

# 論文内容の要旨

論文題目 Characteristic cycle and ramification of a rank 1 sheaf  
(階数1の層の特性サイクルと分岐)

氏名 谷田川 友里

正標数のなめらかな多様体上の構成可能複体の特性サイクルが斎藤 ([S2]) によって定義された。これは Beilinson ([Be]) によって定義された特異台を用いて構成される余接束上のサイクルであり、消失輪体の空間の全次元を交点数として計算するミルナー公式によって特徴づけられる。この特性サイクルはさらにオイラー数を零切断との交点数として計算する指数公式をみだし、この指数公式は Deligne と Laumon による曲面上の層のオイラー数の計算公式 ([L]) の一般化になっている。一方で、特性サイクルと特異台は消滅輪体を用いた定義であるためその計算は比較的難しく、計算方法は [S2] で与えられている非常に特別な場合を除いてはまだ与えられていない。この論文では、曲面上階数1の層に対して特性サイクルと特異台を計算する。

論文は2つの部分からなり、前半で剰余体が完全とは限らない完備離散付値体とスキームのアーベルな拡大および被覆に対する分岐理論を扱い、後半で特性サイクルについて考察する。前半部分では主に松田 ([M]) の分岐理論と Abbes-斎藤 ([AS1]) の分岐理論を比較する。後半部分では特性サイクルの性質として、暴分岐が同じである2つの層の特性サイクルは等しいことを示す。対数的余接束上に定義される加藤の対数的な特性サイクルの余接束上への持ち上げを分岐理論を用いて構成し、特性サイクルとの一致を示すことで特性サイクルと特異台の分岐理論による計算方法を与える。

以下、論文の内容について説明する。前半部分では松田 ([M]) による完備離散付値体  $K$  に対するガロアコホモロジー群  $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の分岐フィルトレーション  $\{\text{fil}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$  と Abbes-斎藤 ([AS1]) による絶対ガロア群  $G_K$  の非対数的な分岐フィルトレーション  $\{G_K^r\}_{r \in \mathbb{Q}_{\geq 1}}$  に対して次の定理を示す。

**定理 1.**  $K$  を完備離散付値体、 $\chi$  を  $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  の元とする。このとき  $1 \leq m \leq r < m + 1$  なる整数  $m$  と有理数  $r$  について次は同値である:

- (i)  $\chi \in \text{fil}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
- (ii)  $\chi(G_K^{m+}) = 0$
- (iii)  $\chi(G_K^{r+}) = 0$

この定理は  $m > 2$  の場合には Abbes-斎藤 ([AS2]) によって証明されている。証明には特性形式と呼ばれる  $\chi$  の分岐の不変量を使う。特性形式は松田により  $p = 2$  かつ  $\chi \in \text{fil}_2^+ H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  場合を除いて定義されていた。この例外的な場合にも特性形式を定義し、Abbes-斎藤が [AS2] で用いた方法と同様の方法で定理 1 を示す。また、この特性形式が斎藤 ([S1]) によって定義された特性形式と同じものであることも証明する。

後半部分ではまず、標数  $p > 0$  の代数閉体  $k$  上のなめらかな射影多様体  $X$  上の  $\Lambda$ -加群の構成可能複体  $\mathcal{K}$  に対する特性サイクル  $CC(\mathcal{K})$  について次の定理を示す。ここで  $\Lambda$  は標数が  $p$  と異なる有限体を表わす：

**定理 2.**  $\mathcal{K}$  と  $\mathcal{K}'$  を  $X$  上の  $\Lambda$ -加群の層の構成可能層とする。  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  を任意の  $i \in I$  と  $q$  に対して  $\mathcal{H}^q(\mathcal{K})|_{X_i}$  と  $\mathcal{H}^q(\mathcal{K}')|_{X_i}$  が  $X_i$  上の局所定数構成可能層となるような  $X$  の有限個の局所閉部分集合  $\{X_i\}_{i \in I}$  への分割とする。任意の  $i \in I$  に対して  $X_i$  を開部分集合とするような  $k$  上の連結正規固有多様体  $\bar{X}_i$  で  $\bar{X}_i \setminus X_i$  の各閉点  $x$  に対し、  $\mathcal{H}^q(\mathcal{K})|_{X_i}$  と  $\mathcal{H}^q(\mathcal{K}')|_{X_i}$  から定まる  $x$  での惰性群  $I_x$  の  $p$ -シロ一部分群の表現が同値になるようなものが存在するとする。このとき  $CC(\mathcal{K}) = CC(\mathcal{K}')$  となる。

特性サイクル  $CC(\mathcal{K})$  が指数公式をみたすことからこの定理は上の 2 つの構成可能複体  $\mathcal{K}$  と  $\mathcal{K}'$  の間の、Illusie ([I]) によるオイラー数の等式の一般化になる。証明では、特性サイクル  $CC(\mathcal{K})$  と  $CC(\mathcal{K}')$  に現れる整部分スキームのうちペンシルが定める射から定まる切断が特定の 1 つとだけ交わるようなものを取り、深い分岐をもつ階数 1 の層でひねるという Deligne ([D]) の方法と Illusie ([I]) によるオイラー数の等式を用いる。

