

審査の結果の要旨

氏 名 林 冰 凱

計算量理論は様々な問題を計算機で解く際に必要となる計算時間やメモリ量を理論的に明らかにする。応用上基本的かつ重要な問題の多くが NP 困難と呼ばれるクラスに属し、計算機を用いて効率的に厳密な解を求めることはできないと考えられていることは、コンピュータ科学の基礎的な知見である。この問題に対して、理論的にも実用的にも重要な、いくつかの理論の精密化が近年盛んに研究されている。ひとつは近似アルゴリズムであり、もうひとつは問題の難しさを特徴づけるパラメータによって計算量などが決まるパラメータ化計算量理論である。これらの研究によりNP困難な問題の一部が効率的に解けることが示される一方で、近似やパラメータ化を容認しても効率的に解けない計算困難な問題のクラスが特定されてきている。これを「パラメータ化近似不可能性」と呼ぶ。本論文は、パラメータ化をしても効率的に近似解が得られない難しい問題クラスを分析するこの分野において、従来手法とは全く異なる種の新たな理論的道具を導入し、それを用いて長年の未解決問題を含むいくつかの困難さの証明を成し遂げたものとなっている。

本論文は7つの章からなる。

第1章は導入部である。計算量理論の基礎から、近年のパラメータ化計算量および近似アルゴリズムを紹介し、まず本論文の背景を説明している。また従来この分野で用いられてきた PCP定理を簡単に紹介している。続いて本論文の貢献を概観している。

第2章は背景となる知識の説明である。基本的な離散数学の記法を確認したのち、パラメータ化計算可能性 (FPT: Fixed Parameter Tractable)、 $W[1]$ 、 $W[2]$ という基本的な計算クラスを定義する。いずれもNP困難の一部であるが、FPTよりも $W[1]$ 、さらに $W[2]$ の方が計算が困難と考えられている。次に近似アルゴリズムの基礎が説明される。加えて、本論文で必要となる確率論、有限体理論、カラーコーディングの導入的説明も加えられている。

第3章は本論文で鍵となる理論的道具である $(n, k, 1, h)$ -閾値性の概念と、この性質を持つグラフの構成法を論じている。二部グラフが $(n, k, 1, h)$ -閾値性を満たすとは、ある側の任意の $k+1$ 個の頂点が共通に隣接する反対側の頂点が 1 個以下であり、かつ、ある k 個の頂点が共通に隣接する頂点は h 個以上ある、という状況である。ただし $1 \ll h$ であって、頂点数が k と $k+1$ で共通の隣接頂点数に大きな差が出ること

を意味している。さらに、この条件を満たす二部グラフの具体的な構成方法として、確率的方法と決定的な方法とを示している。

第4章では、Max k -Subset Intersection という問題のパラメータ化近似不可能性を証明している。Max k -Subset Intersection という問題は、 n 個の集合族と整数 k が与えられたときに、 k 個の集合の共通部分で要素数が最大となるものを探す問題である。計算が困難なクラス $W[1]$ に含まれていることが知られている k -Clique 問題を Max k^2 -Subset Intersection 問題に帰着させることにより、Max k -Subset Intersection がパラメータ化近似不可能であることを示した。この帰着において (n, k, l, h) -閾値性を持つ二部グラフを利用している。この結果の系として、長年の未解決課題であった k -Biclique が $W[1]$ 困難であることも示した。

第5章では、Min Dominating Set という問題のパラメータ化近似不可能性を証明している。Dominating Set とはグラフの頂点の部分集合で、その部分集合に含まれる頂点のいずれかに、任意の頂点が隣接しているものである。ここでも k -Clique 問題を Dominating Set 問題に帰着させることにより、任意の Min Dominating Set 問題に対して最適解の定数倍の近似解を出すような FPT アルゴリズムがないことを証明した。

第6章では Max k -Edge-Color Clique という問題のパラメータ化近似不可能性を証明している。これは辺に色が定義されたマルチグラフに対して、 k 色の辺だけを選んで構成される Clique のうち最大のものを求める問題である。これも k -Clique 問題を Max s -Edge-Color Clique に帰着させることにより、パラメータ化近似困難性を証明している。

第7章は本論文の成果をまとめて結論とし、さらに今後の発展の方向性を示している。

従来この分野の研究ではほとんどの結果が PCP 理論に依存していたが、本研究においては (n, k, l, h) -閾値性という新しい理論的道具を導入することにより、PCP 理論によらずにパラメータ化近似不可能性を証明するという新しい道を開拓した。さらにこの新たな道具を用いて有名な未解決問題である k -Biclique の $W[1]$ 困難性を証明したことは本研究分野に大きな衝撃を与えた。このように本研究は情報理工学の発展に著しく寄与する特筆すべき研究成果である。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。