の下で, 各時刻 $t \geq 0$ に対し x_t^N が常微分方程式

$$\frac{d}{dt} u_t \ = \ -\frac{(D(\rho)\partial_u \rho)(t, u_t)}{\rho(t, u_t)} \ ,$$

の解に確率収束する事を示した.

またこれらの結果を合わせて, Bertsch らにより考えられているステファン問題を 1 次元トーラス上で, さらに $d = 1$ であり反応項が無い場合に導出した. $d = 1$ という条件は Bertsch らによる先行研究においても, 仮定されているという点に注意したい.

反応拡散模型に対する流体静力学と動的な大偏差原理

第 3 章では反応拡散模型に対して, 流体静力学と動的な大偏差原理を証明する. つまりこの章では $c_{0,1} \equiv 1$ という場合を考え, Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ の無限小生成作用素は次で与えられる:

$$(L_N f)(\eta) \ = \ (N^2/2) \sum_{x \in \mathbb{T}_N} [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] + \sum_{x \in \mathbb{T}_N} c_0(\tau_x \eta)[f(\eta^x) - f(\eta)] \ .$$

本章では飛躍率 c_0 は一様に正であると仮定する. また本章の内容は Claudio Landim 氏との共同研究である.

飛躍率 c_0 に対する仮定の下で, Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ は既約になるため, Markov 過程に対する定常測度が一意に存在するので, それを μ_N とかく. ここで配置 η に対

して粒子数密度の経験分布を与える関数を π とする:

$$\pi(\eta) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{T}_N}\eta(x)\delta_{x/N}(du)\;,$$

このとき流体静力学と呼ばれる次のことを示した. 不変測度 μ_N の下で経験分布 π の分布は, $N\to\infty$ の極限において次の半線形楕円型方程式

$$(1/2)\Delta\rho + F(\rho) \;=\; 0\;,$$

の解全体の集合に集中する. ただし F は飛躍率 c_0 によって決まる $[0,1]$ 上のある関数である.

次に動的な大偏差原理について述べる. 初めに $\mathbb{T}$ を 1 次元トーラス $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=[0,1)$ とする. 第 2 章での設定と同じように, Markov 過程 $\{\eta_t^N : t\geq 0\}$ に対して, 粒子数の経験分布を $\pi_t^N(du)$ とする. また初期分布は決定的な配置 η^N より出発するものとし, ある関数 $\gamma:\mathbb{T}\to[0,1]$ に対して, $\pi(\eta^N)$ が $\gamma(u)du$ に, 測度の弱収束の意味で, 収束すると仮定する. ここで各 $T>0$ に対して, 経験分布過程 $\pi_\cdot^N$ は, 道の空間 $D([0,T],\mathcal{M}_+)$-値の確率変数と見なせるので, その分布を Q^N とする. ただし, $\mathcal{M}_+$ は $\mathbb{T}$ 上の全測度が 1 以下の測度全体の集合であり, $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ は Skorokhod 空間である.

飛躍率 c_0 に対して次の技術的な仮定をおく. ν_ρ を密度が ρ である直積ベルヌーイ測度とする. $[0,1]$ 上の関数を $B(\rho)=E_\rho[c_0(\eta)(1-\eta(0))]$ と $D(\rho)=E_\rho[c_0(\eta)\eta(0)]$ により定義したとき, B と D は $[0,1]$ 上凹である. ただし E_ρ は ν_ρ による期待値とする.

このとき $\{Q^N : N\geq 1\}$ が大偏差原理を満たすことを証明した. つまり, 任意の閉集合 $\mathcal{C}\subset D([0,T],\mathcal{M}_+)$ に対して

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{N}\log Q^N(\mathcal{C}) \;\leq\; -\inf_{\pi\in\mathcal{C}} I_T(\pi|\gamma)\;,$$

が成立し, 任意の開集合 $\mathcal{O}\subset D([0,T],\mathcal{M}_+)$ に対して

$$\underline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{N}\log Q^N(\mathcal{O}) \;\geq\; -\inf_{\pi\in\mathcal{O}} I_T(\pi|\gamma)\;,$$

が成立する. ここで $I_T(\cdot|\gamma)$ は飛躍率 c_0 から決まる $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ 上のある関数であり, レート関数と呼ばれる. さらにレート関数 $I_T(\cdot|\gamma)$ が下半連続であり, そのレベルセットがコンパクトである事を示した.

証明はあるエネルギー評価を証明する事と, 大偏差原理のレート関数についての芯集合を構成する事に重点が当てられている. 粒子が出生と死滅を伴うことに起因して, 従来の H^{-1}-ノルムを用いた解析はこの模型では上手く適用できない. この手法の代替物として, 様々な軟化子を用いて近似を行う事が証明の主要な着想である.

反応拡散模型に静的な大偏差原理

第 4 章では第 3 章で考えた反応拡散模型を再び考える. 本章では反応拡散模型に対して静的な大偏差原理について証明する. 本章の内容は Jonathan farfan 氏と Claudio Landim 氏との共同研究である.

本章においても上述の, 反応拡散模型に対する流体静力学と動的な大偏差原理において紹介された記法を用い, 飛躍率 c_0 について同じ仮定をおく. また定常分布の下での関数 π により誘導される分布を $\mathcal{P}_N$ とする.

このとき $\{\mathcal{P}_N : N\geq 1\}$ が大偏差原理を満たすことを示した. つまり, 任意の閉集合 $C\subset\mathcal{M}_+$ に対して

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{N}\log\mathcal{P}_N(C) \;\leq\; -\inf_{\vartheta\in C} W(\vartheta)\;,$$

が成立し, 任意の開集合 $O\subset\mathcal{M}_+$ に対して

$$\underline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{N}\log\mathcal{P}_N(O) \;\geq\; -\inf_{\vartheta\in O} W(\vartheta)\;,$$

が成立する. ここで W は飛躍率 c_0 から決まる $\mathcal{M}_+$ 上のある関数である.

静的な大偏差原理は第 3 章で示された動的な大偏差原理についての結果を用いて, Friedlin と Wentzell による理論をこの模型における設定で再構成することにより証明される. 特に動的な大偏差原理のレート関数の, 下半連続でありレベルセットがコンパクトであるという性質が証明の中で基本的な役割を果たす.