次に加藤 ([K]) による対数的な特性サイクルの持ち上げを構成する。加藤による対数的な特性サイクル  $\text{Char}^{\log}(X, U, \mathcal{F})$  は完全体  $k$  上のなめらかな曲面  $X$  での正規単純交叉因子  $D$  の補空間  $U$  上の階数 1 の  $\Lambda$ -加群の局所定数構成可能層  $\mathcal{F}$  に対して  $D$  に極を持つような  $X$  の対数的余接束  $T^*X(\log D)$  上の 2-サイクルとして、対数的な分岐理論を用いて定義される。加藤の対数的な特性サイクルや斎藤 ([S2]) の分岐理論を用いた特別な場合の特性サイクルの表示を参考に、前半部分で扱った分岐理論を用いて余接束  $T^*X$  上に持ち上げ  $\text{Char}^K(X, U, \mathcal{F})$  を構成する。  $\text{Char}^K(X, U, \mathcal{F})$  は次のように表される：

$$\text{Char}^K(X, U, \mathcal{F}) = [T_X^*X] + \sum_{i \in I} dt'(\chi|_{K_i})[L'_i] + \sum_{x \in |D|} t_x[T_x^*X],$$

式に現れる  $dt'(\chi|_{K_i})$  や  $L'_i$  は  $\mathcal{F}$  によって定まる  $D$  の生成点での局所体の絶対ガロア群の表現の分岐に関する不変量を表わす。また、  $t_x$  は  $D$  の閉点  $x$  のまわりでの  $\mathcal{F}$  の分岐に関する不変量である。この持ち上げに対して次の定理を示すことで、特性サイクル  $CC(j_i \mathcal{F})$  の分岐理論を用いた計算を与える。ただし  $j_i \mathcal{F}$  は  $U$  の標準的な埋め込み  $j: U \rightarrow X$  による  $\mathcal{F}$  の零延長を表わす：

**定理 3.** 等式  $CC(j_i \mathcal{F}) = \text{Char}^K(X, U, \mathcal{F})$  が成り立つ。

特異台  $SS(j_i\mathcal{F})$  は階数 1 の層  $\mathcal{F}$  を考える場合  $CC(j_i\mathcal{F})$  の台に一致する ([S2])。定理 3 は加藤の対数的な特性サイクルの指数公式と Deligne と Laumon によるオイラー数の公式が整合的であることも表している。この 2 つのオイラー数の公式の整合性は松田 ([M]) によって部分的な結果が得られていた。

最後に、定理 3 の証明の概略について述べる。証明ではホモトピー不変性と指数公式が重要な役割を果たす。定理 1 と前半で定義した特性形式と斎藤 ([S1]) の特性形式の一致から  $D$  の有限個の閉点  $x$  でのファイバー  $T_x^*X$  の項以外で  $CC(j_i\mathcal{F})$  が持ち上げに一致することがわかる。 $X$  をなめらかなコンパクト化に埋め込むことで  $X$  が射影的な場合に帰着する。定理 2 によって  $\mathcal{F}$  が  $D$  の各閉点  $x$  のまわりでアルティン–シュライヤー–ヴィット多項式で定まる場合に帰着する。ホモトピー不変性を用いて、 $D$  の各閉点  $y$  に対し  $t_y$  と  $[T_y^*X]$  の  $CC(j_i\mathcal{F})$  の係数  $u_y$  が等しいかあるいは  $t_y = t_x$  と  $u_y = u_x$  の両方が成り立つような局所定数構成可能層に帰着する。最後に指数公式の帰結である  $\sum_{x \in |D|} t_x = \sum_{x \in |D|} u_x$  を使って、 $D$  の各閉点  $x$  で  $t_x = u_x$  が成り立つことを示す。

## 参考文献

- [AS1] A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Am. J. Math.* **124** (5) (2002), 879–920.
- [AS2] A. Abbes and T. Saito, Analyse micro-locale  $\ell$ -adique en caractéristique  $p > 0$ : le cas d’un trait, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. 1, 25–74.
- [Be] A. Beilinson, Constructible sheaves are holonomic, arXiv:1505.06768v5.
- [D] P. Deligne, Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions L, *Modular functions of one variable*, II, 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.
- [I] L. Illusie, Théorie de Brauer et caractéristique d’Euler-Poincaré (d’après P. Deligne), *Caractéristique d’Euler-Poincaré*, 161–172, Astérisque, 82-83, Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [K] K. Kato, Class field theory,  $\mathcal{D}$ -modules, and ramification on higher dimensional schemes, part I, *Am. J. of Math.* Vol. **116**, No. 4 (1994), 757–784.
- [L] G. Laumon, Caractéristique d’Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, II, III (Luminy, 1981), 193–207, Astérisque, 101-102, Soc. Math. France, Paris, 1983.

- [M] S. Matsuda, On the Swan conductor in positive characteristic, *Am. J. of Math.* Vol. **119**, No. 4 (1997), 705–739.
- [S1] T. Saito, Wild Ramification and the Cotangent Bundle, arXiv:1301.4632v5, *to appear at J. of Alg. Geom.*
- [S2] T. Saito, The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf, arXiv:1510.03018v3.