論文審査の結果の要旨

氏名　中濱良祐

論文題目: Some topics on analysis of holomorphic discrete series representations
和訳：正則離散系列表現の解析に関するいくつかの話題

中濱良祐氏の博士論文は，実簡約リー群 G の正則離散系列表現の解析に関して現れる特殊関数，再生核，作用素などの性質について研究したものである．

正則離散系列表現は最高ウェイトベクトルを持つ表現であることから，有限次元表現論の自然な拡張として，代数的表現論の立場から捉えることもできる．一方，幾何的表現論の立場からは，エルミート対称空間 G/K 上の正則ベクトル束の複素解析的かつ二乗可積分な切断のなすヒルベルト空間に実現することができる．このように正則離散系列表現は，実簡約リー群の無限次元ユニタリ表現の長い歴史の中でさまざまな視点から研究されてきた．

さて，エルミート対称空間 G/K は，ジョルダン代数 V の対称錐 Ω に関する管状領域 $T_\Omega = V + \sqrt{-1}\Omega$ に双正則同型となるとき，管状型 (tube type) とよばれる．例えば，$V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ (実対称行列全体)，$\Omega = \{X \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) : X \gg 0\}$ とおくと，T_Ω は Siegel 上半空間とよばれ，T_Ω と双正則同型なエルミート対称空間 $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ は管状領域となる．対称空間 G/K が管状型であるとき，正則離散系列表現 π_λ の最小 K-type を (μ_λ, W) とすると，π_λ は管状領域 T_Ω 上の正則関数のなすヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda(T_\Omega, W) \subset \mathcal{O}(T_\Omega, W)$ に実現することができる．さらに，ラプラス変換を施すことにより対称錐 Ω 上の二乗可積分空間 $L^2_\lambda(\Omega, W)$ に実現することもできる．

Dib (1990) は，Bessel 関数の多変数への拡張としてジョルダン代数 V 上に多変数 Bessel 関数 $\mathcal{I}_\lambda(x)$ を導入した．この多変数特殊関数 $\mathcal{I}_\lambda$ は $L^2_\lambda(\Omega, W)$ に実現された正則離散系列表現 π_λ の作用を記述する積分核として現れることが知られている．中濱氏は多変数 Bessel 関数 $\mathcal{I}_\lambda$ の新しい積分表示を与え，以下の評価式を示した．

定理 A (中濱)**.** $|\mathcal{I}_\lambda(x^2)| \leq C_{\lambda,k}(1 + |x|_1^{\max\{2n-r\lambda,0\}})e^{2|\mathrm{Re}\, x|_1}$

ここで，$|\cdot|_1$ は $V^{\mathbb{C}}$ 上のあるなノルム，r はジョルダン代数 V の階数である．定理 A より $\mathcal{I}_\lambda(x)$ は $\sqrt{-1}V \subset V^{\mathbb{C}}$ 上多項式増大となることが分かる．

最高ウエイト表現 π_λ を複素解析的半群の境界値としてとらえるという Gelfand–Gindikin プログラム (1977) は，Stanton, Olshanskii，小林–真野 (2007) 等によって発展してきた．中濱氏の定理 A は Gelfand–Gindikin プログラムにおける 1 次元解析的

半群が多項式増大である関数を指数減少である関数に移すことを意味し，さらにこれがヒルベルト–シュミット作用素となることを特殊関数論の立場から裏付けるものである．

一般に，正則関数のなす空間に含まれるヒルベルト空間は再生核をもつ．正則離散系列表現 π_λ を極大コンパクト部分群 K に制限した分岐則に対応し，π_λ の再生核 $K_\lambda(z,w)$ を有限次元ヒルベルト空間の（簡単な）再生核の和として展開することができる．この展開公式を具体的に決定し，パラメータ λ に関する依存の仕方を調べようというのが中濱氏の二つ目の研究テーマである．

