

博士論文（要約）

電子機器の構造信頼性評価における 大規模接触解析手法に関する研究

(Large scale contact analysis method for evaluating
structural reliability of electronic devices)

稲垣 和久

目次

第 1 章	諸言	6
1.1	本研究の背景	6
1.1.1	電子機器の構造信頼性評価	6
1.1.2	電子機器の構造解析	7
1.1.3	構造解析ソフトウェア FrontISTR	8
1.2	本研究の目的	9
1.2.1	電子機器の圧迫解析に向けた内点法接触の提案	9
1.2.2	電子機器の圧迫解析に向けた接触解析の並列化手法の提案	12
1.3	本論文の構成	13
第 2 章	接触問題の定式化と解析手法	14
2.1	接触解析のための連続体力学基礎	14
2.1.1	連続体の運動の記述	14
2.1.2	変形勾配テンソル	15
2.1.3	ひずみ	15
2.1.4	保存則	16
2.1.5	応力	17
2.1.6	平衡方程式と応力の対称性	18
2.1.7	境界値問題	19
2.1.8	境界値問題の弱形式	21
2.1.9	構成則	22
2.1.10	停留ポテンシャルエネルギーの原理	23
2.2	接触力学の基礎	24
2.2.1	接触を伴う連続体	24
2.2.2	3次元空間における非貫通拘束条件	26
2.2.3	摩擦拘束条件	27
2.2.4	結合拘束条件	28
2.2.5	接触問題の弱形式と停留ポテンシャル	28
2.3	有限要素接触解析	29
2.3.1	連続体の有限要素離散化	30
2.3.2	仮想仕事の離散化	30
2.3.3	接触面の有限要素離散化	32

2.3.4	接触・結合制約の処理	35
第 3 章	内点法による接触解析の提案	38
3.1	主双対内点法による接触解析	38
3.1.1	主双対内点法	38
3.1.2	接触解析への適用	42
3.1.3	FrontISTR への実装	46
3.1.4	数値実験	51
3.1.5	まとめ	64
3.2	Mehrotra の予測子修正子法による接触解析	65
3.2.1	Mehrotra の予測子修正子法	65
3.2.2	接触解析への適用	65
3.2.3	数値実験	68
3.2.4	まとめ	71
3.3	増分解析における warm-start 法の適用	73
第 4 章	接触解析の並列計算	74
4.1	領域分割法に基づく有限要素接触解析の並列化	74
4.1.1	分散メッシュによる有限要素法の並列計算	74
4.1.2	接触解析の並列計算	77
4.2	領域分割の高速化に関する検討	79
4.3	マスタースレーブ要素による大規模並列化の提案	79
4.4	大規模電子機器モデルによる検証	79
第 5 章	結言	80
	謝辞	82

目 次

1.1	製品設計フローの例	7
1.2	内点法接触に関する既存研究に対する本研究の位置付け	12
2.1	連続体の配置	14
2.2	物体内の微小面に働く力	17
2.3	境界値問題の概念図	20
2.4	接触する連続体	25
2.5	接触面のパラメータ表示	26
2.6	投影点距離 g_N	27
2.7	node to surface 型の離散化	33
3.1	目的関数の等高線表示例	39
3.2	FrontISTR のシステム構成と入力 of 概念図	47
3.3	内点法接触の call 部分	48
3.4	内点法のメインルーチンの流れ	49
3.5	接触データ構造体と内点法における活用方法	50
3.6	fstrMAT 構造体	51
3.7	モデル 1: 接触する 2 本のはり	52
3.8	モデル 2: 接触する 2 枚の平板	52
3.9	モデル 3: スマートフォンケースモデル	53
3.10	モデル 4: ノートパソコン画面圧迫解析	53
3.11	モデル 4: ノートパソコン展開図	54
3.12	モデル 3 の最大変位コンター	56
3.13	モデル 3 の接触圧コンター	56
3.14	モデル 4 の変位コンター	57
3.15	モデル 4 の接触圧コンター	57
3.16	モデル 1 における μ の収束履歴	59
3.17	モデル 1 における σ の履歴	59
3.18	モデル 2 における μ の収束履歴	60
3.19	モデル 2 における σ の履歴	60
3.20	モデル 3 における μ の収束履歴	61
3.21	モデル 3 における σ の履歴	61

3.22	モデル 4 における μ の収束履歴	62
3.23	モデル 4 における σ の履歴	62
3.24	モデル 2 で荷重を変化させた場合における接触候補対の個数の変化	63
3.25	接触可能性のある制約の個数と有効制約法 (ASM) および主双対内点法 (IPM) の反復回数との関係	64
3.26	モデル 5 : ノートパソコン・キーボードプレート圧迫解析	69
3.27	モデル 5 : メッシュ図	70
3.28	モデル 5 : 最大変位コンター : 上段が有効制約法、中段が主双対内点法、下段が予測子修正子法	72
4.1	メッシュの領域分割イメージ . 左 : 全体メッシュ , 右 : 分割例 . 赤の要素はオーバーラップ要素 (後述)	75
4.2	節点ベースの領域分割例 (3 領域の場合) . 灰色の要素がオーバーラップ要素 .	75
4.3	FrontISTR の並列実行	77
4.4	接触により新たな通信が発生する例	78
4.5	接触条件の主な領域分割法	79

表 目 次

1.1	電子機器の構造解析項目	8
1.2	主な接触解析アルゴリズムとその特性	10
3.1	モデル規模	54
3.2	各ペナルティ値に対する最大接触圧	55
3.3	各モデルでの最大節点変位	55
3.4	各モデルでの最大接触圧	55
3.5	主双対内点法と有効制約法の反復回数	58
3.6	各モデルでの最大節点変位	71
3.7	3手法の反復回数	71
3.8	モデル 5 の実計算時間	71

第1章 諸言

1.1 本研究の背景

1.1.1 電子機器の構造信頼性評価

現代の情報化社会において、人やシステムが情報処理を行うために、あるいは通信網を通じてコミュニケーションをとるために、電子機器は欠くことのできないデバイスである。特にノートパソコンやスマートフォンといったデバイスに代表されるように、構成部品の軽薄短小化や移動通信網の整備が進むにつれて電子機器の運搬はごく一般的となり、その使用環境や要求仕様、設計方針は従来から大きく変わってきている。使用環境に関しては、持ち運ばれる機会が増えることによって、移動中のカバンの中で受ける圧迫や手元から落としてしまった際の衝撃などから、ディスプレイや基板、チップ接合部などの機能部分を保護する重要性が増している [24]。要求仕様に関しては、機器の運搬が前提となった昨今、一層薄くて軽いながらも堅牢な筐体を実現することが求められるようになった。また屋外や生活環境での利用を想定した防水機能も求められるようになった。これを受けて、薄型化や小型化の進む構成部品をもって強度を担保するために複数の部品で分担して荷重を受けようとする、生活環境の中で筐体内部に浸水しないよう確実に封止する構造にする [33] など、構造設計に求められる課題は従来より複雑で解決が困難になっている。それでいて安価な海外製品に対抗するために、各メーカーは低コストかつ短い開発期間で、効率的に高品質な製品の設計・製造を進めなければならない現状におかれている。このように、ポータブル電子機器の設計・製造においては、運搬や生活環境での使用を前提とする構造信頼性を、効率的な開発によって担保することが重要になっている。

図 1.1 に一般的な製品設計フローを示す。製品設計フローは商品企画から始まり、構想設計、詳細設計、量産設計と段階を踏んで最終的な製品設計を決めていく。その過程の詳細設計や量産設計などの段階で、製品の構造信頼性を担保するために前述の使用環境を想定した圧迫試験、防水試験、振動試験などを実施し、結果を製品設計にフィードバックする。しかしながら、後工程になるほど試験で不具合が発覚した場合の手戻りが深刻になるため、開発効率化およびコスト削減を目指す上では出来る限り上流の工程、特に構想設計の段階から不具合要因を検出して除くことが求められている。

限られた開発期間の中で構造設計の品質を確保するために、近年各企業において CAE (Computer Aided Engineering) の導入が進められている。目的の一つは、従来実物での試験で実施していた構造評価を計算機による数値シミュレーションで代替することによって、試作回数を減らし開発期間の短縮やコスト削減を実現することである。もう一つの目

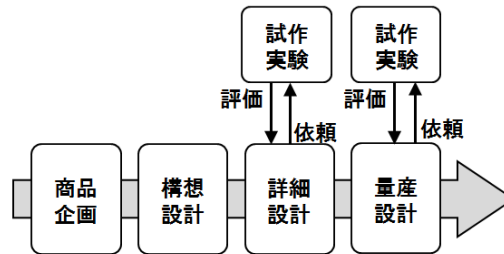


図 1.1: 製品設計フローの例

的は、従来試験を行う段階でなかった構想設計においてもシミュレーションによる構造信頼性の評価を実施することで、構造に関する課題の早期発見や設計品質向上を実現することである。

CAEの手続きは、CADの形状データ、材料情報、想定する試験環境を元に解析モデルを作成するプリ処理、モデル化された問題を主として有限要素法ソルバによって解く処理、結果の可視化および評価を行うポスト処理からなる。CAEによって前述の目的を達成するにあたっては、実現象を解析に反映するための的確なモデル化や、プリ処理手番やソルバ実行時間の短縮が重要な課題である。

1.1.2 電子機器の構造解析

本小節では、電子機器の構造信頼性評価を目的に実施される解析について概観し、その現状と課題について述べる。表 1.1 に電子機器の主な構造解析項目を示す。

モバイル機器の落下解析は、主として落下時のディスプレイ割れやはんだ実装部の破損の有無を評価する目的で行われる。

プリント基板の熱反りは、リフロー工程で加熱された際に配線銅と樹脂の線膨張ギャップによって反りが発生する現象で、はんだ未接続等の原因となる。これまで樹脂の粘弾性および線膨張の異方性を考慮した熱応力解析によって反りを予測する検討が行われてきた [34, 35]。

はんだの熱疲労解析は、はんだが長期にわたって温度変化が繰り返されることにより、接合部付近においてき裂が発生する現象を解析するために実施される。解析方法としては、はんだに熱荷重を加えた際の非線形ひずみ振幅を見る方法 [37, 36]、などが知られている。

電子機器の構造解析の中でも近年特に重要性が増しているのが、モバイル機器の圧迫解析である。製品の圧迫試験では数十か所に及ぶポイントに対して順に荷重を加えていき、それらの圧迫条件の中で対象の部品が破損に至らないかを評価するため、解析でも同様に数十ケースの計算が実行される。そのため1つの案件に対して実行される解析の数が他の解析と比べて多く、解析手番が長期化しやすい傾向がある。

表 1.1: 電子機器の構造解析項目

	対象	現象	解析種類
動的	モバイル機器	落下による破損	動解析直接法
	サーバ・ネットワーク機器	地震動や運搬時の振動による破損	周波数応答
静的	プリント基板	リフロー時の熱反り	熱応力
	はんだ	熱疲労による接合部破損	熱応力
	モバイル機器	圧迫による画面割れ, チップ剥離	接触
	サーバ機器	開閉時のヒンジ破損 自重による変形	接触 接触

最近のモバイル機器では複数の部品を組み合わせで筐体全体の強度を担保する設計が一般的になっており、解析においても多数の部品を同時に考慮したモデルを使う必要が生じている。具体的には、製品の 3D-CAD モデルに対して部品毎にメッシュ分割を行い、それらの間に接触条件および多点拘束条件を付与して装置全体の構造を模擬する。ところでポータブル電子機器は、液晶ディスプレイやプリント基板、カバーといった多数の薄型部品が重なり、それらの隙間に外部コネクタやチップ、HDD などの部品が配置されるなど、多数の薄型部品が密に配置されるという構造的な特徴がある。そのため前述の手順で解析モデルを作成する際には、部品間の接触制約を至る所で考慮する必要があるほか、多数のねじ止め等の結合拘束も考慮する必要がある。結果として解くべき問題は、規模が大きいだけでなく接触・拘束条件ともに非常に多い接触問題となる傾向がある。

接触問題に関しては Wriggers[22] に定式化と主要なアルゴリズムがまとめられている。摩擦無し接触問題は制約付き最適化問題として定式化され、その解法としては接触・非接触の状態を探索する有効制約法と、非貫入制約を処理するペナルティ法、ラグランジュ乗数法、拡張ラグランジュ乗数法 [19] 等を組み合わせる方法が広く用いられている [8, 7]。しかしポータブル電子機器装置の圧迫解析のように自由度、制約条件数ともに多い問題に有効制約法を適用すると、接触状態の決定までに多数の反復を要してしまう問題がある。考慮すべき部品点数は年々増えつつあり、またモデル作成における形状簡略化作業の省略による手番短縮、解析の高精細化の需要もあるため、ここで述べた特性を持つ有限要素接触解析の高速化、大規模化は重要な課題となっているものの、このような接触問題の収束性に関する議論は現状行われていない状況である。

1.1.3 構造解析ソフトウェア FrontISTR

計算機環境はメニーノード、メニーコア化が進んでおり、計算の高速化を考える上で並列計算機の性能を生かすことは欠かせない観点である。このような並列計算環境を念頭において開発され、スケーラブルな有限要素構造解析の機能を提供するフリーソフトウェアとして FrontISTR[26, 27] が近年注目されている。FrontISTR は領域分割法に基づいて有

限要素構造解析の処理を並列化しており，非常にスケール性能が高い．また幾何学的非線形，材料非線形，そして接触による境界非線形など多様な非線形構造解析の機能を有する．さらに公開されているソースコードは，適切に構造化されたデータ構成とモジュール構造によって可読性が高い．このように並列性能だけでなく高い実用性，カスタマイズ性を持つことから，FrontISTR は研究機関だけでなく企業からも注目されているソフトウェアである．本研究においても，提案手法を実現・検討するための基本ツールとして FrontISTR を積極的に活用していく．

1.2 本研究の目的

本研究の主たる目的は，電子機器の圧迫解析を想定した大規模接触問題に対し，効率的な計算手法を確立することである．そのために本研究では二つの方法によって目的の達成を目指す．ひとつは，自由度と比べて多数の接触制約を含むという問題の特性に注目し，このような問題に有利な数値解法を構築する数理的なアプローチ方法である．もうひとつは，電子機器モデルは接触可能面積が広い一方で，接触点の滑りは少ない特性に注目し，本問題に有利な並列化手法を構築する計算機科学的なアプローチ方法である．以下に本研究によって得られる接触解法，および並列計算法について述べる．

1.2.1 電子機器の圧迫解析に向けた内点法接触の提案

主な接触解析アルゴリズムとその違い

数理的なアプローチの説明にあたり，表 1.2 に接触解析アルゴリズムとそれぞれの特性のまとめを示す．ここでは接触解析アルゴリズムを，接触の不等式制約を有効制約法によって等式制約問題に帰着する方法と，それ以外の方法によって不等式制約を直接扱う方法に大別する．前者に属する方法には Penalty 法，拡張 Lagrange 法，変数直接消去，Lagrange 乗数法などが，後者に属する方法にはバリア関数法，接触力関数，内点法などが知られている．それぞれに制約条件の精度，接線剛性行列の数値的特性や実装の簡便さに違いがあり，一般に接触問題を解く際には問題の規模・性質や計算環境に応じて適切なものを選択する必要がある．表 1.2 中の制約に関しては，Lagrange 法が制約条件を厳密に満たす他は，全て制約を近似的に満たす解法である．ただし，拡張 Lagrange 法や後述する内点法においては，反復計算によって制約の満たす精度を任意に高めることが可能となっている．

接触解析において解くべき方程式の係数行列は，Penalty 項，バリア項あるいは Lagrange 項による対角ゼロなどによって一般に悪条件となるため，線形方程式ソルバには基本的に直接法が使われる．それとは別に電子機器モデルは板形状を多く含むため，接触制約が無い状態でも行列が悪条件であるという理由からも直接法が使用される．但し直接法は大規模になると必要メモリ量や計算量が急激に増大するため，問題が大規模になると反復法でしか解が求められなくなる．その際には，使える接触解法は拡張 Lagrange 法で Penalty 値

表 1.2: 主な接触解析アルゴリズムとその特性

探索方針	変数	制約条件の処理	制約	行列	実装	実用上の課題
有効制約法と等式制約問題の解法を組み合わせ	主変数のみ	Penalty法	×近似的	×悪条件	○容易	×制約精度の確認要
		拡張Lagrange法（乗数法）	△近似的・反復改良可	△Penalty次第	○容易	×反復が増える
		変数直接消去	○厳密	○共有節点相当	×煩雑	×線形のみ
	主・双対	Lagrange乗数法	○厳密	△不定値	×煩雑	
不等式制約を直接扱う	主変数のみ	バリア関数法	×近似的	×悪条件	○容易	×制約精度の確認要
		接触力関数	×近似的	×悪条件	○容易	×汎用性無 ×制約精度の確認要
	主・双対	(主双対)内点法	△近似的・調整可	×悪条件	○容易	

を小さくするか，Lagrange 乗数法でゼロ対角を消去する等の前処理を行う等の方法に限られる．

実装に関しては，行列構造を拡張もしくは縮小する必要がある Lagrange 乗数法と変数直接消去の他は，接触剛性を全体剛性行列に加算するだけでよく簡便に実施可能である．

前述の通り，電子機器の接触解析には接触状態を組合せ的に扱わない方法が適していると考えられることから，本研究では不等式制約を直接扱う方法，中でも後述する内点法に注目して効率的な解法の検討を行う．この方法の適用は直接法で解ける範囲の規模の問題に限られるが，本研究の数値実験において十分大きな規模の問題まで解けることを示す．直接法で解けない規模の問題については，反復法ソルバと拡張 Lagrange 法を組み合わせる方法を高並列化することによって解く方法を検討する．こちらの内容は並列化手法の検討において述べる．

内点法

ポータブル電子機器の圧迫解析の効率的な解法として，本研究では内点法 [32, 23] に注目する．内点法は線形計画問題に対して N. Karmarkar により提案された Karmarkar 法 [10] に基づく一連の不等式制約付き最適化問題の解法の総称であり，制約領域内部を通して最適点に収束する内点列を構成する特徴がある．最も基本的な内点法は主変数のみを未知変数として扱うもので，主内点法と呼ばれる．その後主変数と制約条件から生じる双対変数の両方を未知変数として解く主双対内点法が提案され，主内点法より効率的な解法として知られている [12]．内点法は対象とする問題クラスを拡張しながら様々な実問題へ適用され [16, 9]，現在では本研究が対象とする接触問題を含む非線形最適化問題も解けるようになっている．

電子機器圧迫解析への内点法接触の拡張

内点法は当初 Christensen ら [5] によって摩擦あり接触問題に導入されたが、当時検証されたモデル規模が小さかったためか、semismooth Newton 法と比べ安定性や収束性に欠け

るとされた。しかしながら大規模問題や自由度に対して制約条件の多い問題に対して有効制約法より有利と期待されており [31]，この点に注目して再び接触解析への適用も行われている．Tanou ら [20] が線形弾性体と剛体の摩擦無し接触問題に主双対内点法を適用したほか，宮村ら [29] による主内点法の線形弾性体同士の節点-節点の摩擦無し接触問題への適用例がある．また，宮村は更に内点法と有効制約法の組合せによって収束を加速する方法についても検討を行っている [30, 15]．本研究では内点法接触を多点拘束を含む電子機器圧迫問題に適用可能な形に拡張し，電子機器の圧迫解析を高速化させる方法を提案する．この方法はペナルティ法によって多点拘束条件を無制約化したのち，その問題に対して主双対内点法を適用する．また装置モデルの接触面におけるメッシュは一般に不整合であるため，接触モデルを節点-要素面接触へ拡張する．これらによって，内点法による接触解析が電子機器の圧迫解析に適用可能となる．また，このアルゴリズムを実装した FrontISTR を用いて電子機器モデルによる数値検証を行い，電子機器装置解析において既存手法より高い収束性が得られることを示していく．

予測子修正子法による収束性の改善

主双対内点法は収束性の改良が進んでおり，特に Mehrotra の提案した予測子修正子法 [14] は収束性の保証は与えられていないものの，実際に問題を高速に解けるとして多くの商用パッケージで利用されている．本研究では，前小節にて拡張を行った内点法接触に対して予測子修正子を用いることで，さらに高い収束性を得られることを示す．

warm-start 法による増分解析での収束性改善

一般的な有限変形問題・増分解析の場合へ拡張するにあたって，標準的な主双対内点法は前ステップで得られた近似解を利用して反復回数を減らすことができないため，有効制約法と異なり総計算時間をあまり短縮できない課題があった．良い近似解を初期解として用いることで反復回数を減らす手法は warm-start と呼ばれるが，これを実現する方法として，ペナルティ項をバリア関数に付与して制約条件を緩和する方法が提案されている [3, 4]．本研究では，この方法に基づいて増分解析における内点法接触の収束性を向上する手法を提案する．これを FrontISTR に実装し，複数の解析モデルで精度および収束性に関する数値的検証を行う．

内点法接触に関する本研究の位置付け

内点法接触に関し，これまでに述べた本研究と既存研究の関係のまとめを図 1.2 に示す．既存の主双対内点法による接触解析に対して，本研究では接触モデルの拡張を行って電子機器モデルにおける有効性を確認した．これは本論文における第 3.1 節の内容である．更に本論文の第 3.2 節において，これを予測子修正子法によって高速化することを提案する．

また予測子修正子法とは別のアプローチとして、増分解析の場合の接触解析を warm-start 法によって高速化する方法を提案したものが本論文第 3.3 節の内容である。

接触 \ 収束性	低	高
線形解析 Node to Rigid接触 Node to Node接触	Christensen, 1998 Tanoh, 2006 (主双対内点法)	Miyamura, 2010 有効制約シフト
線形解析 Node to Surface接触 結合接触の考慮 + 電子機器で検証	本研究3.1節 ↓	本研究3.2節 予測子修正子法(Mehrotra, 1992)による高速化
大変形・増分解析Node to Surface接触 結合接触の考慮 + 電子機器で検証	本研究3.3.1節 ↓	本研究3.3.2-5節 warm-start法(Benson 2008)による高速化

図 1.2: 内点法接触に関する既存研究に対する本研究の位置付け

1.2.2 電子機器の圧迫解析に向けた接触解析の並列化手法の提案

接触解析の並列化手法の提案に先立ち、本研究では領域分割処理の高速化について検討を行った。FrontISTR によって分散並列計算を行う場合には、全体メッシュを分解して得られる部分領域の情報を格納した分散領域メッシュを用意する必要がある。FrontISTR では全体メッシュから分散領域メッシュを生成する領域分割ツール「パーティショナ」が提供されているが、特に大規模なモデルで分散並列計算をする場合には一旦分割した分散メッシュをさらに細分するリファイナの使用が提案されている [25]。しかしながら、一方で先述のプリント基板反りの解析で詳細な配線パターンを模擬する場合など、先に粗いメッシュを切って後から細分する方法では形状を再現できないケースもあり、大規模なメッシュを直接パーティショナにかける使い方も必要とされている。ところが FrontISTR の領域分割処理においては、特に大規模かつ多領域分割の場合に処理時間が大幅に増加する問題が出ていた。

本研究では分割処理にかかる時間の分析を行い、その結果、領域間の通信テーブル作成における通信節点の検索が計算時間増の原因であることが判明した。さらに通信節点の検索方法について、処理速度とメモリ使用量両方の観点で効率的な方法について検討を行った。本論文では、この手法によって実際の大規模モデルにて大幅な高速化が得られることを示す。

次に接触を含む場合の領域分割について考える。単一領域のメッシュでは領域分割による並列化が非常に有効であるが、接触を含む問題の場合では、元々離れた節点・要素面が接触することによって新たに発生する通信の管理が必要になり、特に接触面が広い場合や詳細にメッシュ分割されている場合に効率が落ちやすい。

そこで本研究では、電子機器装置に関する接触解析において有効な並列化手法として、マスタースレーブ要素による接触解析の並列化を提案する。この方法では、node to surface 型の接触における個々の接触制約について、事前に slave 節点と master 要素面の構成節点からなる要素を生成し、通常の連続体要素と一体に領域分割を行い並列計算を行う。このような固定コネクティビティに基づく方法は、事前に作成した節点要素面間の関係しか処理できないため、節点要素面の関係が解析途中で変わる大滑り接触の解析には不向きである。しかし電子機器装置の解析のように、滑りの少ないモデルであればその影響は無い一方で、マスタースレーブ要素は通常の連続体要素とデータ構造上の区別が無いために、一般的な並列接触と違って接触用の通信機構を別途用意する必要がない、接触剛性や接触反力計算を通常の連続体要素における計算と同様に実装できる、領域分解において接触による通信が自動的に反映されるなど、プログラム実装および並列計算上の利点がある。本研究では実際に接触問題をマスタースレーブ要素によって並列に計算するシステムを FrontISTR をベースに構築し、大規模サーバモデルを含む電子機器モデルでの検証を通じてその有効性を示す。

1.3 本論文の構成

本論文では、第2章において接触を含む固体の連続体力学の基礎方程式について有限要素離散化した式を導出する。特に本研究で対象とする結合拘束を含む摩擦なし node to surface 接触問題が、節点変位を変数とする不等式制約付き非線形最適化問題に帰着することを説明する。

続いて第3章において、電子機器の圧迫解析に有効な接触解法として内点法による接触解析を提案する。始めに標準的な主双対内点法を導入し、これを FrontISTR に実装、実際の電子機器モデルを用いた数値実験を行った。これにより、標準的な有効制約法より提案手法が有利であることが確かめられる。次に Mehrotra の予測子修正子法によって提案手法がさらに高速化されること、warm-start によって増分解析において前ステップの解を活用して高速に解を得られることを示す。これらについても FrontISTR へのプログラム実装を行い、実際の電子機器モデルにて性能を確認している。

第4章においては、初めに有限要素法の領域分割について、接触が無い場合、ある場合の基礎事項を述べる。次に接触解析の並列化手法の提案に先立って、領域分割処理の高速化について検討を行った結果を述べる。最後の節にて、電子機器圧迫解析向けの並列手法として、マスタースレーブ要素による並列接触を提案する。本研究では節点数 1,000 万弱のサーバモデルを用いて、本手法の並列性能、および内点法による計算例を示す。

