

東京大学大学院新領域創成科学研究科
社会文化環境学専攻

2016 年度
修 士 論 文

低周波音の家屋内外伝搬に関する縮尺模型実験
Scale model experiment of low-frequency noise propagation
from outdoor into house.

2017 年 1 月 23 日提出
指導教員 佐久間 哲哉 准教授

加美 梢
Kami, Kozue

目次

第 1 章	序論	7
1.1	研究の背景	7
1.1.1	低周波音問題の変遷	8
1.1.2	低周波音の発生源	10
1.1.3	低周波音に関する苦情・影響	10
1.1.4	遮音に関する物理量	11
1.1.5	低周波音の予測	11
1.2	関連の既往研究	12
1.3	研究の目的	13
1.4	論文の構成	14
第 2 章	家屋の数値解析モデルの構築	15
2.1	はじめに	15
2.2	解析条件について	16
2.2.1	解析モデル	16
2.2.2	家屋の遮音性能指標	18
2.3	外壁振動場に関する検討	19
2.3.1	質量・減衰の影響について	19
2.3.2	剛性の影響について	23
2.4	床・床下空間に関する検討	28
2.5	まとめ	33
第 3 章	縮尺模型を用いた家屋の遮音性能測定	35
3.1	はじめに	35
3.2	家屋模型の作成・測定条件	36
3.2.1	縮尺模型実験の方針	36
3.2.2	縮尺模型実験に関する相似則	36
3.2.3	家屋模型の作成	38
3.3	実験方法・分析方法	46
3.3.1	実験システム・実験場所	46

3.3.2	分析方法	52
3.4	測定結果	54
3.4.1	窓開放の影響	54
3.4.2	外壁質量の影響	62
3.4.3	床下空間の影響	66
3.4.4	換気口の影響	67
3.4.5	音源位置の影響	68
3.5	数値解析・実大実験との比較	69
3.6	まとめ	73
第4章	総括	75
4.1	研究の成果	75
4.2	今後の課題	76
付録A	有限要素法の基礎理論	77
A.1	はじめに	77
A.1.1	家屋構造体のモデル化について	77
A.1.2	積分方程式導出のための基礎事項	78
A.2	音場の数値解析理論	79
A.2.1	音場の基礎方程式	79
A.2.2	音場の境界条件	79
A.2.3	有限要素法による音場の解析	80
A.3	PML(Perfectly Matched Layer) の数値解析理論	84
A.3.1	PML の基礎方程式	84
A.3.2	PML と音響領域の連続条件と PML 終端の境界条件	85
A.3.3	有限要素法による PML の解析	85
A.4	弾性体振動場の数値解析理論	89
A.4.1	弾性体振動場の基礎方程式	89
A.4.2	有限要素法による弾性体振動場の解析	90
A.4.3	平面応力問題への適用	95
A.5	板振動場の数値解析理論	99
A.5.1	板振動場の基礎方程式	99
A.5.2	有限要素法による板振動場の解析	101
A.6	シェル振動場の数値解析理論	107
A.6.1	シェル振動の運動について	107
A.6.2	端部における連続条件と境界積分	108
A.6.3	座標変換を用いた係数行列の組み立て	109
A.7	膜振動場の数値解析理論	112

A.7.1	膜振動場の基礎方程式	112
A.7.2	膜通気性の考慮	112
A.7.3	有限要素法による膜振動場の解析	113
A.8	音響振動連成系の取扱い	116
A.8.1	連成問題における弱形式積分方程式	116
A.8.2	音響系-振動系の結合	117
A.9	要素積分の評価	123
A.9.1	内挿関数とその微分形	123
A.9.2	Gauss-Legendre 積分による面積分・体積分の評価	129
図目次		131
表目次		133
参考文献		135

第1章

序論

1.1 研究の背景

私たちはより豊かな生活を送ることを日々望んでおり、建築空間や都市空間のような人間の生活圏において、空気・熱・光といった環境要素は生活の質を左右する重要な要因である。

音に関しても同様に、生活の質を向上する上で重要であり、中でも騒音振動伝搬の制御については、快適な住環境を整える為に非常に大切である。人間の受忍限度を超えるレベルの騒音を人間が聞き取ると、不快に感じたり、耳や身体に異常をきたすといった健康被害を生じることもある。特に住宅においては普段人が生活する空間であり、より静かな環境が要求される。比較的レベルの小さい騒音でも長時間・長期間に渡り騒音を聞き続けることで、ストレスに感じることもある。特に時間帯によっては睡眠障害等生じてしまう可能性もある。

騒音問題について、高度経済成期には、交通機関や生産施設が発展し騒音発生源の増大、都市における建築空間の高気密化に伴い、外部からの騒音に対する遮音性能の確保が急務であった。その為、1970年代以降、建築基準法・建築基準法施行令や建築学会の遮音性能基準等が定められ、建築物の遮音性能に関する最低水準や、遮音等級、測定法が整備されてきた。これにより、家屋内の暗騒音レベルも低下し、静謐性が確保されている。

一方、家屋内の暗騒音レベルの低下によってこれまで気にならなかった程度の大きさの騒音が顕在化するようになった。その一つが低周波音であり、近年苦情件数が増加している。一般的に低周波音の家屋遮音性能を確保することは困難な上に、低周波音の音響透過・伝搬現象は多くの複雑な要素が関係しており、低周波音による物理現象に関して不明な点が多い。その為、効果的な遮音対策に関する知見が少ないことが現状である。

1.1.1 低周波音問題の変遷

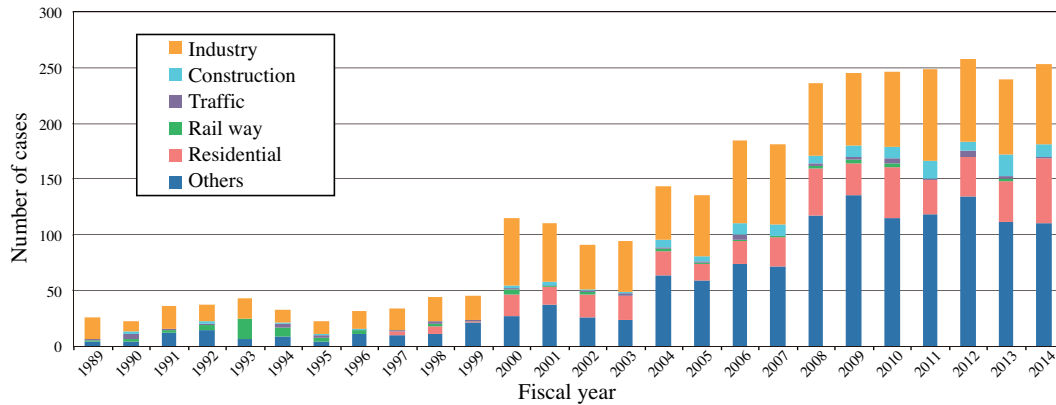


Fig. 1.1: The Number of complaints about low frequency.

人間の可聴域は個人差はあるものの一般に 20~20,000 Hz である。低周波音とは 100 Hz 以下の音のことを言い、中でも人間の可聴域以下とされる 20 Hz 以下の音を超低周波音と言う。この低周波音に関する動向を国内のトピックスを中心に Table 1.1 にまとめた。また、1989 年以降の低周波音に起因する苦情件数の推移を [35] の調査データを参考に Fig.1.1 に作成した。環境庁では 1976 年から低周波音（当時は低周波空気振動と呼ばれた）の実態調査を開始している。1970 年頃から騒音問題の一種として低周波音に起因する問題が発生しており、苦情件数は全体的にも増加傾向である。当時の主な発生源は工場・事業場に設置された大型機器からのものが多く、影響としては 20 Hz 以下の超低周波音による建具のがたつき等の苦情が多くを占めていた。工場・事業場における大型機器の低周波音対策はメーカーを中心に発生原因の解明や防止対策の研究が行われ、1980 年頃までに苦情件数は減少した。また飛行音・エンジンテスト等による航空機に関する苦情も多く、飛行コースの分散化、飛行高度の高度化、エンジンテスト時におけるノイズプレッサーの改善等の対策が講じられ、近年ではこれらの効果が現れていると考えられる。

1993 年、鉄道に関する苦情件数が前年の 4 倍も増加しており、新幹線の高速化に伴い高速列車のトンネル突入時に発生する低周波音が原因であった。これに関しては各所でトンネル抗口付近に緩衝材の設置をすることで対策を行い、翌年には鉄道に関する苦情件数は半分以下に減少している。

近年では低周波音への関心の高まりや家屋の遮音性能向上等により、心身に係る苦情が急増している。近年の苦情発生源として増加傾向にあるうちの一つが一般家庭に普及している小規模な室外空調機や家庭用ヒートポンプ給湯器等の建築設備機器である。これらは比較的低レベルな低周波音であるが、安い深夜電力を使用して稼働するものも多く、就寝時に機器が稼働し低周波音が気になって眠れない等の苦情になることがある。また、設置場所が隣家に非常に近い、設置された面が隣家の方向を向いている等、設置場所の検討が十分でないことが多い。このような苦情の多くは、暗騒音が小さな静かな地域で発生する傾向にある。そのような現状に対し、日本冷凍空調工業会では建築設備機器の販売・据付けに携わる人や企業に向けて、「騒音防止を考えた家庭用ヒートポンプ給湯機の据付けガイドブック」[35] を発表する等の取り組みが行われている。

また 2000 年頃から、地球環境問題に関する意識の高まりとともに、再生可能エネルギー利用の一つである風力発電施設が多く建設され始めた。風力発電施設は静穏な地域に建設される事が多く、これらが騒音源となっている苦情件数も増加している。このような問題は風力発電の先進国であるヨーロッパ諸国でも同様に発生しており、これまでも調査研究が盛んに行われてきた。それらに基づき、ガイドラインの設定等の行政的な対応も行われてきている。一方、日本国内においては、このような風力発電所の騒音問題に対して、行政機関でも早急な対応が必要となってきたが、科学的知見が少なく、現在のところ統一的な基準やガイドラインが整備されるには至っていない。

Table 1.1: Movements related to low-frequency noise.

