論文の内容の要旨

論文題目　Hom complexes and chromatic numbers of graphs
（グラフの Hom 複体と彩色数について）

氏　　名　松下尚弘

本論文でグラフというときは集合 $V(G)$ と $V(G) \times V(G)$ の対称部分集合 $E(G)$ の組 $G = (V(G), E(G))$ のことをいう．グラフ準同型とは写像 $f : V(G) \to V(H)$ で $(f \times f)(E(G)) \subset E(H)$ が成り立つものである．n-頂点完備グラフとは $V(K_n) = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，$E(K_n) = \{(x, y) \mid x \neq y\}$ によって定義されるグラフ K_n のことである．グラフ G から K_n へのグラフ準同型を G の n-彩色という．グラフ G に対し，G の n-彩色が存在するような最小の n を G の彩色数といい，$\chi(G)$ で表す．グラフ G の彩色数 $\chi(G)$ を決定する問題を，グラフの彩色問題という．

Hom 複体とは，二つのグラフ T と G に対して定まるポセット $\mathrm{Hom}(T, G)$ である．以下ポセットはその分類空間を対応させることで，位相空間とみなす．グラフ T に群 Γ の作用が与えられると，$\mathrm{Hom}(T, G)$ にも群 Γ の作用が与えられ，グラフ準同型 $f : G_1 \to G_2$ は Γ-同変写像 $f_* : \mathrm{Hom}(T, G_1) \to \mathrm{Hom}(T, G_2)$ を誘導する．特に $T = K_2$ のとき，K_2 の二つの頂点を交換する $\mathbb{Z}_2$-作用を考え，そのときの $\mathbb{Z}_2$-ポセット $\mathrm{Hom}(K_2, G)$ を，G の箱複体といい $B(G)$ で表す．$B(G)$ の $\mathbb{Z}_2$-指数という不変量が，G の彩色数 $\chi(G)$ の下界を与えることが知られている．また T が後述するホモトピーテストグラフのとき，Hom 複体 $\mathrm{Hom}(T, G)$ の連結度が $\chi(G)$ の下界を与えることが知られている．本博士論文では $B(G)$ や $\mathrm{Hom}(T, G)$ の構造，すなわちホモトピー型やポセットとしての構造が，グラフ G の彩色数に対して，どの程度の制限を与えるのかについて論ずる．

まずホモトピーテストグラフに関する Kozlov の予想について述べる．T がホモトピーテストグラフであるとは，任意のグラフ G に対し，

$$\chi(G) > \mathrm{conn}(\mathrm{Hom}(T, G)) + \chi(T)$$

が成り立つことをいう．ここで空間 X に対し，$\mathrm{conn}(X)$ は X が n-連結となるような n のうち最大のものである．K_m $(m \geq 3)$ や奇数次のサイクル C_{2r+1} $(r \geq 1)$ などはホモトピーテストグラフの例である．したがってどのようなグラフがホモトピーテストグラフになるのかということが問題になる． Kozlov は $\chi(T) = 2$ のとき T がホモトピーテストグラフになることを予想したが，これを解決した．

定理１．　$\chi(T) = 2$ なるグラフ T はホモトピーテストグラフである．　□

次に $\mathrm{Hom}(T, G)$ のホモトピー型と $\chi(G)$ との関係について論ずる．T への $\mathbb{Z}_2$-作用 α がフリッピングであるとは，$(v, \alpha(v)) \in E(T)$ となる $v \in V(T)$ が存在することである．T への $\mathbb{Z}_2$-作用がフリッピングで G がループを持たないならば，$\mathrm{Hom}(T, G)$ が自由な $\mathbb{Z}_2$-作用になることが知られている．このような T に対して $\mathrm{Hom}(T, G)$ の $\mathbb{Z}_2$-ホモトピー不変量と $\chi(G)$ との関係についてよく研究されている．以下の定理は，$\chi(G) \geq 3$ ならば $\mathrm{Hom}(T, G)$ のホモトピー型が $\chi(G)$ を決定し得ないことを示している．

定理２．T を有限グラフ，G を $\chi(G) > 2$ なるグラフとする．このとき任意の整数 n に対し，G を部分グラフとして含むグラフ H で，包含 $\mathrm{Hom}(T, G) \to \mathrm{Hom}(T, H)$ がホモトピー同値でかつ $\chi(H) > n$ なるものが存在する．もし G が有限グラフかつ連結ならば，H も有限グラフかつ連結にとることができる．さらに T が $\mathbb{Z}_2$-グラフであって，作用がフリッピングならば，包含 $\mathrm{Hom}(T, G) \to \mathrm{Hom}(T, H)$ は $\mathbb{Z}_2$-ホモトピー同値であ

る． □

$\mathrm{Hom}(T,G)$ のホモトピー不変量が G の彩色数の下界を与えることがあることは既に述べたが，上の定理は $\mathrm{Hom}(T,G)$ のホモトピー不変量が，G の彩色数の上界を与えないことも示している．

