論文の内容の要旨

論文題目　Some topics on analysis of holomorphic discrete series representations
(正則離散系列表現の解析に関するいくつかの話題)

氏名　中濱 良祐

この博士論文は，正則離散系列表現の解析に関して現れる特殊関数，再生核，作用素などの性質について研究したものである．正則離散系列表現は，1956 年に Harish-Chandra によって発見された表現であり，実簡約リー群の無限次元ユニタリ表現の中で最も深く研究しやすい表現のクラスの 1 つである．例えば，このクラスの表現は最高ウェイトベクトルを持ち，ある意味で有限次元表現と平行に扱うことができる．さらに，これらの表現はいくつもの具体的な実現を持ち，その内積も具体的な収束する積分で与えられるので，再生核などの量を具体的に計算することができる．

さて，ここで正則離散系列表現の種々の実現方法について復習する．G をエルミート型の実簡約リー群とする．つまり，K を G の極大コンパクト部分群として，リーマン対称空間 G/K が自然な複素構造を持つようなものとする．このとき，G/K はある複素ベクトル空間 $\mathfrak{p}^+ = V^{\mathbb{C}}$ ($V^{\mathbb{C}}$ は第 1 章の記号，$\mathfrak{p}^+$ は第 2, 3 章の記号) の中のある有界領域 D に微分同相になる．これは有界対称領域と呼ばれる．次に，(τ, W) を $K^{\mathbb{C}}$ の有限次元表現，$\chi^{-\lambda}$ を K の普遍被覆群 $\tilde{K}^{\mathbb{C}}$ の 1 次元表現として，G/K 上の $W \otimes \chi^{-\lambda}$ をファイバーとする等質ベクトル束 $\tilde{G} \times_{\tilde{K}} (W \otimes \chi^{-\lambda}) \to G/K$ を考える．このとき，普遍被覆群 $\tilde{G}$ がこのベクトル束の正則切断の空間 $\Gamma_{\mathcal{O}}(G/K, \tilde{G} \times_{\tilde{K}} (W \otimes \chi^{-\lambda}))$ に作用する．ここで，複素領域 $D \simeq G/K$ は可縮なため，このベクトル束は直積束 $D \times W \to D$ と同型になり，正則切断の空間も D 上のベクトル値正則関数の空間 $\mathcal{O}(D, W)$ に同型になる．もしこの作用が D 上の収束する積分で与えられる内積を保つとき，対応するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda(D, W) \subset \mathcal{O}(D, W)$ は正則離散系列表現の第一の実現を与える．さらに，G がチューブ型のとき，つまり，対称空間 G/K が対称錐 Ω に関する管状領域 $T_\Omega = V + \sqrt{-1}\Omega$ にも微分同相となるとき，正則離散系列表現は T_Ω 上の正則関数の空間内のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda(T_\Omega, W) \subset \mathcal{O}(T_\Omega, W)$ にも実現される (第二の実現)．さらに，この空間はラプラス変換を通じて対称錐 Ω 上の二乗可積分空間 $L^2_\lambda(\Omega, W)$ にも同型になる (第三の実現)．

例えば，$G = Sp(r, \mathbb{R})$ とすると，$G/K = Sp(r, \mathbb{R})/U(r)$ は以下の 2 つの領域と微分同相になる．

$$\begin{aligned} D &:= \{w \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C}) : I - ww^* \text{ が正定値 }\}, \\ T_\Omega &:= \{z \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C}) : \mathrm{Im}\, z \text{ が正定値 }\}. \end{aligned}$$

これらの領域には，$G = Sp(r, \mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} G &= \left\{ g \in GL(2r, \mathbb{C}) : g \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\ g \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \bar{g} \right\} \\ &\simeq \left\{ g \in GL(2r, \mathbb{R}) : g \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

のように2通りに実現したとき，それぞれが自然な一次分数変換により作用している．さらに，(τ, W) を $K = U(r)$ の有限次元表現とすると，普遍被覆群 $\widetilde{Sp}(r,\mathbb{R})$ が $\mathcal{O}(D,W)$, $\mathcal{O}(T_\Omega, W)$ に

$$\tau_\lambda\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\right) f(w) := \det(cw+d)^{-\lambda}\tau\left({}^t(cw+d)\right) f\left((aw+b)(cw+d)^{-1}\right) \qquad (1)$$