第5章において、本研究の成果及び今後の課題について述べる。

第2章 接触問題の定式化と解析手法

連続体の変形は一般的に変位-ひずみ関係，ひずみ-応力関係（構成則），平衡方程式から定まる．接触・結合を含む問題の場合は，それらに接触・結合制約が加わった系となり，接触解析ではこれを有限要素離散化して数値的に解く．本章では，本論文で用いる接触問題の定式化と一般に使われる解析手法を示す目的で，有限変形理論 [1, 28] とそれに基づく接触解析理論 [22] について説明する．

2.1 接触解析のための連続体力学基礎

2.1.1 連続体の運動の記述

基準時刻 $t = 0$ において領域 Ω_0 を占める物体についてこの配置を基準配置とし，各物質点の位置ベクトルを X で表す．変形によって物質点 X が現時刻 t において x まで移動したとし，その際に物体が占める領域を Ω とする．このとき，物質点の時刻 $t = 0$ から t までの変位ベクトル u は

$$u = x - X \quad (2.1)$$

によって定義される．また，物質点の速度，加速度をそれぞれ $v = \dot{u}$, $a = \ddot{u}$ で定義する．これらの関係を図 2.1 に示す．

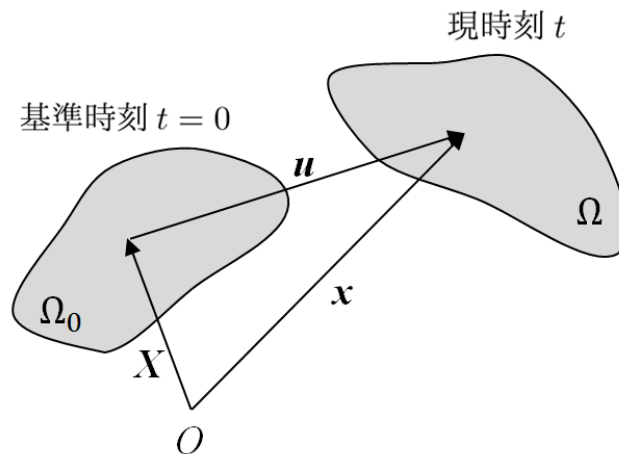


図 2.1: 連続体の配置

2.1.2 変形勾配テンソル

変形勾配テンソル F は

$$F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{or} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.2)$$

で定義される．これは変形前の初期配置と変形後の現配置を関連づける重要な量であり，変形やひずみを表現するために用いられる．このとき，現配置での位置ベクトルの微小変化 $d\mathbf{x}$ と物質配置での位置ベクトルの微小変化 $d\mathbf{X}$ の間の関係は，変形勾配テンソルを用いて

$$d\mathbf{x} = F \cdot d\mathbf{X} \quad \text{or} \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad (2.3)$$

として表すことができる．変形勾配テンソルは特異，すなわち $\det F = 0$ であってはならず，常に逆の関係

$$d\mathbf{X} = F^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

が存在するような変形のみを対象とする．これは物質点が変形前後で一対一に対応することに相当する．

2.1.3 ひずみ

物体の変形の尺度としては，単位長さあたりの伸びを用いる微小ひずみが最も基本的である．しかし微小ひずみは回転の剛体運動に対して不変でない（0 でない値を持ってしまう）性質があり，有限変形の場合に用いることは不適切である．有限変形においては回転の剛体運動に関して不変なひずみ測度を用いる必要があり，そのようなひずみ測度として，ここでは後に用いる Green-Lagrange ひずみの説明を行う．

基準配置での二つの微小ベクトル $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ に対し，これらに対応する変形後の微小ベクトルを $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2$ とする．このとき，これらの微小ベクトルの内積について変形前後の差を考える．これは式 (2.2) で定義した変形勾配テンソルおよびその性質 (2.3) より

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 &= (F \cdot d\mathbf{X}_1) \cdot (F \cdot d\mathbf{X}_2) - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot (F^T \cdot F - I) \cdot d\mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

与えられる． $F^T \cdot F$ は右 Cauchy-Green 変形テンソルと呼ばれ， C と表記される．Green-Lagrange ひずみ E は右 Cauchy-Green 変形テンソルを用いて

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^T \cdot F - I) \quad (2.5)$$

と定義される．このように定義した Green-Lagrange ひずみが回転不変性を持つことは，変形勾配テンソルを右極分解することによって容易に示すことができるが，ここではその証明は割愛する．

なお Green-Lagrange ひずみは変位勾配に関する項を用いて，次のように成分表示できる：

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (2.6)$$

とくに微小変形，すなわち $|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}| \ll 1$ のとき 2 次の項は無視でき，このとき Green-Lagrange ひずみは

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad (2.7)$$

すなわち微小ひずみテンソルに一致する．

2.1.4 保存則

質量保存則

物体の質量 m の保存則は，基準配置および現配置での質量密度それぞれ ρ_0, ρ として

$$\dot{m} = \int_{\Omega} \rho dv = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV = \text{const.} \quad (2.8)$$

で与えられる． $J = \det \mathbf{F}$ とおくと，微小体積要素について $dv = JdV$ であるから

$$\int_{\Omega} \rho dv = \int_{\Omega_0} \rho J dV \quad (2.9)$$

より，質量密度について $\rho_0 = J\rho$ の関係が成り立つ．

運動量保存則

物体に作用する単位質量あたりの物体力を \mathbf{g} ，単位面積あたりの表面力を \mathbf{t} とする．物体全体のおけるこれらの和は運動量の速度と等しく，

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dv \right) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} dv + \int_{\Gamma} \mathbf{t} ds \quad (2.10)$$

が成り立つ（Euler の第 1 運動法則）．Reynolds の輸送定理および $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ より，上式は

$$\int_{\Omega} \rho (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dv = \int_{\Gamma} \mathbf{t} ds \quad (2.11)$$

と表すことができる．一方，角運動量については，物体力および表面力のモーメントと運動量のモーメントの速度が等しい，すなわち

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv \right) = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (2.12)$$

が成立する (Euler の第 2 運動法則) . この式も Reynolds の輸送定理および $\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ より

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (2.13)$$

と表すことができる .

2.1.5 応力

図 2.2 に示すように , 現配置において物体内の微小面 ds に作用する力が $d\mathbf{f}$ であるとし , 応力ベクトル \mathbf{t}_n を

$$\mathbf{t}_n = d\mathbf{f}/ds \quad (2.14)$$

とする .

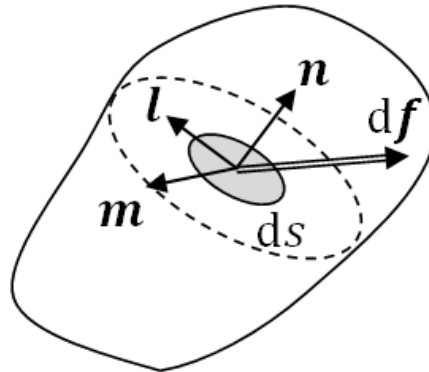


図 2.2: 物体内の微小面に働く力

ここで , xy, yz, zx 平面および \mathbf{n} と垂直な平面で囲まれる微小四面体 (Cauchy の四面体) と , この微小四面体内部における Euler の第 1 運動法則を考えることにより , 応力ベクトルと微小面の法線ベクトルの間に線形関係

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \quad (2.15)$$

が成り立つことが知られている . これを Cauchy の公式と言う . 式 (2.15) におけるテンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy の応力テンソルと呼ばれる .

次に第 1Piola-Kirchhoff 応力テンソルについて述べる . 第 1Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{P} は公称応力とも呼ばれ , $d\mathbf{f}$ をそのまま変形前の微小面に作用させたときの応力テン

ソルである．すなわち， N, dS をそれぞれ基準配置において，変形前の微小面の法線方向，面積とするととき，

$$df = P^T \cdot N dS \quad (2.16)$$

によって定まる応力テンソルである．このとき微小面の変形に関する Nanson の公式 $F^T \cdot nds = JN dS$ および

$$P^T \cdot N dS = df = \sigma^T \cdot nds \quad (2.17)$$

より，Cauchy 応力テンソルと第 1Piola-Kirchhoff 応力テンソルの間には

$$\sigma = \frac{1}{J} F \cdot P \quad (2.18)$$

なる関係があることが分かる．

最後に第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルについて述べる．第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル S は， df をそのままではなく，変形勾配テンソルの逆変換 F^{-1} によって基準配置に写した上で変形前の微小面に作用させたときの応力テンソルである．すなわち

$$S^T \cdot N dS = F^{-1} \cdot df \quad (2.19)$$

で定まる応力テンソルである．上式に式 (2.16) および式 (2.18) を適用することにより，Cauchy 応力テンソルと第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルの間には

$$\sigma = \frac{1}{J} F \cdot S \cdot F^T \quad (2.20)$$

なる関係があることが分かる．また式 (2.18) および式 (2.20) を組み合わせることで，第 1Piola-Kirchhoff 応力テンソルと第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルの関係式

$$P = S \cdot F^T \quad (2.21)$$

が導ける．

2.1.6 平衡方程式と応力の対称性

これまでに導入した各種応力テンソルと先述の保存則より，平衡方程式と応力の対称性を示す式を得ることができる．

平衡方程式

始めに平衡方程式を導出する．Euler の第 1 運動法則から導かれた式 (2.11) に Cauchy 則 (2.15) を代入して発散定理を用いることにより，

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{a} - \mathbf{g}) dv = \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma dv \quad (2.22)$$

が成立する．これは物体の任意の部分領域において成立するので，これによって平衡方程式

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad \text{or} \quad \rho a_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.23)$$

が示される．平衡方程式は現配置で記述される式 (2.23) の形がもっとも標準的であるが，以降の議論で有用となるため，ここでは基準配置で記述した平衡方程式も導出しておく．式 (2.11) を今度は基準配置で表してから式 (2.17) および発散定理を適用すると

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dV = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\Omega_0} \operatorname{DIV} \mathbf{P} dV \quad (2.24)$$

が成り立つ．ここで，DIV は基準配置での divergence を意味する．これも物体の任意の部分領域において成立するので，基準配置での平衡方程式

$$\rho_0 \mathbf{a} = \operatorname{DIV} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_0 \mathbf{g} \quad (2.25)$$

を得る．なお，ここで式 (2.21) を用いて応力テンソルを第 2Piola-Kirchhoff 応力に変換した．

応力の対称性

Euler の第 2 運動法則から導かれた式 (2.13) に Cauchy 則 (2.15) を代入し，発散定理を用いて式変形を行うことにより，次式を得る：

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} \mathbf{e}_k dv, \quad (2.26)$$

ここで ε_{ijk} はエディントンのイプシロン， \mathbf{e}_k は物体の属するユークリッド空間の正規直交基底である．これが物体中の任意の部分空間で成立することおよび平衡方程式 (2.23) より

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} \mathbf{e}_k = 0 \quad (2.27)$$

が成り立つ．これが成立するための条件は $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ，すなわち

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.28)$$

である．したがって Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は対称であり，3 次元空間であれば独立な 6 個の成分からなることが分かる．なお式 (2.20) より，第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルも対称であることが確認できる．

2.1.7 境界値問題

これまでに定義したひずみ測度，応力，平衡方程式に基づき，物体に対する境界値問題を定義する．

境界値問題 [BP] 図 2.3 に示す領域 Ω を占める物体があり, その境界 Γ には変位境界条件が表面力 t のいずれかが与えられているものとする. 変位境界条件が与えられる部分領域を Γ_B , 表面力が与えられる部分領域を Γ_t とし, $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_t$ かつ $\Gamma_B \cap \Gamma_t = \phi$ とする. 領域 Ω には体積力 ρg が作用するとき, 平衡方程式を満たす変位 $u \in \mathcal{V}$ を求めよ. ここで \mathcal{V} は変位境界条件を満たす一価連続の関数の全体とする.

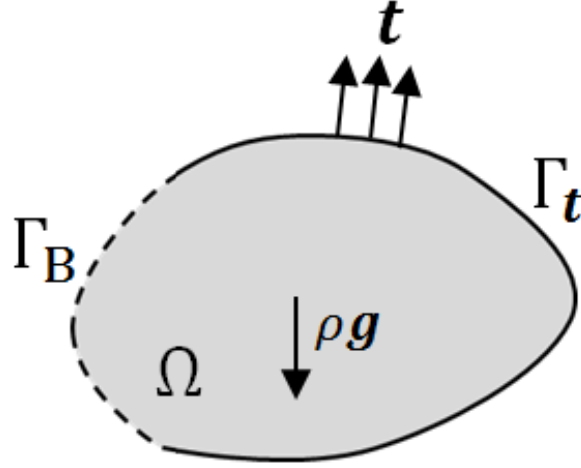


図 2.3: 境界値問題の概念図

境界値問題 [BP] について, 本論文では以下のように基準配置に基づく定式化を行う.

[BPEQ]

1. 平衡方程式: 式 (2.25) on Ω_0
2. 境界条件

$$u = \bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_{B0} \quad (2.29)$$

$$(S \cdot F^T)^T \cdot n = t \quad \text{on} \quad \Gamma_{t0} \quad (2.30)$$

3. 応力・ひずみ関係 (構成則)
4. 変位・ひずみ関係: 一般に構成則に対応するものが選ばれる.

ここで, 右下の添字に 0 を付してある領域は, 基準配置において各々の領域と対応する領域を表す.

2.1.8 境界値問題の弱形式

有限要素法で境界値問題 [BPEQ] を解くにあたっては，その弱形式の導出が必要になる．ここではその導出を行う．弱形式の導出にあたって，テスト関数を

$$\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U} = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in C^0(X), \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{B0}\}. \quad (2.31)$$

と定義する．まず平衡方程式 (2.25) の両辺にテスト関数 $\delta \mathbf{u}$ を乗じて， Ω_0 上で体積積分することにより

$$\int_{\Omega_0} \delta u_i \left(\frac{\partial(S_{jk}F_{ik})}{\partial X_j} + \rho_0 g_i - \rho_0 a_i \right) dV = 0 \quad (2.32)$$

を得る．ここで積の微分から

$$\int_{\Omega_0} \delta u_i \frac{\partial(S_{jk}F_{ik})}{\partial X_j} dV = \int_{\Omega_0} \frac{\partial(\delta u_i S_{jk}F_{ik})}{\partial X_j} dV - \int_{\Omega_0} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j} S_{jk}F_{ik} dV \quad (2.33)$$

が得られ，さらに式 (2.33) の右辺第 1 項に発散定理を適用することで

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\partial(\delta u_i S_{jk}F_{ik})}{\partial X_j} dV &= \int_{\Gamma_0} \delta u_i N_j (S_{jk}F_{ik}) dS \\ &= \int_{\Gamma_{t0}} \delta u_i t_i dS \end{aligned} \quad (2.34)$$

が得られる．なお 2 つ目の等式はテスト関数の定義 (2.31) と境界条件 (2.30) による．式 (2.32) に式 (2.33) および式 (2.34) を代入し，

$$\delta F_{ij} = \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) = \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.35)$$

であることに注意すると，次の弱形式が得られる：

$$\int_{\Omega_0} (\delta F_{ij} S_{jk} F_{ik} - \delta u_i \rho_0 g_i + \delta u_i \rho_0 a_i) dV - \int_{\Gamma_{t0}} \delta u_i t_i dS = 0. \quad (2.36)$$

ここで S_{ij} の対称性より

$$\begin{aligned} \delta F_{ij} S_{jk} F_{ik} &= \frac{1}{2} \delta F_{ij} S_{jk} F_{ik} + \frac{1}{2} \delta F_{ik} S_{kj} F_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \delta F_{ij} S_{jk} F_{ik} + \frac{1}{2} \delta F_{ik} S_{jk} F_{ij} \\ &= S_{jk} \frac{1}{2} \delta (F_{ij} F_{ik}) \\ &= S_{jk} \delta \left(\frac{1}{2} (C_{jk} - \delta_{jk}) \right) = S_{jk} \delta E_{jk} \end{aligned}$$

であるから，式 (2.36) は

$$\int_{\Omega_0} (S_{jk} \delta E_{jk} - \rho_0 g_i \delta u_i + \rho_0 a_i \delta u_i) dV - \int_{\Gamma_{t0}} \delta u_i t_i dS = 0 \quad (2.37)$$

これを整理した上でテンソル表記すると，最終的に

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \delta \mathbf{E} + \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (2.38)$$

を得る．これが基準配置による境界値問題の弱形式である．この弱形式は仮想仕事の原理として知られている．特に静解析の場合は加速度項を無視して

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (2.39)$$

となる．

2.1.9 構成則

本小節では材料構成則として，弾性材料についてのみ説明を行う．実際には，接触は物体間の境界部分で起こる現象であり，接触問題の定式化は物体の材料構成則と独立に行うことができるので，解析においては任意の材料構成則を用いることが可能である．より複雑な構成則に関しては，例えば [1] などに詳しい．

線形弾性体

微小ひずみや大回転を含む多くの工学的問題において，大変形の影響は回転によるものであるとされており，このような問題では，第 2Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみに関する線形関係がよく用いられる．このような材料は Saint Venant-Kirchhoff 材料もしくは Kirchhoff 材料と呼ばれ，最も一般的なモデルは

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad \text{or} \quad \mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.40)$$

である．ここで， \mathbf{C} は 4 階の弾性テンソルである．Saint Venant-Kirchhoff 材料は経路に依存せず，弾性ひずみエネルギーに支配された材料である．実際，単位体積当たりのひずみエネルギーは，

$$w = \int S_{ij} dE_{ij} = \int C_{ijkl} E_{kl} dE_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.41)$$

であり，このとき応力はこの w によって

$$S_{ij} = \frac{\partial w}{\partial E_{ij}} \quad \text{or} \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.42)$$

となるので，変形後のひずみ状態によってのみ定まることが確認できる．

超弾性体

超弾性体は，次式に示すように弾性ポテンシャル関数 $W(C)$ が存在し，これをひずみ成分で微分することにより共役な応力成分が得られる材料として定義される：

$$S = 2 \frac{\partial W(C)}{\partial C} = \frac{\partial w(E)}{\partial E}. \quad (2.43)$$

ここで w は W を右 Cauchy-Green 変形テンソル C の代わりに Green-Lagrange ひずみ E の関数として表した場合の弾性ポテンシャル関数であり， $E = \frac{1}{2}(C - I)$ より $w(E) = W(2E + I)$ の関係がある．先述の線形弾性体は，超弾性体の特別な場合と見ることができ．特に一様な等方材料を仮定する場合には，弾性ポテンシャル関数は C の主値の関数として表されることが知られている．すなわち，

$$I_C = \text{tr} C \quad (2.44)$$

$$II_C = \frac{1}{2} \{(\text{tr} C)^2 - \text{tr}(C^2)\} \quad (2.45)$$

$$III_C = \det C \quad (2.46)$$

とするとき，弾性ポテンシャル関数は以下の式で表される：

$$W(C) = W(I_C, II_C, III_C). \quad (2.47)$$

このとき，応力は微分の連鎖律および $\frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij}$, $\frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} = I_C \delta_{ij} - C_{ij}$, $\frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = III_C (C^{-1})_{ij}$ から

$$\begin{aligned} S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial II_C} I_C \right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} III_C (C^{-1})_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

として得ることができる．具体的な弾性ポテンシャル関数としては，

Neo-Hook 体 $W = c_1(I_C - 3) + (III_C - 1)^2/D_1$

Mooney-Rivlin 体 $W = c_1(I_C - 3) + c_2(II_C - 3) + (III_C - 1)^2/D_1$

などが知られている．

2.1.10 停留ポテンシャルエネルギーの原理

静解析において弾性ポテンシャル関数が存在する場合，内力および外力による全ポテンシャルエネルギー Φ を

$$\Phi = \int_{\Omega_0} W dV - \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.49)$$

と定義する．このとき，式 (2.43) および $C_{ij} = 2E_{ij} + \delta_{ij}$ より $\delta C_{ij} = 2\delta E_{ij}$ に注意して全ポテンシャルエネルギー Φ の変分を取ると

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} dV - \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ &= \int_{\Omega_0} S_{ij} \delta E_{ij} dV - \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV\end{aligned}\quad (2.50)$$

となるので，仮想仕事の原理式 (2.39) の成立と全ポテンシャルエネルギー Φ が停留することは同値である．特に $\partial^2 W / \partial^2 C$ が正定値であれば Φ は局所的に最小となる．全ポテンシャルエネルギーの局所最小条件と仮想仕事の原理が等価であることは，内点法で接触問題を解くにあたっての重要な基礎事項である．

2.2 接触力学の基礎

本節では，前節で説明した連続体が2つ以上存在し，それらが互いに接触また結合する場合の力学について説明する．本節では2つの連続体間の接触・結合について説明するが，2つ以上の連続体間の接触・結合へ容易に拡張することができる．

2.2.1 接触を伴う連続体

はじめに本論文で用いる連続体および接触領域の表示法について述べる．図 2.4 に2つの接触する連続体を示す．物体 k ($k = 1, 2$) について，基準配置および現配置において物体 k が占める領域をそれぞれ $\Omega_0^{(k)}$, $\Omega^{(k)}$ と表記する．また $\Omega_0^{(k)}$ の境界の一部を「時刻 t において接触する可能性のある領域」と仮定し，それを $\Gamma_c^{(k)}$ と表す．そしてそれらが現配置において占める領域を $\gamma_c^{(k)}$ とする．また $\mathbf{X}^{(k)} \in \Omega_0^{(k)}$ の移動先の点を $\mathbf{x}^{(k)} \in \Omega^{(k)}$ と表記する．

ここで $\Gamma_c^{(k)}$ は接触を考慮する範囲を限定するために便宜上導入される既知の集合であり，各点が実際に現配置で接触しているかどうかとは直接的には無関係である．現配置で実際に接触している領域は未知であり，解析においては実際に接触が発生している領域の決定と，その領域に発生している接触力の決定の両方が必要になる．

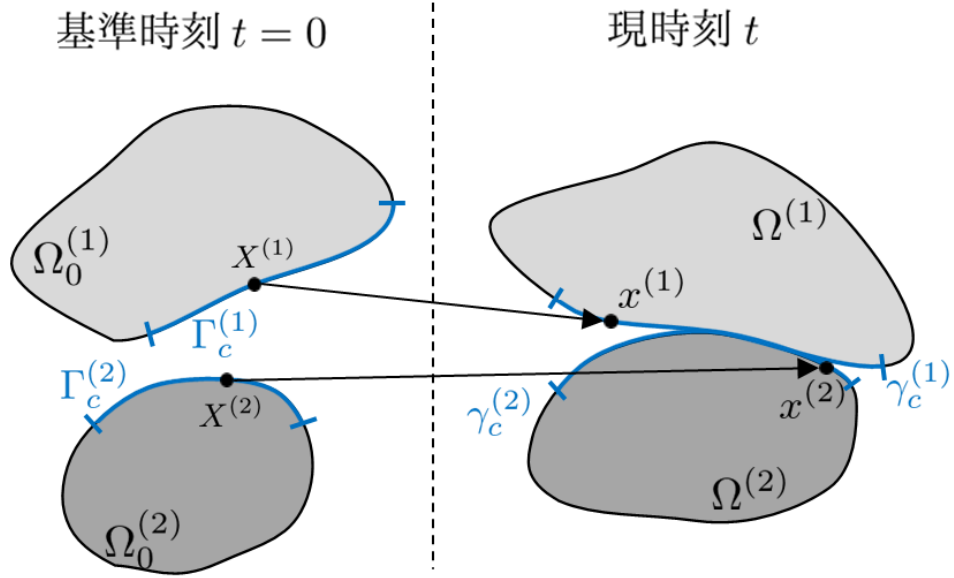


図 2.4: 接触する連続体

接触は物体の表面 $\Gamma_0^{(k)}$ 上で起こるため，接触解析の議論においては接触面をパラメータ表示することが一般的である．図 2.5 に接触面のパラメータ表示の概念図を示す．境界 $\Gamma_0^{(k)}$ は空間次元数 (d とする) より次元が 1 少ない領域である．ここで $\Gamma_0^{(k)}$ が連続であると仮定し，これがパラメータ表示可能，すなわち $\Gamma_0^{(k)}$ 上の全ての点について $\mathcal{A}^{(k)} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ への滑らかな一対一写像が存在すると仮定する．このとき $\Gamma_0^{(k)}$ 上の点 $X^{(k)}$ をパラメータ ξ を用いて $X^{(k)} = X^{(k)}(\xi)$ と表す．現配置で X に対応する点 x については，基準配置の各点を現配置の各点写す写像 $\varphi(X^{(k)}, t)$ によって $x = \varphi(X^{(k)}(\xi), t)$ とパラメータ表示できる．以降ではこれを簡単に $x^{(k)} = x^{(k)}(\xi)$ と表記する．

基準時刻 $t = 0$

現時刻 t

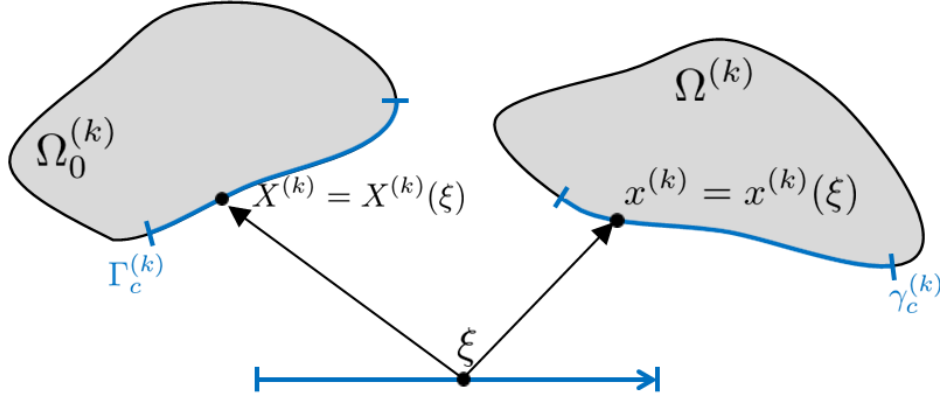


図 2.5: 接触面のパラメータ表示

2.2.2 3次元空間における非貫通拘束条件

以降では3次元空間における連続体の接触を考える．始めに接触面間の距離として投影点距離を定義する． $x^{(1)} \in \gamma_c^{(1)}$ の面 $\gamma_c^{(2)}$ への投影点を $\bar{x}^{(2)}$ ，すなわち

$$\bar{\xi} = \arg \min_{\xi \in \mathcal{A}^{(2)}} \|x^{(1)} - x^{(2)}(\xi)\|, \quad (2.51)$$

$$\bar{x}^{(2)} = x^{(2)}(\bar{\xi}) \quad (2.52)$$

とする．ここで $\gamma_c^{(2)}$ が投影点近傍で凸であると仮定すると，距離関数 $\|x^{(1)} - \bar{x}^{(2)}(\xi)\|$ の停留条件より $\bar{\xi}$ が満たすべき条件