1970 年頃～	我が国で低周波音問題発生
1976 年	環境庁，低周波空気振動実態調査を開始
1984 年	環境庁，低周波空気振動調査結果を公表
1985 年頃	工場等の大型機械・施設から超低周波音対策が進む，苦情減少
1993 年	新幹線の高速化により低周波音問題発生
1994 年	環境庁，低周波音に関する調査を再開
1995 年	ISO-7196，低周波音の周波数重み特性（G 特性）規定
2000 年 12 月	環境庁，「低周波音の測定方法に関するマニュアル」公表
	環境庁，「低周波音の測定方法に関するマニュアル」公表
2002 年 3 月	環境省，「低周波音防止対策事例集」公表
2002 年頃～	近隣の住宅・店舗・施設等の機器からの低レベルの低周波音による苦情発生
2004 年 6 月	環境省，「低周波音問題対応の手引書」公表
2007 年	環境省，「よくわかる低周波音」公表
2007 年頃～	風力発電施設からの低周波音苦情が発生

1.1.2 低周波音の発生源

低周波音の発生機構と発生機構別の発生源を以下に示す。

- (1) 平板の振動：大型の振動ふるい，道路橋，いつ水ダムの水流
- (2) 気流の脈動によるもの：空気圧縮機，真空ポンプの圧縮膨張による容積変動
- (3) 気体の非定常励振によるもの：大型送風機の翼の旋回失速やシステムのサージング，振動燃焼等
- (4) 空気の急激な圧縮，開放によるもの：発破，鉄道トンネルでの高速での列車突入等

低周波音問題が発生する可能性があるものを以下に示す。このうち，大型の機械については，正常な稼動状況ではない場合に超低周波音が発生する恐れがあることが報告されている。

送風機，往復式圧縮機，ディーゼル機関，真空ポンプ，風車，振動ふるい，ジェットエンジン，ガスタービン，ヘリコプター，機械プレス，治水施設，ガスエンジン，水車，変圧器等

1.1.3 低周波音に関する苦情・影響

(1) 物的影響

物的影響は人には聞こえないが低周波音が空気を伝わり建具や置物を振動させてしまう現象である。具体的には戸や窓等の建具がガタガタする，置物が移動するといったことが挙げられる。落合らによると建具は 20 Hz 以下の周波数で人の感覚閾値より小さい音圧レベルでがたつき始める場合があるということが分かっている [15]。環境省では，実験室において 15 種類の建具について，がたつき始める音圧レベルを測定している [27]。実験結果によると，揺れやすい建具で 5 Hz : 70 dB，10 Hz : 73 dB，20 Hz : 80 dB あたりからがたつき始めている。また，落合らは試験する建具の種類と測定する周波数帯域を増やして同様の測定を行い，個々の建具についてがたつき始める音圧レベルを測定した [16]。

(2) 心身に関わる影響

心身に係る影響は，心理的影響と生理的影響の 2 つに大別される。心理的影響は，不快感や圧迫感を感じる，気分がいらいらすると言った影響である。生理的影響は，頭痛や耳鳴りがする，睡眠妨害を引き起こす等の影響である。心身に係る影響については，個人差によって問題が発生するレベルは大きく異なる。そのため，低レベルのものであっても，苦情者にとっては深刻な問題になっていることが多い。

低周波音の聴覚閾値や，聴感印象については個人差が大きく，苦情に対する対応が難しい。環境省では行政の方に向けて，「低周波音問題対応の手引き書」[31] を発行し，レベル変動の少ない固定された機械，施設から発生する定常的な低周波音を対象として，苦情の原因が低周波音によるものか否か，目安の参照値として物的苦情に関する参照値，心身に係る苦情に関する参照値が示されている。

1.1.4 遮音に関する物理量

低周波音に限らず、一般に騒音の対策としては、外壁の高重量化、窓ガラス・サッシの交換等の対策が考えられる。しかし、一般に建物自体の遮音性能も低周波音に関しては期待できないと言われている。低周波音の遮音においては、騒音領域で用いられる質量則と剛性則があり、以下にまとめる。

質量則 板材料の音響透過損失 R [dB] は音の周波数を一定とすれば板の面密度 m [kg/m²] が大きいほど大きくなる。入射角 θ における透過損失 R_θ の質量則を Eq.(1.1) に示す。この質量則による遮音量の推定は 20 ~ 100 Hz の付近の周波数帯域の低周波音に対して適用されることが多い。

$$R_\theta = 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega m \cos \theta}{2\rho_0 c} \right)^2 \right) \quad (1.1)$$

ここで、 ρ_0 [kg/m³] は空気の密度、 c [m/s] は音速である。

剛性則 有限平板の透過損失について、1 次の固有周波数 f_0 以下の周波数帯域においては、平板の剛性のみにより支配される領域がある。平板の剛性により、透過損失の値が決まることを剛性則といい、入射角 θ における透過損失 R_θ の剛性則は Eq.(1.2) で表せる。

$$R_\theta = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{Z_m \cos \theta}{2\rho_0 c} \right)^2 \quad (1.2)$$

ここで、 Z_m は平板のインピーダンスである。さらに、 Z_m は Eq.(1.3) で表される。

$$Z_m = \frac{K}{\omega}(\eta - j) \quad (1.3)$$

ここで、 η は板の内部損失、 K [N/m³] は等価剛性である。4 辺単純支持の矩形平板において、等価剛性 K は Eq.(1.4) で表される。

$$K = \frac{Et^3 \pi^4}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (1.4)$$

ここで、 E [N/m²] はヤング率、 t [m] は板厚、 ν はポアソン比、 a, b [m] は平板の寸法である。Eq.(1.3),(1.4) より、内部損失のない、単純支持の矩形平板の垂直入射の透過損失 R_0 の剛性則は Eq.(1.5) で表される。

$$R_0 = 10 \log_{10} \left\{ 1 - \frac{jEt^3 \pi^4}{24\omega\rho_0 c(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \right\}^2 \quad (1.5)$$

1.1.5 低周波音の予測

上述したような低周波音の問題を解決するためには、物理現象を明確に捉え効果的な解決策を予測・評価し、対策を施す必要がある。さらに、建物建設前に予測し対策を行うことで、事前に低周波音に関する問題を防ぐことができる。まず予測手法について、低周波音の物理的特徴に触れながら整理する。基本的

な音響特性の予測手法として、仮想的に設定し物理的なシミュレーションを行う数値解析と、模型を作成し音響測定を行う実験的検討の2つに大別できる。

数値解析では、(1)大掛かりな実験設備が不要、(2)任意形状・任意条件が扱える、(3)設計変更への対応が容易といった利点がある。数値解析は、一般に波動性を無視した幾何音響学的手法と振動場での偏微分方程式に基づく波動音響学的手法に大別される。低周波音は波動的性質の影響が大きく、具体的には、屋外にある音源から低周波音が塀や壁を回り込んで屋内へ透過し、透過した音波が住宅内で干渉を起こすことが考えられる。つまり、屋外からの低周波音に対する遮音性能を考える場合、垂直入射や斜入射だけではなく回折した音波を考慮し、更にその音波が駆動力となり壁を振動させ、居室空間に透過することを考えなければならない。その為、数値解析手法としては波動音響手法が適しており、弾性体等の異質媒質の内部音場や振動場との連成を考慮した、音響振動連成解析を行うことで、より現実に即した予測が見込まれる。

一方、波動音響学的手法において建築空間への適用性という点でいくつかの問題を抱えている。第一の問題点としては、解析する周波数領域が広範な場合や高周波数領域の場合、計算機の記憶容量、計算時間が過大となる点が挙げられる。この点において、低周波領域の数値解析する場合は波長が長い為、空間の離散化において高周波数よりも大きく、少ない節点数で精度の高い解析が可能である。第二の問題点としては、モデル化によっては現象を十分にシミュレート出来ないことがある。その為、適切なモデル化を検討しなければならない。

実験的検討については、現象を直接把握することができるが、縮尺模型実験の場合、相似則をいかにして成立させるかが難点である。 $1/n$ の模型実験では相似則を満たす為に $1/n$ の波長の音、すなわち n 倍の周波数の音を用いるので超音波帯域及ぶことがある。このような高音域では空気の音響吸収が問題となり、相似則が成り立たなくなることがある。音波は音源から離れるにつれ音圧が小さくなり、その減衰の大きさは基本的には空間的に拡散することから説明されるが、屋外での騒音伝搬では、空気の粘性や熱伝導によるエネルギーの散逸、分子の緩和現象及び有限振幅の影響などによる音の吸収損失がある[7]。しかし、このような空気による音の吸収の影響は低周波音は高周波数の音に比べて小さい。その為、大音圧の低周波音では遠方まで伝搬してしまうが、模型実験においては空気吸収の影響を考慮せずに実験を行うことができる。

1.2 関連の既往研究

低周波音に対する家屋の遮音性能に関する既往研究、報告について説明する。環境庁大気保全局は、低周波音発生源付近の家屋59戸において、家屋内外で音圧レベルを測定し、家屋構造別、窓構造別に内外音圧レベル差を算出している[28]。5 Hz以下の周波数帯域においては、家屋構造や窓の種類による有意な変化は認められず、5 Hz以上の周波数帯域については、周波数の上昇と共に内外音圧レベル差が上昇する傾向にあった。比較的軽量な木造家屋に比べ、RC造のような高重量の家屋の方が遮音性が高いという定性的な知見は得られたものの、各家屋において音源と家屋の位置関係、周囲の建物の配置、家屋の寸法等の他の不確定要素による影響については明らかになっていない。

土肥らは低周波音発生装置を開発し[11]、周囲からの反射の影響の無い広大な敷地において、模擬家屋を用いたフィールド試験を行っている[12]。家屋の窓の存在や窓の振動が屋内音場に影響を及ぼすことを

示している。10 Hz 付近の周波数帯域において家屋の窓が著しく振動し、家屋内に音波が透過しやすい条件になることを示している。一方で、窓の固有振動が窓のみの要因で決定するのか、或いは家屋内の空気と連成して決定するかは明らかになっていない。また、家屋内で三次元の音圧レベル分布を測定した結果、20 Hz 以上の周波数帯域では家屋内に分布が生じ、家屋内における計測点位置について注意を払う必要性を述べている。家屋近傍の屋外の測定点においては、25 Hz 付近の周波数帯域で家屋から反射が生じ始め、屋外の音圧レベルが上昇する傾向にあることを示している [13]。既往研究の多くは、家屋内外レベル差を低周波領域の遮音性能の評価指標として用いており、基準とする屋外の音圧レベルの測定位置の選定を行う上で参考となる知見である。

