論文の内容の要旨

論文題目　　Mathematical analysis for diffusion equations with generalized fractional time derivatives
（一般化された非整数階時間微分項を持つ拡散方程式に対する数学解析について）

氏　　名　　李 志遠（Zhiyuan LI）

不均質媒質における物質の拡散現象は, 古典的な拡散方程式ではしばしば説明できないことが認識されるようになってきた. そのような拡散現象では, 物質の濃度が時間とともに, 指数関数のように速く減衰せず, 濃度の空間分布がロング・テールとよばれるプロファイルを示すなどの点で, 古典的な拡散と顕著に異なる特徴がある. そこで, そのような異常拡散の数学モデルの研究が重要になっている.

古典的な拡散方程式に対応するミクロモデルは, ランダムウォークである. 一方で, 上記のような異常拡散に関するミクロモデルとして, 連続時間ランダムウォーク（CTRW）がある. 古典的な拡散方程式と類似の発想によって, CTRW から誘導されるマクロモデルとして, 非整数階拡散方程式を考えることができ, これが異常拡散現象のよりよいモデルとして期待できるという認識が環境工学, 地熱発電工学などの応用分野で拡がっている. 本学位申請論文において, 時間非整数階微分の線型結合を含む偏微分方程式を考察した. 時間非整数階微分の項が 1 つの場合には, 数多くの研究があるが, より柔軟なモデル方程式として, 複数個の非整数階微分の項を持つ偏微分方程式がある.

本論文の第 1–3 章では, 時間非整数階微分の線型結合を含む偏微分方程式に対して, 初期値・境界値問題という順問題や非整数階の微分の階数などを解の限定された情報から決定するという逆問題を考察した.

本論文の第 4 章では, 時間に関する非整数階数について積分をとった階数分布型の微分

$$\mathbb{D}_t^{(\mu)}\varphi(t) = \int_0^1 (\partial_t^\alpha \varphi)(t)\mu(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

を考えた. ここで, $0 \le \alpha \le 1$ とし, $\mu \not\equiv 0$ は $[0,1]$ 上の非負の連続関数であり, ∂_t^α は α 階の Caputo 微分を表す:

$$\partial_t^\alpha \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \alpha = 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\mathrm{d}\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ \varphi'(t), & \alpha = 1. \end{cases}$$

形式的に重み関数 μ を, ディラックのデルタ関数の線型結合に選ぶと, 異なる階数の非整数階微分の線型結合が得られる. 従って, このような 分布階数の時間微分項を持つ拡散方程式は, 1-3 章で考察したような異なる階数の非整数階微分の線型結合を含む偏微分方程式を広く一般化したものとなり, 分布関数 μ を適切に選ぶことにより不均質媒質の拡散現象のモデル方程式として格段に柔軟性のあるものとなる. 本論文の第 4 章において, 分布階数の時間微分項を持つ拡散方程式の初期値・境界値問題ならびに分布関数を決定する逆問題を考察した.

以下, 章ごとに本学位申請論文で確立された結果を述べる. 異なる階数の非整数階微分の線型結合を持つ拡散方程式を含めて, 本論文において考察する非整数階拡散方程式は以下のように定式化される:

$$\begin{cases} \mathbb{D}_t^{(\mu)} u = -\mathcal{A}u + B(x)\cdot\nabla u + F & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u(x,0) = a, & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{1}$$

但し Ω を $\mathbb{R}^d$ における有界領域で境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとし, $B \in (L^\infty(\Omega))^d$ であって, $\mathcal{A}$ は 2 階の

楕円型微分作用素であり, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して次のように表現される:

$$-\mathcal{A}u = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j u\right) + c(x)u, \quad x \in \Omega.$$

ここで, $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \le i, j \le d$, $c \in C(\overline{\Omega})$, $c(x) \le 0$, $x \in \overline{\Omega}$ であり, ある定数 $\nu > 0$ が存在して $\nu \sum_{j=1}^d \xi_j^2 \le \sum_{j,k=1}^d a_{jk}(x)\xi_j\xi_k, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^d$ とする.

