論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目

Excluded Minors of Matroid Representability and Orientability, and Fast Parameterized Algorithms for Ising Partition Function

（マトロイド表現可能性・向き付け可能性の禁止マイナー，および，グラフ上イジング分配関数の高速計算アルゴリズムに関する研究）

氏　　名　　平石　秀史

本論文では，離散数学や計算機科学において，本質的な意味を持ちうる二つの問題，マトロイドの表現可能性とイジング分配関数の計算を扱う．

マトロイドは1935年に H. Whitney により，ベクトルの一次独立性の公理化する試みの中で導入された概念である．後にマトロイドは，一次独立性に限らず，離散数学や組合せ最適化における種々の対象の疎構造となっていることが明らかになった．マトロイドは，グラフや幾何の一見異なる様々な対象を統一的に扱える普遍的な枠組みである一方で，その普遍性ゆえに，グラフや幾何における具体的な対応物によって表現できないようなマトロイドが多く存在する．それ故，どのようなマトロイドが具体的な表現（特にベクトル空間の一次独立関係における表現）を持つかを特徴づける研究は，本質的な重要性を持つ．

他方，イジング模型は1925年に E. Ising により，強磁性を統計力学的に記述するモデルとして導入された．その後，イジング模型は，統計力学だけでなく，量子計算，離散数学，組合せ最適化といって幅広い分野を橋渡しをするモデルであることが知られるようになった．マトロイド理論とイジング模型における分配関数の計算は，Tutte多項式（またはTutte-Whitney多項式）というグラフ・マトロイド上における多項式を通じて結びつくことが知られている．グラフ上のイジング模型の計算は，グラフの森や閉路における表現を持つマトロイド（グラフ的マトロイド）に関するTutte多項式の計算と等価である．

本論文では，将来的にマトロイドの表現可能性の理論をイジング模型上の分配関数の計算に応用することを念頭に，マトロイドの表現可能性に関する研究と，イジング分配関数計算に関するアルゴリズムの開発を行った．

第一に，我々は，表現可能マトロイドと向き付け可能マトロイドという二つのマトロイドのクラスに関する禁止マイナーに関する話題を扱う．まず，向き付け可能的マトロイドに関する禁止マイナーに関し調べる．向き付け可能性は，順序体上ベクトル空間に

おける表現可能性の拡張と考えることができる概念である．我々は，向き付け可能マトロイドに関する階数3の禁止マイナーが，7以上の任意の要素数に存在することを，二つの新たな禁止マイナーの無限族を構成することによって示す．
そして，これら二つの無限族に関し，一方は標数が2の体上ベクトル空間における表現を持たないこと，もう一方は標数が2でない体上ベクトル空間における表現を持たないことを示す．次に，向き付け可能マトロイドと表現可能マトロイドの和集合と積集合に関する禁止マイナーによる特徴づけについて調べる．和集合に関しては，新たな階数3のマトロイドの無限族を構成し，それが和集合に関する禁止マイナーになっていることを示す．これにより，和集合に関して，階数が高々定数以下のものに限定してさえ，有限個の禁止マイナーによる特徴づけが不可能であるという結果が得られる．積集合に関しては，向き付け可能マトロイドと，標数0の体上ベクトル空間で表現可能なマトロイドの積集合について，階数3の禁止マイナーが存在することを，具体的に禁止マイナーを構成することにより示す．さらに，それら禁止マイナーが向き付け可能であることを示す．これらにより，和集合の場合と同様，積集合に関しても，階数が高々定数以下のものに限定してさえ，有限個の禁止マイナーによる特徴づけが不可能であること，そし，一般のマトロイドではなく，向き付け可能マトロイドの中に限定してさえ，標数0の体上ベクトル空間における表現可能性が有限個の禁止マイナーにより特徴づけられないことが分かる．最後に，有理数体上のベクトル空間における表現可能性に関して調べる．
有理数体を単拡大した体上表現可能マトロイドの中でさえ，
有理数体表現可能なマトロイド に対する階数3の禁止マイナーが無限個存在することを示す．これは，有理数体上表現可能マトロイド関する特徴づけが，有理数体を単拡大した体上で表現可能マトロイドの中でさえ，困難であることを示している．

　第二に，我々はグラフ上イジング模型の分配関数の計算に関し，最も一般的に場合に関する二種類の高速計算アルゴリズムを開発する．これらのアルゴリズムはグラフ分解上での動的計画法に基づいたものである．一つ目のアルゴリズムは，枝分解というグラフ分解を用いたもの，二つ目のアルゴリズムは，階数分解というグラフ分解を用いたものである。後者のアルゴリズムは，の正方格子上イジング模型に対し特に高速なアルゴリズムとなっている．