また、Doi は家屋の気密性が低周波領域の家屋の遮音性能に及ぼす影響についても検討を行っている [4]。測定では、模擬家屋に設置されたドアの微小開放やドア周囲をテープで気密することにより気密性の影響について検討している。特に 10 Hz 以下の帯域において、条件間に差が生じ、気密性の影響が顕著に現れた。一方で、ドアを微小に開放することで、ドアを閉じている状態よりも家屋内の音圧レベルが低下するような傾向も見られたが、どのような要素に起因するかは不明瞭である。10 Hz 以下の周波数帯域における家屋の気密性が遮音性能に及ぼす影響について、理論的に考察している [5]。

また、本研究に関連する既往研究として、橋本等は家屋近傍の音源から生じる定常的な低周波音を対象として、有限要素法による音響振動連成解析を行っている [20][21][22]。受音系における低周波領域の遮音性能に関わる要素として (1) 窓の質量・剛性 (2) 外壁の質量 (3) 微小な隙間の 3つの項目について解析モデルを構築し、屋内音場に与える影響について考察している。また模擬家屋を用いた実大実験を行い、窓の開閉条件について数値解析との対応を確認した [23]。屋内音圧レベルが上昇する現象として、家屋内空気をバネ、窓・外壁を質量とする共振系が形成する現象と、室の固有モードの発生について実大実験と数値解析で同様の傾向が見られた。しかし、数値解析では共振による屋内音圧レベルの上昇を過大に評価してしまう傾向や、実大実験の内外音圧レベル差はより複雑な周波数特性が確認され、実現象の把握には至らなかった。原因としては、外壁振動場での減衰や剛性の影響、家屋全体の剛性の影響等を考慮する必要があることが考えられる。また、他にも窓の支持条件や床の振動や床下空気層等、モデル化の不備が考えられる。

1.3 研究の目的

以上のような背景から、家屋近傍の音源から生じる定常的な低周波音を対象とし、家屋遮音性能を総合的に予測する為の基礎的な知見を得ることを大目的とする。また、数値解析と縮尺模型実験を行う。

数値解析では低周波音の波動的性質や屋外空間・外壁・屋内空間の相互作用を考慮し、有限要素法を用いた音響振動連成解析を行う。既報の課題点を踏まえ、特に以下の項目について解析モデルの検討を行う。

- 膜モデルにおける外壁の振動減衰の考慮
- 床下空間の連成の影響
- 外壁振動場の剛性の影響

また、より単純な構造の模型を用いて縮尺模型実験を行い、数値解析・実大実験と比較することで、実

現象の把握、遮音性能に関わる要素の解明を目指す。検討としては以下の項目に着目する。

- 窓開閉条件の影響
- 床下空間の影響
- 外壁質量の影響

将来的には、低周波音を発生する騒音源の適切な配置や、建築部位の効果的な遮音対策の方法論の構築が見込まれる。

1.4 論文の構成

以下に論文の構成を示す。

第1章では、研究の背景として、低周波音に関わる苦情・影響、低周波音問題の動向について、これまでの先行研究についてをまとめた上で、本研究の位置付け及び目的について述べる。

第2章では、低周波領域における家屋の数値解析モデルの構築について述べる。既往研究での課題点を踏まえ、外壁振動場については通気性の膜モデルを用いた質量・減衰の影響、また板・シェルモデルを用いて壁一面の剛家や屋全体の剛性の影響を観察した。また、床については、床下空気層の影響について観察した。

第3章では、低周波音における家屋の縮尺模型実験について述べる。実験に用いた模型、音源等の測定概要と測定条件、分析方法について検討した項目を述べる。外壁質量・床下空間・窓の開閉条件の影響について検討を行った。また、数値解析、実大実験との比較・検討を行うと共に、数値解析モデルの妥当性や実環境における低周波音の遮音性能に及ぼす要因について考察をする。

第4章では得られた知見を整理し、今後の展望を述べる。

第 2 章

家屋の数値解析モデルの構築

2.1 はじめに

本章では低周波音領域における家屋の音響透過現象をシミュレートするための数値解析モデルの構築を行う。解析手法としては有限要素法を用いる。尚、解析理論自体は既によく知られた手法であり、それを議論することは目的ではないため、理論の詳細は付録 A に譲ることとする。

低周波音に拘らず一般に音響透過現象は”音源系”，”伝搬系”，”受音系”で様々な要因が相互に影響し合っており現象が複雑である。本研究では”音源系”，”伝搬系”については以下のような一定の条件を与え，”受音系”の個々の要素が遮音性能に及ぼす影響を一つずつ検討していく。

- 音源系：定常的な低周波音を発生するような騒音源が家屋近傍に設置されている
- 伝搬系：家屋の周囲からの反射の影響がなく，塀等の遮蔽物がない

Fig.2.1 に示すような地表面が剛の半自由空間上に単純な形状の家屋とその近傍に低周波音源が設置されている状況を想定する。

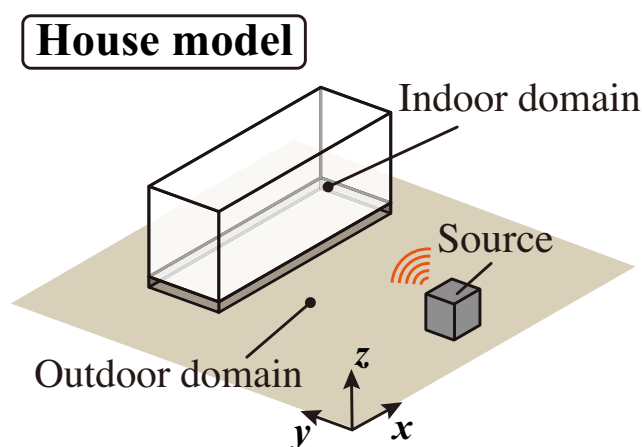


Fig. 2.1: A house is assumed to be a box-shaped placed on the semi-free field. A stationary sound source generating low-frequency noise is assumed to be equipment item placed closely to the house.

2.2 解析条件について

2.2.1 解析モデル

家屋の大きさ・形状

本研究では現象を一つずつ把握していく為に、単純化した家屋モデルを作成し、建物の要素と遮音性能の関係を一つずつ観察していく。家屋の形状については、固有周波数の算出が用意な直方体とした。ただし、寸法が小さい整数比のとき室の固有モードが低音域においても縮退し、現象把握が煩雑になる可能性があることに注意が必要である。ここでは、3章で実大実験や縮尺模型実験の結果を比較し、対応を確認する為、実大実験で使用した模擬家屋の内寸を参考に家屋モデルの寸法を $4.8\text{m} \times 1.8\text{m} \times 2.15\text{m}$ の大きさとした (Fig.2.2)。その寸法比は $96:36:43$ である。

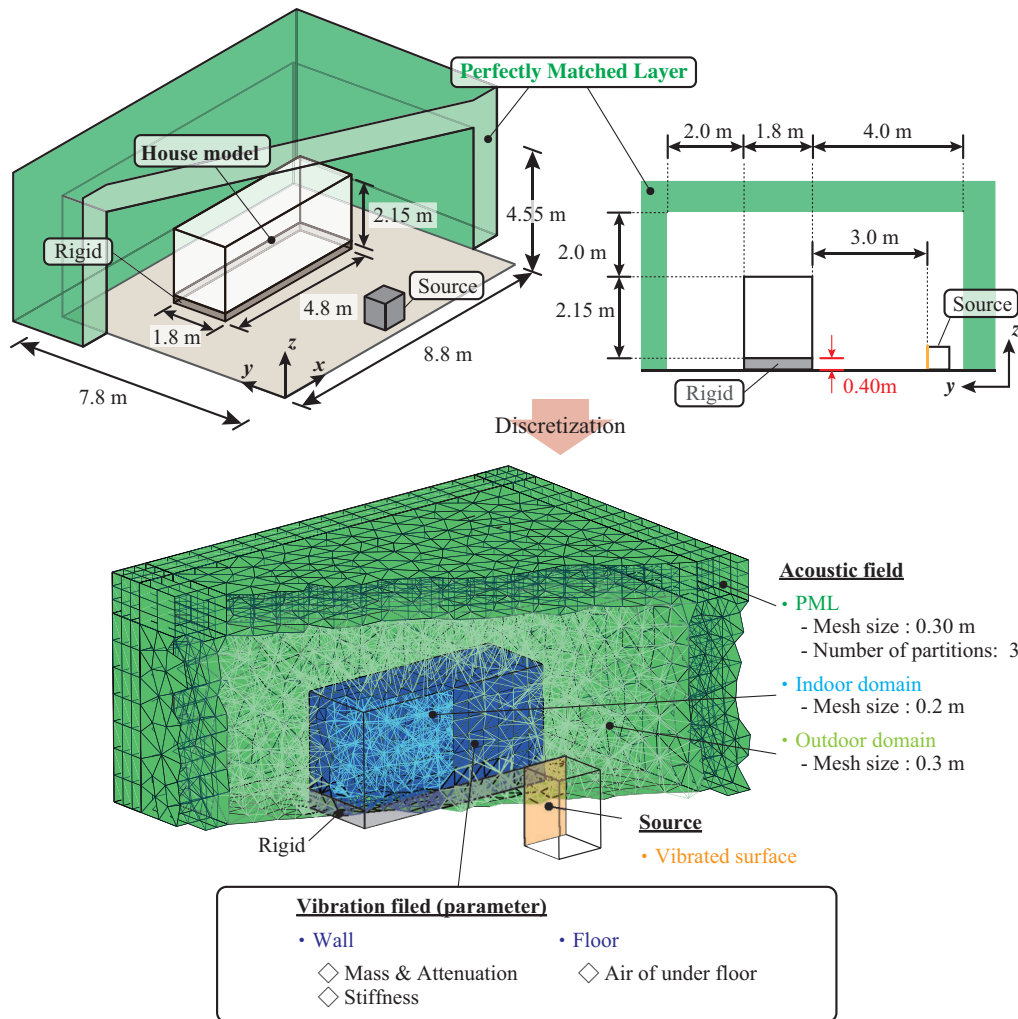


Fig. 2.2: A numerical model of the box-shaped house. External acoustic field is truncated with Perfectly Matched Layer(PML).

