論文の内容の要旨

論文題目:

Studies on spaces of initial conditions for nonautonomous mappings of the plane and singularity confinement

(平面上の非自励写像に対する初期値空間と特異点閉じ込めの研究)

氏名:

間瀬　崇史

本論文の目的は、初期値空間と特異点閉じ込めという 2 つの手法を用いて平面上の非自励写像を解析することである。

離散可積分系における重要なテーマのひとつが、与えられた方程式の可積分性をどのように判定するかという問題である。可積分性判定テストとして最初に提示されたのは特異点閉じ込めである。特異点閉じ込めによる判定は、系の発展に伴って現れる特異点 (初期値情報の喪失) が、その後無限に伝播せず有限の領域に閉じ込められるかどうかを見ることで行われる。特異点閉じ込めは適用が容易であり、実際、非自励化 (自励系の方程式に時間依存する係数を適切に追加する手法) を特異点閉じ込めとともに用いることで、重要な可積分非自励写像である離散 Painlevé 方程式の多くが発見された。しかし、特異点閉じ込めを通過するにもかかわらずカオスの様相を呈する方程式として、Hietarinta-Viallet 方程式と呼ばれる写像が提示された。そこで、より正確な可積分性判定を目指して提唱されたのが代数的エントロピーによる判定である。代数的エントロピーは写像の次数の増大度を用いて定義され、その値が 0 になるかどうかで可積分性判定を行う。この判定法は経験的に正確であることがわかっているため、現在では離散系の可積分性の定義として広く用いられている。しかし、具体的な方程式に対してそのエントロピーの値を実際に求めるのは容易ではない。

平面上の写像を解析する上で非常に強力な道具となるのが初期値空間である。坂井は特異点閉じ込めと初期値空間の関係に注目し、一般化 Halphen 曲面と呼ばれる代数曲面を用いて離散 Painlevé 方程式を定義・分類した。竹縄は Hietarinta-Viallet 方程式の初期値空間を実際に構成し、初期値空間の Picard 群に誘導される線形写像を用いて方程式の代数的エントロピーを再計算するとともに、特異点閉じ込めのパターンを初期値空間内の曲線の動きでとらえた。さらに竹縄は、離散 Painlevé 方程式の代数的エントロピーがすべて 0 になることを示した。

幾何学的な解釈をすれば、特異点閉じ込めテストで判定しているのは初期値空間の構成可能性であると言える。そのため、特異点閉じ込めを通過する方程式に対しては、初期値空間を構成することで原理的には代数的エントロピーが求められる。しかし、特異点閉じ込めを通過する方程式であったとしても、実際に初期値空間を構成するためには非常に多くの計算が必要となる。

第 2 章では、本論文の主結果のひとつである「full-deautonomisation」という手法を提唱する。これは、特異点閉じ込めを通過する方程式の代数的エントロピーを、特異点閉じ込めと非自励化のみから予想する手法である。第 2.1 章では、本章で重要な概念となる非自励化と、late confinement とよばれる現象について簡単に復習する。第 2.2 章では、late confinement の具体例について初期

値空間を用いた解析を行う。これにより、初期値空間を持つような写像では、時間依存する係数の満たすべき条件と、初期値空間の Picard 群に誘導される線形写像の間に関係があることが予想できる。第 2.3 章では、第 2.2 章で予想された関係を用いて、非自励化と特異点閉じ込めから代数的エントロピーを予想する full-deautonomisation という手法を提唱する。さらに、具体的ないくつかの方程式に対してこの手法を適用し、予想された代数的エントロピーが実際の値と一致することを確認する。第 2.4 章では、full-deautonomisation を用いる際に重要となるゲージ因子の外し方について論ずる。第 2.5 章では late confinement の族を考える。特異点パターンの長さに関する極限を考えた際、full-deautonomisation で予想される代数的エントロピーの値がどのような値に収束するか、具体例を見る。

論文の後半では、次数増大が非有界であり初期値空間を持つような非自励方程式の一般論について論ずる。最大の目的は、初期値空間を持つような可積分非自励写像の分類である。

非自励系の初期値空間の一般論を展開するにあたって最も問題となるのは出発点の設定である。第 3 章ではまず人工的に構成された不自然な具体例をいくつか見たのち、一般的な非自励系の初期値空間を定義する。さらにその定義が、坂井による初期値空間の定義と対応することを見る。

第 4 章では初期値空間を持つ方程式の一般的性質を議論する。まず Picard 群に誘導される線形写像と方程式の次数の増大度の関係を復習し、その後、次数の増大に関して自励系と同様の分類ができることを見る。さらに、初期値空間の Picard 数と写像の次数の増大度の間にあるいくつかの関係を見る。

初期値空間を用いて方程式の分類を考える際には、初期値空間の極小化 (最小化) が必要となる。そこで、第 5 章では初期値空間の極小化について議論する。第 5.1 章では非有界な次数増大を持つ可積分非自励写像の初期値空間を扱う。ここでは、本論文の主結果のひとつとして、そのような方程式の初期値空間が必ず一般化 Halphen 曲面に極小化できることを示す。これにより、次数増大が非有界でありなおかつ初期値空間を持つような非自励可積分写像は、離散 Painlevé 方程式に限るということが示される。なお、離散 Painlevé 方程式は既に坂井によって分類されている。したがってこの結果により、次数増大が非有界でありなおかつ初期値空間を持つような平面上の可積分写像の分類が、非自励系の場合にも完了したことになる。第 5.1 章ではさらに、極小化の一意性を示すとともに極小化を具体的に実行する方法を提示する。第 5.2 章では、非可積分系の初期値空間の極小化を考え、極小化の一意性を示すとともに、それを具体的に実行する方法を提示する。

第 6 章では、結論をまとめるとともに将来の課題について論ずる。

Appendix A では、本論文で必要となる代数曲面の知識をまとめた。Appendix B では、初期値空間を持つ方程式の次数増大の分類において重要な、線形代数における命題の初等的な証明を与えた。