中濱氏は正則離散系列表現 π_λ の K-type が無重複であるという仮定の下で，この展開公式を具体的に求めた．その結果は分類に基づく個別の計算によって記述されているため，その一例として k 次の外積代数 $\Lambda^k(\mathbb{C}^r)^\vee$ を極小 K-タイプとし，λ を連続パラメータとする $G = Sp(n,\mathbb{R})$ の正則離散系列表現の場合に中濱氏の結果を詳述する．この場合可視的作用下における無重複性の伝播定理 (T. Kobayashi, 2005) より，π_λ の K-type は重複度 1 となる．具体的には，その K-type は多重指数 $\mathbf{m}, \mathbf{k}$ を用いて $V^\vee_{2\mathbf{m}+\mathbf{k}}$ と表される．ここで，$V^\vee_{2\mathbf{m}+\mathbf{k}}$ は $-(2m_1+k_1,\cdots,2m_n+k_n)$ を extremal weight とする $K = U(n)$ の既約有限次元表現であり，パラメータ $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^n$, $\mathbf{k}\in\{0,1\}^n$ は以下の集合

$$\Xi = \{(\mathbf{m},\mathbf{k}) : m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0, \sum_{j=1}^{n} k_j = k, m_j + k_j \geq m_{j+1} + k_{j+1} (1 \leq j \leq n-1)\}$$

を動く．各 K-タイプ $V^\vee_{2\mathbf{m}+\mathbf{k}}$ を与える標準ヒルベルト空間の再生核を $K_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(z,w)$ とおいたとき，中濱氏は $K_\lambda(z,w)$ の展開が以下で与えられることを示した．

定理 B (中濱)**.** $\Lambda^k(\mathbb{C}^r)^\vee$ を最小 *K-type* とする最高ウェイト表現 π_λ の再生核は，$\lambda > r$ のとき，各 K-タイプの再生核を用いて

$$K_\lambda(z,w) = \sum_{(\mathbf{m},\mathbf{k})\in\Xi} \frac{\prod_{j=1}^{r}(\lambda - \frac{1}{2}(j-1))_{m_j+k_j}}{\prod_{j=1}^{k}(\lambda - \frac{1}{2}(j-1))} K_{\mathbf{m},\mathbf{k}}(z,w)$$

と展開される．

定理 B および解析接続の議論により，核関数 $K_\lambda(z,w)$ が正の定符号になるための必要十分条件は

$$\lambda \in \{\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}, \cdots, \frac{r-1}{2}\} \quad \text{または } \lambda \text{ は半直線 } (\frac{r-1}{2}, \infty) \text{ に含まれる}$$

ことも分かる．有限個の例外集合 $\{\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}, \cdots, \frac{r-1}{2}\}$ は Berezin–Wallach 集合と呼ばれる．中濱氏の得た正の定符号条件は Enright–Howe–Wallach および Jakobsen によって代数的に証明されたユニタリ最高ウェイト表現の分類から導かれる既知のものであるが，彼らの代数的分類定理の特殊な場合に対して，正の定符号条件だけではなく，解析的な情報をも付加した結果と位置づけることができる．なお，定理 B は最小 K-type が 1 次元の場合の Faraut–Koranyi の定理 (1990) に端を発し，$\dim W > 1$ の場合には，Ørsted, Zhang, Hwang, Liu 等によって部分的な結果が得られていたが，それらの結果

を一般化するものであり，中濱氏単著の長編の論文は国際学術誌 Journal of Lie Theory にアクセプトされた．

さらに，中濱氏は定理 A，定理 B に加えて，小林俊行による無重複分岐則の解析的な研究にも着手し，symmetry breaking operators (Kobayashi–Pevzner) の随伴作用素に対応する積分作用素の展開公式を特別な場合に証明した．

以上のように，当該論文は解析的表現論に新しい知見を与えたものであり、論文提出者 中濱良祐氏は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。