の形で作用している．ここで，$\det(cw+d)^{-\lambda}$ は $Sp(r,\mathbb{R}) \times D$, $Sp(r,\mathbb{R}) \times T_\Omega$ 上では well-defined ではないが，普遍被覆空間 $\widetilde{Sp}(r,\mathbb{R}) \times D$, $\widetilde{Sp}(r,\mathbb{R}) \times T_\Omega$ 上では well-defined になる．さて，$\lambda \in \mathbb{R}$ が十分大きいとき，作用 (1) は以下の内積を不変に保つ．

$$\langle f, g\rangle_{\lambda, D} := \frac{c_\lambda}{\pi^{r(r+1)/2}} \int_D \left(\tau(I - ww^*)^{-1} f(w), g(w)\right)_\tau \det(I - ww^*)^{\lambda-(r+1)} dw, \qquad (2)$$

$$\langle f, g\rangle_{\lambda, T_\Omega} := \frac{c_\lambda}{(4\pi)^{r(r+1)/2}} \int_{T_\Omega} \left(\tau(\operatorname{Im} z)^{-1} f(z), g(z)\right)_\tau \det(\operatorname{Im} z)^{\lambda-(r+1)} dz. \qquad (3)$$

以下，簡単のため (τ, W) を K の自明表現とすると，内積 (3) から定まるヒルベルト空間は，ラプラス変換を通じて，次の内積を有限にする $\Omega := \{x \in \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R}) : x$ は正定値 $\}$ 上の二乗可積分空間とも同型になる．

$$\langle f, g\rangle_{\lambda, \Omega} := c'_\lambda \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} \det(x)^{\lambda - \frac{r+1}{2}} dx.$$

さて，この博士論文は全部で3章からなるが，その第1章では，第三の実現，対称錐の描像について取り扱う．対称錐上には，通常の1変数特殊関数の自然な一般化として現れる様々な特殊関数が存在する．その中でも，ここでは Dib によって導入された多変数ベッセル関数について取り扱う．このベッセル関数は，Ω 上実現された正則離散系列表現に現れる作用素の積分核として使われている．例えば，$\sqrt{-1}z \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分リー環 $\mathfrak{k}$ の中心の生成元とすると，$t \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ に対し，e^{tz} の作用は，$G = Sp(r,\mathbb{R})$ の場合

$$\tau_\lambda(e^{tz})\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma_\Omega(\lambda)} \int_\Omega \varphi(y) \frac{e^{-\coth t(\operatorname{tr} x + \operatorname{tr} y)}}{\sinh^{r\lambda} t} \mathcal{I}_\lambda\left(\frac{1}{\sinh^2 t} x^{\frac12} y x^{\frac12}\right) \det(y)^{\lambda - \frac{r+1}{2}} dy$$

で与えられる．ただし，$\Gamma_\Omega(\lambda)$ は λ に依存する定数で，関数 $\mathcal{I}_\lambda(x)$ が多変数ベッセル関数である．この作用素の族は，半群の性質 $\tau_\lambda(e^{sz})\tau_\lambda(e^{tz}) = \tau_\lambda(e^{(s+t)z})$ を満たす．さらに，これらは $t \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ 上ユニタリであるが，パラメータの範囲を右半平面 $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t \geq 0\}$ に解析的に延ばすことができ，さらに $\operatorname{Re} t > 0$ の場合に $\tau_\lambda(e^{tz})$ がヒルベルト-シュミット作用素を与えることが，D 上での正則離散系列表現の解析からわかる．このような，実リー群の最高ウェイト表現を複素解析半群の表現の観点から理解するという問題は Gelfand-Gindikin (1977) によって提唱され，Stanton (1986) および Ol'shanskiĭ (1981, 91, 95) によってその一般論は完成した．さらに，この一般論は小林-真野 (2007) による Laguerre 半群の理論につながり，その後極小表現の大域解析やフーリエ変換の変形理論を生み出した．

第1章における著者の結果は多変数ベッセル関数 $\mathcal{I}_\lambda(x)$ の上からの評価に関するものである．一般に，Ω を対称錐とした時，それを開集合として含む自然なユークリッド型ジョルダン代数が存在する．このとき，$\mathcal{I}_\lambda(x)$ は $V^{\mathbb{C}}$ 上定義された特殊関数である．この章で，著者は $\mathcal{I}_\lambda(x^2)$ の新しい積分表示を与え，さらにこれを用いて Dib によって導入された多変数ベッセル関数 $\mathcal{I}_\lambda(x^2)$ の上からの評価

定理 A (Corollary 1.3.2). $|\mathcal{I}_\lambda(x^2)| \le C_{\lambda,k}\left(1+|x|_1^{\max\{2n-r\lambda,0\}}\right)e^{2|\operatorname{Re} x|_1}$.

