論文審査の結果の要旨

氏　名　　松下 尚弘

松下 尚弘の博士論文の研究対象は，グラフ全体のなす圏と，グラフから構成される箱複体などの単体的複体のホモトピー理論である．グラフ G, H に対して，その間のグラフ準同型全体を $\mathrm{Hom}(G, H)$ で表す．$\mathrm{Hom}(G, H)$ に半順序を入れ，分類空間を対応させせることによって位相空間とみなす．自然数 n に対して，n 頂点の完全グラフを K_n と書く．グラフ G に対して，G から K_n へのグラフ準同型が存在するような最小の自然数 n を G の彩色数とよび，$\chi(G)$ で表す．

グラフの彩色数の研究におけるホモトピー理論の方法については，Lovász による先駆的な研究がある．Lovász は近傍複体 $N(G)$ が n 連結であれば $\chi(G) > n + 2$ が成立することを示した．$\mathrm{Hom}(K_2, G)$ を G の箱複体とよび $B(G)$ で表す．これは近傍複体 $N(G)$ とホモトピー同値である．一般にグラフ T が，任意のグラフ G に対して $\chi(G) > \mathrm{conn}(\mathrm{Hom}(T, G)) + \chi(T)$ を満たすとき，T をホモトピーテストグラフとよぶ．ここで，$\mathrm{conn}(X)$ は X が n 連結となるような最大の n を表す．本論文において，$\chi(T) = 2$ ならば T はホモトピーテストグラフであろうという Kozlov の予想を肯定的に解決した．一方で，$\mathrm{Hom}(T, G)$ のホモトピー不変量は $\chi(G)$ の上界は与えないことを示した．これは，Lovász が提唱した問題についての否定的な解答を与える．本論文では，$B(G)$ に対して，さらに精密に研究し，$B(G)$ の $\mathbf{Z}_2$ 半順序集合としての構造まで考えると，グラフ G を完全に決定することを証明した．

本論文において，グラフ全体のなす圏を研究し，弱同値が $B(G)$ が $\mathbf{Z}_2$ ホモトピー同値になるようなモデル圏の構造を導入した．さらに，この圏が $\mathbf{Z}_2$ 空間の圏と Quillen 同値になることを証明した．このようなモデル圏の構造を入れることによりグラフのホモトピー論的な研究に新しい視点がもたらされた．

本論文は，グラフの組み合わせ的ホモトピー論において，Kozlov 予想，Lovász の問題など，いくつかの未解決問題を解決するとともに，圏論的な手法による新しい知見をもたらしたものであり，位相幾何学の分野に大きく貢献する．よって，論文提出者　松下 尚弘は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．