

審査の結果の要旨

論文提出者氏名 山口 勇太郎

現代の科学技術においては、多数の要素から構成される大規模システムの効率的な取り扱いが重要である。要素間の関係を表現する手段として、グラフ・ネットワークが利用され、関連するアルゴリズムが整備されている。特に、グラフ上の組合せ最適化問題の研究は、対象が有限であるにも関わらず実際に計算が困難となる現象を顕在化させ、計算複雑度の理論が創始される契機となった。一方、近年では、結晶構造の様な周期性を持つ無限グラフをコンパクトに表現するために、グラフの各枝に群の元を付加した群ラベル付きグラフを取り扱うことも多くなっている。群ラベル付きグラフは、位相幾何学的グラフ理論、組合せ剛性理論、マトロイド・マイナー理論とも関連し、離散数学の研究対象として注目されている。本論文は、群ラベル付きグラフ上のパスに関する組合せ最適化問題に対して、マトロイド・マッチング理論や2点素パス問題といった古典的な結果との関連を明らかにしつつ、新たな多項式時間アルゴリズムを設計している。

本論文は「Combinatorial Optimization on Group-Labeled Graphs」(群ラベル付きグラフにおける組合せ最適化)と題し、8章からなる。

第1章「Introduction」(序論)では、グラフ上のマッチング問題や点素パス問題を中心に、組合せ最適化分野の歴史的背景を説明している。群ラベル付きグラフ上のパスに関する諸問題を導入した上で、本論文の主要な結果を概説している。

第2章「Preliminaries」(準備)では、グラフに関する諸概念を整理した上で、群ラベル付きグラフ上の諸概念を導入している。さらに、本論文中で用いるマトロイド、デルタ・マトロイドに関する既知の事実も紹介している。

第3章「Packing A-paths」(Aパスの詰込み)では、点素Aパスに関するGallaiの最大最小定理と内点素Aパスに関するMaderの最大最小定理を紹介した上で、非零Aパス詰込みや部分群禁止Aパス詰込みといった群ラベル付きグラフ上の問題設定および先行研究を概説している。

第4章「Packing A-paths via Matroid Matching」(マトロイド・マッチングによるAパスの詰込み)では、Lovászのマトロイド・マッチング理論によるMaderの最大最小定理の別証明を拡張して、群ラベル付きグラフ上の非零Aパス詰込みに関するChudnovsky等の最大最小定理に別証明を与えている。さらに、非零Aパス詰込みを多項式時間で得るために、Lovászのアルゴリズムが適用できることを示している。

第5章「Packing A-paths via Linear Matroid Parity」(線形マトロイド・パリティによるAパスの詰込み)では、非零Aパス詰込みの一般化に当たる部分群禁止Aパスの詰込み問題が線形マトロイド・パリティ問題に帰着されて、より効率的なアルゴリズムが得られるために、群が満たすべき条件を特徴付けている。この条件が満たされる場合には、線形マトロイド・パリティ問題に対する既存の効率的なアルゴリズムを利用することによって、Chudnovsky等が提案した強多項式時間アルゴリズムよりも高速に解を得ることができる。

第6章「Shortest Disjoint A-paths via Weighted Matroid Matching」（重み付きマトロイド・マッチングによる最短点素Aパス）では、群ラベル付きグラフの各枝の長さが与えられたときに、指定された本数の非零Aパス詰込みのうち、合計の長さが最小となるものを求める問題が、重み付きマトロイド・マッチング問題に帰着されることを示している。これは、特殊な場合に当たる通常のグラフ上の内点素Aパスに関しても新しい結果となっている。

第7章「Finding an s-t Path with Two Labels Forbidden」（二つのラベルを禁止したs-tパスの発見）では、群ラベル付きグラフ上で、指定された二つのラベル以外のラベルを持つ2頂点間のパスの存在を問う問題を導入し、通常の無向グラフにおいて二つの端子対間の点素パスの存在に関するSeymourの特徴付けを利用・拡張して、多項式時間アルゴリズムを与えている。

最後に第8章「Conclusion」（結論）では、本論文の成果を簡潔に纏めると共に、今後の研究課題を提示している。

以上を要するに、本論文はマトロイド・マッチング理論に代表される組合せ最適化の古典的な手法が群ラベル付きグラフ上のパスに関する諸問題に対しても有効であることを示して、その応用範囲を拡大している。組合せ最適化の理論面で、新たな境地を切り拓く、非常に質の高い貢献であり、数理情報学の発展に大きく寄与している。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。