論文の内容の要旨

論文題目

The determinant and the discriminant of a complete intersection of even dimension

(偶数次元完全交叉の行列式と判別式)

氏名　　寺門康裕

k を体とし，$\bar{k}$ をその代数閉体，k^s を $\bar{k}$ に含まれる k の分離閉包とする．$\Gamma_k = \mathrm{Gal}(k^s/k) = \mathrm{Aut}_k(\bar{k})$ とおく．

X を次元が偶数 m の k 上 proper かつ非特異な代数多様体とする．ℓ を k で可逆な素数とするとき，ℓ-進コホモロジー $V = H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(\frac{m}{2}))$ は絶対ガロア群 Γ_k の直交表現を定める．このときその行列式指標

$$\det V : \Gamma_k \to \{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}_\ell^\times$$

は ℓ のとりかたによらない．

以下この要旨においては，k の標数は 2 と異なると仮定する．X を n 次元射影空間内の r 個の超曲面の交叉とし，$f_1, \ldots, f_r$ を X を定義する斉次多項式とする．本論文で，**完全交叉の判別式**を，$f_1, \ldots, f_r$ の係数を変数とする多項式として，次の 2 段階で定義する．まず判別式 $\mathrm{disc}(f_1, \ldots, f_r)$ を,「X が非特異完全交叉であるとき，またそのときにかぎり，$\mathrm{disc}(f_1, \ldots, f_r) \neq 0$ が成り立つ」という条件により，符号を除き定義する．次にその符号を，判別式が mod 4 で多項式の平方になる，という性質により決定する．このようにして符号を込めて定義された判別式を，$\mathrm{disc}_\sigma(f_1, \ldots, f_r)$ と書く．

X が非特異かつ次元 $m = n - r$, すなわち完全交叉であると仮定する．このとき，次が成り立つ．

Theorem 0.1. 2 次指標 $\det V$ は判別式 $\mathrm{disc}_\sigma(f_1, \ldots, f_r)$ の平方根で与えられる．

言い換えれば，準同型 $\det V : \Gamma_k \to \{\pm 1\}$ の核は，体拡大

$$k(\sqrt{\mathrm{disc}_\sigma(f_1, \ldots, f_r)})/k$$

に対応する Γ_k の部分群である．

斎藤 [1] により，射影空間の偶数次元超曲面の場合には，上記の行列式指標が超曲面の定義多項式の判別式の平方根により計算できることが示されていた．本結果はその拡張である．

以下証明の概略を述べる．まず射影空間内のいくつかの超曲面の交叉の普遍族を構成する．そこでパラメーター空間内の部分集合で，ファイバーが特異になるような点で構成されるものを考える．そしてその部分集合が，ある非特異射影代数多様体の射影双対の下部集合と一致することをみる．その非特異代数多様体とは，射影空間上のある射影空間束として構成する．この構成の性質から，射影双対がパラメーター空間の既約な因子であることを示す．そこで，完全交叉の判別式を，その因子の定義多項式として，符号を除き定義する．

そして，斎藤 [1] の方法を用い，中間次元 ℓ-進コホモロジーのガロア表現の行列式によって定義される Γ_k の２次指標をもとめる．まず普遍族の議論により，定理が判別式の符号を除き成立することが示される．最後に，その符号が判別式の mod 4 での性質により決定される．

超曲面でない完全交叉の最初の例は、２つの２次超曲面の完全交叉である。この場合に、判別式の明示的な表示を与えた．いま、f_1, f_2 を、２つの $n+1$ 変数の２次斉次式とする．このとき，f_1, f_2 の係数を変数とする多項式としての次の等号が成り立つ．

Theorem 0.2. *1.* n が偶数のとき，等号

$$\mathrm{disc}_\sigma(f_1, f_2) = \mathrm{disc}_\sigma(\mathrm{disc}_\sigma(t_1 f_1 + t_2 f_2))$$

が成り立つ．

2. n が奇数のとき，等号

$$\mathrm{disc}(f_1, f_2) = 2^{-2(n+1)}\,\mathrm{disc}(\mathrm{disc}(t_1 f_1 + t_2 f_2))$$

が符号を除き成り立つ．

ここで，右辺の $t_1 f_1 + t_2 f_2$ をまず $n+1$ 変数の２次斉次式とみなし，その判別式 $\mathrm{disc}(t_1 f_1 + t_2 f_2)$ をとる．さらにこの式を t_1, t_2 に関する２変数斉次式とみなし，その判別式 $\mathrm{disc}(\mathrm{disc}(t_1 f_2 + t_2 f_2))$ をとると，これは f_1, f_2 の係数を変数とする多項式となり，左辺と比較できる．disc_σ に関しても同様である．

２次斉次式の判別式は対応する対称行列の行列式で明示的に表せることが知られている．また，２変数斉次式の判別式は，シルベスターの行列式を用いて明示的に表せることが知られている．よって上記の定理により，２つの２次超曲面の完全交叉の判別式も明示的に表せたことになる．

この定理については斎藤毅氏に，J. P. Serre 氏に標数２を除く部分について等号が成り立つことを示唆されたと，教えていただいた．よって，特に定理 0.2.2 の２の冪乗の計算が，新結果である．

References

[1] T. Saito, *The discriminant and the determinant of a hypersurface of even dimension*, Mathematical Research Letters. 19 (2012), no. 04, 855-871.