第 1 章

時間に関して非整数階微分の項を 1 つしか含まないような拡散方程式は, (1) で $\mu = \delta(\cdot - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ の場合に相当する. 本章では, そのような単項の非整数階微分を持つ拡散方程式に対して 2 種類の逆問題を考察した. まず, (1) の初期値が未知のときに, $\omega \subset \Omega$ を任意の部分領域とした場合に, 以下を証明した. これは境界条件を仮定している意味で, 偏微分方程式の解の通常の一意接続性よりも弱い性質である.

定理 1. $0 < \alpha < 1$, $F = 0$, $B \in (L^\infty(\Omega))^d$ とする. さらに, $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H^{2\gamma}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ $(\gamma \in (\frac{1}{2}, 1))$ を (1) の解とする. このとき,

$$u|_{\omega \times (0,T)} = 0 \Longrightarrow u|_{\Omega \times (0,T)} = 0.$$

次に, 部分領域での観測データによって非斉次項を決定する逆問題を考察した.

問題 1. $\omega \subset \Omega$ を部分領域, $T > 0$ を任意に与え, $a = 0$, $F(x,t) = \rho(t)f(x)$ とし, u を (1) の解とする. ただし, $\rho \in C^1[0,T]$, $f \in L^2(\Omega)$ とする. ρ が既知であって, f を内部での測定 $u|_{\omega \times (0,T)}$ で決定せよ.

このような問題は異常拡散現象の特徴を評価するために重要である. 定理 1 と Duhamel の原理を用いて, 非斉次項が一意的に決定されることを証明した:

定理 2. $\omega \subset \Omega$ を部分領域, $T > 0$ を任意に与え, $\rho \in C^1[0,1]$ が $\rho(0) \neq 0$ であって, $a = 0$, $f \in L^2(\Omega)$ とする. この時, 次が成立する*:*

$$u|_{\omega \times (0,T)} = 0 \Longrightarrow f|_{\Omega} = 0.$$

第 2 章

本章では, 時間に関して異なる階数の非整数階微分の線型結合を持つ拡散方程式を考える. これは第 1 章で考察した単項の非整数階時間微分を持つ拡散方程式を一般化したものである. これは (1) で, $\mu = \sum_{j=1}^{\ell} q_j(x)\delta(\cdot - \alpha_j)$ $(0 < \alpha_\ell < \cdots < \alpha_1 < 1)$ とおいた場合に相当する. このような場合の初期値・境界値問題 (1) に対して, 適切なクラスでの解の一意存在及び時間が小さいときの挙動を証明した:

定理 3. $q_1 = 1$, $q_j \in W^{2,\infty}(\Omega)$ $(j = 2, \cdots, \ell)$, $B \in L^\infty(\Omega))^d$ とする. $\gamma \in [0,1)$ に対して, $C > 0$ を定数とする.

(1) $F = 0$, $a \in L^2(\Omega)$ とする. この時, (1) の解は一意的に存在し, 次が成立する*:*

$$\|u(t)\|_{H^{2\gamma}(\Omega)} \le Ct^{-\alpha_1\gamma}e^{CT}\|a\|_{L^2(\Omega)}, \quad t \in (0,T].$$

(2) $a = 0$, $F \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ とする. この時, (1) の解は一意的に存在し, 次が成立する*:*

$$\|u\|_{H^{\alpha_1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C_T\|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

証明は, Fredholm 理論及び Mittag-Leffler 関数を用いた解の固有関数展開を用いて, 初期値・境界値問題を解 u を積分方程式に関する不動点として構成することによってなされた.

次に, Laplace 変換を用いて, $t \to \infty$ のとき, 解の減衰率は時間微分の最低階数で抑えられることを示した.

定理 4. $a \in L^2(\Omega)$, $F = 0$, $B = 0$ とし, u を (1) の解とする. 非整数階微分の結合係数 q_j がすべて正の場合に, 十分大きい $t > 0$ に対して,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C\|a\|_{L^2(\Omega)}}{t^{\alpha_\ell}}$$

が成り立つ.

この章の最後で, 以下のように逆問題の一意性を証明した. 主な問題の記述のために, 非整数階微分の階数とその結合係数についての許容集合 $\mathcal{U}_\alpha = \{(\ell, \alpha_j, q_j) \in \mathbb{N} \times (0,1)^\ell \times (0,\infty)^\ell;\ \alpha_\ell < \cdots < \alpha_1\}$ を導入した.