したがって $\chi(G)$ の正確な評価を与えるには，$\mathrm{Hom}(T,G)$ のより細かい構造に着目する必要がある．ここでは $T=K_2$ のときに，$\mathrm{Hom}(K_2,G)=B(G)$ の半順序集合としての構造に関して，次の定理を示した．

定理３． G と H を孤立点を持たないグラフとせよ．このとき次が成り立つ．

(1) $K_2\times G$ と $K_2\times H$ が同型なことと，$B(G)$ と $B(H)$ が半順序集合として同型なことは同値である．

(2) G と H が同型なことと，$B(G)$ と $B(H)$ が $\mathbb{Z}_2$-半順序集合として同型なことは同値である． □

ここで $K_2\times G$ は G の Kronecker 二重被覆と呼ばれ，グラフ二重被覆の分類において表れてきた概念である．G が連結でかつ彩色数が 3 以上ならば，$K_2\times G$ は二部グラフとなる G 上の二重被覆として特徴づけられる．この幾何学的な考察から，任意の整数 $m,n>2$ に対し，連結グラフ G, H で $\chi(G)=m$ かつ $\chi(H)=n$ であり，さらに $K_2\times G\cong K_2\times H$ なるものを構成した．このことは箱複体が半順序集合として同型であっても，彩色数が異なる例として重要である．

一方，上記の定理 (2) により $B(G)$ の $\mathbb{Z}_2$-半順序集合としての構造は孤立点を除いて G を定めることがわかる．したがって $B(G)$ の $\mathbb{Z}_2$-半順序集合としての構造は $\chi(G)$ を (0 か 1 かを除いて) 定める．

最後に Hom 複体とホモトピー同値な単体的集合 $\mathrm{Sing}(T,G)$ について述べる．グラフ T，G に対し，単体的集合 $\mathrm{Sing}(T,G)$ を，その n 単体が $T\times\Sigma_n$ から G へのグラフ準同型であるものとする．ここで Σ_n は $V(\Sigma_n)=\{0,1,\cdots,n\}$ および $E(\Sigma_n)=V(\Sigma_n)\times V(\Sigma_n)$ により定まるグラフである．

定理４．任意のグラフ T と G に対し，自然なホモトピー同値

$$|\mathrm{Sing}(T,G)| \xrightarrow{\simeq} |\mathrm{Hom}(T,G)|$$

が存在する． □

ここで $T=K_2$ のとき，$\mathrm{Sing}(K_2,G)=\mathcal{B}(G)$ とかく．K_2 の $\mathbb{Z}_2$-作用により $\mathcal{B}(G)$ も $\mathbb{Z}_2$-単体的集合となるが，このとき上記のホモトピー同値写像は，$\mathbb{Z}_2$-ホモトピー同値写像 $|\mathcal{B}(G)|\to|B(G)|$ を誘導する．この $\mathcal{B}$ を特異箱複体と呼ぶことにする．特異箱複体は通常の箱複体と違い右随伴関手であり，圏論的に扱いやすい．その応用として，次のことを示した．

グラフ準同型 $f:G\to H$ が与えられると，$\mathbb{Z}_2$-同変写像 $f_*:B(G)\to B(H)$ が誘導される．したがってグラフの圏と $\mathbb{Z}_2$-空間の圏を比べることが重要になる．理想としては，連続な $\mathbb{Z}_2$-同変写像 $f:B(G)\to B(H)$ に対して，G から H へのグラフ準同型が存在すればよいが，これは定理３に見られるように全く成り立たない性質である．しかし以下の定理は，グラフ準同型 $f:G\to H$ で，$f_*:B(G)\to B(H)$ が $\mathbb{Z}_2$-ホモトピー同値になるようなものでグラフの圏を局所化すると，それは $\mathbb{Z}_2$-空間の圏に同値になることを示している．

定理５．$\mathcal{G}$ をグラフの圏を表す．$\mathcal{G}$ には次のようなモデル構造が存在する．

(1) グラフ準同型 $f:G\to H$ で f の誘導する $f_*:B(G)\to B(H)$ が $\mathbb{Z}_2$-ホモトピー同値になるものを弱同値とする．

(2) コファイブレーションのクラスは，$\mathcal{A}\circ\mathrm{Sd}^3(\partial\Delta[n])\hookrightarrow\mathcal{A}\circ\mathrm{Sd}^3(\Delta[n])$ および $\mathcal{A}\circ\mathrm{Sd}^3(\mathbb{Z}_2\times\partial\Delta[n])\hookrightarrow\mathcal{A}\circ\mathrm{Sd}^3(\mathbb{Z}_2\times\Delta[n])$ の和集合で生成される．

さらにこのモデル構造に対し，随伴関手

$$\mathcal{A} \circ \mathrm{Sd}^3 : \mathbf{SSet}^{\mathbb{Z}_2} \to \mathcal{G} : \mathrm{Ex}^3 \circ \mathcal{B}$$

は Quillen 同値である． □