屋外音場のモデル

屋外音場のような開領域を模擬する為に、人口吸音層 (PML: Perfectly Matched Layer) の用いて領域を打ち切る (Fig.2.3)。PML は家屋から 2.0 m 離れた周囲に設定し、音場領域と PML の領域の境界面上で反射が起きないように、PML の厚さ方向の領域分割数 n_{PML} は 3 にした。また、領域の分割は、三角柱二次要素で分割し、音場領域では四面体二次要素で分割した。音場領域・PML の領域共に、接点間の距離 (要素長) は解析周波数の最短波長 (140.3 Hz の波長 2.45 m) の 1/6~1/8 以下の長さになるように分割する。要素長は 0.3 m とした。尚、空間の離散化については、Christophe Geuzaine と Jean-Francois Remacle によって開発された有限要素法におけるメッシュ作成用のフリーソフトウェアである Gmsh を用いて行った。

解析周波数

解析周波数は 1/24 オクターブバンドの中心周波数で 3.5 Hz (1/3 オクターブバンドの 4 Hz 帯域の下限周波数) から 140.3 Hz (1/3 オクターブバンドの 125 Hz 帯域の上限周波数) までを解析した。また、1/3 オクターブバンド中心周波数において、上限周波数から下限周波数までの平均値を 1/3 オクターブバンドのレベルとして算出している。

音源モデル

本研究では、音源位置は固定で定常的な低周波音を発生する音源を対象とする。具体的には家庭用の設備機器や工場・事業場等の大型機器等がある。音源モデルは、縮尺模型実験に用いるスピーカー大きさを模擬し、直方体の一面が振動面となっている (Fig.2.3)。音源は家屋の長手方向に対して正面に 3m 離れて配置し、振動面が家屋に対向するように設定した。振動面で一様の振動速度を与えた。

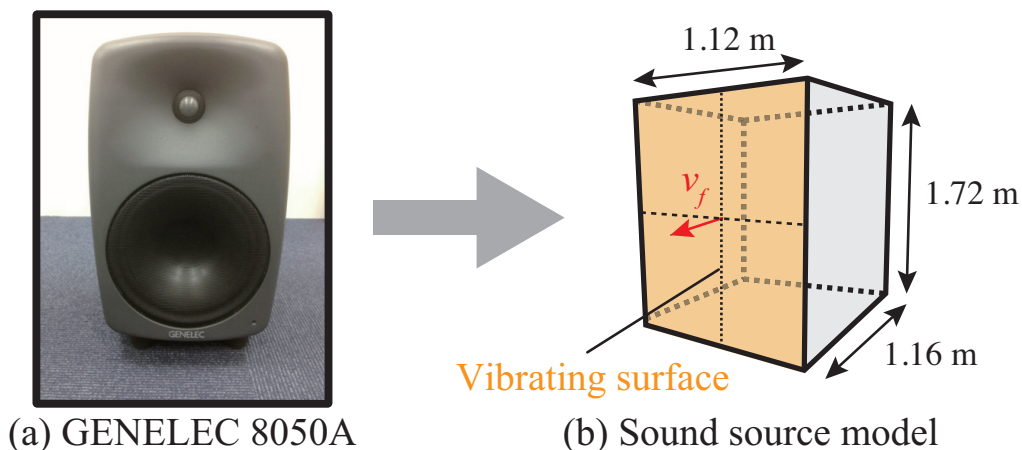


Fig. 2.3: A numerical model of a sound source such as a heat pump unit.

2.2.2 家屋の遮音性能指標

低周波音に対する家屋の遮音性能を評価する指標として、内外音圧レベル差 $L_{out} - L_{in}$ が一般的に用いられている。しかし屋外音圧レベル L_{out} として、家屋近傍の屋外点での音圧レベルを用いると家屋からの反射波が音源からの直接波との干渉が生じる。干渉の程度は家屋前面の条件や周波数によっても大きく異なるものと考えられ、低周波音に対する家屋の遮音性能の把握が煩雑になる可能性がある。

屋内音圧レベル L_{in} について、低周波領域においては、家屋内の低次の固有モードは比較的大きい音圧分布を生じ、受音点の選定次第で室内音圧レベルを過大・過小評価する可能性がある。

以上を踏まえ、本章の家屋の遮音性能を評価する指標として、内外音圧レベル差 ΔL は、屋外音圧レベル L_{out0} を家屋がない状態における家屋前面での音圧レベルとして、別途解析した。屋内音圧レベル \bar{L}_{in} は、全節点における音圧レベルのエネルギー平均値とする。

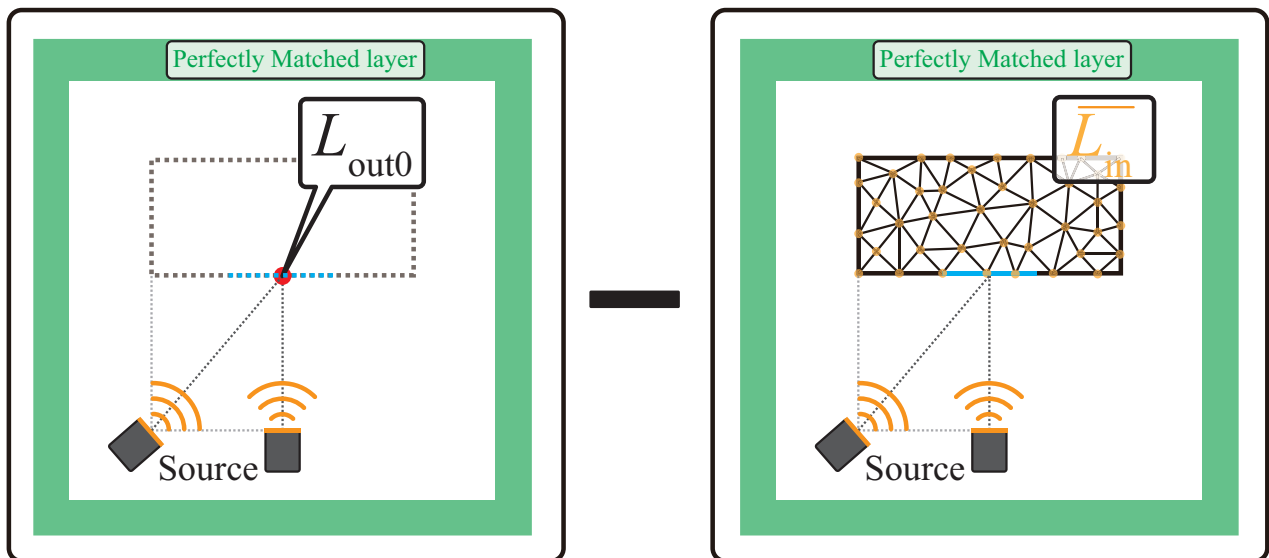


Fig. 2.4: Schematic diagram of the calculation of insertion loss before and after the house placement.

2.3 外壁振動場に関する検討

2.3.1 質量・減衰の影響について

解析条件の設定

家屋の遮音性能を決定づける要因の一つである外壁からの低周波音の透過・伝搬に関する検討を行う。ここでは外壁を振動場として扱い、屋外音場-振動場-屋内音場の音響振動連成系で解析を行う。実際の家屋の外壁では、石膏ボードやグラスウール、合板、サイディング等で構成されており構造材によって支持されているが、低周波領域では構造材と外壁が一体となって振動するような状況が考えられる。この時、家屋遮音性能は質量則により決まるものと考えられる。

そこで本節の検討では、外壁（床面を除く）について曲げ変形に対する抵抗がなく質量のみを考慮した無張力膜要素を設定し、その面密度 ρ_m をパラメータとして解析を行う。

また、既報により外壁を質量のみを考慮した無張力膜要素で設定した場合、外壁質量・家屋内空気ばねにより形成される単一共振系において、減衰を考慮していないために屋内音圧の上昇を過大評価してしまうことが報告されている [19]。そこで、2つ目の検討として、外壁振動に伴う減衰を考慮する為、膜要素に流れ抵抗を設定し ΔL を算出する (Fig.2.6)。尚、流れ抵抗による減衰の模擬は便宜的なものであり、実現象との対応関係は別途検討の余地がある。

家屋の面（外壁、天井）全体で一様な面密度であることを想定する。面密度 ρ_m と流れ抵抗 σ を Table.2.1 に示す。外壁外壁の質量は、Fig.2.5 に示すように、一般的な木造家屋と防音工事仕様 [33] の壁の面密度を模擬している。

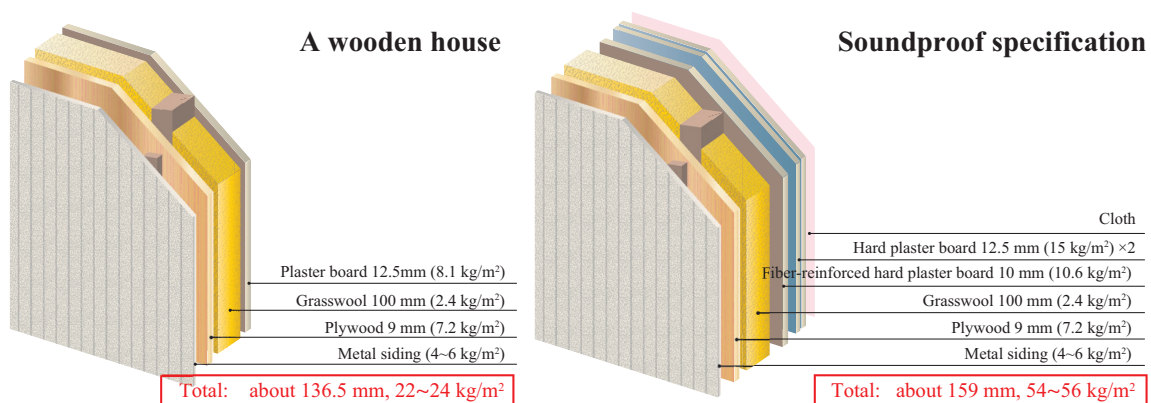


Fig. 2.5: Examples of outer wall specification.

Table 2.1: Physical properties and support condition of membrane and plate.

Membrane	Area density	$\rho_m = 24, 48$	[kg/m ²]
	Flow resistance	$\sigma = 2500, 5000, 10000, 20000, \infty$	[N · s/m ³]
	Support condition	Free	

結果と考察

解析結果を Fig.2.6 に示す。

■**家屋内の固有モードの励起** 各条件で 63 Hz 以上の周波数帯域でディップが生じており、家屋内の音圧レベルが著しく上昇している。外壁質量によらず同じ周波数でディップが生じていることから家屋内に固有モードが発生していることが考えられる。壁面を全面剛とした直方体室の固有モード周波数 f_n は理論的に以下の式で与えられる。

$$f_n = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \quad (2.1)$$

l_x, l_y, l_z [m] は室の寸法であり、 n_x, n_y, n_z はモード次数である。対象の周波数帯域における家屋の固有モード周波数の理論値を Table2.2 に示す。

Table 2.2: Natural frequencies of the test houses.

