論文審査の結果の要旨

氏　名　間瀬　崇史

本論文は複素平面上の双有理写像の可積分性に関する２つの重要な結果を与えている。ひとつは、平面上の双有理写像の可積分性を判断するための非常に強力な新しい判定法を提唱したことである。もうひとつは、一般の非自励双有理写像の初期値空間を定義し、それに基づいて、複素平面上の非自励可積分系の分類を完成させたことである。

離散系における可積分性は、連続の場合と違って、まだ数学的な性質として厳密に定義されていない。そのため、この２０年間、離散可積分性の様々な定義が提案されており、それぞれの定義に基づく判定法が並行して利用されてきた。本論文のひとつの重要な結果は、離散可積分性の最も有名な２つの判定法を統一したことである。ひとつは、系の発展に伴って現れる特異点が、その後無限に伝播せず、有限の領域に閉じ込められるかどうかという特異点閉じ込めテストである。このテストは適用が容易であるが、特異点閉じ込めを通過するにもかかわらずカオスの様相を呈する系もたくさん知られている。もうひとつは、代数的エントロピーによる判定である。代数的エントロピーは写　像の次数の増大度を用いて定義され、その値がゼロになるかどうかで可積分性判定を行う手法であるが、具体的な写像に対してそのエントロピーの値を実際に求めるのは容易ではない。この２つの判定法が、本論文んで「full-deautonomisation」という手法として統一されている。これは、特異点閉じ込めを通過する写像の代数的エントロピーを、特異点閉じ込めと写像の非自励化のみから推測する極めて強力な手法である。

平面上の写像を解析する上でもうひとつの強力な道具となるのが初期値空間である。坂井は、２０００年に、特異点閉じ込めと初期値空間の関係に注目し、一般化 Halphen 曲面と呼ばれる代数曲面を用いて離散 Painlevé 方程式を定義・分類した。その後、竹縄は写像の代数的エントロピーが初期値空間の Picard 群に誘導される線形写像から計算できるこに注目し、離散 Painlevé 方程式の代数的エントロピーがすべて 0 になることを示した。 幾何学的な解釈をすれば、特異点閉じ込めテストで判定しているのは初期値空間の構成可能性であると言える。本論文では、いくつかの具体例の初期値空間を用いた解析により、初期値空間を持つような写像では、時間依存する係数の満たすべき条件と、初期値空間の Picard 群に誘導される線形写像の間に密接な関係があることを発見し、非自励化と特異点閉じ込めから代数的エントロピーが推測できる手法を導入している。さらに、この手法を用いて、代数的エントロピーがとても簡単に計算できる写像の具体例もいくつか与えている。

論文の後半では、次数増大が非有界であり初期値空間を持つような非自励写像の一般論と初期値空間を持つような可積分非自励写像の分類について論じている。ひとつの結果は、適切な仮定を設けると非自励系の初期値空間が厳密に定義でき、その定義が坂井による初期値空間の定義と対応することを示したことである。 さらに重要な結果は、初期値空間の Picard 群に誘導される線形 写像と写像の次数の増大度との関係に

基づき、写像の次数の増大に関して自励系と同様の分類 ができることを証明したことである。

初期値空間の Picard 数と写像の次数の増大度との関係も考察した。 初期値空間を用いて写像の分類を考える際には、初期値空間の最小化が必要となる。 そこで、非有界な次数増大を持つ可積分非自励写像の初期値空間を考え、そのような 写像の初期値空間が必ず一般化 Halphen 曲面に極小化できることを示した。これにより、次数増大が非有界でありなおかつ初期値空間を持つような非自励可積分写像は、離散 Painlevé 方程式に限るということを示した。なお、離散 Painlevé 方程式は既に坂井によって分類されたため、この結果により、次数増大が非有界でありなおかつ初期値空間を持つような平面上の可 積分写像の分類が、非自励系の場合にも完了したことになる。

まとめると、 論文提出者は、（１）複素平面上の一般の双有理写像の特異点の構造により、その写像の代数的エントロピーを推測して、写像の可積分性を判定するための新しい手法を提唱し、（２）平面上の可積分な非自励双有理写像の分類を完成させた。（１）の新しい判定法は極めて強力な手法であり、海外でも専門家の注目を浴びている結果である。（２）については、問題の定式化が難しく、可積分な非自励写像の分類は長い間に難問とされていたが、それにも成功した。よって、論文提出者 間瀬崇史 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。