問題 2. $x_0 \in \Omega$, $T > 0$ を任意に与え, $B = 0$, $F = 0$ とし, u を (1) の解とする. $(\ell, \alpha_j, q_j) \in \mathcal{U}_\alpha$ を, 一点での測定 $u(x_0, t)$ $(0 \le t \le T)$ で決定せよ.

定理 5. $x_0 \in \Omega$, $T > 0$ を任意に与え, $a \in H^{2\gamma}(\Omega)$ が $a \ge 0, \not\equiv 0$ であって, $B = 0$, $F = 0$ とする. u_1, u_2 をそれぞれ (ℓ_1, α_j, q_j), $(\ell_2, \beta_j, p_j) \in \mathcal{U}_\alpha$ に関する初期値・境界値問題 (1) の解とする. この時,

$$u_1(x_0, \cdot)|_{(0,T)} = u_2(x_0, \cdot)|_{(0,T)} \Longrightarrow \ell_1 = \ell_2,\ \alpha_j = \beta_j,\ q_j = p_j,\ j = 1, \cdots, \ell.$$

証明は、固有関数展開と Laplace 変換によって帰納的になされた.

第 3 章

本章では, 通常の時間に関する 1 階の微分と非整数階微分に項が混在している場合を考えた. すなわち, (1) で $\mu = \delta(\cdot - 1) + \sum_{j=1}^{\ell} q_j(x,t)\delta(\cdot - \alpha_j)$ $(0 < \alpha_\ell < \cdots < \alpha_1 < \frac{1}{2})$ とする. このような形の非整数階偏微分方程式は, 例えば, 地熱に関連して, Suzuki ら (2015) によって, 亀裂などがある地下における熱流れのモデル式として提案されている. このような方程式に対して Carleman 評価を確立することができた.

定理 6. $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ が $|\nabla \zeta| \ne 0$ であって, $\varphi := \mathrm{e}^{\lambda(\zeta(x) - \beta t^{2-2\alpha_1})}$ とし,

$$L_0 = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x,t)\partial_j)$$

とおく. さらに, $\Sigma_0 = \overline{\Omega} \times \{0\}$ と $D \subset \Omega \times (0,T)$ が有界の領域とし, D の境界線 ∂D は有限個の滑らかな超曲面の合併とする. このとき, ある定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \ge \lambda_0$ に対して, $s_0(\lambda)$ が選択でき, 任意の $u \in H^{2,1}(D)$ に対して, 次が成立する:

$$\begin{aligned}&\int_D \left\{ \frac{1}{s\varphi}|\partial_t u|^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla u|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3 u^2 \right\} \mathrm{e}^{2s\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ \le& C\int_D |L_0 u|^2 \mathrm{e}^{2s\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{C(\lambda)s}\int_{\partial D}(|\nabla u|^2 + |u|^2)\mathrm{d}S\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{C(\lambda)s}\int_{\partial D \setminus \Sigma_0} |\partial_t u|^2 \mathrm{d}S\mathrm{d}t, \quad s > s_0,\end{aligned}$$

ただし, 定数 $C > 0$ は λ_0, s_0 及び係数によって決まる定数である.

一般に Carleman 評価は逆問題の数学解析のために有用であるが, ここで確立された Carleman 評価を用いて, 境界データで解を決定する境界値問題の条件付き安定性を証明した:

定理 7. Γ は $\partial\Omega$ の任意の空でない部分境界とし, $\overline{\Omega_0} \subset \Omega \cup \Gamma$ が $\Omega_0 \ne \emptyset$ と $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \subsetneq \Gamma$ でであるとする. この時, ある定数 $C > 0$ と $\theta \in (0,1)$ が存在して, 次が成立する

$$\|u\|_{H^{1,1}(\Omega_0 \times (0,\varepsilon))} \le C\|u\|_{H^{1,1}(\Omega \times (0,T))}^{1-\theta} \widetilde{F}^\theta,$$

ただし, u を (1) の解, $\varepsilon > 0$, $\widetilde{F} := \|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{H^1(\Gamma \times (0,T))} + \|\partial_{\nu_A} u\|_{L^2(\Gamma \times (0,T))}$ とする.

第 4 章

本章では $\mu \in C[0,1]$ が $\mu \geq 0, \not\equiv 0$ の場合に, 初期値・境界値問題 (1) の適切性及び解のいくつかの重要な特性を考察した. 第一に, 固有関数展開を利用し, Laplace 逆変換により, 適切なクラスでの解の一意存在, 解析及び時間が小さいときの挙動を証明した.