	(n_x, n_y, n_z)	Frequency [Hz]
Axial mode	(1,0,0)	35.8
	(0,1,0)	95.4
	(0,0,1)	79.9
	(2,0,0)	71.5
	(3,0,0)	107.3
Tangential mode	(1,1,0)	101.9
	(0,1,1)	124.4
	(1,0,1)	87.5
	(2,1,0)	119.2
	(2,0,1)	107.2
	(3,1,0)	143.6
	(3,0,1)	133.8
Oblique mode	(1,1,1)	129.5
	(2,1,1)	143.5

屋内の固有モードと理論値を比較すると、概ね近い周波数帯域でディップが生じている。これより、家屋内の固有モード周波数に近接する周波数帯域で、家屋内の音圧レベルが上昇すると考えられる。一方で、長手方向 (x 軸方向) の一次元モードでは内外音圧レベル差 ΔL に落ち込みが見られない。これは加振力が対称になっているため、(1,0,0) モードが励起されないためと考えられる。家屋内の固有モードの励

起は屋内音場の加振条件に依存し、音源の配置や入射角の制御によってモードの発生を抑えられる可能性が示唆される。

また、本検討における家屋は室の寸法が一般的な家屋よりは小さく、家屋内の固有モードが 63 Hz 以上の帯域から発生しているが、室の寸法がさらに大きい場合では、より低域側で室内の固有モードが生じ家屋内の音圧レベルが上昇しやすい。特に、家屋近傍の低周波音源としてあげられる。ヒートポンプ給湯器の周波数特性としては、回転数に起因した周波数 (40~60 Hz) とその倍調波成分 (80, 120, 180Hz) が主成分である音が発生するため、固有モード周波数が同様な帯域に存在する場合は、屋内の音圧レベルが高くなってしまふ可能性がある。さらに、高次のモードが密接する帯域も低域側にシフトし、質量則ほどの遮音性能は期待できないものと推察される。

一方で、面密度 ρ_m が大きくなるほど、室内の固有モードにおけるピークディップが大きく現れている。実際の壁においては、積層構造や接合部等の影響があり、外壁の振動場でエネルギーは減衰していることが考えられる。膜振動場の減衰を考慮した結果をみると、固有モードの励起による屋内音圧レベルの上昇が小さくなっている傾向が見られる。しかし、本検討で考慮した減衰は通気性の膜要素として扱い、流れ抵抗を便宜的に与えている。その為、流れ抵抗 σ の値には特に根拠はない。現実的にはどの程度減衰しているかは不明である。

■超低音域における家屋内の音圧レベルの上昇 各条件において、20 Hz 以下の周波数帯域でディップが生じており、家屋内の音圧レベルが著しく上昇している。外壁の面密度 ρ_m が大きいほどこのディップは低域側にシフトしており、より強く共振の影響が現れている。この超低周波領域における家屋内レベルの上昇については橋本が理論的考察を与えており、家屋内空気バネ・外壁質量による共振系によるものと指摘している [19]。

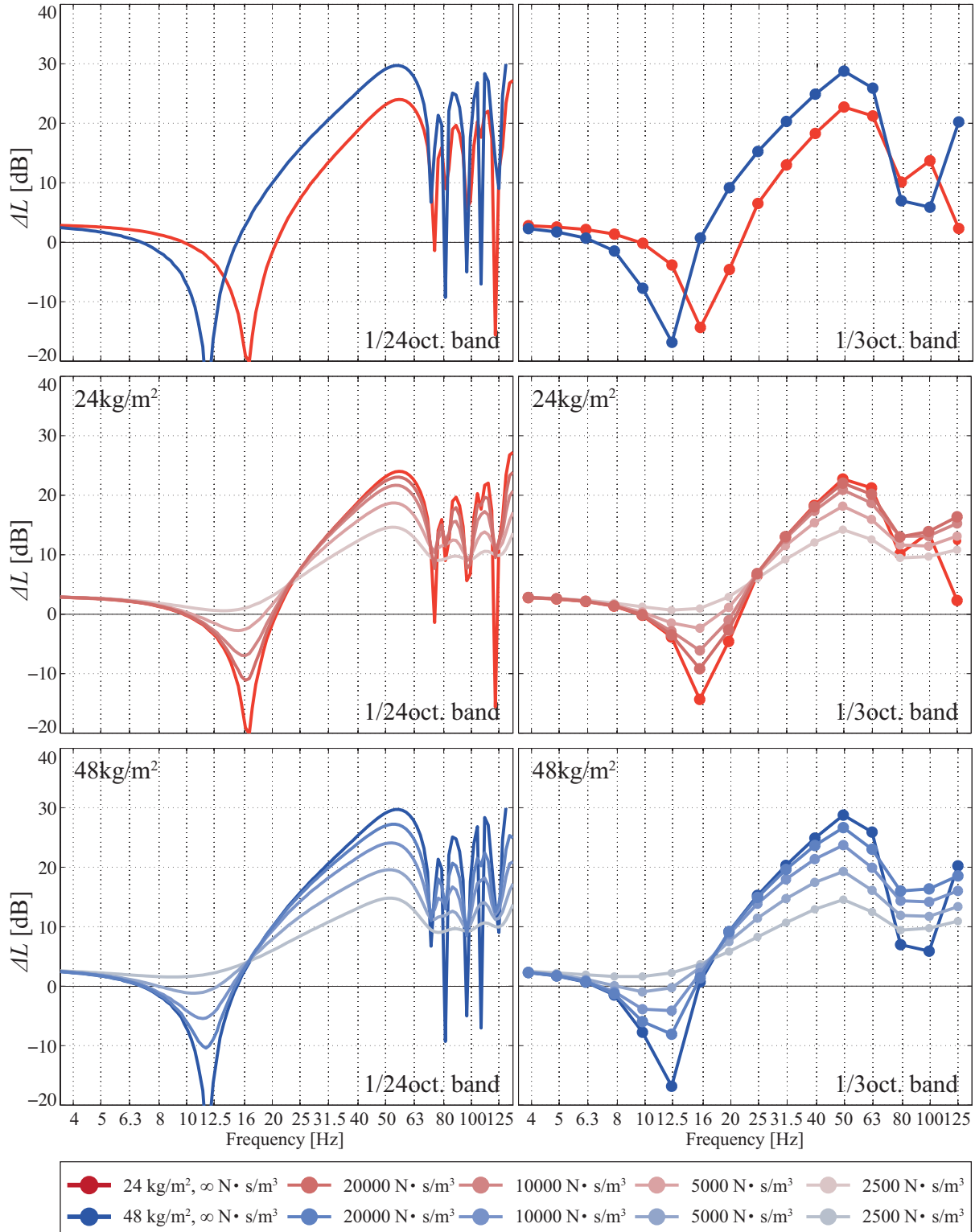


Fig. 2.6: ΔL of house with changing the area density of a membrane wall.

2.3.2 剛性の影響について

解析条件の設定

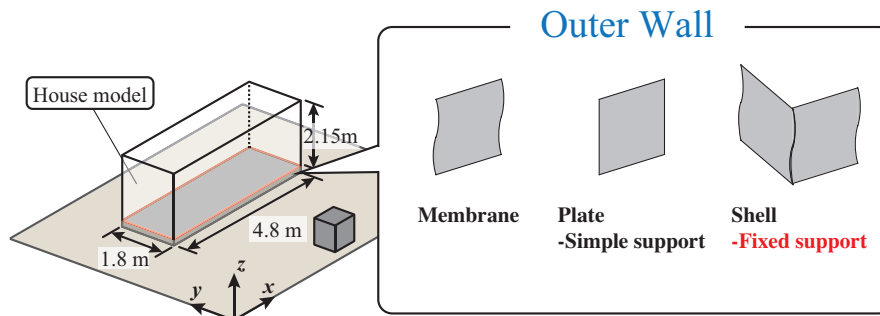


Fig. 2.7: Delta L of house with changing the area density of a membrane wall.

第1章でも述べたように、質量則以外にも、低音域では剛性則の影響が大きいと言われている。有限要素法においては、板要素による振動解析は基本的に平面内を伝わる曲げ振動の伝搬のみを取り扱うため、壁と壁接合部分（折れ曲がり部分）における振動の伝搬を考慮することができない。このような問題においては”付録 A.6.1 シェルの振動の運動について”に示すとおり、面内を伝わる縦波・横波及び、折れ曲がり部分での縦波・横波・曲げ波の連成を考慮することが不可欠である。

ここでは外壁（床面を除く）について曲げ変形のみを考慮した板要素と、曲げ・面内変を考慮したシェル要素による解析を比較する（Fig.2.7）。Fig. 2.8 に両モデルの振動の様子の違いを示す。板モデルでは黒線で示した家屋フレームが剛であるのに対し、シェルモデルでは家屋フレームも振動する様子が見られる。

板厚 t をパラメータとし、内外音圧レベル差 ΔL を算出した（Fig.2.9）。外壁の質量については概算できるが、積層構造の壁全体の剛性については明確ではない為、第4章で比較する模型実験に用いたアクリル板の物性値を用いた。その値を Table2.3 に示す。

板・シェル要素を設定した条件での解析では、板の曲げ波の波長 λ_B に合わせて離散化するため、板要素・シェル要素に設定した外壁は、局所的に細かく離散化を行った。板材料内を伝搬する曲げ波の伝搬速度 c_B は下式で表される。

$$c_B = \sqrt{2\pi t f \sqrt{\frac{E}{12\rho_s(1-\nu^2)}}} \quad (2.2)$$

ここで、 $\rho_s[\text{kg}/\text{m}^3]$ は板材料の密度、 $t[\text{m}]$ は板厚、 $E[\text{N}/\text{m}^2]$ はヤング率、 ν はポアソン比である。Eq.(2.2) より、各条件における曲げ波の波長 $\lambda_B = c_B/f$ より、板要素周辺については一要素長が 0.08 m となるように離散化を行い解析した。