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \|x^{(1)} - x^{(2)}(\xi)\| \right|_{\xi=\bar{\xi}} = \frac{x^{(1)} - \bar{x}^{(2)}}{\|x^{(1)} - \bar{x}^{(2)}\|} \cdot x_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\xi}) = 0 \quad (2.53)$$

が得られ，距離ベクトル $x^{(1)} - x^{(2)}(\bar{\xi})$ と $x_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\xi})$ が直交することが分かる．ところで， $a_\alpha^{(2)}(\bar{\xi}) = x_{,\alpha}^{(2)}(\bar{\xi})$ ($\alpha = 1, 2$) は点 $x^{(2)}(\bar{\xi})$ における面 $\gamma_c^{(2)}$ の2つの接ベクトルであるので，式 (2.53) は距離ベクトル $x^{(1)} - x^{(2)}(\bar{\xi})$ と点 $x^{(2)}(\bar{\xi})$ における面 $\gamma_c^{(2)}$ の法線ベクトル

$$\bar{n}^{(2)} = n^{(2)}(\bar{\xi}) = \frac{a_1^{(2)}(\bar{\xi}) \times a_2^{(2)}(\bar{\xi})}{\|a_1^{(2)}(\bar{\xi}) \times a_2^{(2)}(\bar{\xi})\|} \quad (2.54)$$

が平行であることを意味している．したがって， $x^{(1)} \in \gamma_c^{(1)}$ と面 $\gamma_c^{(2)}$ 間の投影点距離 g_N は距離ベクトルの法線方向距離に等しく

$$g_N = (x^{(1)} - \bar{x}^{(2)}) \cdot \bar{n}^{(2)} \quad (2.55)$$

となる．以上の概要を図 2.6 に示す．

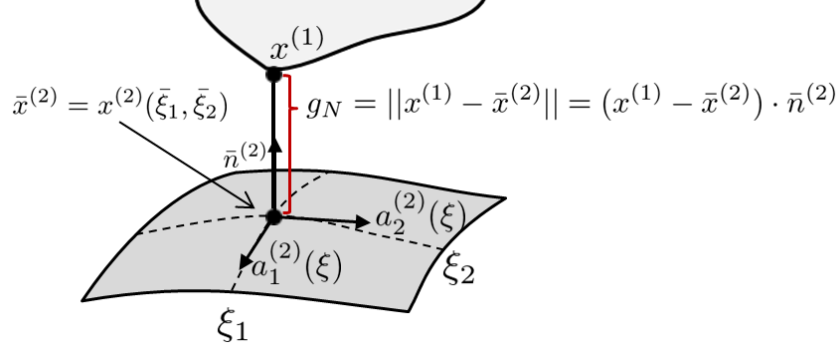


図 2.6: 投影点距離 g_N

さらに点 $x^{(1)} \in \gamma_c^{(1)}$ が面 $\gamma_c^{(2)}$ と接触，すなわち $x^{(1)} = \bar{x}^{(2)}$ のとき， $\bar{x}^{(2)}$ に作用する単位面積あたりの法線方向接触力を t_N とする． t_N は $\bar{n}^{(2)}$ と反対方向を正の方向に取る．ここでは後に内点法を適用するために，通常の接触理論とは逆向きに定義していることに注意されたい．このとき，2 つの物体の非貫通拘束条件は

$$g_N \geq 0 \quad (2.56)$$

$$t_N \geq 0 \quad (2.57)$$

$$g_N t_N = 0 \quad (2.58)$$

で与えられる．式 (2.56) は接触点同士の距離が必ず 0 以上である非貫入制約条件，式 (2.57) は接触力が常に圧縮力であることを意味している．式 (2.58) は相補性条件であり，式 (2.56) および (2.57) と合わせることで，接触の状態は接触 ($g_N = 0$) して圧縮力が働く ($t_N \geq 0$) か，非接触で ($g_N > 0$) 圧縮力が働かない ($t_N = 0$) かのいずれかであることを示している．

2.2.3 摩擦拘束条件

本論文では摩擦無し接触の場合のみ議論を行うが，一般に接触面内に摩擦が存在する場合には，非貫通拘束条件に加えて以下に示す摩擦条件を考慮する必要がある．

$$f_s(t_N, t_T) \leq 0, \quad (2.59)$$

$$v_T = \dot{\zeta} \frac{t_T}{\|t_T\|}, \quad (2.60)$$

$$\dot{\zeta} \geq 0, \quad (2.61)$$

$$f_s \dot{\zeta} = 0. \quad (2.62)$$

ここで f_s はすべり限界関数であり，摩擦の構成則によって様々に変わる関数である． t_T は摩擦力ベクトル， v_T は距離ベクトルの接線方向成分（相対すべり）の速度 $d(\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)} - g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)})/dt$ ， $\dot{\zeta}$ はすべりパラメータである．式 (2.59)，式 (2.61) および式 (2.62) は相補性条件になっており， f_s および $\dot{\zeta}$ は $f_s \leq 0$ かつ $\dot{\zeta} = 0$ または $f_s = 0$ かつ $\dot{\zeta} \leq 0$ のいずれかであることを示している．式 (2.60) より $\dot{\zeta} = 0$ のとき $v_T = 0$ なので，前者は換言すればすべり限界関数が 0 以下のときは相対すべりが 0，すなわち固着状態にあることを意味している．また式 (2.60) より，後者はすべり限界関数が 0 のときには摩擦力と平行な相対すべりが生じる，すなわちすべり状態にあることを意味している．

例えばクーロン摩擦を考慮する場合には，すべり摩擦関数として次の関数を用いる：

$$f_s(t_N, t_T) = t_N - \mu \|t_T\|. \quad (2.63)$$

式 (2.63) は面内接触力が法線方向接触力に比例する摩擦限界に達したときに限ってすべりが発生することを示している．

2.2.4 結合拘束条件

2 つの物体の結合拘束条件について述べる．結合拘束は基準配置において投影点距離 g_N が 0 である 2 点について，常に

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}(\bar{\xi}) = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

を課す制約である．結合拘束では基準配置の時点で制約条件が与えられる領域を決定するため，拘束が課される領域 $\Gamma_{tie}^{(k)}$ は既知であるとする．また結合による拘束力 t_{tie} は，接触と異なり法線方向に引っ張り力が働く場合でも解除されない．

一般には基準配置における投影点のパラメータ $\bar{\xi}_0 = \bar{\xi}(X^{(1)}, X^{(2)})$ と現配置における投影点のパラメータ $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x^{(1)}, x^{(2)})$ は一致しないが，基準配置を現配置に移す写像を φ とするとき， $x^{(2)}(\bar{\xi}) = \varphi(X^{(2)}(\bar{\xi}))$ および制約 (2.64) より $x^{(2)}(\bar{\xi}) = x^{(1)} = \varphi(X^{(1)}) = \varphi(X^{(2)}(\bar{\xi}_0))$ であることから， $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$ すなわち投影点のパラメータは定数として扱ってよいことが分かる．

2.2.5 接触問題の弱形式と停留ポテンシャル

摩擦なし接触と結合拘束条件を考慮する静応力解析について，その支配方程式は以下の通りである：

[BPEQwithCT]

$$\text{DIV}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Omega_0^{(k)}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad \Gamma_{B0}^{(k)}, \quad (2.66)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on} \quad \Gamma_{t0}^{(k)}, \quad (2.67)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{n} = -t_N \mathbf{n} \quad \text{on} \quad \Gamma_c^{(k)}, \quad (2.68)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{tie} \quad \text{on} \quad \Gamma_{tie}^{(k)}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_{tie}^{(k)}, \quad (2.70)$$

$$g_N \geq 0, \quad (2.71)$$

$$t_N \geq 0, \quad (2.72)$$

$$g_N t_N = 0. \quad (2.73)$$

式 (2.65) から式 (2.69) にテスト関数 $\delta \mathbf{u}$ を乗じ、領域全体について積分を行う。境界値問題 [BPEQ] の弱形式の導出と同様の手続きによって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_0^{(k)}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_0^{(k)}} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_{t0}^{(k)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \\ &+ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(k)}} -t_N \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_{tie}^{(k)}} \mathbf{t}_{tie} \cdot \delta \mathbf{u} ds \end{aligned} \quad (2.74)$$

が得られるので、有限要素離散化して解く際には、接触・結合を考慮した仮想仕事式 (2.74) を制約式 (2.70) から式 (2.73) の下で解くことになる。特に弾性ポテンシャルの存在が仮定される場合、これらの条件は以下の最適化問題

$$\text{minimize } \Phi_c = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_0^{(k)}} W dV - \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_{t0}^{(k)}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS - \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_0^{(k)}} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV, \quad (2.75)$$

$$\text{subject to} \quad g_N \geq 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_c^{(k)}, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_{tie}^{(k)} \quad (2.77)$$

における停留条件であることが知られている。[22]。

2.3 有限要素接触解析

本節では、前節までに説明した連続体力学に基づく接触問題の有限要素離散化について説明する。

2.3.1 連続体の有限要素離散化

有限要素法による解析では，連続体である物体の領域 Ω は有限個の要素を用いて

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_e \Omega^e \quad (2.78)$$

と近似される．これに伴い，領域もしくは境界の積分は要素もしくは要素面ごとの積分に分解して計算される．すなわち

$$\int_{\Omega} dv \approx \sum_e \int_{\Omega^e} dv, \quad (2.79)$$

$$\int_{\Gamma} ds \approx \sum_e \int_{\Gamma^e} ds. \quad (2.80)$$

一般的な有限要素法構造解析の手続きに則り，要素内部の物質点座標と変位場は節点値と要素の補間関数を用いて次式のように内挿する：

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{n_e} N_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \quad \text{or} \quad u_i = N_{\alpha} u_{i\alpha} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{X} = \sum_{\alpha=1}^{n_e} N_{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} \quad \text{or} \quad X_i = N_{\alpha} X_{i\alpha} \quad (2.82)$$

ここで n_e は要素の構成節点数であり， $N_{\alpha} (\alpha = 1, \dots, n_e)$ は補間関数， $\mathbf{u}_{\alpha} = (u_{i1}, \dots, u_{in_e})$ は節点変位， $\mathbf{X}_{\alpha} = (X_{i1}, \dots, X_{in_e})$ は節点座標である．要素内でのひずみや応力等の諸物理量は，このように補間された変位と，変位・ひずみ関係式および材料構成則から計算される．

2.3.2 仮想仕事の離散化

前述の離散化を元に仮想仕事の離散化を行う．始めに内力仮想仕事について，式 (2.39) より

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \approx \sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \sum_e \int_{\Omega_0^e} S_{ij} \delta E_{ij} dV. \quad (2.83)$$

ここで式 (2.6) をもとに Green-Lagrange ひずみの変分を成分表示すると

$$\begin{aligned} \delta E_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} (N_{\alpha,j} \delta u_{i\alpha} + N_{\alpha,i} \delta u_{j\alpha} + N_{\alpha,i} \delta u_{k\alpha} N_{\beta,j} u_{k\beta} + N_{\alpha,j} \delta u_{k\alpha} N_{\beta,i} u_{k\beta}) \\ &= \delta u_{k\alpha} B_{ijk\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

を得る．ただし $N_{\alpha,i} = \partial N_\alpha / \partial X_i$ であり，

$$B_{ijk\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}(N_{\alpha,j}\delta_{ik} + N_{\alpha,i}\delta_{jk} + N_{\alpha,i}N_{\beta,j}u_{k\beta} + N_{\alpha,j}N_{\beta,i}u_{k\beta}) \quad (2.85)$$

である．これを式 (2.83) に代入すると，離散化された内力仮想仕事 W_{int}^h は

$$\begin{aligned} W_{int}^h &= \sum_e \int_{\Omega_0^e} S_{ij} \delta E_{ij} dV \\ &= \sum_e \int_{\Omega_0^e} S_{ij} \delta u_{k\alpha} B_{ijk\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{X}) dV \\ &= \sum_e \delta u_{k\alpha} \int_{\Omega_0^e} S_{ij} B_{ijk\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{X}) dV \\ &= \sum_e \delta u_{k\alpha} Q_{k\alpha}^e(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.86)$$

ここで

$$Q_{k\alpha}^e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0^e} S_{ij} B_{ijk\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{X}) dV \quad (2.87)$$

は，要素 e の節点 α に作用する内力の第 k 成分である．

次に外力仮想仕事について，同様に式 (2.39) より

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS &\approx \sum_e \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \sum_e \int_{\Gamma_{t0}^e} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \\ &= \sum_e \int_{\Omega_0^e} \rho_0 g_k \delta u_k dV + \sum_e \int_{\Gamma_{t0}^e} t_k \delta u_k dS \end{aligned} \quad (2.88)$$

であるから，離散化された外力仮想仕事 W_{ext}^h は

$$\begin{aligned} W_{ext}^h &= \sum_e \int_{\Omega_0^e} \rho_0 g_k \delta u_k dV + \sum_e \int_{\Gamma_{t0}^e} t_k \delta u_k dS \\ &= \sum_e \delta u_{k\alpha} \left(\int_{\Omega_0^e} \rho_0 g_i N_\alpha dV + \int_{\Gamma_{t0}^e} t_i N_\alpha dS \right) \\ &= \sum_e \delta u_{k\alpha} F_{k\alpha}^e. \end{aligned} \quad (2.89)$$

ここで

$$F_{k\alpha}^e = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 g_i N_\alpha dV + \int_{\Gamma_{t0}^e} t_i N_\alpha dS \quad (2.90)$$

は，要素 e の節点 α に作用する外力の第 k 成分である．

以上により，接触・結合を考慮しない場合の離散化された仮想仕事式は，式 (2.39) より $W_{int}^h - W_{ext}^h = 0$ であるから

$$\sum_e \delta u_{k\alpha} (Q_{k\alpha}^e(\mathbf{u}) - F_{k\alpha}^e) = 0 \quad (2.91)$$

となる．これが任意の離散化されたテスト関数 $\delta \mathbf{u}$ について成立することと， $Q_{k\alpha}^e(\mathbf{u}) - F_{k\alpha}^e$ が節点変位の関数となっていることから，解くべき式は最終的に節点変位 \mathbf{u} に関する非線形連立方程式に帰着されることがわかる．これは一般に Newton 法などの非線形方程式の解法によって数値的に解くことができる．

2.3.3 接触面の有限要素離散化

次に接触面の有限要素離散化を行う．接触面は有限要素離散化された連続体の表面要素の集合として表される．接触面要素内の座標値および変位を，連続体の時と同様に節点値と要素の補間関数を用いて次式のように内挿する：

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} N_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_{\alpha} \quad \text{or} \quad u_i = N_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) u_{i\alpha} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{X} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} N_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_{\alpha} \quad \text{or} \quad X_i = N_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) X_{i\alpha} \quad (2.93)$$

ここで n_s は面要素の構成節点数であり， $\boldsymbol{\xi}$ は面要素の局所座標系である．

接触点の探索

このようなアイソパラメトリックな離散化の場合，面要素の局所座標系を接触面を表すパラメータ空間 $\mathcal{A}^{(k)} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ として用いることができ，面要素の補完関数から投影点の座標を具体的に求められるようになる．実際，面 $\gamma_c^{(1)}$ 上の点 $\mathbf{x}^{(1)}$ と面 $\gamma_c^{(2)}$ 上の要素面 γ_c^e を任意に一つ固定するとき，要素面 γ_c^e への投影点に対応するパラメータ $\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{\xi}}$ は

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})\| \quad (2.94)$$

$$= \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_{\alpha}^{(2)} N_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\| \quad (2.95)$$

で与えられるが，これは距離関数

$$l(\boldsymbol{\xi}) = \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_{\alpha}^{(2)} N_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\|^2 \quad (2.96)$$

を最小にする $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ であり， $l(\boldsymbol{\xi})$ に Newton 法を適用することで求められる．ここで述べた探索は，対象とする個々の要素面に対する投影点と対応する局所座標を求めるも

のであり，ローカルサーチと呼ばれる．接触探索においては面全体に対する投影点が必要のため，接触可能な全要素面の中から投影点距離が最小になる要素面を特定する必要があり，その探索はグローバルサーチと呼ばれる．本章の以降の議論では，グローバルサーチによって最近傍となる要素面が特定されているものとして議論を行う．

接触仮想仕事の離散化

本論文では接触力の離散化として，最も標準的であり FrontISTR にも採用されている node to surface 型の離散化 [2, 6] を考える．node to surface 接触では物体 1 を slave 物体，物体 2 を master 物体として区別し，連続的な接触力のつり合いを，slave 物体表面の節点 x_s と x_s の master 要素面への投影点 x_m 間の接触力のつり合いに置き換える（図 2.7）．

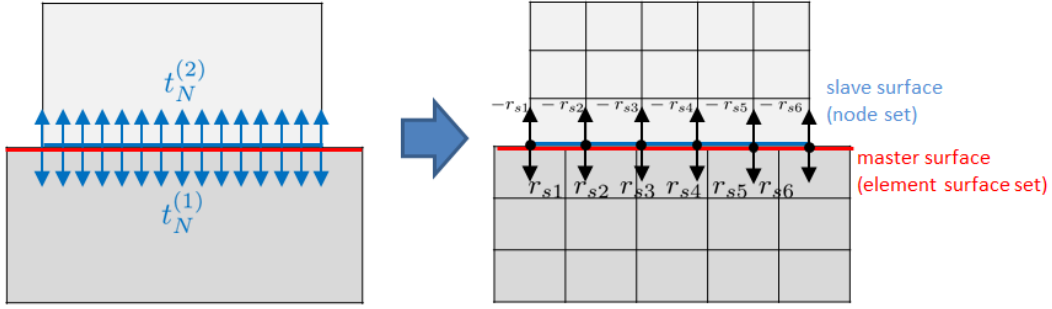


図 2.7: node to surface 型の離散化

具体的には，接触力に関する仮想仕事を x_s における集中接触力 r_s を用いて

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\gamma_c^{(k)}} -t_N \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds \approx \sum_{s \in SL} +r_s \mathbf{n}_m \cdot \delta \mathbf{u}_s - r_s \mathbf{n}_m \cdot \delta \mathbf{u}_m = W_c^h \quad (2.97)$$

と置き換える．ここで SL は slave 節点ラベルの集合であり， \mathbf{n}_m は master 面投影点における外向き単位法線ベクトルである．以降では法線ベクトルは master 面側のみ登場するため，簡単に \mathbf{n} と書く．さらに投影点の局所座標を $\bar{\xi}$ とし master 要素面の補完関数を $N_\alpha(\xi)$ とすると，

$$W_c^h = \sum_{s \in SL} r_s \mathbf{n} \cdot (\delta \mathbf{u}_s - N_\alpha(\bar{\xi}) \delta \mathbf{u}_\alpha) = \sum_{s \in SL} \delta u_{k\alpha'} r_s n_k M_{\alpha'} = \sum_{s \in SL} \delta u_{k\alpha'} r_s T_{k\alpha'}. \quad (2.98)$$

ここで $u_{i\alpha'} = u_{is}$ ($\alpha' = 1$ のとき) および $u_{i\alpha'} = u_{i\alpha'-1}$ ($\alpha' > 1$ のとき)， $M_{\alpha'} = 1$ ($\alpha' = 1$ のとき) および $M_{\alpha'} = -N_{\alpha'-1}$ ($\alpha' > 1$ のとき) とし， $T_{k\alpha'} = n_k M_{\alpha'}$ とおいた．接触の非貫通拘束条件は接触圧 t_N を接触力 r_n に置き換え，各 slave 節点毎に与えられる．

結合拘束に関する仮想仕事についても node to surface 型の離散化を行う．接触と同様に，拘束力に関する仮想仕事を x_s における集中拘束力 $t_{tie,s}$ を用いて

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\gamma_{tie}^{(k)}} t_{tie} \cdot \delta \mathbf{u} ds \approx \sum_{s \in SL'} t_{tie,s} \cdot \delta \mathbf{u}_s - t_{tie,s} \cdot \delta \mathbf{u}_m = W_t^h \quad (2.99)$$

と離散化する． SL' は結合に関する slave 節点ラベルの集合である．このとき，結合拘束による成分表示は

$$W_c^h = \sum_{s \in SL'} \delta u_{k\alpha'} t_{tie,sk} M_{\alpha'} \quad (2.100)$$

となる．結合拘束制約 (2.64) は接触同様各 slave 節点毎に与えられる．

以上により，接触・結合を考慮する場合の離散化された仮想仕事式は，式 (2.74) より $W_{int}^h - W_{ext}^h - W_c^h - W_t^h = 0$ であるから

$$\sum_e \delta u_{k\alpha} (Q_{k\alpha}^e(\mathbf{u}) - F_{k\alpha}^e) - \sum_{s \in SL} \delta u_{k\alpha'} r_s T_{k\alpha'} - \sum_{s \in SL'} \delta u_{k\alpha'} t_{tie,sk} M_{\alpha'} = 0 \quad (2.101)$$

となる．これが任意の離散化されたテスト関数 $\delta \mathbf{u}$ について成立すること， $Q_{k\alpha}^e(\mathbf{u})$, $F_{k\alpha}^e$, $T_{sk\alpha'}$ が節点変位の関数となっていることから，解くべき式は最終的に節点変位 \mathbf{u} ，接触力 r ，結合拘束力 t_{tie} に関する制約付き非線形連立方程式に帰着される．

以降の議論のために，節点物理量および接触力，結合拘束力のベクトル表記を定義しておく．節点変位ベクトル \mathbf{u} を，節点ラベル・自由度の順に昇順で並べたベクトル

$$\mathbf{u} = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, \dots, u_{n3})^T \quad (2.102)$$

と定義する．次に内力ベクトル \mathbf{Q} を，内力仮想仕事 W_{int}^h における仮想変位 $\delta_{i\alpha}$ の係数を，節点変位ベクトルと同じ順で並べたベクトルとする．すなわち

$$\forall \delta u_{i\alpha} \sum_e \delta u_{k\alpha}^e Q_{k\alpha}^e = \delta u_{i\alpha} Q_{i\alpha} \quad (2.103)$$

なる $Q_{i\alpha}$ に対して $\mathbf{Q} = (Q_{11}, \dots, Q_{n3})$ で与えられるベクトルとする．外力ベクトル \mathbf{F} も外力仮想仕事 W_{ext}^h に対して内力ベクトルと同様に定義する．接触方向への射影ベクトル \mathbf{T}_s ，結合係数ベクトル \mathbf{B}_{sk} も，対応する仮想仕事 W_c^h ， W_t^h に対して

$$\forall \delta u_{i\alpha} \delta u_{k\alpha'}^s T_{k\alpha'}^s = \delta u_{i\alpha} T_{si\alpha} \quad (s \in SL) \quad (2.104)$$

$$\forall \delta u_{i\alpha} \delta u_{k\alpha'}^s M_{\alpha'}^s = \delta u_{i\alpha} B_{ski\alpha} \quad (s \in SL') \quad (2.105)$$

を満たす成分を並べたベクトルとする．このとき，投影点距離 g_N (2.55) や結合拘束条件 (2.64) はこれらのベクトルを用いて

$$g_{Ns} = \mathbf{T}_s^T \mathbf{x} \quad (2.106)$$

$$\mathbf{B}_{sk}^T \mathbf{u} = 0 \quad (2.107)$$

と表せる．離散化された結合拘束式 (2.107) は，有限要素構造解析では多点拘束とも呼ばれる．

任意の仮想変位に対して式 (2.101) が成り立つことと，接触の非貫入制約条件，結合の拘束条件から，最終的に解くべき離散化された方程式は

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) - \mathbf{F} - \sum_{s \in SL} r_s \mathbf{T}_s(\mathbf{u}) - \sum_{s \in SL'} t_{tie,sk} \mathbf{B}_{sk} = \mathbf{0} \quad (2.108)$$

$$u_{i\alpha} = \bar{u}_{i\alpha} \quad (i \in \Gamma_b^h) \quad (2.109)$$

$$r_s \geq 0, \quad g_{Ns} \geq 0, \quad r_s g_{Ns} = 0 \quad (s \in SL) \quad (2.110)$$

$$\mathbf{B}_{sk}^T \mathbf{u} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \text{ and } s \in SL') \quad (2.111)$$

ここで材料に弾性ポテンシャルの存在が仮定される場合，各要素内で補完された変位から計算した Green-Lagrange ひずみを \mathbf{E}^e とし， \mathbf{E}^e から計算された弾性ポテンシャル関数を w^e とすると

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \sum_e \int_{\Omega_0^e} w^e(\mathbf{u}) dV = \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \quad (2.112)$$

となることに注意すると，連続の場合と同様に，式 (2.108) から式 (2.111) は次の最適化問題

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad \Phi_c^e = \sum_e \int_{\Omega_0^e} w^e(\mathbf{u}) dV - \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (2.113)$$

$$\text{subject to} \quad g_{Ns} \geq 0 \quad (s \in SL) \quad (2.114)$$

$$\mathbf{B}_{ks}^T \mathbf{u} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \text{ and } s \in SL') \quad (2.115)$$

における Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件) になっていることがわかる．

2.3.4 接触・結合制約の処理

これまでの議論により，結合拘束を含む摩擦無し接触問題は式 (2.113) から式 (2.115) で与えられる最適化問題（もしくはその停留条件である式 (2.108) から式 (2.111)）を解くことに等しいことが分かった．有限要素法解析ではこのような最適化問題の解法として，接触・非接触の状態を探索する有効制約法と，等式制約条件を処理する Penalty 法，Lagrange 乗数法，拡張 Lagrange 乗数法等を組み合わせる方法が広く用いられている．以下ではこの方法により接触問題を解く方法について説明する．