を示した．ここで，$|\cdot|_1$ は $V^{\mathbb{C}}$ 上の適切なノルム，r はジョルダン代数 V の階数である．特に，$\mathcal{I}_\lambda(x)$ は $\sqrt{-1}V \subset V^{\mathbb{C}}$ 上多項式増大となる．この結果から，前段の 1 次元解析半群が多項式増大な関数を指数減少な関数に移すことを示すことができ，さらにこれがヒルベルト-シュミット作用素となることを表現論を使わずに再確認することができる (Theorem 1.4.5).

第 2，3 章では，第一の実現，有界対称領域の描像について取り扱う．この描像では正則離散系列表現は有界対称領域 D 上の正則関数の空間 $\mathcal{O}(D,W)$ に実現され，対応するヒルベルト空間は再生核を持つ．ここで，$\mathcal{O}(D,W)$ 上に (2) のような D 上の積分で与えられる $\tilde{G}$-不変な内積が存在しない場合でも，$\mathcal{O}(D,W)$ 内に $\tilde{G}$ のユニタリ部分表現が存在する場合がある．この現象がいつ起こるかは Berezin (1975), Vergne-Rossi (1976), Wallach (1976) などによって研究され，Enright-Howe-Wallach (1983) および Jakobsen (1983) により完全に決定された．その後，その部分的な結果に対して Clerc (1995), Faraut-Korányi (1990) などによる解析的手法による別証明も与えられた．ここで，Faraut-Korányi による証明は，スカラー型正則離散系列表現のときに限るが，そのヒルベルト空間の再生核の展開を具体的に計算することによりなされた．著者はこの論文の第 2 章で，上の Faraut-Korányi の結果を K-タイプ分解が無重複になるようなベクトル値正則離散系列表現の場合に一般化した．例えば，$G = Sp(r,\mathbb{R})$ のとき，内積 (2) に関する再生核は，λ が十分大きいとき

$$K_\lambda(z,w) := \tau(I - zw^*)\det(I - zw^*)^{-\lambda}$$

で与えられる．ここで，$W := \bigwedge^k(\mathbb{C}^r)^\vee$ とおくと，$\mathcal{H}_\lambda(D,W)_K = \mathcal{P}(\mathfrak{p}^+) \otimes W$ の K-タイプ分解は，λ が十分大きければ，その値にかかわらず

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}^+) \otimes W = \bigoplus_{\substack{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r \\ m_1\ge\cdots\ge m_r\ge 0}} \bigoplus_{\substack{\mathbf{k}\in\{0,1\}^r,\,|\mathbf{k}|=k \\ m_j+k_j\ge m_{j+1}+k_{j+1}}} V_{2\mathbf{m}+\mathbf{k}}^\vee$$

で与えられる．各 K-タイプ $V_{2\mathbf{m}+\mathbf{k}}^\vee$ 上の再生核を $K_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(z,w)$ とおいたとき，著者は $K_\lambda(z,w)$ の展開が以下で与えられることを示した．

定理 B (Theorem 2.4.2 の系). k 次の外積代数 $\bigwedge^k(\mathbb{C}^r)^\vee$ を極小 K-タイプとし，λ を連続パラメータとする正則離散系列表現の再生核は，$\lambda > r$ のとき, 各 K-タイプの再生核を用いて

$$K_\lambda(z,w) = \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r \\ m_1\ge\cdots\ge m_r\ge 0}} \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\{0,1\}^r,\,|\mathbf{k}|=k \\ m_j+k_j\ge m_{j+1}+k_{j+1}}} \frac{\prod_{j=1}^r\left(\lambda-\frac{1}{2}(j-1)\right)_{m_j+k_j}}{\prod_{j=1}^k\left(\lambda-\frac{1}{2}(j-1)\right)} K_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(z,w)$$

と展開される．

この展開から，核関数 $K_\lambda(z,w)$ は

$$\lambda \in \left\{\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}, \ldots, \frac{r-1}{2}\right\} \cup \left(\frac{r-1}{2}, \infty\right)$$