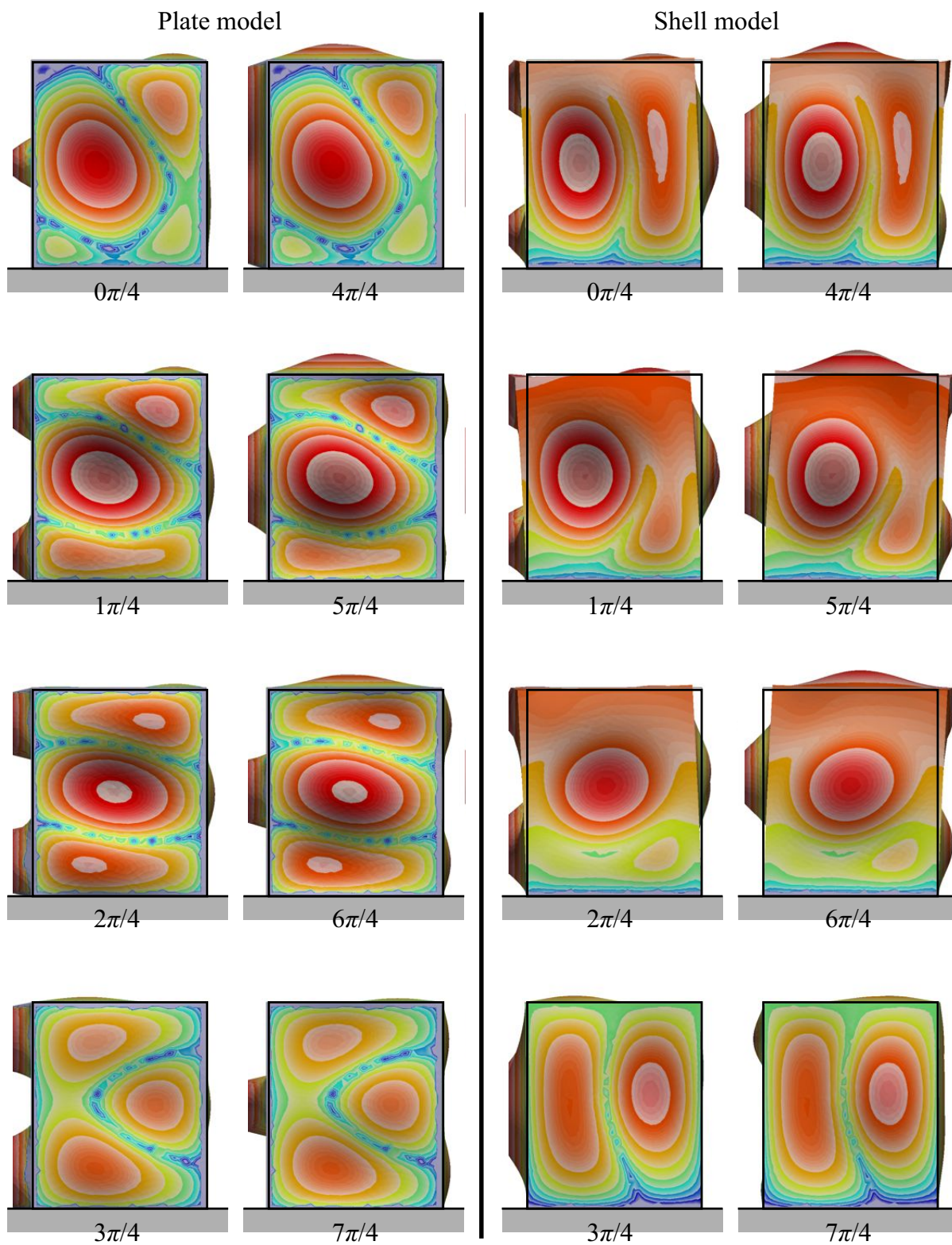


Fig. 2.8: An example of deformations of a house modeled with plates and a shell

Table 2.3: Physical properties and support condition of membrane and plate.

Young's modules	$E = 3.1 \times 10^9$	[N/m ²]
Poisson's ratio	$\nu = 0.35$	[-]
Density	$\rho_s = 1200$	[kg/m ³]
Thickness	$t = 5, 10$	[mm]
Support condition	Simple support Fixed support (floor perimeter)	

結果と考察

解析結果を Fig.2.9 に示す。

■板の固有周波数の影響 外壁に無張力膜要素（質量のみ）を設定した条件での ΔL の周波数特性は、室内の固有モード周波数に近接する周波数帯域で落ち込みがみられ、また超低周波音域での共振系の形成によりディップが生じている傾向である。一方で、板要素（質量+剛性）とシェル要素（質量+家屋全体の剛性）を設定した条件では、特に 40 Hz 以下の帯域で無張力膜要素の結果と異なる傾向が見られピークディップが現れている。このピークディップは板厚 t によって周波数帯域が異なっている。また、板要素とシェル要素の結果を比較すると、シェル要素の方がピークディップが少ないことがわかる。これは家屋全体の一体的な振動が板単体の固有振動よりも卓越するためと考えられる。

板の四周を単純支持とした板の固有周波数 f_{mn} は下式で与えられる。

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Et^2}{12\rho_s(1-\nu^2)}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (2.3)$$

ここで、 m, n はモード字数、 a, b [m] は板の寸法である。

剛性の影響が見られる 40 Hz 以下の家屋の壁の板の固有周波数を Table.2.4 に示す。なお、加振力が対称に加えられている場合には奇数モードを、非対称な場合は偶数モードも記した。板の固有周波数に近接する周波数帯域でディップが生じていることがわかる。

板厚 20 mm では 40 mm に比べ曲げ波の速度が遅いため、より低域側に板の共振周波数ある。さらに、超低周波領域におけるバネマス系の共振周波数は外壁質量が軽いほど高域にシフトする為、20 Hz 以下の帯域では、40mm 厚よりも広域に渡り遮音性能が低い。

40 mm 厚の結果に着目すると、1 次の板の固有周波数以下において低域に行くに従い、ほぼ一定の遮音性能に漸近する傾向が見られる。特にシェル要素ではより ΔL が大きい方が、その原因については不明である。

■超低音域におけるバネマス系の共振系 板厚 20mm では、超低周波領域でのバネマス系の共振について板・シェル要素の結果は、共に同程度の落ち込みが確認できる。一方、板厚 40 mm では板の固有周波

Table 2.4: Natural frequencies of simple supported plates.

Mode order		Frequency [Hz]					
		(1,1)	(1,2)	(3,1)	(3,2)	(5,1)	(5,2)
xy walls (4.8×1.8 m)	$t = 20$ mm	5.5	19.9	10.9	25.3	21.7	36.1
	$t = 40$ mm	10.9	40.0	21.8			
Mode order		(1,1)	(1,3)	(2,1)			
yz walls (1.8×2.15 m)	$t = 20$ mm	8.2	35.1	22.6			
	$t = 40$ mm	16.3					
Mode order		(1,1)	(1,3)	(3,1)	(3,3)	(5,1)	
xz walls (4.8×2.15 m)	$t = 20$ mm	4.0	30.9	9.4	36.4	20.2	
	$t = 40$ mm	8.1		18.9			

数がバネマス系の共振帯域と重なっておりピークディップは他の周波数帯域より多くなっているものの、無張力膜要素による解析結果ほど ΔL の落ち込みは顕著ではない。バネマス共振では壁面が一体となって振動することを前提としている。一方、外壁がモード振動することで壁面の振動に分布が生じ、これにより室内の圧力上昇が緩和されているものと推察される。

■**室内の固有モード** 板・シェル要素の解析結果ともに 40 Hz 以上の帯域で、無張力膜要素（質量のみ）と同様な傾向が見られる。すなわち、40 Hz 以上の帯域では内外音圧レベル差において質量が支配的であることが考えられる。超低周波領域のバネマス共振周波数から室の固有モードの発生帯域までの間の帯域においては、外壁質量による遮音性能の効果が期待できる。

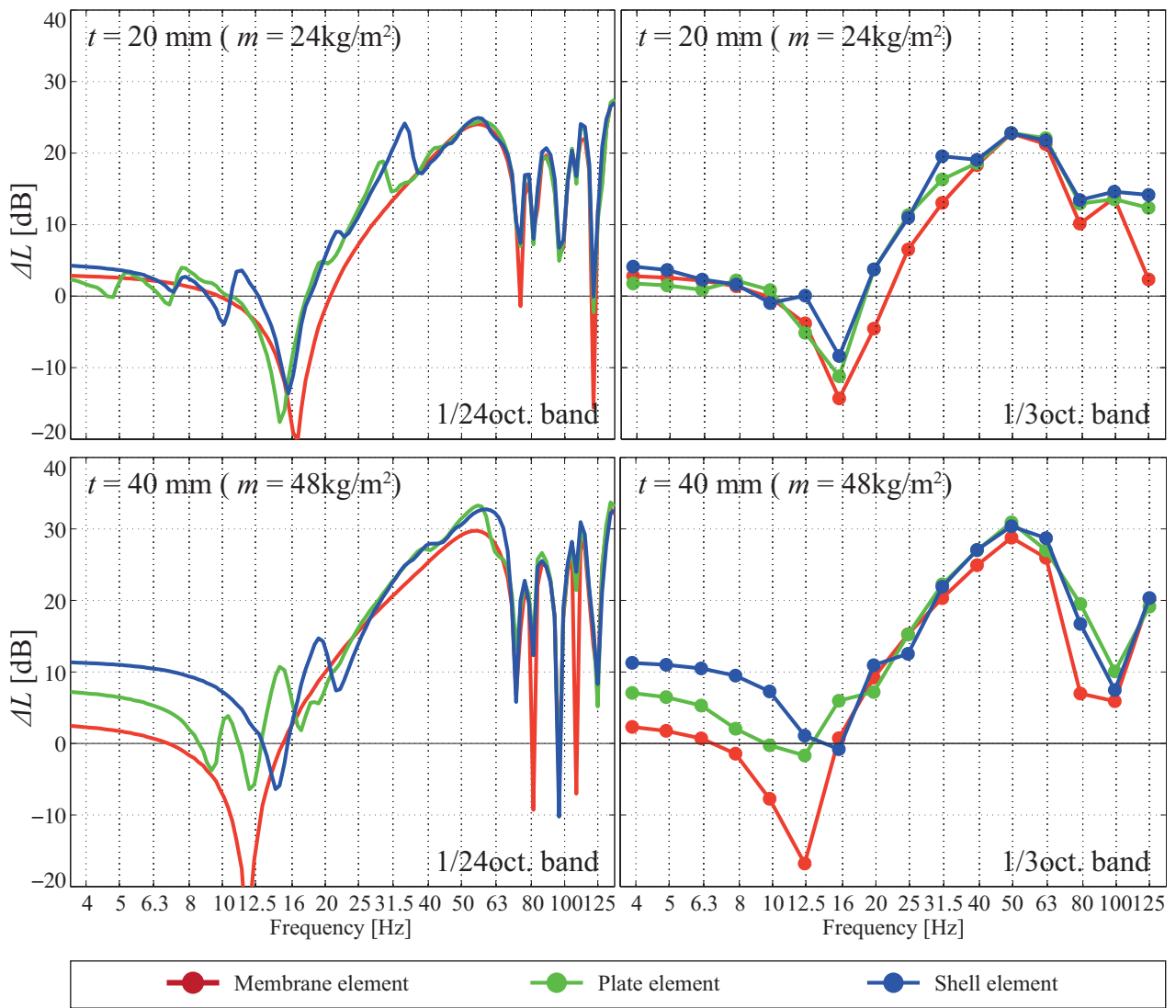


Fig. 2.9: Delta L of house with changing the area density of a membrane wall.