定理 8. *$\mu \in C[0,1]$ が $\mu \geq 0, \not\equiv 0$ であって, $B = 0$, $C > 0$ を定数とする.*
(1) $F = 0$, $a \in L^2(\Omega)$ とする. この時, (1) の解が一意に存在し,

$$\|\partial_t^m u(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|a\|_{L^2(\Omega)} \frac{M^m m!}{t^{m+1}\log(2T/t)}, \quad t \in (0,T],\ m = 0,1,\cdots$$

が成り立つ. さらに, 解 u は t に関して領域 $(0,\infty)$ に解析的に拡張できる.
(2) $a = 0$, $F \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ とする. この時, (1) の解は一意的に存在し, 次が成立する:

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C\|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

上の定理に基づいて, (1) の解の μ と $\mathcal{A} = \mathrm{div}(D(x)\nabla)$ での拡散係数 D に関する Lipschitz 連続依存性を確立した:

定理 9. 係数の許容集合を

$$\mathcal{U}_{\alpha_0} := \{\mu \in C[0,1];\ \mu \geq 0,\ \mu(\alpha_0) > 0\},$$
$$\mathcal{U}_D := \{D \in C^1(\overline{\Omega});\ D \geq \delta\ in\ \overline{\Omega},\ \|D\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq M\}$$

で定める. $0 < \kappa < 1$, $0 < \gamma \leq 1$ を任意に与え, $a \in H^{2\gamma}(\Omega)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$, $D_1, D_2 \in \mathcal{U}_D$ とし, u_1, u_2 を (μ_1, D_1), $(\mu_2, D_2) \in \mathcal{U}_{\alpha_0} \times \mathcal{U}_D$ に関する初期値・境界値問題 (1) の解とする. このとき, 任意の $\kappa_0 \in (1-\alpha_0(1-\kappa), 1)$, $1 \leq p < \frac{1}{\kappa_0}$ に対して, ある定数 $C = C(a, \mathcal{U}_{\alpha_0}, \mathcal{U}_D, \gamma, \kappa, \kappa_0, p, T) > 0$ が存在して, 次が成立する:

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p(0,T;H^{2\kappa}(\Omega))} \leq C\left(\|\mu_1 - \mu_2\|_{C[0,1]} + \|D_1 - D_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right).$$

第二に, 解の漸近挙動を調べ, $t \to \infty$ のとき, 解は対数的に減衰することを示した:

定理 10. *$a \in L^2(\Omega)$, $F = 0$, $B = 0$ とし, u を $\mu \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ に関する初期値・境界値問題 (1) の解とする. この時, ある定数 $C = C(\mu, \mathcal{A}) > 0$ が存在して, 十分大きい $t > 0$ に対して, 次が成立する*

$$\|u(\,\cdot\,,t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C\|a\|_{L^2(\Omega)}}{\log t}.$$

この定理の最初の主張は, (1) の解により非常に遅い拡散プロセスを説明することができることを意味している.
最後に, 内部での観測データによって, (1) の重み関数 $\mu(\alpha)$ を決定する逆問題を考察した.

問題 3. *$x_0 \in \Omega$, $T > 0$ を任意に与え, $B = 0$, $F = 0$ とし, u を $\mu \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ に関する初期値・境界値問題 (1) の解とする. μ を, 一点での測定 $u(x_0,t)$ $(0 \leq t \leq T)$ で決定せよ.*

解の時間に関する解析性を用いて, 重み関数 μ を決定する逆問題における一意性を証明した:

定理 11. *$x_0 \in \Omega$, $T > 0$ を任意に与え, $\delta > 0$ が十分小さな定数とし, $a \in H^{2\gamma}(\Omega)$ $(\gamma > \max\{\frac{d}{2} + \delta - 1, 0\})$ が $a \geq 0$ であって, $B = 0$, $F \in L^2(\Omega)$ とする. この時,*

$$u_1(x_0,\cdot)|_{(0,T)} = u_2(x_0,\cdot)|_{(0,T)} \Longrightarrow \mu_1|_{[0,1]} = \mu_2|_{[0,1]}.$$

ここで, u_1, u_2 は $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ に関する初期値・境界値問題 (1) の解である.