有効制約法による有効な接触拘束の決定

有効制約法 (active set 法) は，はじめに初期接触状態などから各接触制約が接触・非接触のどちらの状態にあるかを仮定し，接触状態にある不等式制約のみを等式制約に置き換え，その等式制約問題を解く方法であり，試行錯誤法とも呼ばれる．

有効制約法の手続きは以下の通りである．はじめに active set $A \subset SL$ を，初期状態で接触にある slave 節点ラベルの集合

$$A = \{s \in SL | g_{Ns} \leq 0\} \quad (2.116)$$

と定義する． r_s の初期値は 0 であるとし， $\bar{A} = SL/A$ とする．次に $s \in A$ の非貫入制約 $g_{Ns} \geq 0$ を等式制約 $g_{Ns} = 0$ に置き換えた問題を解く．このとき問題は等式制約のみになる．等式制約の処理は後述する Penalty 法，Lagrange 乗数法，拡張 Lagrange 法等によって行うが，一般には非線形方程式を解くことになるので Newton 法による反復計算が行われる．その結果得られた変位・接触力について， $s \in A$ の接触制約の中に式 (2.110) を満たさないものがあればそれを active set A から \bar{A} に移し， $s \in \bar{A}$ の接触制約の中に式 (2.110) を満たさないものがあればそれを \bar{A} から active set A に追加する．再び新たな active set に対して同じ処理を繰り返し，active set の更新が起こらなくなった時点で処理を終了する．以下にその手続きを示す：

有効制約法の手続き

1. 基準配置において $A = \{s \in SL | g_{Ns} \leq 0\}$ とする．
2. $g_{Ns} \geq 0$ ($s \in SL$) を等式制約 $g_{Ns} = 0$ ($s \in A$) に置き換えた問題を解く
3. active set の更新： $s \in A$ について式 (2.110) を満たさなければ（この場合 $r_s < 0$ ） \bar{A} へ， \bar{A} について式 (2.110) を満たさなければ（この場合 $g_{Ns} < 0$ ） $s \in A$ へ移す．
4. 判定：active set の更新で移動が生じなければ終了，そうでなければ 2 へ．

Lagrange 乗数法による接触拘束

Lagrange 乗数法は制約条件 $g_{Ns} = 0$ に対応する新たな独立変数 λ_s を導入し，自由度を λ だけ拡張して問題を解く．すなわち active set 法の step 2 で解く等式制約問題を

$$\underset{u, \lambda}{\text{minimize}} \quad \Phi_c^e - \sum_{s \in A} \lambda g_{Ns} \quad (2.117)$$

に置き換える．上式の停留条件を求めれば，接触反力 $r_s = \lambda_s$ であることが直ちにわかる．Lagrange 乗数法は後述する Penalty 関数法および拡張 Lagrange 法と比べ，active set が正解のものであれば解は厳密な接触力を与えるという利点がある．一方で変数の数が増えるので，計算コストの増加やプログラムの実装・メモリ管理が複雑になる等の不利な点がある．また得られる方程式が不定値となるため，反復法で解くと収束性が悪いこともある．

Penalty 法による接触拘束

Penalty 関数法は制約条件からの逸脱に対して非常に大きな Penalty が加わる項を目的関数に付け加えて制約のない問題へ変換する．具体的には active set 法の step 2 で解く等式制約問題を

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad \Phi_c^e + \sum_{s \in A} \frac{1}{2} c g_{Ns}^2 \quad (2.118)$$

と置き換える（結合拘束は省略）．ここで $c > 0$ は Penalty 数であり，解は $c \rightarrow 0$ とすると制約条件が厳密に満たされる．実際には有限な数値しか取れないため，制約条件はあくまで近似的に満たされることになる．Penalty 法を用いたときの接触反力は

$$r_s = -c g_{Ns} \quad (2.119)$$

で与えられる．Penalty 関数法は Lagrange 乗数法と比べ，変数の数が増えないためプログラムへの実装が単純であるという利点がある．一方で正解に近い結果を得るために Penalty 数を大きくすると方程式の数値的性質が悪くなる，結果が近似的であり，制約条件に対する誤差が許容できる範囲にあるか別途確認する必要がある等の不利な点がある．

拡張 Lagrange 法（乗数法）による接触拘束

Penalty 法は，正解に近い結果を得るために Penalty 数を大きくすると方程式の数値的性質が悪くなる欠点があった．これを改良するために，Lagrange 乗数と Penalty 項の両方を含む拡張 Lagrange 関数を導入して，反復的に拡張 Lagrange 関数の最小化と Lagrange 乗数の更新を行って最適解を求める拡張 Lagrange 法あるいは乗数法と呼ばれる手法が提案されている．active set 法の step 2 で解く等式制約問題に対して

$$\underset{\mathbf{u}, \lambda}{\text{minimize}} \quad \Phi_c^e - \sum_{s \in A} \lambda_s g_{Ns} + \sum_{s \in A} \frac{1}{2} c g_{Ns}^2 \quad (2.120)$$

に置き換えた問題を考える．仮に \mathbf{u}, λ が正確な解であるとする， $g_{Ns} = 0$ となるので Lagrange 乗数法の解と一致する．

拡張 Lagrange 法では， λ_s を定数として式 (2.120) の最適化問題を解いた後，求まった変位を元に

$$\lambda_s = \lambda_s - c g_{Ns} \quad (2.121)$$

と λ_s を更新する．拡張 Lagrange 法を用いた時の接触反力は $r_s = \lambda_s$ で与えられる．式 (2.120) の最適化問題を解いて λ_s を更新する手続きを反復し，解が収束した時点で終了する．

拡張 Lagrange 法では反復する代わりに Penalty 数は小さくすることができ，Penalty 法の数値的悪条件を回避できる利点がある．また Lagrange 乗数法と異なり変数が増えないため，penalty 法とほぼ同程度の簡易さで実装が可能であることも利点として挙げられる．一方反復計算が新たに必要になるため，計算コストが増加する点はデメリットである．

第3章 内点法による接触解析の提案

前章で述べたとおり，接触・結合を考慮した変形応力問題は，不等式制約で与えられる非貫入拘束条件および等式制約で与えられる結合拘束条件を含む，ポテンシャルエネルギーの最小化問題として定式化される．そして接触問題には制約条件付き最適化問題の解法が適用される．中でも基本的であり，広く使用されている解法は，有効制約法と等式制約に対する最適化手法を組み合わせ，試行錯誤的に解を求める方法である．しかし，電子機器装置の変形・応力解析のように，自由度，制約条件数ともに多い問題に有効制約法を適用すると，接触状態の決定までに多数の反復を要してしまう問題がある．

本章の目標は，電子機器装置の変形・応力解析やそれに類する自由度，制約条件数ともに多い問題に対して高速に解を得られる方法を開発することであり，そのような手法として内点法による接触解析を提案する．電子機器装置解析への内点法導入は次の通り段階的に行われる．初めに定式化として微小変形を仮定し，標準的な主双対内点法を結合を含む接触問題に適用した．これについては第 3.1 節で述べる．次に第 3.2 節において，収束性を向上する方法として予測子修正子法の検討を行う．次の段階として一般的な有限変形問題・増分解析の場合へ拡張するにあたって，標準的な主双対内点法は前ステップで得られた近似解を利用して反復回数を減らすことができないため，有効制約法と異なり総計算時間をあまり短縮できない課題があった．そこで，内点法において前ステップで得られた近似解を利用するウォームスタートについて，第 3.3 節において検討した．本章ではこれらのアルゴリズムの導出を行うとともに，これらのアルゴリズムを実装した FrontISTR を用いて電子機器モデルによる数値検証を行い，電子機器装置解析において既存手法より高い収束性が得られることを示していく．

3.1 主双対内点法による接触解析

3.1.1 主双対内点法

非線形最適化問題を解くための主双対内点法について述べる．主双対内点法では，次の制約付き最小化問題を考える：

$$\min_x f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C). \quad (3.2)$$

ここで $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ および $g_i: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} (i = 1, 2, \dots, n_C)$ は滑らかな関数である．内点法の基本的なアイディアは，目的関数 f にログバリア関数を加えた次の関数

$$I_\mu(x) \equiv f(x) - \mu \sum_{i=1}^{n_C} \log g_i(x) \quad (3.3)$$

を用いることである．ログバリア関数は制約条件 (3.2) の境界で発散するため，これをポテンシャルに加算することによりその最適点を制約境界から遠ざける効果がある．バリアパラメータ μ はこの効果の強さを決める働きがあり，適当な仮定の下で $\mu \rightarrow 0$ とすると， $I_\mu(x)$ を最小化する問題の解は元問題の解に収束する． $I_\mu(x)$ の最適点を作る集合は中心パスと呼ばれる．図 3.1 に 2 次元平面でのポテンシャル関数の例を示す．

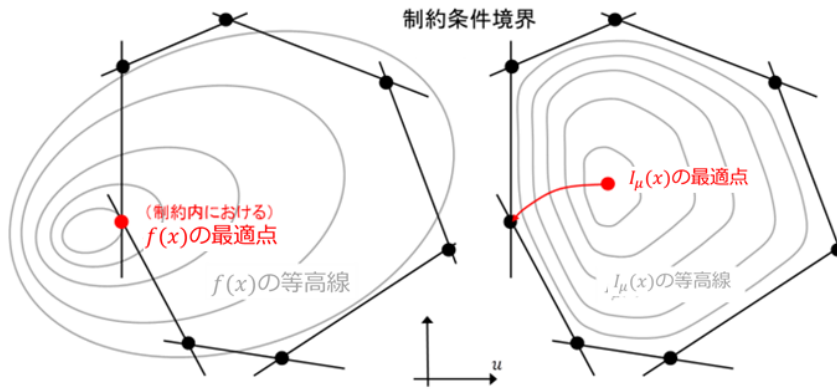


図 3.1: 目的関数の等高線表示例

内点法では式 (3.2) で表される制約領域の内点を出発し，中心パスを辿って元問題の最適点を探索する．その手続きは「 μ を縮小する」処理と「 $I_\mu(x)$ の最適点方向に進む」処理の反復である．これによって，境界付近における等式制約の有効・無効に関する組合せ的困難を避けつつ，元問題の最適値に収束する点列が構成される．その代わりに，有効制約法では等号が成立すると仮定した制約式のみが式に組み込まれるため直接解く制約式は少なくなるが，内点法では常に制約式の全体が式に組み込まれるため，制約全体の与え方によっては計算負荷が高くなる可能性がある．

はじめに $I_\mu(x)$ の最適点方向の決定について述べる． $I_\mu(x)$ に対する最適性の 1 次の必要条件を求めると

$$\nabla f(x) - \mu \sum_{i=1}^{n_C} \frac{1}{g_i(x)} \nabla g_i(x) = 0 \quad (3.4)$$

および $g_i(\mathbf{x}) > 0 (i = 1, 2, \dots, n_C)$ で与えられる．ここで $\lambda_i \equiv \mu/g_i(\mathbf{x}) (i = 1, 2, \dots, n_C)$ とおくと，上記の最適性条件は次のようになる：

$$\nabla f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n_C} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.5)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \lambda_i = \mu (i = 1, 2, \dots, n_C), \quad (3.6)$$

$$g_i(\mathbf{x}) > 0, \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n_C). \quad (3.7)$$

主双対内点法では \mathbf{x} と $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_C})^T$ の両方を独立変数として扱う．また探索方向 $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \lambda)^T$ の決定にあたって式 (3.5) および式 (3.6) に Newton 法を適用する．すなわち， k 回目の反復における近似解と μ の値をそれぞれ $(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}), \mu_k$ とするとき，探索方向 $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \lambda)^T$ は (3) 式の 1 次近似が 0 になる方向に取る：

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n_C} \lambda_i^{(k)} \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^{(k)}) & \nabla g_1(\mathbf{x}^{(k)}) & \cdots & \nabla g_{n_C}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \lambda_1^{(k)} \nabla g_1(\mathbf{x}^{(k)})^T & g_1(\mathbf{x}^{(k)}) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \lambda_{n_C}^{(k)} \nabla g_{n_C}(\mathbf{x}^{(k)})^T & 0 & 0 & g_{n_C}(\mathbf{x}^{(k)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda_1 \\ \vdots \\ \Delta \lambda_{n_C} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n_C} \lambda_i^{(k)} \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \\ g_1(\mathbf{x}^{(k)}) \lambda_1^{(k)} - \mu_k \\ \vdots \\ g_{n_C}(\mathbf{x}^{(k)}) \lambda_{n_C}^{(k)} - \mu_k \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

式 (3.8) は拡張された自由度 λ を含む上に，係数行列が対称ではない．しかしながら，次の手続きによって $\Delta \lambda_i$ を消去することで，対称かつ自由度の拡張が無い係数行列を得ることができる．

まず式 (3.8) の下から n_C 行分に注目すると，右下ブロックは対角行列になっているため，簡単に $\Delta \lambda_i$ について解くことができる：

$$\Delta \lambda_i = -\lambda_i^{(k)} + \frac{\mu_k - \lambda_i^{(k)} \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})^T \Delta \mathbf{x}}{g_i(\mathbf{x}^{(k)})}. \quad (3.9)$$

これを用いて式 (3.8) から $\Delta \lambda_i$ を消去すると

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n_C} \lambda_i^{(k)} \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n_C} \frac{\lambda_i^{(k)}}{g_i(\mathbf{x}^{(k)})} \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})^T \right) \Delta \mathbf{x} \\ &= -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n_C} \frac{\mu_k}{\nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})} \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

となり， Δx に対して対称な係数行列が得られた．従って，実は自由度が拡大された線形方程式を解く必要は無く，初めに式 (3.10) から Δx を求め，次いで式 (3.9) を元に $\Delta \lambda_i$ を求めればよい．ここで式 (3.10) の Δx の係数行列の第 3 項に注目すると，分母に $g_i(\mathbf{x}^{(k)})$ を含むため，対応する不等式制約が active (正しい解において $g_i = 0$ の等号が成立する) の場合，分母 g_i が収束解近くでほぼ 0 になるため係数行列が数値的に悪条件になる．そのため行列ソルバとしては直接法の使用が前提となる．

さて，実際には Newton 方向に 1 ステップ分進むと $g_i(\mathbf{x}^{(k+1)}) > 0$ を満たさなくなることもあるため，ステップ幅は制約領域内に収まるよう減速する必要がある．すなわち，変数を

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{x} \quad (3.11)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \sigma_2 \Delta \lambda \quad (3.12)$$

と更新するとき，制約条件 $g_i(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{x}) > 0, \lambda_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta \lambda_i > 0$ を満たすようにステップの減速率 $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1]$ を決める．

最適点方法に進んだ後は何らかの規則によって μ の値を縮小し，再び Newton 方向に進む処理を繰り返す． μ を縮小する方法には

1. 等比級数的に縮小する方法： $\mu \leftarrow \nu \mu$ ($0 < \nu < 1$)
2. ステップの減速率を踏まえ等比級数的に縮小する方法： $\mu \leftarrow (\sigma \nu + 1 - \sigma) \mu$ ($0 < \nu < 1$)
ステップ幅を取れなかった場合 ($\sigma = 0$) は μ の値を維持して解析中心に近づくことを優先し，ステップ幅を大きく取れた場合には μ の値を設定した係数で縮小 ($\mu \leftarrow \nu \mu$) して解に近づくことを優先する．
3. LOQO の方法 [21]： r を任意のスケールファクタ (デフォルトでは 0.1) として

$$\begin{aligned} GL &= \sum_{i=1}^{n_C} g_i(\mathbf{x}) \lambda_i, \\ \xi &= \frac{n_C \min_i g_i(\mathbf{x}) \lambda_i}{GL}, \\ \mu &= \gamma \min \left((1 - \sigma) \frac{1 - \xi}{\xi}, 2 \right)^3 \frac{GL}{n_C}. \end{aligned}$$

などがある．最終的に残差

$$r^{(k)} \equiv \sqrt{\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(k)} \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})\|^2 + \sum_{i=1}^n (g_i(\mathbf{x}) \lambda_i^{(k)} - \mu)^2} \quad (3.13)$$

が設定した閾値 $\varepsilon > 0$ を下回った時点で反復を終了する．これらの処理の疑似コードを Algorithm 1 に示す．

Algorithm 1 主双対内点法の疑似コード

収束閾値の設定 : $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$.

$\mu_0, \mathbf{x}^{(0)}$ の設定 . ただし $\mathbf{x}^{(0)}$ は $g_i(\mathbf{x}^{(0)}) > 0$ を満たすようにとる .

$\lambda_i^{(0)} = \mu_0 / g_i(\mathbf{x}^{(0)})$

$k = 0$

while do

(3.8) 式より $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \lambda)^T$ を計算する

$g_i(\mathbf{x}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{x}) > 0, \lambda_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta \lambda_i > 0$ を満たすようにステップの減速率 $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1]$ を決める

解を更新する : $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{x}, \lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta \lambda_i$.

μ_{k+1} を $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$ を満たすようにとる

$r^{(k)} < \varepsilon_1$ かつ $\mu_k < \varepsilon_2$ であれば終了

$k = k + 1$

end while

3.1.2 接触解析への適用

ここで述べる方法は Tanoh らの primal-dual algorithm[20] に基本的に準じている . 本研究では電子機器の応力解析に適用するため , 線形弾性体と剛体面との接触のみ考慮されていた Tanoh らの方法に対し結合拘束を考慮する拡張と弾性体同士の node to surface 接触への拡張を行った .

ここでは線形弾性体の微小変形問題で , 摩擦の無い接触を考えることにする . このとき $Q(\mathbf{u})$ は微小変形の全体剛性行列 K_0 を用いて $Q = K_0 \mathbf{u}$ と表すことができる . これに境界条件 (2.109) の処理を行った行列と , その際の等価節点力ベクトルを加算した外力ベクトルを改めて K, F とおく . また , 微小変形の場合には投影点 $\bar{\xi}$ および接触法線方向 \mathbf{n} は基準配置のみで決まる定数ベクトルなので , 接触に関する射影ベクトル T も定数ベクトルとして扱える . 以上の仮定を式 (2.108) から式 (2.111) に適用することにより , この場合の接触・結合を含む釣合方程式は

$$K\mathbf{u} - F - \sum_{i=1}^{n_C} r_i T_i - \sum_{i=1}^{n_M} t_i B_i = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$r_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n_C), \quad (3.15)$$

$$g_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n_C), \quad (3.16)$$

$$r_i g_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n_C), \quad (3.17)$$

$$B_i^T \mathbf{u} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_M) \quad (3.18)$$

となる . ここで n_C は接触可能性のある slave 節点と master 要素面の組数 , n_M は結合拘束の個数とした . なお , 結合拘束の個数は自由度数 \times 結合拘束された slave 節点と master

要素面の組数である．また接触投影距離 g_i については，微小変形の場合

$$g_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{x} = \mathbf{T}_i^T (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i \quad (3.19)$$

と表せる．なお $h_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{X}$ は初期ギャップである．

線形弾性体の場合には $W = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$ が弾性ポテンシャル関数であるので，式 (3.14) から式 (3.18) は，以下の最適化問題の KKT 条件になる：

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (3.20)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n_C), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{u} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_M). \quad (3.22)$$

ここで $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{u}$, $f(\mathbf{x}) \leftrightarrow I(\mathbf{u})$, $g_i(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i$ と対応させて主双対内点法を適用することを考える．すると等式制約 $\mathbf{B}_i^T \mathbf{u} = 0$ を処理する方法が問題となるが，本論文ではこれを Penalty 法によって無制約化する方法をとる．理由は次の通りである．内点法は一見独立自由度 λ_i を増やしているようであるが，実際には前述の通りこれらの変数は縮約を行うことができ，行列構造体を Penalty 法と同じメモリ構造で実装ができる利点がある．結合拘束を Lagrange 乗数法で厳密に処理することも可能であるが，実装の際に Lagrange 乗数分だけ行列構造体を拡張する必要が生じ，内点法の「(Penalty 法と同程度に) 実装が簡易である」という利点が損なわれる．また，内点法では投影距離が 0 に近い接触制約における接触剛性が非常に大きくなり，Penalty 法に近い状態になるので，行列ソルバとしては直接法の使用が前提となる．そのため，結合拘束だけ数値的悪条件に配慮してもあまり意味がないことも結合拘束の処理に Penalty 法を用いる理由である．

以上を踏まえ，元問題の代わりに結合拘束を Penalty 法によって無制約化した以下の問題を考える．すなわち， $\rho > 0$ を Penalty 数として $\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u}$ ($i = 1, \dots, n_M$) をポテンシャルに加算した関数を考え，

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad I(\mathbf{u}) &\equiv \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u}, \\ \text{subject to} \quad \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C), \end{aligned} \quad (3.23)$$

を解く．このとき，ログバリア関数を加えた新たなポテンシャル関数は

$$I_\mu(\mathbf{u}) \equiv I(\mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{n_C} \log(\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i). \quad (3.24)$$

となり，前に述べた求める手続きと同様の手続きにより，1 次の最適条件

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u} - \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n_C} \mathbf{T}_i r_i = 0, \quad (3.25)$$

$$r_i(\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) = \mu \quad (i = 1, 2, \dots, n_C), \quad (3.26)$$

$$r_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C). \quad (3.28)$$

を得る．主双対内点法では，接触力に対応する変数 r_i は独立自由度として扱う．式 (3.25) および式 (3.26) のヤコビ行列を計算することにより，Newton 方向 $\Delta \mathbf{u}, \Delta r_i$ を定める次の線形方程式を得る：

$$\left(\mathbf{K} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \right) \Delta \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n_C} \mathbf{T}_i \Delta r_i = - \left(\mathbf{K}\mathbf{u} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u} - \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n_C} \mathbf{T}_i r_i \right), \quad (3.29)$$

$$r_i \mathbf{T}_i^T \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) \Delta r_i = \mu - r_i(\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n_C). \quad (3.30)$$

ここで式 (3.29) および式 (3.30) に対して縮約処理を行う．式 (3.30) を Δr_i について整理すると

$$\Delta r_i = \frac{\mu - r_i \mathbf{T}_i^T \Delta \mathbf{u}}{\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i} \quad (3.31)$$

が得られるので，これを式 (3.29) に代入して

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{K} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T + \sum_{i=1}^{n_C} \frac{r_i}{\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i} \mathbf{T}_i \mathbf{T}_i^T \right) \Delta \mathbf{u} \\ &= - \left(\mathbf{K}\mathbf{u} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u} - \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n_C} \frac{r_i}{\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i} \mathbf{T}_i \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

を得る．従ってまず式 (3.32) を解いて $\Delta \mathbf{u}$ を求め，次に式 (3.31) を元に Δr_i を求めることで，行列構造体に拡張自由度が無い形で手続きを進められることが分かる．

なおこの問題を，仮に等式制約が全て active として Penalty 法で処理する場合，すなわち

$$\text{minimize } I_p(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho' \sum_{i=1}^{n_C} (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i)^2 \quad (3.34)$$

を解く場合を考えると，その Newton 方向を決める式は

$$\begin{aligned} & \left(K + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T + \rho' \sum_{i=1}^{n_C} T_i T_i^T \right) \Delta u \\ &= - \left(K u + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T u - f + \rho' \sum_{i=1}^{n_C} (T_i^T u + h_i) T_i \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる．式 (3.32) と (3.35) を比べると接触力 T_i と接触剛性 $T_i T_i^T$ の係数部分のみの違いであることが分かる．従って行列の非ゼロ配置について，内点法はちょうど Penalty 法で全ての接触制約を active とした場合と同じであることが確認できる．

ここで求めた Newton 方向に 1 ステップ分進むと制約式 (3.27)，式 (3.28) を満たさなくなることがあるため，ステップ幅は制約領域内に収まるよう減速される．最適点方法に進んだ後は μ の値を縮小し，再び Newton 方向に進む処理を繰り返す．これらの処理の疑似コードを図 3 に示す．方程式の残差 $\varphi(u, r, \mu)$ は二乗ノルム

$$\varphi = \left(\left\| K u + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T u - f - \sum_{i=1}^{n_C} T_i r_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^{n_C} |r_i (T_i^T u + h_i) - \mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

とする．ここで $r = (r_1, \dots, r_{n_C})$ とした．本研究では Δu と Δr_i で異なるステップ幅を使用する．ステップ幅の取り方については， $\sigma_1, \sigma_2 = 1$ に取れる場合は 1 を，そうでない場合はそれぞれ条件式 (3.27)，式 (3.28) を満たす上限の値に対して，その 0.99 倍に設定する．また μ の縮小方法については，減速率の平均値 $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ を用いて $\mu = (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu$ とする．ここで η は μ の減衰率を制御するパラメータであり， $0 < \eta < 1$ を満たす定数である．以上の手続きを Algorithm 2 に示す．

Algorithm 2 主双対内点法による接触解析の疑似コード

収束閾値の設定： $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$.

μ_0, η の設定： η は $0 < \eta < 1$ の範囲で決める

$\mathbf{u}^{(0)}$ の設定： $\mathbf{u}^{(0)}$ は $\mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{(0)} + h_i > 0$ を満たすようにとる .

$r_i^{(0)} = \mu_0 / (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{(0)} + h_i)$

$k = 0$

while do

式 (3.32) より $\Delta \mathbf{u}$ を計算する

式 (3.31) より Δr_i を計算する

$\mathbf{T}_i^T (\mathbf{u}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{u}^{(k)}) + h_i > 0$ を満たすようにステップの減速率 $\sigma_1 \in (0, 1]$ を決める

$r_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta r_i > 0$ ($i = 1, \dots, n_C$) を満たすようにステップの減速率 $\sigma_2 \in (0, 1]$ を決める

解を更新する： $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{u}, r_i^{(k+1)} = r_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta r_i$.