2.4 床・床下空間に関する検討

解析条件の設定

床からの低周波音の透過・伝搬に関する検討を行う。これまでの解析モデルでは、床からの音響伝搬現象についての影響を考慮せず、床面及び床下空間を剛体として解析を行ってきた。しかし、実際は床下に基礎部分があり床面の振動や、床下空間の影響があることが想定される。そこで、本節では床面を含む外壁を振動場として扱い解析を行う。床下のモデル化について、Fig.2.10 に示すように3つの条件でモデル化の検討を行った。

- (a) これまでと同様、床面を剛として床からの影響を考慮しない
- (b) 床面を振動場、床下の基礎部分を剛とし、床下空気層の影響を考慮する
- (c) 床面を振動場として扱うが、基礎部分はなく、中空に浮いている状態とする（床下の支柱については考慮していない）

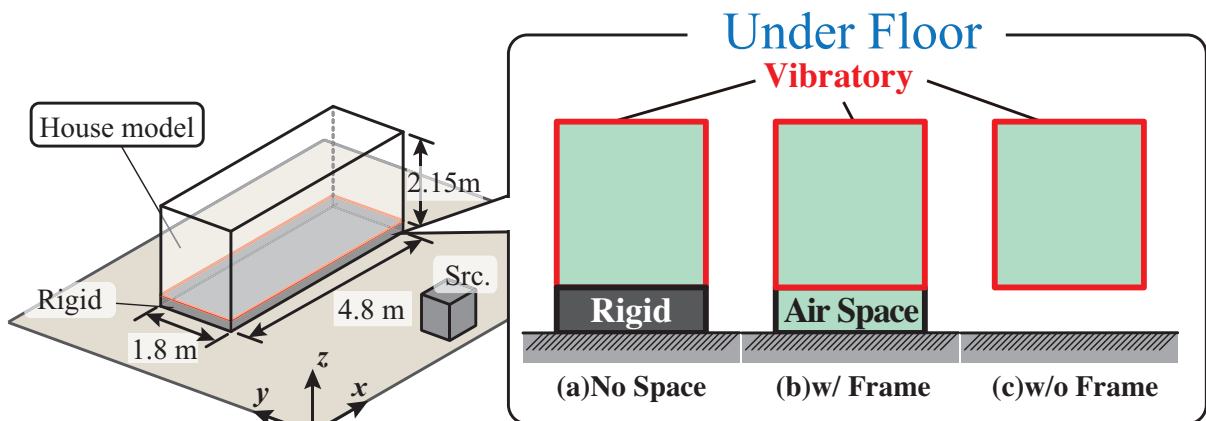


Fig. 2.10: Numerical models of several underfloors.

解析モデルは3節と同様に家屋の面全体で一様な面密度の外壁を想定する (Fig.2.10)。外壁に無張力膜要素を設定する。まずは、これまでの検討で比較的単純な結果であったむ張力膜要素を外壁に設定し解析を行う。面密度 ρ_m は 24kg/m^2 に設定した。ただし、外壁振動場の減衰については考慮しない。物性値、解析周波数、空間の離散化、音圧レベルの算出に関しては前節と同様にして解析を行った。各条件で内外音圧レベル差 ΔL を算出した。

結果と考察

結果を Fig.2.11 に示す。

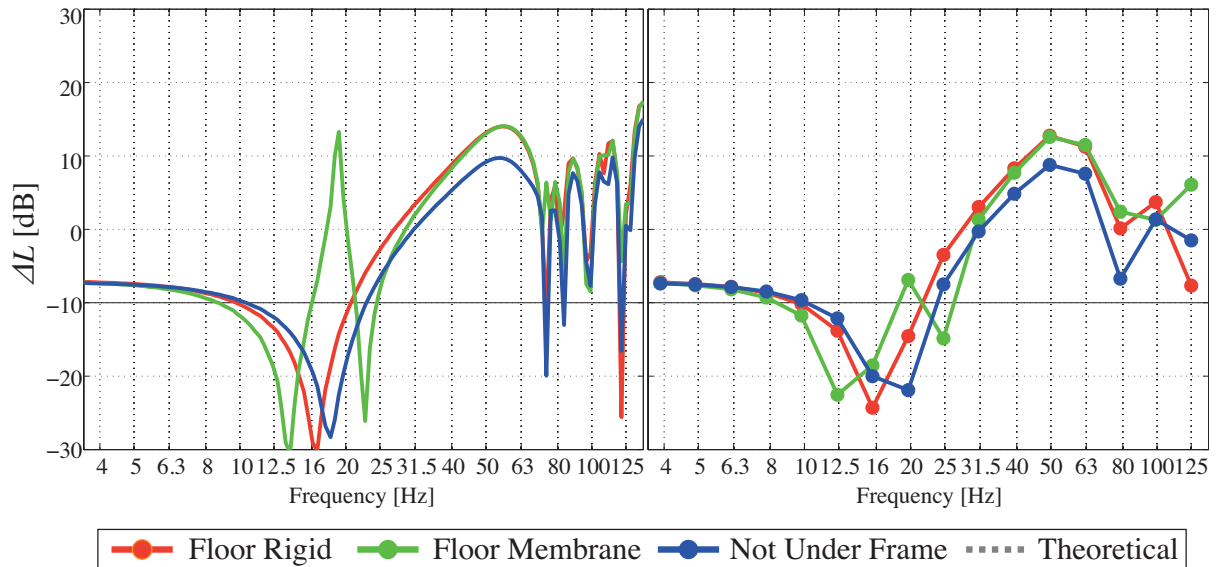


Fig. 2.11: ΔL calculated for a model house with different underfloors.

■**超低音域における家屋内の音圧レベルの傾向** 内外音圧レベル差 ΔL の周波数特性はこれまでと同様、超低周波音領域で大きくディップが生じており、また、80 Hz 以上で落ち込みが見られる。(c) の床面の振動を考慮したものを (a) の床面の完全剛な床面の条件と比較すると、超低音域でのディップが高域側にシフトし、さらに、室の固有モードがおこる帯域までの間の非共振帯域で、内外音圧レベル差はより小さくなっている。床面の振動を考慮することで音波が床下へ回折し床下から透過し、屋内へ透過するエネルギーが多くなることが考えられる。(b) の床下空間を考慮した条件において、20 Hz 以下の周波数帯域でその他の条件とは異なる傾向となっており、大きく2つのディップが生じている。これは、家屋内の空気・床下の空気層をバネ、外壁・床面を質量とした2質点の共振系が形成されていると考えられる。この2質点系の共振について、橋本の行った定式化と同様に屋内音圧レベルの変動について理論的に考察する。

Fig.2.12 に示すような音場について考える。超低音域においては家屋寸法に対し波長が十分長いいため、屋内 (Ω_1)、床下空間 (Ω_2) における絶対圧力 P_1 , P_2 , 及び屋外の絶対圧力 $P_{\text{out}}[\text{Pa}]$ が一様であると仮定する。ここで、絶対圧力は大気圧 P_0 と音圧 $p(t)$ の和で表される。

床下空間と外部領域の境界は剛とし、音波の流入流出はないものとする。この時、外壁・床振動場の運動方程式は以下のように書ける。

$$m_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1(t)}{\partial t^2} = (P_{\text{out}} - P_1(t)) S_1 \quad (2.4)$$

$$m_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2(t)}{\partial t^2} = (P_2 - P_1) S_2 \quad (2.5)$$

ここで、単一周波数による音場の定常状態を仮定すると、以下のように変形できる。

$$-m_1 S_1 \omega^2 u_1 = (p_{\text{out}}(t) - p_1(t)) S_1 \quad (2.6)$$

$$-m_2 S_2 \omega^2 u_2 = (p_2(t) - p_1(t)) S_2 \quad (2.7)$$

ここで、 m_1, S_1, u_1 は外壁の、 m_2, S_2, u_2 は床面の面密度 [kg/m²], 面積 [m²], 変位 [m] である。さらに断熱過程における室内及び、床下空間での状態方程式は以下のように書ける。

$$P_0 V_1^\gamma = P_1(t) V_1(t)^\gamma \quad (2.8)$$

$$P_0 V_2^\gamma = P_2(t) V_2(t)^\gamma \quad (2.9)$$

ただし、初期圧力を大気圧 P_0 , 初期圧力を各領域の体積 V_1, V_2 とし、 γ を空気の比熱比とした。

変位について、家屋内側を正とすると、時刻 t における家屋内容積 $V_1(t)$ 及び、床下の容積 $V_2(t)$ は以下のように書ける。

$$V_1(t) = V_1 - u_1(t) S_1 - u_2(t) S_2 \quad (2.10)$$

$$V_2(t) = V_2 + u_2(t) S_2 \quad (2.11)$$

変位 u_1, u_2 が微小な時、Eq.(2.8), (2.10) 及び、Eq.(2.9), (2.11) より以下の式が得られる。

$$p_1(t) = u_1(t) \frac{\gamma P_0 S_1}{V_1} + u_2(t) \frac{\gamma P_0 S_2}{V_1} \quad (2.12)$$

$$p_2(t) = -u_2(t) \frac{\gamma P_0 S_2}{V_2} \quad (2.13)$$

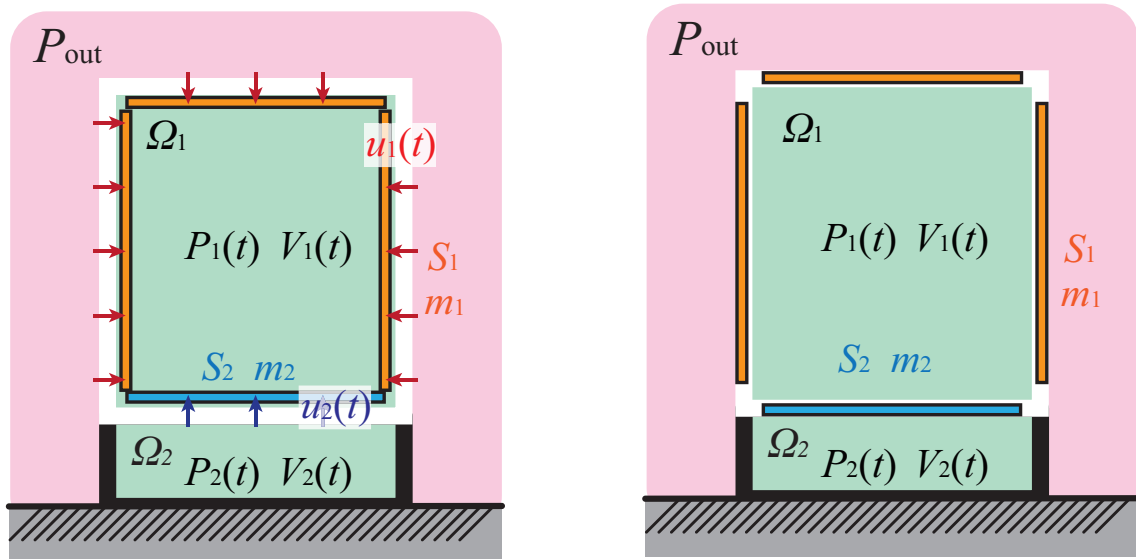


Fig. 2.12: Schematics for deriving theoretical formula.