のときに正定値になることが従う (Theorem 2.6.1)．ここから，もともと内積 (2) は $\lambda > r$ の場合にしか収束しないにもかかわらず，λ が上の集合に入っていれば，$K_\lambda(z,w)$ を再生核

とする $\mathcal{O}(D,W)$ 内の 0 でないヒルベルト部分空間が存在し，ここに $\tilde{G}$ が作用 (1) によってユニタリに作用することがわかる．これは正則離散系列表現を解析接続したものとみなすことができる．また，この表現空間の下にある $(\mathfrak{g},K)$-加群についてもこの展開から決定できる．この議論は Enright-Howe-Wallach および Jakobsen の結果の一部に対する解析的な別証明になっている．

第 2 章の結果は，正則離散系列表現を極大コンパクト部分群 K に制限したときにどう振る舞うかを具体的に決定したものとみなすこともできる．すると，次に自然に起こる疑問は，ほかの部分に制限したときはどうかということである．1990 年代に表現の制限の離散分解と無重複性定理の一般論を確立した小林氏は，その分解を具体的に書き下す問題の重要性を提唱し (Progr. Math. 2015 の概説論文参照)，Clerc-小林-Ørsted-Pevzner (2011), 小林-Pevzner (2015)，小林-Speh (2015), Möllers-大島 (2015)，Peng-Zhang (2004) などによって研究された．今，G がエルミート型リー群，$\mathcal{H}$ が正則離散系列表現としたとき，もしも部分群 $G_1 \subset G$ がエルミート型であり，リーマン対称空間の埋め込み $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$ が正則であれば，$\mathcal{H}|_{G_1}$ は離散分解し，すべての重複度は有限であり，一様有界になることが知られている (小林，2007)．この場合，G_1 のどの表現が $\mathcal{H}|_{G_1}$ に現れるかも決定できる．すると，次に興味のあることは，G_1 の各表現が $\mathcal{H}|_{G_1}$ にどのように埋め込まれているかを決定すること，つまり，G_1 の各表現と $\mathcal{H}|_{G_1}$ の間の G_1-絡作用素を具体的に書き下すことである．第 3 章では，著者はこの問題について研究し，G_1 と G の一般の正則離散系列表現の間の G_1-絡作用素の積分表示を得た．さらにこの結果から，G, G_1 が古典型で両方の表現が “ほぼスカラー型” の場合に，G_1 の表現から G の表現への G_1-絡埋め込み作用素の (無限階) 微分表示も求めた．例えば，$(G,G_1)=(Sp(2r,\mathbb{R}), Sp(r,\mathbb{R})\times Sp(r,\mathbb{R}))$ の場合，G のスカラー型正則離散系列表現の G_1 への制限 $\mathcal{H}_\lambda(D_{2r})|_{G_1}$ に G_1 のスカラー型正則離散系列表現 $\mathcal{H}_\mu(D_r)\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\nu(D_r)$ が現れる必要十分条件は，$\mu=\nu=\lambda+k$ なる非負整数 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在することである．このとき，著者は以下を示した．

定理 C (Theorem 3.5.5)**.** 部分群 G_1 の既約ユニタリ表現 $\mathcal{H}_{\lambda+k}(D_r)\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_{\lambda+k}(D_r)$ から G の既約ユニタリ表現 $\mathcal{H}_\lambda(D_{2r})|_{G_1}$ への埋め込み写像は

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_{\lambda,k}f)\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} &= \det(x_{12})^k \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r\\ m_1\geq\cdots\geq m_r\geq 0}} \frac{1}{(\lambda+k)_{\mathbf{m},1}}\frac{1}{|\mathbf{m}|!}\\ &\qquad\times\tilde{\Phi}^{(1)}_{\mathbf{m}}\left(x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{22}}{}^t x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{11}}\right)f(x_{11},x_{22})\end{aligned}$$

で与えられる．ただし，$x_{11},x_{22}\in\mathrm{Sym}(r,\mathbb{C})$, $x_{12}\in M(r,\mathbb{C})$ で，$(\lambda)_{\mathbf{m},1}:=\prod_{j=1}^r\left(\lambda-\frac{1}{2}(j-1)\right)_{m_j}$, $\tilde{\Phi}^{(1)}_{\mathbf{m}}$ は $M(r,\mathbb{C})$ 上の $O(r)$-不変なある多項式である．

この証明には，被積分関数の級数展開および Faraut-Korányi によるノルム計算の結果を用いた．