$\varphi(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)}, \mu_k) < \varepsilon_1$ かつ $\mu_k < \varepsilon_2$ であれば終了

μ を更新する： $\mu_{k+1} = (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu_k$. ここで $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$

$k = k + 1$

end while

3.1.3 FrontISTR への実装

これまで述べた内点法接触を実装する基本ソフトウェアとして、本研究では FrontISTR を用いる。FrontISTR ではデータ格納に fortran,c の構造体が積極的に利用され、有限要素法に共通する各種の処理も高度に API 化されており、既存構造体および API を積極的に使うことで内点法の実装を効率的に行うことができる。本小節では、このように必要なモジュール化が行われている構造解析有限要素法コードに対しては、容易に内点法接触が導入出来ることを示していく。

FrontISTR プログラム構造の概要

図 3.2 に FrontISTR のシステム構成と入力概念図を示す。FrontISTR のプログラムは、メッシュデータ処理、行列処理、通信等の機能を持つミドルウェア hecmw の上に、各種解析を行うアプリ部分が乗った 2 層構造になっている。解析を実行するには全体制御ファイル、メッシュファイル（単一領域もしくは全体領域）、解析制御ファイルの 3 つを入力する必要がある、内部的には全体制御ファイルとメッシュファイルをミドルウェアが、解析制御ファイルをアプリ部分が処理する作りになっている。さらにアプリ部分は、I/O やデータ構造体をセットアップする共通モジュール群 (common)、要素剛性計算などの機能を提供するライブラリ群 (lib)、それらを組み合わせて作られた解析ルーチン群 (analysis) が

らなる．内点法接触解析ルーチンの作成は，FrontISTR が元々備えている拡張 Lagrange 法による接触解析ルーチンを複製・改変する形で行った．

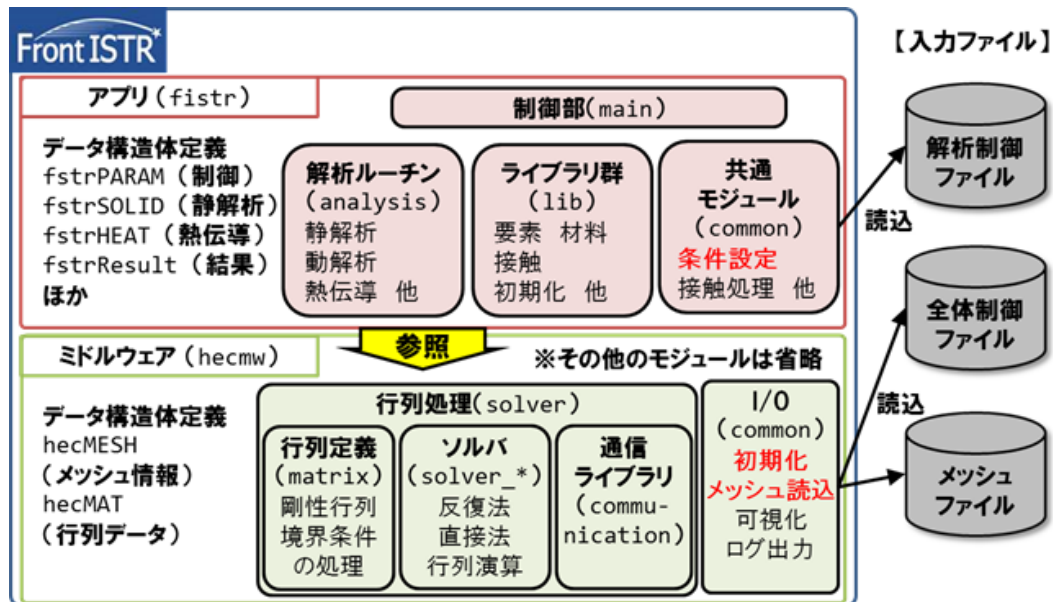


図 3.2: FrontISTR のシステム構成と入力概念図

内点法接触ルーチン

図 3.3 に内点法接触ルーチンの作成概要を示す．他の接触解析ルーチンに倣い，ソースコードは src/analysis/static (静解析のフォルダ) 内に格納し，静解析のメインルーチン FSTR.SOLVE_NLGEOM から呼び出される形とした．FSTR.SOLVE_NLGEOM は増分解析を制御するルーチンであり，ループ内で 1 増分だけの解析ルーチンを繰り返し呼び出されている．このように既存の構造を積極的に活用することで

- 増分解析への拡張が容易にできる
- 解析制御ファイルのカード (!CONTACT_ALGO) で接触解析手法が切り替えられる機能が使えるようになるので，内点法接触を解析制御ファイル上で簡単に選択できるようになる

等のメリットがある．

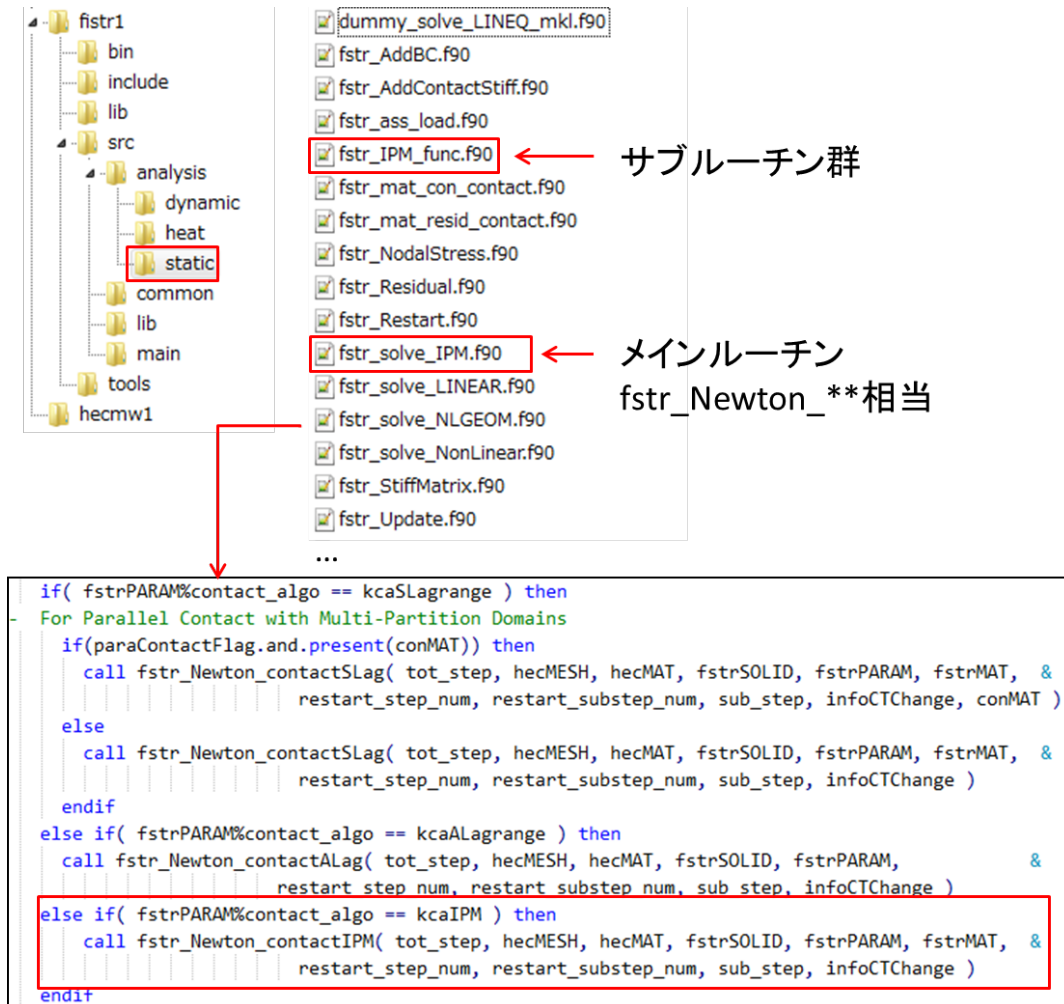


図 3.3: 内点法接触の call 部分

次に内点法のメインルーチンの流れを図 3.4 に示す．赤字部分は内点法固有の手続きを実装したもの，青字部分は既存のサブルーチンを流用したものを示している．FrontISTR は各種の手続きが良くモジュール化されているため，接触に関するサブルーチンだけを新規に作成することで，内点法のような新規解析手法の実装も比較的容易に実施可能である．

```

subroutine IPM_main
! ----- contact scan
call fstr_scan_contact_state( cstep, ctAlgo, hecMESH, fstrSOLID, infoCTChange, hecMAT%B ) 接触サーチ
! ----- initial setup for IPM
call fstr_SetInitMu_IPM(cstep,hecMESH,fstrSOLID,mu)  $\mu_0$ の設定
! ----- setup RHS
call fstr_Update_NDForce_IPM(cstep,hecMESH,hecMAT,fstrMAT,fstrSOLID,mu,.true.) 右辺の計算

do iter = 1, fstrSOLID%step_ctrl(cstep)%max_iter
  call fstr_StiffMatrix(hecMESH, hecMAT, fstrSOLID, tincr) 剛性計算
  call fstr_AddContactStiff_IPM(cstep,iter,hecMESH,hecMAT,fstrMAT,fstrSOLID) 接触剛性の計算
  call fstr_AddBC(cstep, sub_step, hecMESH, hecMAT, fstrSOLID, fstrPARAM, fstrMAT, stepcnt)

  CALL solve_LINEQ(hecMESH,hecMAT,imsg) ( $\Delta u, \Delta \lambda$ )を求める
  call fstr_LineSearch_IPM(cstep,hecMESH,hecMAT,fstrMAT,fstrSOLID,mu,sigma)
  !update mu
  sigma0 = 0.5d0*(sigma(1)+sigma(2))
  mu = (eta*sigma0+1.d0-sigma0)*mu  $\mu$ の更新
  if( mu < 1.d-8 ) mu = 1.d-8

  ! ----- update the strain, stress, and internal force (only QFORCE)
  call fstr_UpdateNewton(hecMESH, hecMAT, fstrSOLID,tincr,iter)  $\nabla I(u^{(k)})$ の計算=内力計算
  call fstr_Update_NDForce_IPM(cstep,hecMESH,hecMAT,fstrMAT,fstrSOLID,mu,.false.) 右辺の計算

  res = dsqrt(dot_product(hecMAT%B(:),hecMAT%B(:)))
  if( res < fstrSOLID%step_ctrl(cstep)%converg .and. mu < 1.01d-8 ) exit 収束判定
enddo
end subroutine

```

図 3.4: 内点法のメインルーチンの流れ

接触情報の格納には既存の接触データ構造体 fstrSOLID%contacts 領域を使用している。接触データ構造体と、内点法における活用方法を図 3.5 に示す。FrontISTR では node to surface 型の接触を採用しており、slave 面として節点集合を、master 面として要素面集合を与える。接触情報を格納する構造体 tContactState は slave 節点 1 個につき 1 個割り当てられ、接触の active/inactive や、対向面要素番号、投影点距離、接触力などの情報を保持している。主双対内点法接触の場合は既存変数を読み替えて使うことができ、追加が必要な点は特に無かった。

```

type tContactState
  integer      :: state
  integer      :: surface
  real(kind=kreal) :: distance ←  $T_i^T u + h_i$ 
  real(kind=kreal) :: wkdist
  real(kind=kreal) :: lpos(2)
  real(kind=kreal) :: gpos(3)
  real(kind=kreal) :: direction(3)
  real(kind=kreal) :: multiplier(3) ← Multiplier(1)に  $r_i$ 、
                                     Multiplier(2)に  $\Delta r_i$  を格納
  real(kind=kreal) :: tangentForce(3)
  real(kind=kreal) :: tangentForce_trial(3)
  real(kind=kreal) :: tangentForce_final(3)
end type

```

図 3.5: 接触データ構造体と内点法における活用方法

FrontISTR には接触剛性の格納先として拡張 Lagrange 乗数法用の `cmat` と、Lagrange 乗数法用の `fstrMAT` が用意されている。`cmat` は変位自由度間に生じる接触コネクティビティのみを、`hecMAT` とは別個に保存している。`fstrMAT` では Lagrange 乗数法で新たに追加される自由度の分だけ行列が拡大されている。また Lagrange 乗数法においては、変位自由度の間に生じる接触コネクティビティは、`hecMAT` そのものを編集して格納先を確保している。ここで内点法の接触コネクティビティを見ると、式 (3.8) に示される通り右下ブロックの対角項に非ゼロ項を含む点以外は `fstrMAT` と同一である。しかしながら、これは FrontISTR 特有の事情ではあるが、`fstrMAT` には Lagrange 乗数法では不要となる右下の対角ブロックを格納する領域が用意されていない (図 3.6)。そこで本研究で作成したプログラムでは、前述のように変数の静的縮約する方法を採用し、縮約された行列を `cmat` に格納し、線形方程式ソルバに引き渡している。

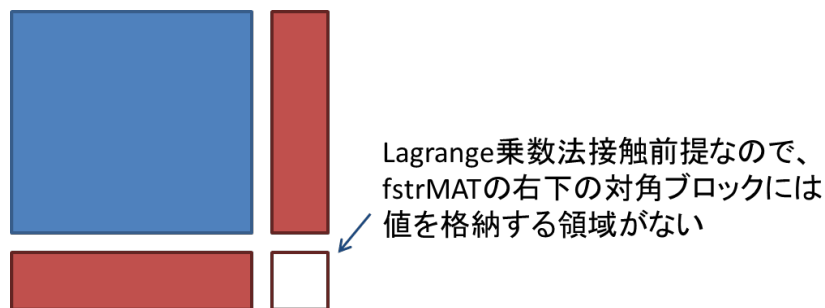


図 3.6: fstrMAT 構造体

3.1.4 数値実験

本小節では，前述のアルゴリズムを実装した FrontISTR と，簡易モデルから電子機器の実機モデルまで複数のモデルを使い，内点法接触の収束性について数値的検証を行った結果について述べる．ここでは内点法と，有効制約法とペナルティ法を組み合わせた手法について結果の精度と計算速度を比較した．

解析モデル

始めに数値実験に用いたモデルについて説明する．モデル 1 (図 3.7) および 2 (図 3.8) は検証用の小規模モデルである．モデル 1 は若干の間隙がある 2 本のはりであり，上側の板に結合された治具から荷重が与えられ，はり同士の間の広い範囲に接触が発生する．モデル 2 はモデル 1 とほぼ同様のもので，はりが扁平な板形状に変わりメッシュ数が増加している．モデル 3 は携帯電話ケースの 3 点曲げ試験を模擬したものである (図 3.9)．下部を 2 つの受け治具で支えた状態で上部から押し治具で圧迫し，タッチパネルに発生するひずみを評価し，パネル破損が起こらないか検証する解析である．モデル 4 は閉じた状態のノートパソコンモデルであり，カバー面から圧迫を受けた場合に，内部の液晶ディスプレイに規定値以上の応力が発生しないかを見る解析である (図 3.10)．内部は複数の部品が積層される構造になっており，これらの部品同士が互いに複雑に接触する．各モデルの規模については表 3.1 に示す．

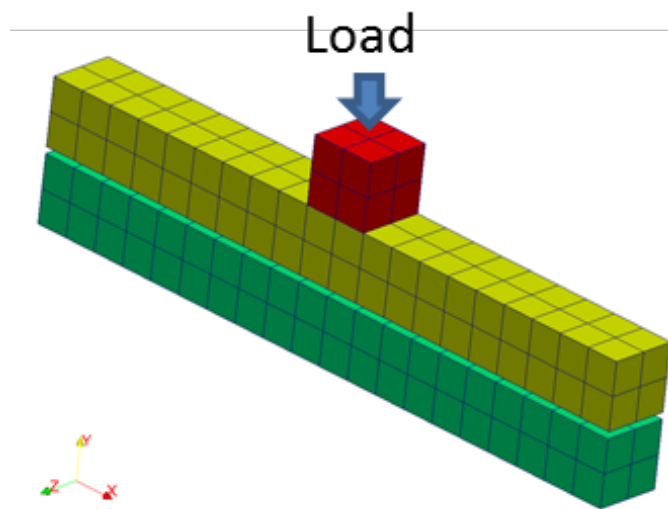


図 3.7: モデル 1:接触する 2 本のはり

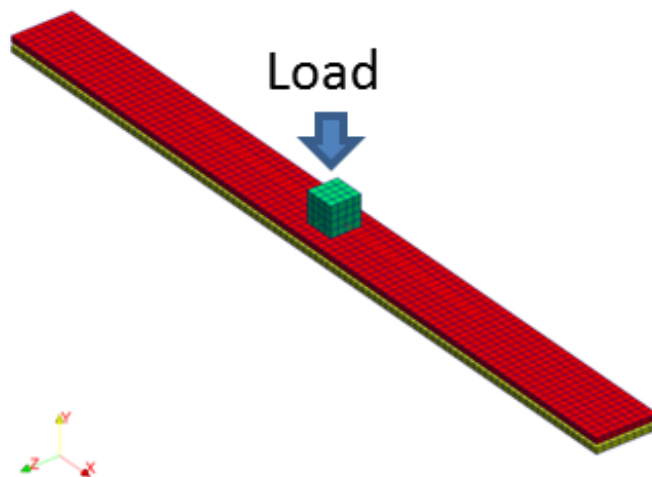


図 3.8: モデル 2:接触する 2 枚の平板

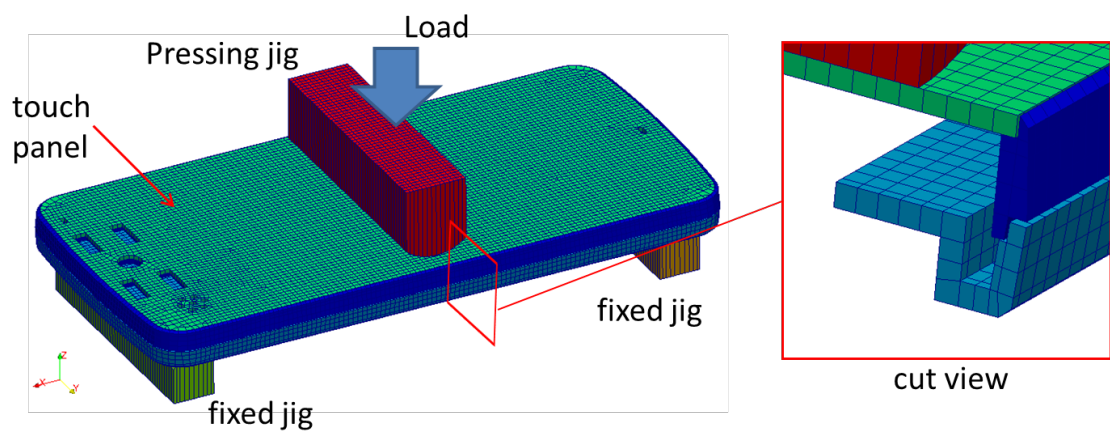


図 3.9: モデル 3:スマートフォンケースモデル

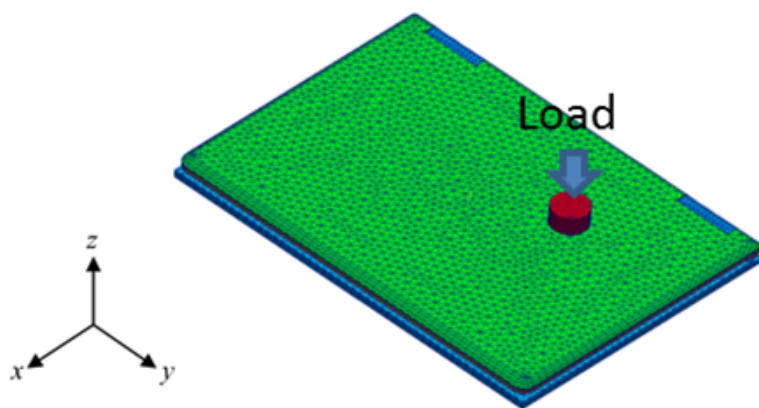


図 3.10: モデル 4: ノートパソコン画面圧迫解析

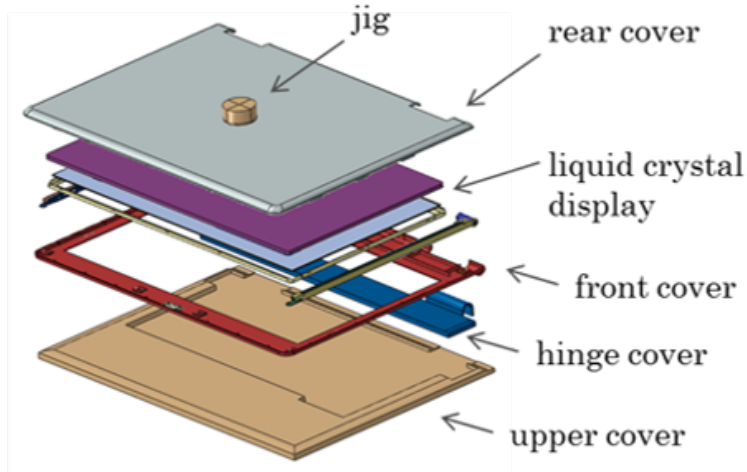


図 3.11: モデル 4: ノートパソコン展開図

表 3.1: モデル規模

	自由度	n_C	n_M
モデル 1	1,215	63	9
モデル 2	11,283	909	25
モデル 3	142,596	2,563	535
モデル 4	523,426	50,658	2,492

パラメータの設定

アルゴリズムのパラメータについては基本的に次のものを使用した：初期 $\mu = 0.5$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$, $\eta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ ．ただしモデル 2 のみ，有効制約法と一致する結果を得るために $\epsilon_2 = 10^{-10}$ とする必要があった．また初期状態で接触している接触節点については $h_i = 10^{-8}$ とし，初期 $u^{(0)} = 0$ が内点になるようにした．

Penalty 法を用いるにあたり，接触制約に必要な Penalty 値の見積もりを行った．ここでは Penalty 値を徐々に増やして行った場合の最大接触圧を確認した．表 3.2 にその結果を示す．本研究では $1\text{E}+6$ から $1\text{E}+7$ にかけて十分変動が小さくなっており， $1\text{E}+7$ で十分な Penalty 数であると判断し，この値を使用した．また，結合拘束の Penalty 値 ρ は $1\text{E}+6$ を用いた．

表 3.2: 各ペナルティ値に対する最大接触圧

Penalty 値	1E+4	1E+5	1E+6	1E+7
モデル 1	0.02835	0.02827	0.02827	0.02826
モデル 2	3.579E-06	5.596E-05	5.582E-05	5.582E-05
モデル 3	5.248	5.264	5.265	5.265
モデル 4	75.81	81.75	82.66	82.75

まず解析結果について、各パラメータ η を用いた時の主双対内点法 (IPM) で得られた解と有効制約法 (ASM) で得られた解として、最大節点変位を表 3.3 に、最大接触圧を表 3.4 に示す。またモデル 3 については、荷重方向変位と接触圧のコンターをそれぞれ図 3.12、図 3.13 に示す。同様にモデル 4 についても、荷重方向変位と接触圧のコンターをそれぞれ図 3.14、図 3.15 に示す。いずれのモデルについても主双対内点法と有効制約法で同等の結果が得られることを確認できた。接触圧が出ている範囲が狭いように見えるが、これは必ずしも接触状態の特定が容易であることを意味しないことに注意しておく。実際この状態は積層された部品同士が撓んだ結果、エリアの狭いエッジ接触の状態で釣り合っているものであり、フラットで一様に接する初期状態からエッジ接触を特定するまでには、通常多くの接触可能節点に対する接触（主に解離）判定を要する。

表 3.3: 各モデルでの最大節点変位

	IPM					ASM
	η					
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	-
モデル 1	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224
モデル 2	0.2432	0.2432	0.2432	0.2432	0.2432	0.2432
モデル 3	1.496	1.496	1.496	1.496	1.496	1.496
モデル 4	4.235	4.235	4.235	4.235	4.235	4.234

表 3.4: 各モデルでの最大接触圧

	IPM					ASM
	η					
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	-
モデル 1	0.02827	0.02827	0.02827	0.02827	0.02827	0.02827
モデル 2	5.582E-5	5.582E-5	5.582E-5	5.582E-5	5.582E-5	5.582E-5
モデル 3	5.265	5.265	5.265	5.265	5.265	5.265
モデル 4	82.79	82.79	82.79	82.79	82.79	82.75

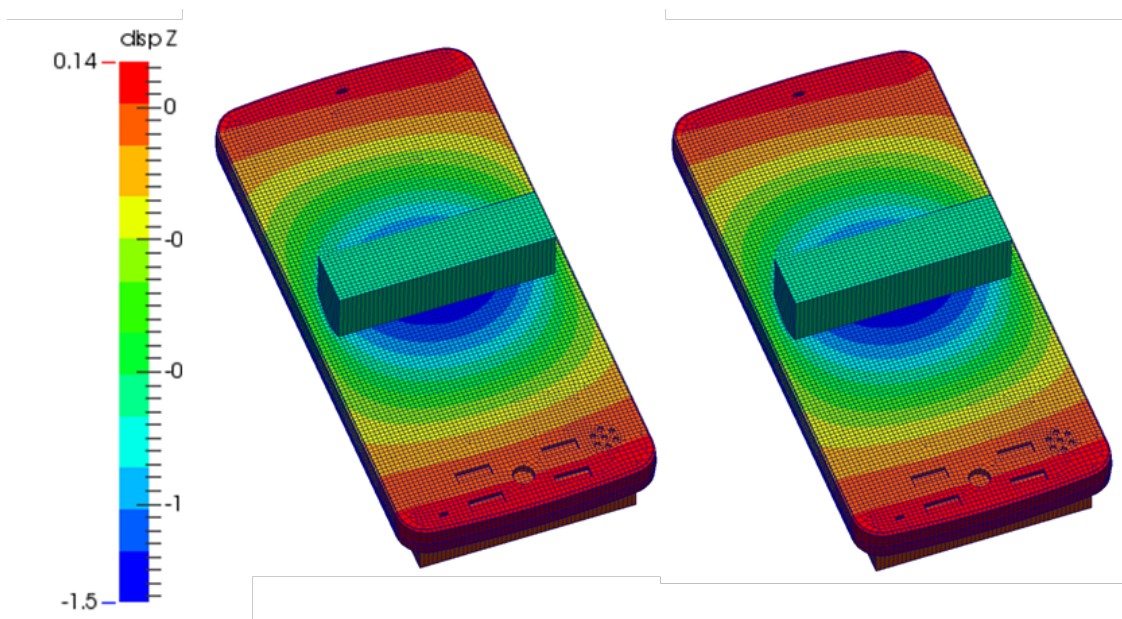


図 3.12: モデル 3 の最大変位コンター

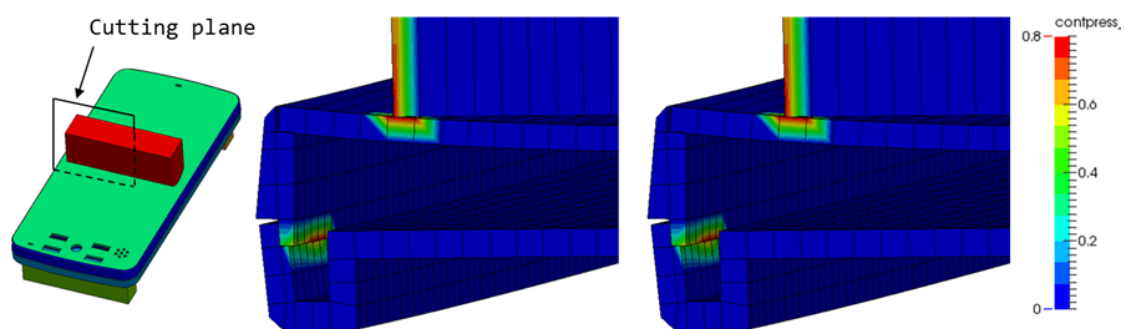


図 3.13: モデル 3 の接触圧コンター

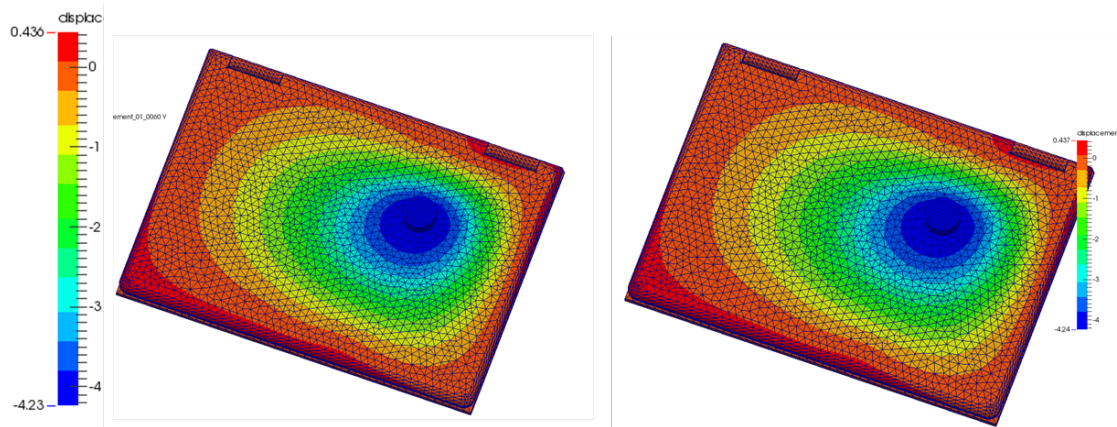


図 3.14: モデル 4 の変位コンター

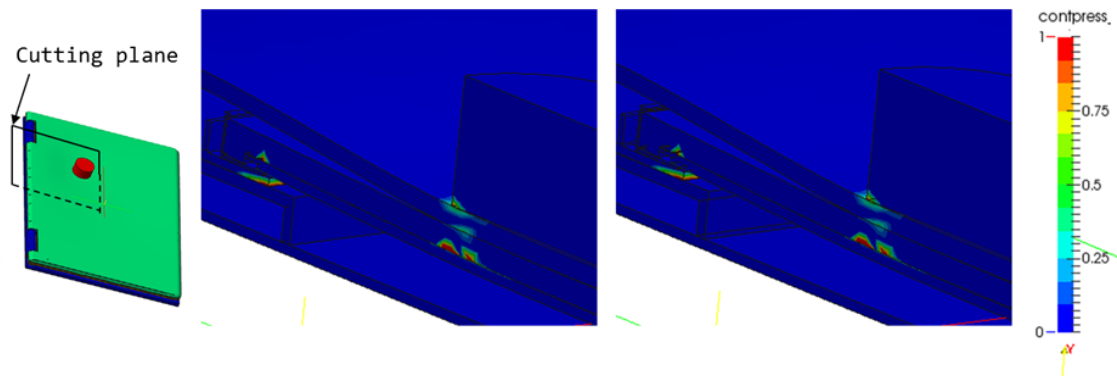


図 3.15: モデル 4 の接触圧コンター

次に各手法で要した反復回数の比較を行い，収束性を評価する．ここで反復回数とは，有効制約法においては接触状態更新の反復回数であり，主双対内点法においてはメインループの実行回数である．一般的に有効制約法内部の Penalty 法では，Newton 反復によって複数回線形方程式ソルバが実行されるが，今回は目的関数と制約条件のいずれも線形方程式であるため，Newton 反復は一回で終了する．すなわちどちらの手法においても，反復回数は線形方程式ソルバの実行回数と一致する．線形方程式ソルバ実行は計算負荷の大部分を占める処理であり，直接法ソルバを使う場合は毎回の実行時間はほぼ一定であるため，

今回の比較では反復回数を見れば実時間ベースにおける収束性を比較できる。

次に各手法で要した反復回数を表 3.5 に、モデル 1 から 4 における μ の収束履歴をそれぞれ図 3.16, 図 3.18, 図 3.20 および図 3.22 に、 σ の履歴をそれぞれ図 3.17, 図 3.19, 図 3.21 および図 3.23 に示す。主双対内点法の反復回数について、反復総数は減少率 η に大きく依存することが分かった。反復回数はモデル 4 を除いては $\eta = 0.3$ が最も反復回数が少ない結果となった。モデル 1 から 3 の収束履歴を確認すると、 η が大きい場合では μ は片対数グラフにおいて直線的に減少しているが、これは μ の更新式 $\mu_{k+1} = (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu_k$, $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ において殆どの場合で $\sigma = 1$ となっているためである。この場合 Newton 法の減速が発生していないことになるので、 μ をより積極的に減少させる、すなわちより小さい η を用いてよいことを示唆している。一方で、モデル 4 では $\eta = 0.5$ を境に返って反復回数が増える結果となった。こちらではモデル 1 から 3 のような直線的な μ の減少は無く、実際殆どの反復で $\sigma < 1$ であり、検証を行った全てのケースについて Newton 法の減速の影響が見られた。また η を過剰に小さくすると全体の収束性が低下する結果となった。今回の数値実験からは断定できないが、このような傾向の違いについては、モデル 1 から 3 は 1 次要素のみのモデルであることに對し、モデル 4 は主に 4 面体 2 次要素からなるモデルであったため、要素タイプの違いが影響した可能性が考えられる。まとめると、全体的に η は小さい方が収束が速くなるが、過剰に小さくすると返って収束が遅くなる場合があり、適切なパラメータ設定が必要になる点が課題といえる。

有効制約法と比較すると、単純なモデル 1 では有効制約法より反復回数を要した。一方それ以外のモデルでは最良のパラメータを用いた場合で約 20 % から 50 % 程度反復回数が少なくなっており、複雑なモデルでは有効制約法より高い収束性が確認できた。

表 3.5: 主双対内点法と有効制約法の反復回数

	IPM					ASM
	η					
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	-
モデル 1	14	17	21	28	39	7
モデル 2	22	27	35	47	65	40
モデル 3	21	21	24	29	40	36
モデル 4	67	55	48	51	58	60

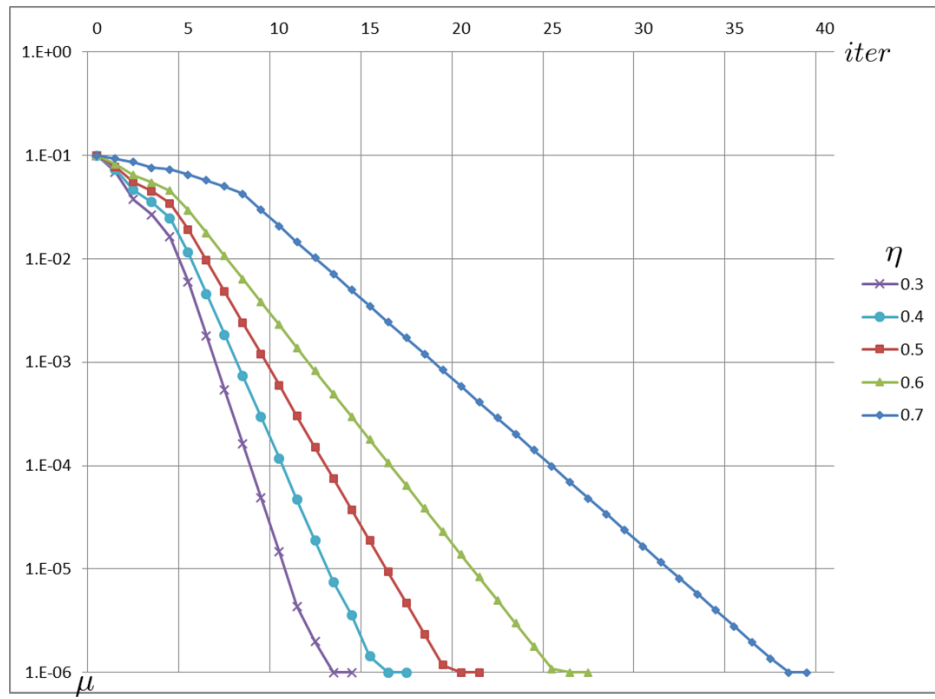


図 3.16: モデル 1 における μ の収束履歴

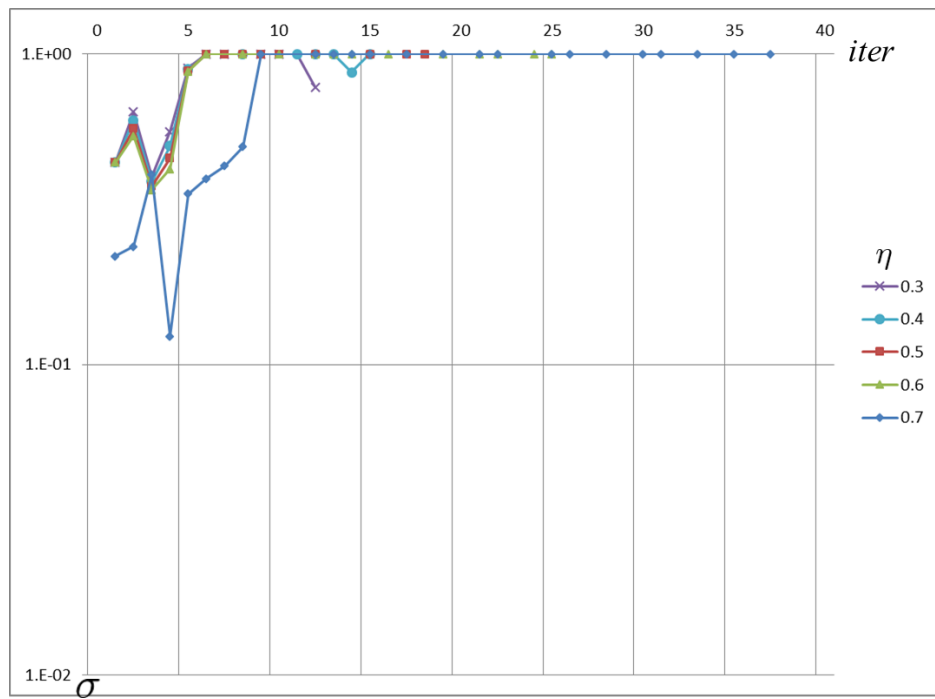


図 3.17: モデル 1 における σ の履歴

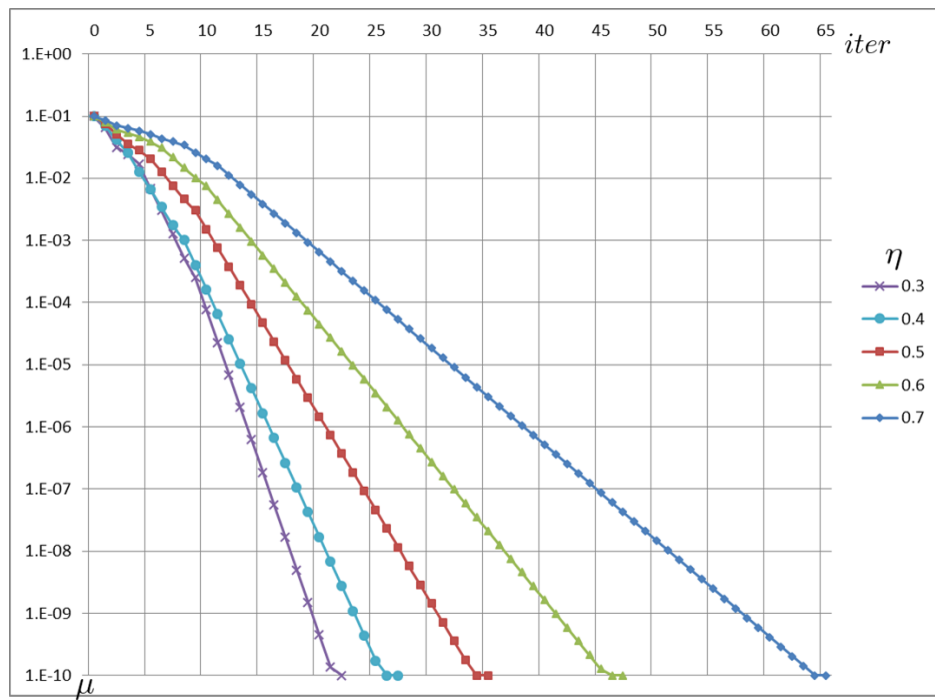


図 3.18: モデル 2 における μ の収束履歴

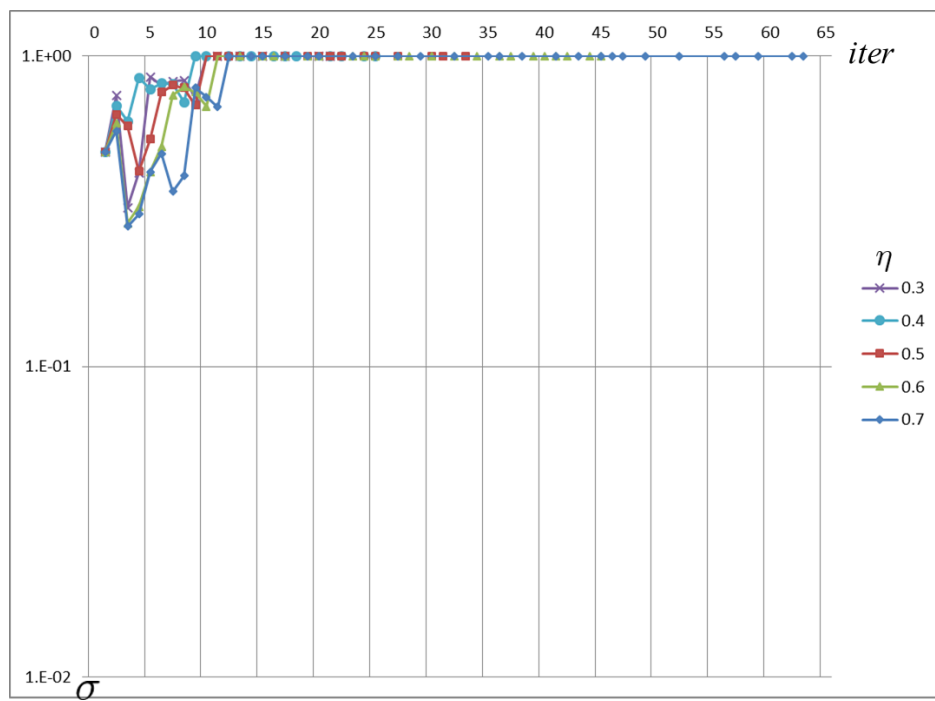


図 3.19: モデル 2 における σ の履歴

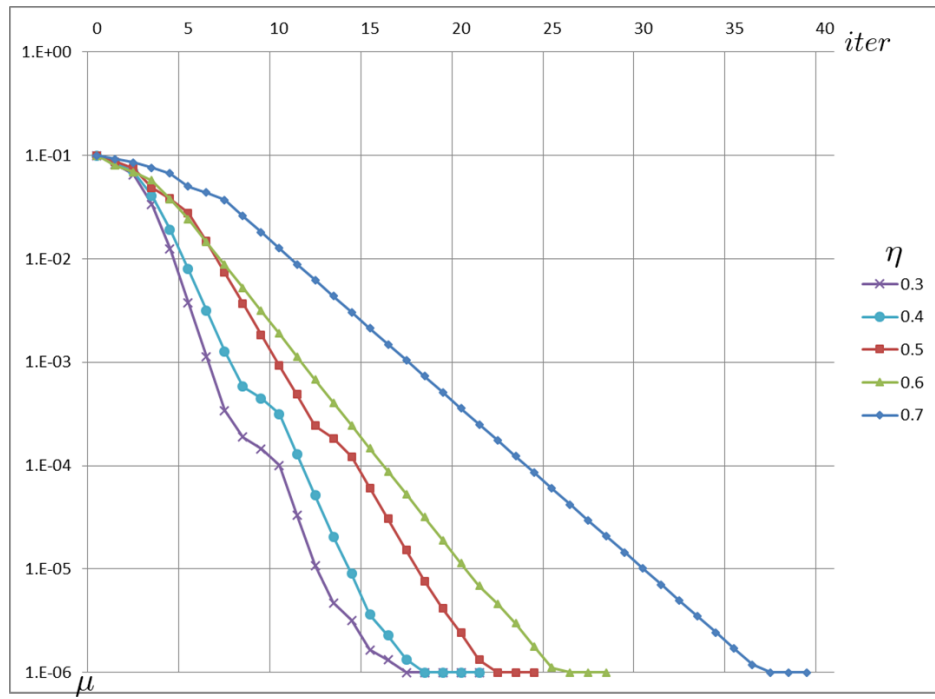


図 3.20: モデル 3 における μ の収束履歴

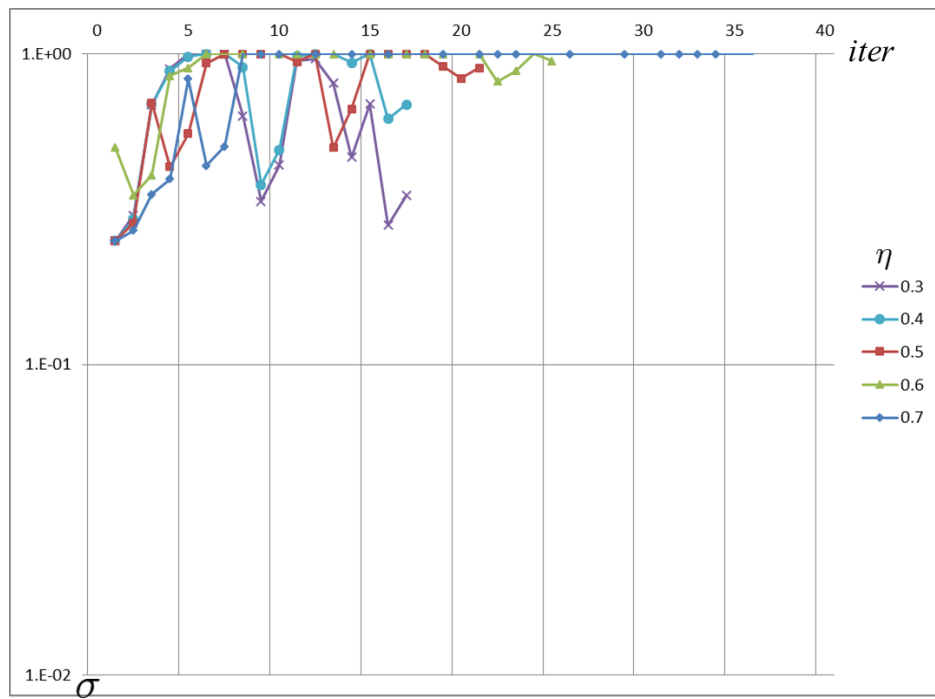


図 3.21: モデル 3 における σ の履歴

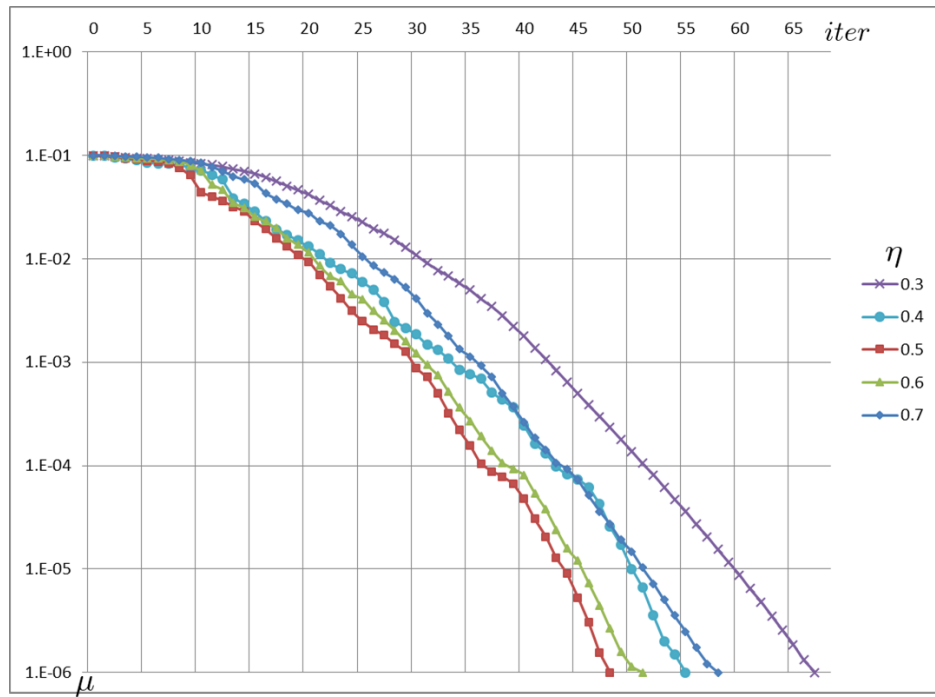


図 3.22: モデル 4 における μ の収束履歴

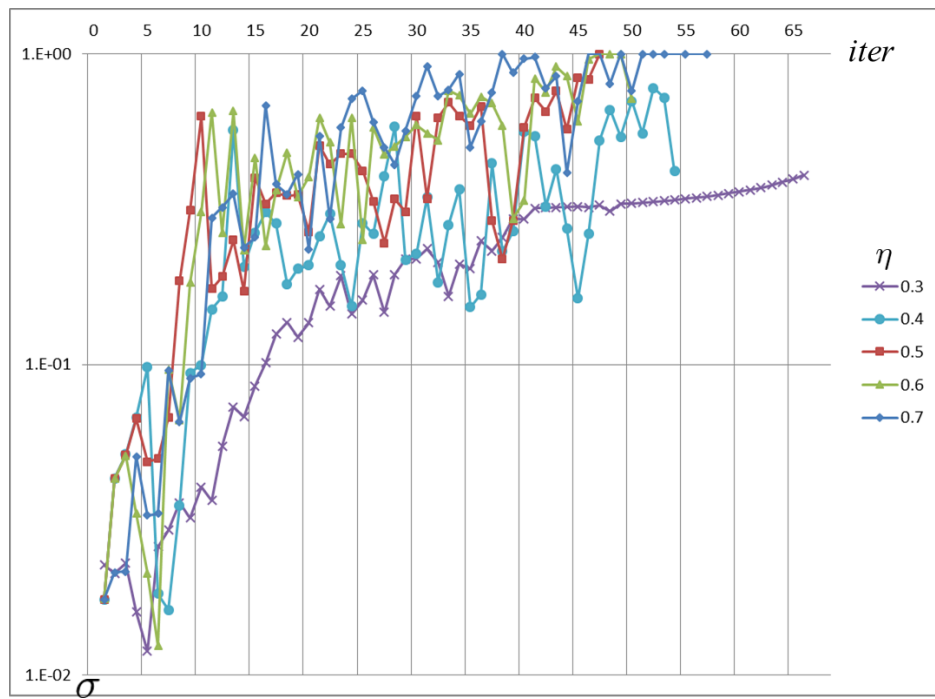


図 3.23: モデル 4 における σ の履歴

接触面積と反復回数の関係

前述の通り，単純なモデルでは有効制約法の収束性が高く，逆に複雑なモデルになると内点法の収束性が高い傾向にある．ここで単純，複雑の条件の違いをより明確にする目的で，2枚の平行版からなるモデル2を用いて，接触可能性のある制約の個数を変化させた場合の有効制約法，内点法の収束回数の変化を調べた．

ここで接触可能性のある制約とは，具体的には「有効制約法において1回以上接触状態変化を起こす候補対の個数」であるものとする．接触可能性のある制約としては，入力された接触候補対の個数や初期状態と比べて変化した候補対の個数などが考えられるが，前者はモデル設定次第で全く接触状態決定に関わらない候補対を多数含む可能性があり，後者は複雑な接触判定を経て最終的にごく狭いエリアでのみ接触する場合などに接触問題の複雑さを適切に表現できない．このことを表す例として，モデル2において与える荷重を変化させた場合の候補対の個数の変化を図3.24に示す．モデル2において荷重を大きくした場合，押し治具直下を中心として接触範囲が徐々に広がるため，この解析は荷重が大きくなるほど接触可能性のある制約は多くなると考えられる．そこで図3.24を見ると，有効制約法において1回以上接触状態変化を起こす候補対の個数は荷重の増加に応じて単調に個数を増やしている一方，入力された接触候補対の個数は全く変化が無く，初期状態と比べて変化した候補対の個数も数の変化がわずかであり，接触可能性のある制約数の変化を適切に反映できていないと考えられる．以上のことから，本研究では有効制約法において1回以上接触状態変化を起こす候補対の個数を基準に反復回数の比較を行う．

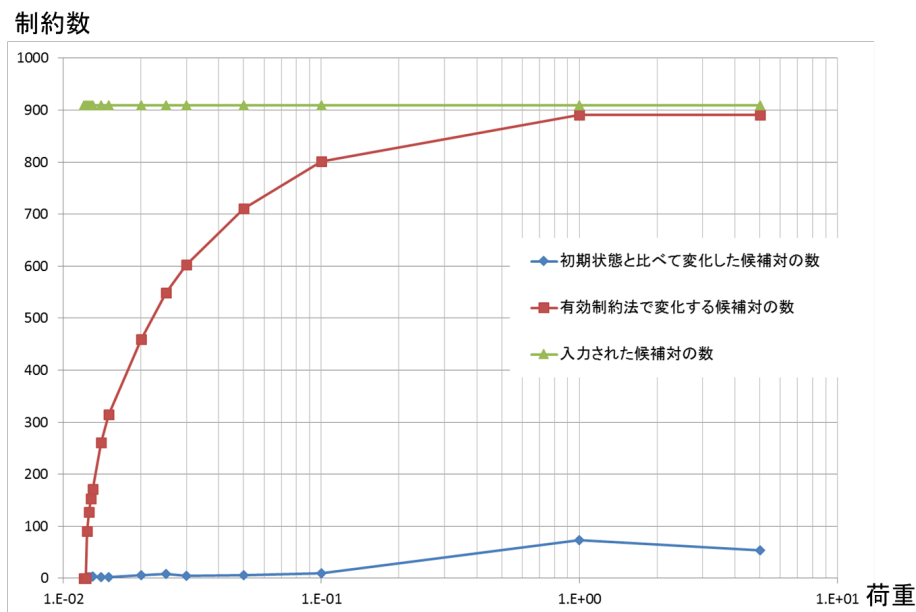


図 3.24: モデル2で荷重を変化させた場合における接触候補対の個数の変化

接触可能性のある制約の個数と、有効制約法（ASM）および主双対内点法（IPM）の反復回数の関係を図 3.25 に示す．主双対内点法のパラメータは，前述の数値実験のパラメータ設定で $\eta = 0.3$ を用いた．接触可能性のある制約の個数が増えるにつれ，有効制約法の反復回数は概ね単調に増加している一方，一方主双対内点法はほぼ一定の反復回数となった．接触可能性のある制約を試行錯誤的に組み合わせる有効制約法では過渡的な接触状態の変化が多くなるにつれて反復回数が増える一方で，主双対内点法は接触無しの状態から連続的に解に近づくため，反復回数が接触可能性のある制約数に影響されにくいものと考えられる．したがって，接触状態が簡単に決まる場合では有効制約法が有利であるが，接触可能性のある制約が多い複雑な問題では内点法が有利になると考えられる．

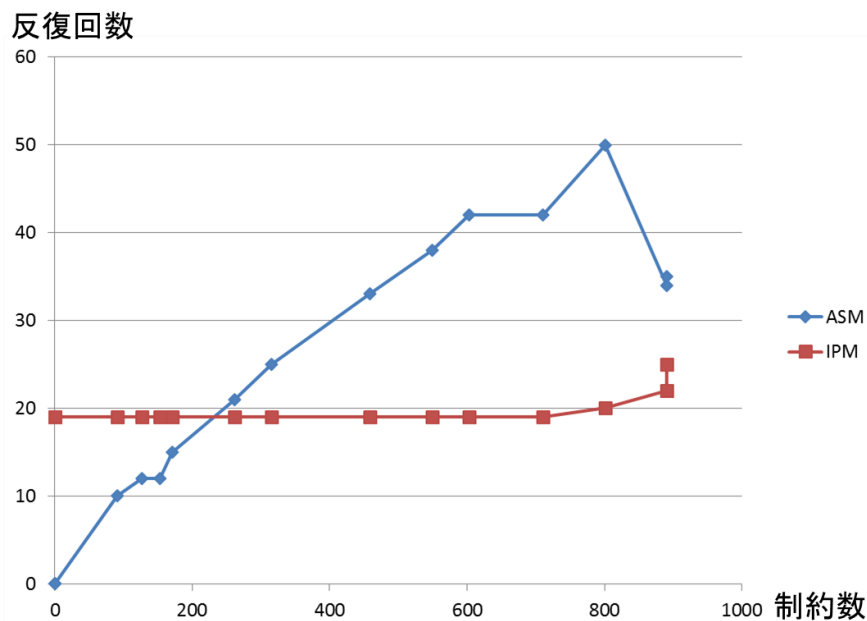


図 3.25: 接触可能性のある制約の個数と有効制約法（ASM）および主双対内点法（IPM）の反復回数の関係

3.1.5 まとめ

本節では，Tanoh ら [20] による内点法接触に対し結合拘束を考慮する拡張と弾性体同士の node to surface 接触を考慮する拡張を行った．さらにこのアルゴリズムを実装した FrontISTR を用いて電子機器モデルによる数値検証を行い，電子機器の実機モデルにおいて既存手法より高い収束性が得られることを確認した．しかしながら収束性はパラメータ η に大きく依存するため，適切なパラメータ設定が必要になる点は課題である．また，接触可能性のある制約の個数を変えた場合の，有効制約法および主双対内点法の反復回数の

変化を調べ、接触可能性のある制約が多い複雑な問題で内点法が収束性において有利になることを確認した。

3.2 Mehrotra の予測子修正子法による接触解析

3.2.1 Mehrotra の予測子修正子法

Mehrotra の予測子修正子法 [14] は収束性の保証は与えられていないものの、実際に問題を高速に解けるとして多くの商用パッケージで利用されている方法である。

Mehrotra の予測子修正子法の各反復は、予測ステップと修正ステップの 2 段階からなる。そのアイデアは次の通りである。内点法では、中心パスに対して十分近い点列を構成できるのであれば、双対ギャップ $g_i(x)\lambda_i (= \mu)$ をなるべく早く 0 に収束させることでアルゴリズムの効率が上げられると考えられる。そこでまずは中心パスの追従を気にせず、なるべく早く双対ギャップを減らす方向として、アフィンスケーリング方向、すなわち式 (3.5) および式 (3.6) において $\mu = 0$ と置いた式から計算した Newton 方向をもとに予測を与える。これが予測ステップである。次に予測ステップで得られた方向に内点制約を満たす範囲で進み、その点での双対ギャップを計算、その値を用いてバリアパラメータ μ を更新する。そして予測方向とこの μ に対する最適点との誤差を補正する方向を導出する。これが修正ステップである。Mehrotra の予測子修正子法では、この修正ステップにおいて増分の高次項を無視する近似を行うことで、修正ステップにおける線形方程式の係数を予測ステップと同じにする工夫がなされる。これにより、直接法ソルバを用いる場合には予測ステップでの線形方程式の分解結果を保持することで修正ステップでの計算時間を大幅に削減することができる。

本節では、前節から引き続き線形弾性体の摩擦なし接触問題を対象として、Mehrotra の予測子修正子法によって内点法接触解析の収束性を向上させる方法を提案する。

3.2.2 接触解析への適用

本小節では、式 3.1 および式 3.2 に Mehrotra の予測子修正子法を適用する方法について述べる。

予測ステップ

予測ステップではアフィンスケーリング方向、すなわち式 3.5 および式 3.6 において $\mu = 0$ とおいて得られる式

$$\begin{aligned} \left(K + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T \right) \Delta \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n_C} T_i \Delta r_i \\ = - \left(K \mathbf{u} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T \mathbf{u} - \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n_C} T_i r_i \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$r_i T_i^T \Delta \mathbf{u} + (T_i^T \mathbf{u} + h_i) \Delta r_i = -r_i (T_i^T \mathbf{u} + h_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n_C). \quad (3.38)$$

を解き、予測解 $(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \Delta \bar{\mathbf{r}})$ を得る。この時の係数行列の LU 分解の結果は保存しておく。

μ の更新

Mehrotra はアフィンスケーリング方向 $(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \Delta \bar{\mathbf{r}})$ を用いて以下のように μ の値を更新すると効率が良いと報告しており、本研究でもこの方法を採用する。

まず双対ギャップ $g(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ を次の通り定義する。

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_C} r_i (T_i^T \mathbf{u} + h_i) \quad (3.39)$$

また変数 \mathbf{u}, \mathbf{r} について、アフィンスケーリング方向に進んだ際に内点であるためのステップ幅の上限をそれぞれ $\bar{\alpha}_{\mathbf{u}}, \bar{\alpha}_{\mathbf{r}}$ とする。このとき、 μ の値を次のように更新する。

$$\mu^{\text{new}} = \left(\frac{g(\mathbf{u} + \bar{\sigma}_{\max 1} \Delta \mathbf{u}, \mathbf{r} + \bar{\sigma}_{\max 2} \Delta \mathbf{r})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{r})} \right)^\gamma \mu^{\text{old}}. \quad (3.40)$$

Mehrotra は $\gamma = 2$ または 3 に取ることを推奨しており、本研究ではこれに倣い $\gamma = 3$ を用いる。

修正ステップ

次に Newton 方向と中心パス方向のずれ量 $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{r})$ を求める。ずれ量は現在の点 (\mathbf{u}, \mathbf{r}) から補正されたステップ方向 $(\Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \Delta \bar{\mathbf{r}} + \Delta \tilde{\mathbf{r}})$ に進んだ点 $(\mathbf{u}^{\text{new}}, \mathbf{r}^{\text{new}}) = (\mathbf{u} + \Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{r} + \Delta \bar{\mathbf{r}} + \Delta \tilde{\mathbf{r}})$ を考え、次のようにとる。まずこの点が $I_\mu(\mathbf{u})$ の最適点であるための条件式 3.25 および式 3.26 に $(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = (\mathbf{u}^{\text{new}}, \mathbf{r}^{\text{new}})$ を代入すると

$$\begin{aligned} K(\mathbf{u} + \Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T (\mathbf{u} + \Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}) \\ - \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n_C} T_i (\mathbf{r} + \Delta \bar{\mathbf{r}} + \Delta \tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} (r_i + \Delta \bar{r}_i + \Delta \tilde{r}_i) (T_i^T (\mathbf{u} + \Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + h_i) \\ = \mu^{\text{new}} \quad (i = 1, 2, \dots, n_C). \end{aligned} \quad (3.42)$$

が得られるので、この式を $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{r})$ について解く。いま、式 (3.41) および式 (3.42) に式 (3.37) および式 (3.38) を代入すると、

$$\left(\mathbf{K} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \right) \Delta \tilde{\mathbf{u}} - \sum_{i=1}^{n_C} \mathbf{T}_i \Delta \tilde{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & r_i \mathbf{T}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) \tilde{\mathbf{r}}_i \\ &= \mu^{\text{new}} - \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ & \quad - \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{u}} (i = 1, 2, \dots, n_C). \end{aligned} \quad (3.44)$$

となる。ここで式 (3.44) について、右辺で $\Delta \tilde{\mathbf{u}}, \Delta \tilde{\mathbf{r}}$ を含む項 $-\Delta \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \bar{\mathbf{u}} - \Delta \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{u}} - \Delta \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{u}}$ はその他の項より十分小さいと仮定する。すなわち式 (3.44) の代わりに

$$r_i \mathbf{T}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) \tilde{\mathbf{r}}_i = \mu^{\text{new}} - \Delta \bar{\mathbf{r}}_i \mathbf{T}_i^T \Delta \bar{\mathbf{u}} (i = 1, 2, \dots, n_C). \quad (3.45)$$

を考え、式 (3.44) および (3.45) を連立して $(\Delta \tilde{\mathbf{u}}, \Delta \tilde{\mathbf{r}}_i)$ を求める。このときの係数行列は式 (3.37), (3.38) と同一であるので、予測ステップの LU 分解の結果を利用して高速に解を求めることが可能である。

最後に $(\Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \Delta \bar{\mathbf{r}}_i + \Delta \tilde{\mathbf{r}}_i)$ を補正されたステップ方向として、この方向に進む。このときも制約条件の内点に収まるよう、ステップ幅は 1 をそうでない場合はそれぞれ内点制約を満たす上限の値に対して、その 0.99 倍に設定する。これらの処理の疑似コードを Algorithm 3 に示す。

Algorithm 3 予測子修正子法による接触解析の疑似コード

収束閾値の設定： $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$.

$\mu_0 > 0$ の設定

$\mathbf{u}^{(0)}$ の設定： $\mathbf{u}^{(0)}$ は $\mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{(0)} + h_i > 0$ を満たすようにとる .

$r_i^{(0)} = \mu_0 / (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{(0)} + h_i)$

$k = 0$

while do

【予測ステップ】

 式 (3.37) および式 (3.38) より $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ および $\Delta \bar{\mathbf{r}}$ を計算する

【 μ の更新】

$\bar{\sigma}_{\max 1}$ および $\bar{\sigma}_{\max 2}$ を、次を満たす σ_1 および σ_2 の最大値とする：

$$\mathbf{T}_i^T (\mathbf{u}_k + \sigma_{\max 1} \Delta \bar{\mathbf{u}}) + h_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n_C),$$

$$r_{i,k} + \sigma_{\max 2} \Delta \bar{r}_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n_C).$$

 式 (3.40) に従って μ を更新する

【修正ステップ】

 式 (3.43) および式 (3.45) から $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ および $\Delta \tilde{\mathbf{r}}$ を得る . そして $\Delta \mathbf{u} = \Delta \bar{\mathbf{u}} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}$ および $\Delta \mathbf{r} = \Delta \bar{\mathbf{r}} + \Delta \tilde{\mathbf{r}}$ とおく .

$\mathbf{T}_i^T (\mathbf{u}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{u}) + h_i > 0$ を満たす最大のステップ減速率 $\sigma_{\max 1} \in (0, 1]$ を求める。
 $r_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta r_i > 0$ ($i = 1, \dots, n_C$) を満たす最大のステップ減速率 $\sigma_{\max 2} \in (0, 1]$ を求める .

 減速率を $\sigma_i = \min(0.99\sigma_{\max i}, 1)$, ($i = 1, 2$) とする .

 解を更新する： $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{u}$, $r_i^{(k+1)} = r_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta r_i$.

$\varphi(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)}, \mu_k) < \varepsilon_1$ かつ $\mu_k < \varepsilon_2$ であれば終了

$k = k + 1$

end while

3.2.3 数値実験

本小節では、前述のアルゴリズムを実装した FrontISTR と、前節で用いたモデルに 1 つモデルを追加した全 5 モデルについて、予測子修正子法による接触解析の収束性について数値的検証を行った結果について述べる . ここでは内点法 (IPM)、有効制約法とペナルティ法を組み合わせた手法 (ASM)、予測子修正子法 (IPMPC) について結果の精度と計算速度を比較した .

追加したモデルを図 3.26 に、そのメッシュ図を図 3.27 に示す。打鍵を模擬した圧迫を受けた場合に、キープレート部に規定値以上の撓み (変位) が発生しないかを見る解析である。本来は撓みの大きい場所を見つけるため、キーボードのキー数だけ圧迫箇所を変え

て解析を行うが、今回は簡単に全体に面荷重を与える条件で代替している。モデル規模は 2,214,459 自由度、接触可能性のある slave 節点数 41,039、結合拘束数 8,923 である。

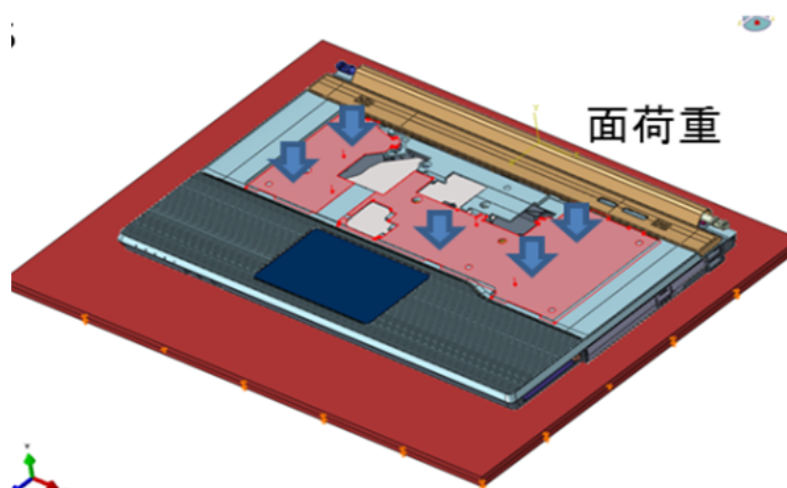


図 3.26: モデル 5 : ノートパソコン・キーボードプレート圧迫解析

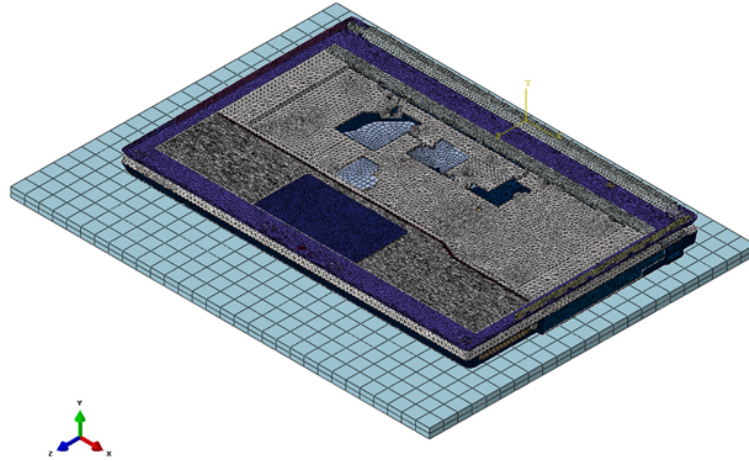


図 3.27: モデル 5 : メッシュ図

なお予測子修正子法は、前述のとおり 1 反復あたり予測ステップと修正ステップで 2 回線形方程式を実行する必要がある。直接法ソルバを使用すれば予測ステップの実行時間を大幅に短縮することは可能であるが、単純に反復回数のみによる比較は不適切である。そこで、本検証では反復回数に加えて実時間での比較も行う。以下に使用した計算環境に示す。計算機は CPU が Intel(R) Xeon(R) CPU X5675 @ 3.07GHz, 12core、メモリが 72GB のものを使用した。FrontISTR の行列ソルバには Intel Math Kernel Library[15] の直接法ソルバ Pardiso を使用している。プログラムは OpenMP によってスレッド並列化されており、本数値実験ではすべての計算を 12core で実行した。なお FrontISTR の持つ領域分割に基づく分散並列計算の機能は使用しておらず、単一領域メッシュをスレッド並列で処理している。

アルゴリズムのパラメータについては基本的に次のものを使用した：初期 $\mu = 0.1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$, $\eta = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ 。ただしモデル 2 のみ、有効制約法と一致する結果を得るために $\epsilon_2 = 10^{-10}$ とする必要があった。また初期状態で接触している接触節点については $h_i = 10^{-10}$ とし、初期 $u^{(0)} = 0$ が内点になるようにした。

表 3.6 に最大変位量、表 3.6 に収束までの反復回数を示す。またモデル 5 については、結果のコンター図（荷重方向変位）を図 3.28 に示す。

まず変位量については、いずれもケースにおいても有効制約法と同等の結果が得られた。反復回数については、自由度の小さいモデル 1 で有効制約法が主双対内点法より少ないことを除けば、予測子修正子法、主双対内点法、有効制約法の順に反復回数が少ない。有効

制約法は自由度の最も大きいモデル 5 で主双対内点法と比べて倍以上反復回数に差が出ている。一方予測子修正子法は主双対内点法の約 50 % 程度かそれ以下の反復回数で収束している。また、表 3.8 にモデル 5 における 1 反復あたりの計算時間および総計算時間を示す。予測子修正子法が反復あたりの計算時間が最も大きいが、他の 2 つに比べてその増加は軽微であり、反復回数を乗じた総計算時間は最も少ないことが確認できる。

表 3.6: 各モデルでの最大節点変位

	ASM	PDIPM					PCM	
		η	0.01	0.1	0.3	0.5		0.7
1	0.3224		0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224
2	0.2432		0.2432	0.2431	0.2431	0.2431	0.2431	0.2431
3	1.496		1.496	1.496	1.496	1.496	1.496	1.496
4	4.216		4.216	4.216	4.216	4.216	4.216	4.216
5	2.496		2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496

表 3.7: 3 手法の反復回数

	ASM	PDIPM						PCM
		η	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	
1	7		10	11	12	20	38	5
2	40		15	18	22	34	64	3
3	36		19	20	20	23	39	13
4	60		50	49	47	44	49	25
5	135		62	60	57	56	67	25

表 3.8: モデル 5 の実計算時間

	ASM	PDIPM	PCM
time per iter.(sec.)	41.3	44.2	50.3
total time(sec.)	5576	2298	1258

3.2.4 まとめ

本節では、前節で導出した主双対内点法による接触解析手法に予測子修正子法を適用し、高速化する手法を提案した。前節と同様の数値実験を行い、実際に収束特性の改善が見られるか調べた。FrontISTR にこのアルゴリズムを実装して行った数値実験の結果、バリアパラメータの減少速度を調整する必要無く、主双対内点法と比べ 40 % 程度の計算時間が削減された。

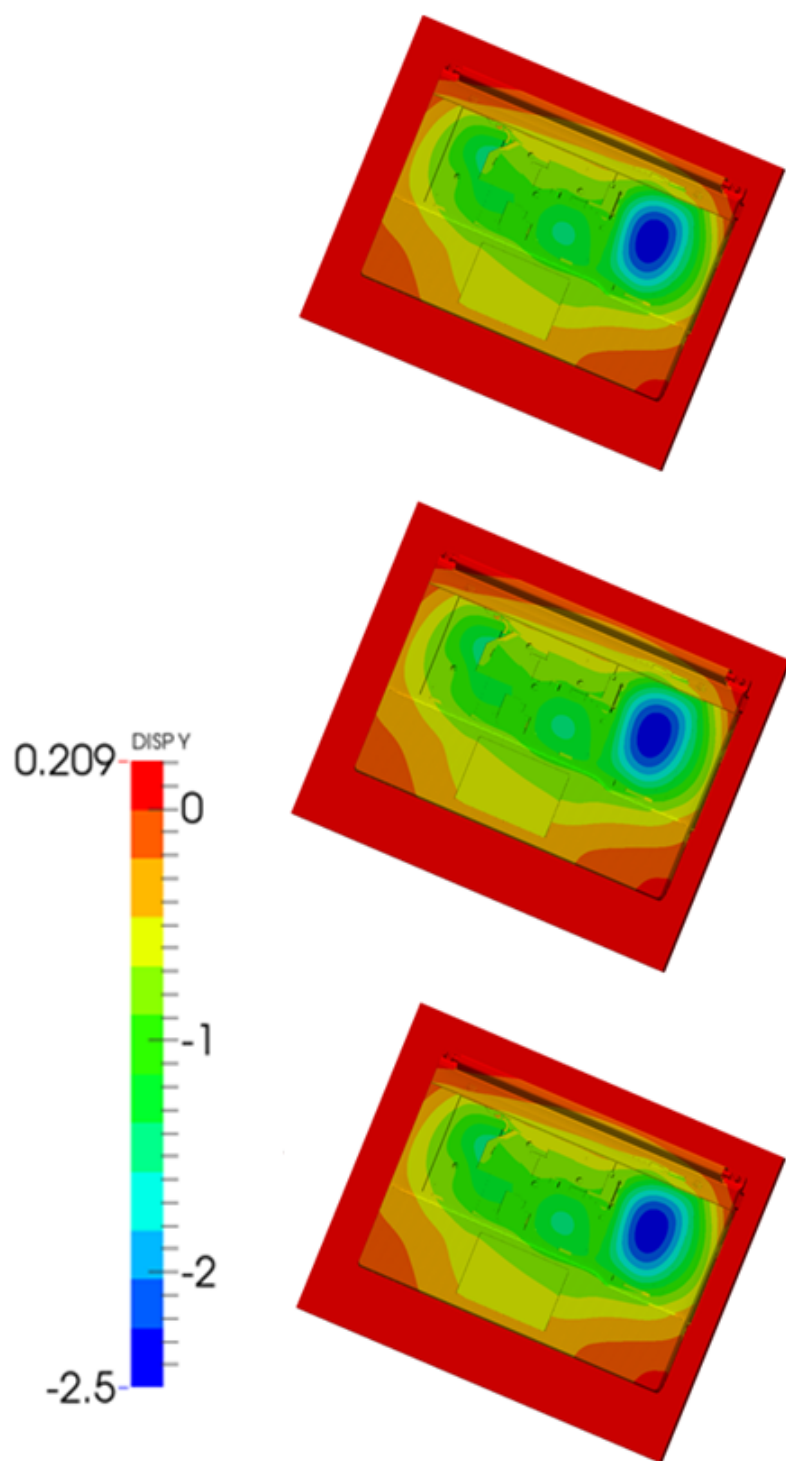


図 3.28: モデル 5 : 最大変位コンター : 上段が有効制約法、中段が主双対内点法、下段が予測子修正子法

3.3 増分解析における warm-start 法の適用

本節の内容は単行本もしくは雑誌掲載等の形で刊行される予定であるため，インターネット公表できません．

第4章 接触解析の並列計算

本章では接触解析，特に電子機器装置に関する接触解析において，並列計算機によって大規模化および高速化を実現する方法について検討した結果を述べる．

はじめに第 4.1 節において，有限要素法による接触解析の並列化に関する基礎事項としてメッシュの領域分割に基づく並列化と接触問題への拡張について説明する．次に第 4.2 節において領域分割の高速化に関して検討した結果について述べる．第 4.3 節では，電子機器装置に関する接触解析において有効な並列化手法として，マスタースレーブ要素による接触解析の並列化を提案する．

4.1 領域分割法に基づく有限要素接触解析の並列化

4.1.1 分散メッシュによる有限要素法の並列計算

有限要素法の処理は，線形の場合はもとより，非線形の解析でも Newton 法によって解を得ることから，最終的には疎な係数行列からなる線形方程式を解くことに帰着される．特に有限要素法では，

- 係数行列の作成：個々の要素ごとに剛性行列や節点力を計算し，それらを足し合わせる．
- 線形方程式の求解：節点に割り当てられた変位等を変数とする線形方程式を解く．

の処理時間が支配的であるため，大規模化や高速化のためにはこれらの処理およびデータを分散し，効率的に並列処理を行うことが重要となる．

各要素の剛性行列や節点力計算は要素ごとに独立に計算でき，また計算の際参照する情報も，要素毎に定義された幾何的形狀や材料情報の他は，構成節点において定義される座標や変位等の物理量のみである．したがって有限要素法では，図 4.1 に示すようにメッシュ全体を複数の部分領域に分割して処理することが有効である．

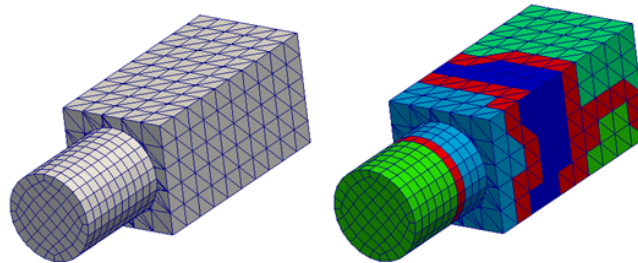


図 4.1: メッシュの領域分割イメージ．左：全体メッシュ，右：分割例．赤の要素はオーバーラップ要素（後述）

さらに，線形方程式の解となる変位等の自由度は節点において定義されるため，並列計算における負荷分散の観点からは，各領域の担当する節点の数が均等になるよう分割されることが望ましい．そのため，FrontISTR において領域分割に基づく並列処理機能を提供するミドルウェア HEC-MW では節点ベースの領域分割法を採用しており，本論文でも以降は節点ベースの領域分割を考えることとする．

節点ベースの領域分割を用いて一体のメッシュを分割する場合，必ず領域をまたがる要素が発生し，そこでの通信が必要になる．このような要素をオーバーラップ要素と呼ぶ．図 4.2 にその例を示す．図 4.2 では 28 個の節点からなるメッシュが領域 1 から 3 の 3 つに分配されている．例えば領域 1 の計算をする場合を考えると，オーバーラップ要素上にある自領域の節点（2,9,16,23,24）の係数行列を計算するために，領域 2 が担当する節点（3,10,17,18,25）の節点値を参照する必要がある．領域 2 と通信をしてこれを取得しなければならない．領域 2，領域 3 についても，領域 1 と同様にオーバーラップ要素上において他領域に属する節点の値を参照するため，通信を行う必要がある．

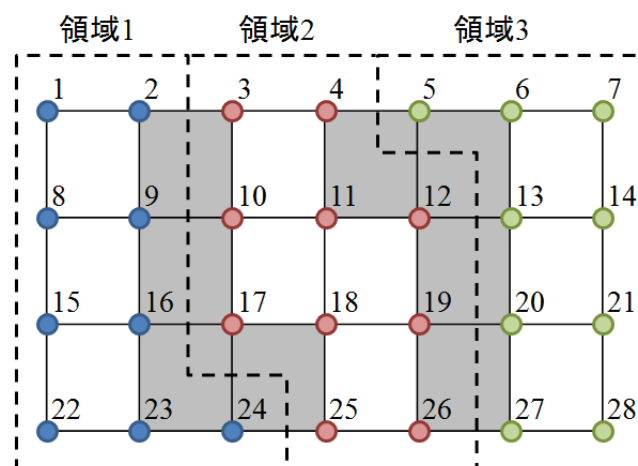


図 4.2: 節点ベースの領域分割例（3 領域の場合）．灰色の要素がオーバーラップ要素．

HEC-MW では領域間の通信の記述には MPI が使用される．その通信の方法は以下の通りである．まず各領域に対して，節点を次のように分類する：

- 内点 ：各領域に割り当てられた節点
- 外点 ：他領域に属しているが，各領域の要素に含まれている節点
- 境界点：他領域の外点となっている節点

ここで内点をもっとも基本的な分割情報であることに注意する．実際外点と境界点に関して，オーバーラップ要素に属する節点のうち内点であるものが境界点，そうでないものが外点というように，内点を基準とした定義をすることもできる．外点と境界点は隣接する領域ごとに分類して管理されており，特に 1 つの隣接領域に対する外点に注目すると，これはその隣接領域から見た自領域に対する境界点になっている．具体的には，図 4.2 における節点 (3,10,17,18,21) は領域 1 にとっては領域 2 に対する外点であるが，同時に領域 2 にとっては領域 1 に対する境界点である．逆に，1 つの隣接領域に対する境界点に注目すると，これはその隣接領域から見た自領域に対する外点になっていると言っても同じである．このように，オーバーラップ要素上にある各節点は常に隣接する領域間の外点と境界点に同時になっている．したがって MPI によって通信を行う場合には，各領域ごとに各々の隣接領域に対して境界点の情報をすべて送信 (send)，外点の情報をすべて受信 (recieve) すれば，全体で送受信の収支が釣り合い，領域間通信が達成される．

HEC-MW では全体メッシュデータが記述された単一領域メッシュファイルを入力とし，局所分散メッシュデータが記述された分散領域メッシュファイルを出力する領域分割ツール (パーティショナ) が用意されている．領域分割においては各領域の節点が均等であり，領域間の通信が少なくなるような分割が重要であるが，このような分割を実現する手段として HEC-MW ではグラフ分割ツール Metis[11] へのインターフェースが提供されている．作成された分散領域メッシュファイルには，内点および外点の節点データ，内点を構成節点に含む要素のデータ，節点・要素・要素面のグループデータ，材料物性，そして外点および境界点の通信テーブルが含まれる．FrontISTR を MPI によって並列実行すると，各プロセスが MPI_rank を元に担当する部分領域の分散メッシュファイルを読み込み，解析処理が並列で実行される．以上の概略を図 4.3 に示す

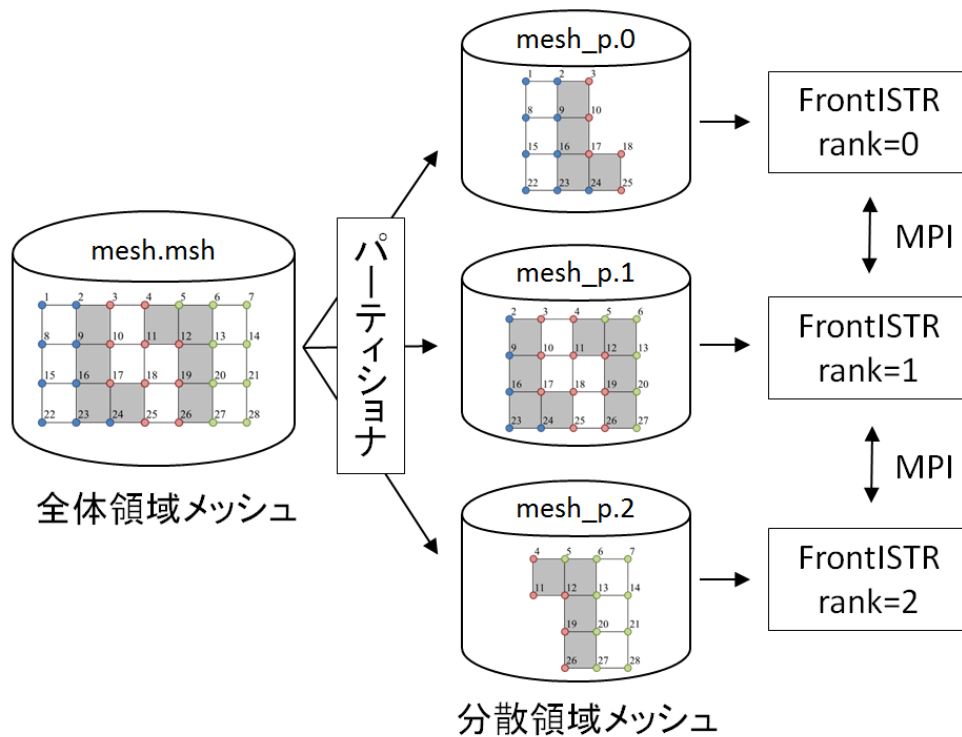


図 4.3: FrontISTR の並列実行

4.1.2 接触解析の並列計算

node to surface 型の接触・結合制約を与える場合，一般的には接触・結合の発生しうる面の対として master 要素面集合と slave 節点集合の 2 つを入力として指定する．接触解析では，解析実行時に個々の節点・要素の組について空間内の配置から接触判定をし，接触が発生していれば接触・結合制約条件が与えられる．一般的に slave 節点はどの master 要素面とも接触する可能性があり，接触が生じた際には master 要素面の構成節点番号とその節点物理量が必要になる．

ところが接触に配慮せずに領域分割を行うと，master 要素の構成節点情報が得られないケースが発生する．このような場合の例を図 4.4 に示す．図 4.4 では，変形によって slave 節点であって領域 1 の内点である節点 9 が，節点 20 および 21 からなる要素面に接触している．ところが節点 20 および 21 は領域 1 にとっての外点になっておらず，通信を行っても節点の座標や変位を取得することができない．実際には要素面集合も各領域に分割されるので，領域 1 に含まれる要素面集合データには節点 20 および 21 からなる要素面がそもそも存在せず，値の取得以前に検知自体が不可能である．

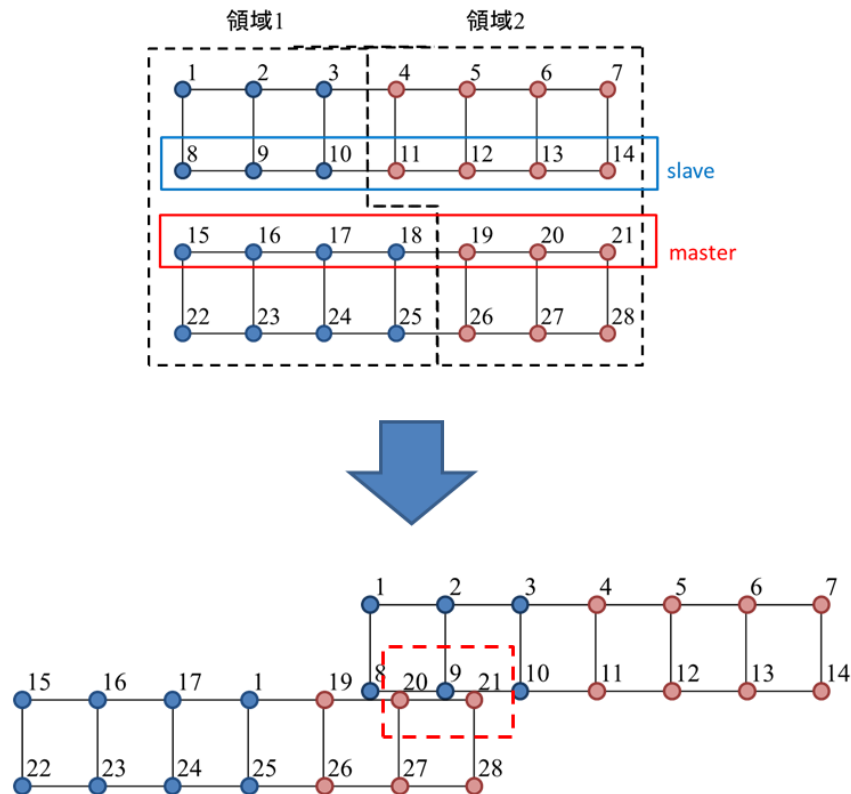


図 4.4: 接触により新たな通信が発生する例

したがって、領域分割されたメッシュデータを用いて接触計算を行うには、接触によって新たに発生する通信の管理が必要になる。一般的に知られている汎用的な並列接触解析のデータ管理方法としては

1. slave 節点は自領域の分だけを保持し、master 要素面は全体を保持する
2. master 要素面は自領域の分だけを保持し、slave 節点は全体を保持する（FrontISTR の並列接触はこの仕様）
3. slave 節点・master 要素面ともに自領域の分だけ保持する

などが知られている。これらの概念図を図 4.5 に示す。方法 1,2 は一方の面全体を保持するため、接触面が詳細にメッシュ分割される場合や指定された接触面が広い場合、あるいは領域分割数を多く取った場合などに、接触に関するデータ構造体のメモリサイズや通信量が相対的に大きくなり並列性能が得られない課題がある。方法 3 では両方の面をもに分割するためメモリサイズの問題はないが、方法 1 と異なり slave 節点の属する領域は他

領域にある master 面との通信テーブルを持たないので、何らかの効率的な方法で他領域にある master 面と接触の有無を判定する必要がある。具体的な方法としては、Bounding box によって接触可能性のある節点-要素面対をある程度絞り込むことで通信量を減らしてから節点データの送受信を行う方法 [17] や、モデル空間を等間隔格子で区切り、slave 節点や master 要素面の含む領域の包含関係から通信が必要な節点-要素面ペアを作成する方法など [13, 18] が提案されている。

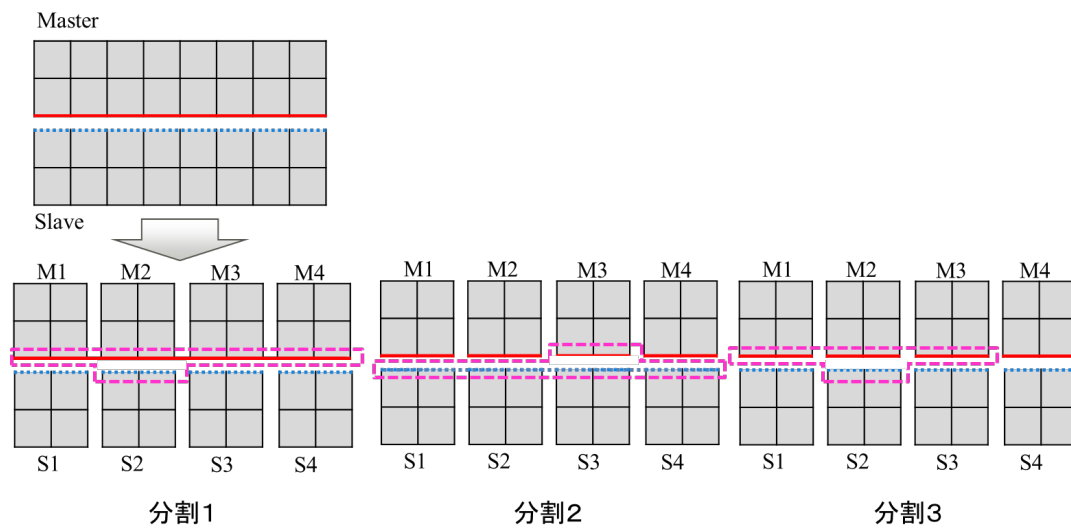


図 4.5: 接触条件の主な領域分割法

4.2 領域分割の高速化に関する検討

本節の内容は単行本もしくは雑誌掲載等の形で刊行される予定であるため、インターネット公表できません。

4.3 マスタースレーブ要素による大規模並列化の提案

本節の内容は特許出願される予定であるため、インターネット公表できません。

4.4 大規模電子機器モデルによる検証

本節の内容は特許出願される予定であるため、インターネット公表できません。

第5章 結言

本研究では，電子機器の構造解析を想定した大規模接触問題に対して効率的な計算手法を確立することを目的に，接触問題の数理的側面と計算機科学的側面の両面から，効率化のための手法を提案した．

数理的側面に関しては，結合拘束を含む接触問題に対して内点法を導入し，収束性を高める方法を提案した．

- 始めに多点拘束条件をペナルティ法で無制約化し，その問題に対して主双対内点法を適用した．これを FrontISTR に実装し，単純な梁から電子機器の実機まで複数の解析モデルに対して，解法の収束特性を調べた．その結果，収束性は主双対内点法のバリアパラメータの減少速度に大きく依存すること，自由度・接触制約数の大きい実機問題では有効制約法より最大 20 % 程度少ない反復で収束する特性が明らかになった．
- 次に予測子修正子法を適用し同様の数値実験を行い，収束特性の改善が見られるか調べた．FrontISTR にこのアルゴリズムを実装して行った数値実験の結果，バリアパラメータの減少速度を調整する必要無く，主双対内点法と比べ 40 % 程度の計算時間が削減された．
- さらに大変形荷重増分解析において，前ステップの解を用いたウォームスタートにより収束を加速する方法を提案した．標準的な主双対内点法との比較を行い，同程度の精度を保ちつつ反復回数を 20% ~ 50% 程度削減できることを確認した．一方 warm-start 法の反復回数はペナルティパラメータ β_i および緩和項 ξ に依存することも分かった．

計算機科学側面については，パーティショナの高速化について検討したのち，電子機器向け並列化手法としてマスタースレーブ要素による並列化を提案した．

- 分割数が多い場合に計算時間が増大する問題のあったパーティショナの処理について，所属領域に関するマスク処理を効率化するために index list によって無駄なアクセスを排除する改良を行った．その結果，大規模プリント基板モデルの分割において，処理時間を数千倍高速化することに成功した．
- 電子機器モデルは接触可能面積が広い一方で，接触点の滑りは少ない特性に着目し，事前に接触可能性のある節点・要素面間に接触要素を作成し，通常の構造体領域を表す要素と一括して領域分割を行う並列化手法を提案した．節点数 1,000 万弱の大規模サーバモデルにおいて，各制約条件処理手法と本手法を様々な組み合わせた場合の

計算時間を調べた．内点法と有効制約法の比較では，Penalty 法はチャタリングにより接触状態が収束しない一方で，内点法は収束閾値の緩和が必要であるが解が得られることを確認した．次に Penalty 法を Penalty 値の小さい拡張 Lagrange 法に置き換えたコードを作成し，反復法ソルバを用いた場合の計算時間を調べた．並列化効率は高いものの，内点法接触と比べて計算時間は同計算条件で 5.5 倍，FX10 を 128 ノード使用したケースにおいても 2 倍程度かかっており，直接法が使える自由度では比較的少数の計算機による内点法接触が最も効率的である結論を得た．一方で直接法ソルバについては現時点でサーバモデル以上の自由では稼働しておらず，これ以上の規模の場合では非効率ながらも反復法を用いる必要がある．

以上の点を踏まえ，本研究で提案した手法は次のように使い分けることが妥当と考えられる．

- 節点数が約 1,000 万以下の場合：直接法ソルバが使用可能であるので
 - － 接触可能面積が広い場合：内点法を用いる
 - － 接触可能面積が狭い場合：有効制約法を用いる
- 節点数が約 1,000 万を超える場合：反復法ソルバを使用せざるを得ないため，低 Penalty での Lagrange 乗数法を用いる

以上の通り，本研究では電子機器の構造解析を想定した大規模接触問題について，計算コスト軽減のため内点法の適用を，並列計算機の計算性能を活用する方法としてマスタースレーブ要素による並列接触を提案した．これらによって，従来接触状態の決定に多大な時間を要していた電子機器の圧迫解析を高速化し，高効率・高品質な設計フローの実現に貢献するものと考えられる．

謝辞

本論文は、筆者が東京大学大学院新領域創成科学研究科博士課程在学中に行った研究をまとめたものです。その間、東京大学大学院新領域創成科学研究科奥田洋司教授には日頃より丁寧で温かい御指導を賜ると共に、国内外の会議や研究会等様々な挑戦の機会を与えて頂きまして、心より感謝致します。

本論文をまとめるにあたり、情報基盤センター・情報理工学系研究科数理情報学専攻兼担中島研吾教授、東京大学大学院新領域創成科学研究科森田剛准教授、鷲尾巧特任准教授、橋本学講師には、多くの時間を割いて貴重な御助言、御教示を頂きました。謹んで感謝致します。橋本先生におかれましては、日ごろから研究室ゼミ等においても様々な御助言を頂きまして、誠にありがとうございました。

本研究は富士通アドバンステクノロジー株式会社における博士号取得支援制度の支援を受けて行われました。貴重な機会を与えて頂きました同社社長宮澤秋彦氏、統括部長鈴木正博氏に深く感謝致します。同社部長石川重雄氏、マネージャ酒井秀久氏、マネージャ植田晃氏におかれましては、本論文3章および4章で用いられた電子機器モデルの提供および日頃からの業務調整等にご協力頂き、誠にありがとうございました。また同社マネージャ坂入慎氏、長竹真美氏におかれましては、博士課程への挑戦を応援して頂きました。深く感謝致します。

元アドバンスソフト株式会社末光啓二氏、同社袁熙氏、株式会社先端力学シミュレーション研究所殷峻氏、合同会社 PExProCS 後藤和哉氏におかれましては、FrontISTR のプログラムについて様々なご教示を頂きました。FrontISTR の理解は本研究において欠かせないものであり、真に感謝致します。

東京大学大学院新領域創成科学研究科北山健特任研究員を始め、奥田研究室の諸氏には日頃より研究に関して多くの示唆を与えて頂きました。また同研究室博士課程の森田直樹氏、井原遊氏からは、FrontISTR に関する様々な議論を通じて、多くの刺激を受けました。ここに感謝致します。

最後に、生活面、精神面で大きな支えとなってくれた妻と、常に健康を気遣ってくれた両親、妻の両親に感謝致します。

参考文献

- [1] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, 2013.
- [2] D. J. Benson and J. O. Hallquist. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 78, No. 2, pp. 141–163, 1990.
- [3] H. Y. Benson and D. F. Shanno. An exact primal-dual penalty method approach to warmstarting interior-point methods for linear programming. *Comput. Optim. Appl.*, Vol. 38, No. 3, pp. 371–399, 2007.
- [4] H.Y. Benson and D.F. Shanno. Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: regularization and warmstarts. *Computational Optimization and Applications*, Vol. 40, No. 2, pp. 143–189, 2008.
- [5] P.W. Christensen, A. Klarbring, J.S. Pang, and N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 145–173, 1998.
- [6] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau, and DJ Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 51, No. 1, pp. 107–137, 1985.
- [7] S. Hübner, G. Stadler, and B. I. Wohlmuth. A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 30, No. 2, pp. 572–596, 2008.
- [8] S. Hübner and B. I. Wohlmuth. A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 27, pp. 3147–3166, 2005.
- [9] Y. Kanno and M. Ohsaki. Large deflection analysis of cable networks by second-order cone program. In *IASS Symposium 2001. Extended Abstracts*, pp. 124–125, 2001.

- [10] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm in linear programming. *Combinatorica*, Vol. 4, pp. 373–395, 1984.
- [11] G. Karypis and V. Kumar. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on scientific Computing*, Vol. 20, No. 1, pp. 359–392, 1998.
- [12] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise. Progress in mathematical programming interior-point and related methods. chapter A Primal-dual Interior Point Algorithm for Linear Programming, pp. 29–47. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1988.
- [13] J. G. Malone and N. L. Johnson. A parallel finite element contact/impact algorithm for non-linear explicit transient analysis: Part ii-parallel implementation. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 37, No. 4, pp. 591–603, 1994.
- [14] S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on optimization*, Vol. 2, No. 4, pp. 575–601, 1992.
- [15] T. Miyamura, Y. Kanno, and M. Ohsaki. Combined interior-point method and semismooth newton method for frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, No. 6, pp. 701–727, 2010.
- [16] M. Ohsaki, K. Fujisawa, N. Katoh, and Y. Kanno. Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 180, No. 1, pp. 203–217, 1999.
- [17] A. Oishi, S. Yoshimura, and G. Yagawa. Domain decomposition based parallel contact algorithm and its implementation to explicit finite element analysis. *JSME International Journal Series A*, Vol. 45, No. 2, pp. 123–130, 2002.
- [18] E.J. Plaskacz. On impact-contact algorithms for parallel distributed-memory computers. In S.N. Atluri, G. Yagawa, and T. Cruse, editors, *Computational Mechanics '95*, pp. 369–374. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [19] J.C. Simo and T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992.
- [20] G Tanoh, Y Renard, and D Noll. Computational experience with an interior point algorithm for large scale contact problems. *Optimization Online*, 2004.

- [21] R. J. Vanderbei and D. F. Shanno. An interior point algorithm for nonconvex nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, Vol. 13, pp. 231–252, 1999.
- [22] P. Wriggers and T.A. Laursen. *Computational contact mechanics*. Springer, 2006.
- [23] Y. Ye. *Interior point algorithms: theory and analysis*, Vol. 44. John Wiley & Sons, 2011.
- [24] 宇佐美隆一, 川喜田裕司, 藤野育男. ノート P C の構造要件と評価技術. 雑誌 FUJITSU, Vol. 58, No. 4, pp. 317–322, 2007.
- [25] 奥田洋司, 江連真一, 中島研吾. 大規模並列計算のための要素細分化ツールの開発. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 12, No. 1, pp. 29–43, 2002.
- [26] 奥田洋司, 中島研吾. 並列有限要素解析 [I]. 培風館, 2004.
- [27] 奥田洋司, 中島研吾. 並列有限要素解析 [II]. 培風館, 2008.
- [28] 久田俊明, 野口裕久. 非線形有限要素法の基礎と応用. 丸善, 1995.
- [29] 宮村倫司, 寒野善博, 大崎純. 内点法による接触問題の求解に関する検討. 計算力学講演会講演論文集, Vol. 2006, No. 19, pp. 69–70, nov 2006.
- [30] 宮村倫司, 寒野善博, 大崎純. 内点法と試行錯誤法の組み合わせ手法による摩擦のない接触問題の求解. 学術講演梗概集, B-1, Vol. 2007, pp. 223–224, jul 2007.
- [31] 山下浩. 大規模最適化問題へのアプローチ. システム制御情報学会誌, Vol. 50, No. 9, pp. 332–337, 2006.
- [32] 小島政和, 土屋隆, 水野眞治, 矢部博. 内点法. 朝倉書店, 2001.
- [33] 早川成廉, 藤井茂弘, 高橋次郎. スマートフォンの防水 / 薄型技術への取り組み. 雑誌 FUJITSU, Vol. 63, No. 5, pp. 543–547, 2012.
- [34] 中楯真美, 伊東伸孝, 坂入慎, 水谷大輔, 倉科守. リフロー時におけるプリント基板の反り解析. エレクトロニクス実装学術講演大会講演論文集, Vol. 19, pp. 37–38, 2005.
- [35] 長竹真美, 伊東伸孝, 坂入慎, 目黒正和, 水谷大輔, 倉科守. プリント基板のリフロー時における反り解析技術. 材料力学部門講演会講演論文集, Vol. 2005, pp. 103–104, 2005.
- [36] 于強, 白鳥正樹. Bga はんだ接合部の形状を考慮した疲労寿命評価. エレクトロニクス実装学会誌, Vol. 1, No. 4, pp. 278–283, 1998.
- [37] 于強, 白鳥正樹, 王樹波, 金子誠史, 石原達也. 電子デバイスのはんだ接合部の熱疲労強度における解析・実験ハイブリッド評価 : 第 1 報, 熱サイクル加速試験の効率化と熱疲労強度評価. 日本機械学会論文集. A 編, Vol. 64, No. 619, pp. 550–557, 1998.