Eq.(2.6),(2.12)(2.7),(2.13) より, 屋内の音圧 p_1 と屋外の音圧の関係が以下のように得られる。

$$p_1 = \frac{1}{1 - \frac{m_1 \omega^2 V_1}{\gamma P_0 S_1} \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \frac{1}{1 - \frac{m_2 \omega^2 V_2}{\gamma P_0 S_2}} \right)} p_{out} \quad (2.14)$$

上式より, 内外音圧レベル差は以下のように与えられる。

$$L_{out} - L_{in} = 20 \log_{10} \left[1 - \frac{m_1 \omega^2 V_1}{\gamma P_0 S_1} \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \frac{1}{1 - \frac{m_2 \omega^2 V_2}{\gamma P_0 S_2}} \right) \right] \quad (2.15)$$

ここで, Eq.(2.14) について考察を加え, Fig.2.11 の解釈を行う。

$$p_1 = \left\{ \underbrace{1 - \frac{m_1 \omega^2 V_1}{\gamma P_0 S_1} \left[1 + \frac{V_2}{V_1} \left(\underbrace{1 - \frac{m_2 \omega^2 V_2}{\gamma P_0 S_2}}_{\text{term1}} \right)^{-1} \right]}_{\text{term2}} \right\}^{-1} p_{out} \quad (2.14')$$

term1 $\rightarrow 0$ の時, $p_1 \rightarrow 0$, 即ち室内には音圧が生じず, 内外音圧レベル差においてはピークが生じる。これは壁面・床面の変位による内部体積の変化がそれぞれ釣り合って体積が変化していない状態と考えることができる。この周波数は以下のように書ける。

$$f_{ar} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S_2}{V_2 m_2}} \quad (2.16)$$

また, term2 $\rightarrow 0$ の時, $p_1 \rightarrow \infty$ である。即ち, 共振が生じ, 内部音圧が著しく上昇し, 内外音圧レベル差ではディップが生じる。この周波数は2つ生じ, 以下のように書ける。

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{V_2}{V_1} + \frac{m_2 S_1 V_2}{m_1 S_2 V_1} \right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{V_2}{V_1} + \frac{m_2 S_1 V_2}{m_1 S_2 V_1} \right)^2 - 4 \frac{m_2 V_2 S_1}{m_1 V_1 S_2}}{2 \frac{m_2 V_2}{\gamma P_0 S_2}}} \quad (2.17)$$

尚, これらは壁・床が同位相または逆位相で共振する場合である。

また, 周波数が十分大きい時 (term1 $\rightarrow \infty$), Eq.(2.14) は以下のように書ける。

$$p_1 = \frac{1}{1 - \frac{m_1 \omega^2 V_1}{\gamma P_0 S_1}} p_{out} \quad (2.18)$$

これは橋本の示した床振動を考慮しない場合の内外音圧の関係となっている。

尚、今回の (b) の解析モデルでは、床下の枠部分からのエネルギーの流入流出については考えていない。実際の家屋では換気のための開口部が存在するため、(b) と (c) の条件の間のような空間になっていることが考えられる。また、上述の理論では質量のみの影響を考察している。以降では、剛性の影響も含めて解析を行い、数値解析的検討を行う。

■壁・床面の剛性を考慮した場合 家屋の剛性も考慮し、Fig.2.10(b) の条件で解析を行った。床面を含む外壁振動場に対して、板要素、シェル要素での解析を行う。解析条件はこれまでのものと同様に設定し、内外音圧レベル差 ΔL を算出した。

結果を Fig.2.13 に示す。ここでは超低音域での床面を含むバネマス系の共振について内外音圧レベル差の理論値 Eq.(2.15) を併記した。

無張力膜での低音域の周波数特性は理論値とよく対応しており、2質点の共振系の形成が影響していることが確認できる。1質点系の共振の場合と同様に、外壁や床等の振動場の質量が重くなるほど低域側にシフトする傾向が見られる。また、同時に共振によるピークディップは質量が重くなるほどより鋭く現れている。剛性を考慮した時の2質点の共振系による影響は、板の共振が大きく影響する帯域と重なっており、無張力膜モデルほど顕著な2つのディップは見られない。

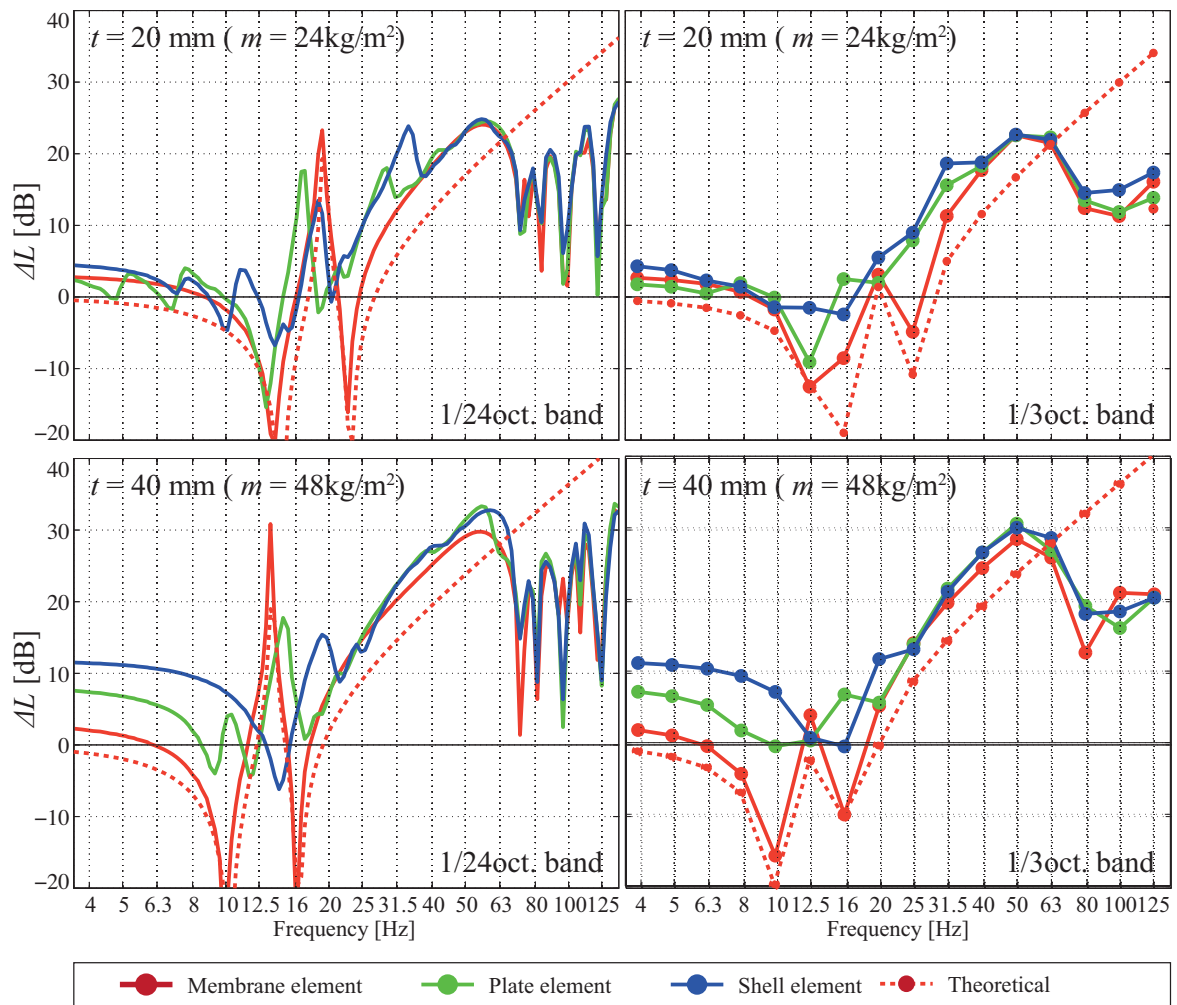


Fig. 2.13: Numerical models of the box-shaped house with rigid and membrane walls.

2.5 まとめ

本章では既往研究 [19]~[22] に引続き、低周波領域における家屋遮音性能予測のための数値解析モデルに関する検討を行った。本論文では特に以下の点について考察を行った。

- 膜モデルにおける外壁の振動減衰の考慮
- 外壁振動場の剛性の影響
- 床下空間の連成の影響

第2節では各モデルで共通する解析条件及び家屋遮音性能の評価指標について整理した。

第3節では外壁のモデル化について検討を行った。2.3.1項では無張力膜の通気性を導入することで、外壁の振動に伴うエネルギー減衰を便宜的に模擬した。この模擬の物理的根拠は薄いですが、膜面密度を複素量とすることでバネマス共振系や屋内音場のモードによるディップが緩和される傾向が見られた。ここでは実効面密度の虚部は便宜的に通気性を想定した周波数特性を与えたが、虚部に何らかの値を与え減衰を考慮する方法は数値解析により実測値を予測するにあたり、実務的に有効な手段である可能性が示唆された。

2.3.2項では外壁の剛性による影響を考察した。ここでは板要素及びシェル要素による2つの外壁モデルを構築し、比較した。外壁の剛性を考慮した場合、超低周波域における外壁質量、屋内空気バネによる共振系での ΔL の低下が質量のみを考慮したモデルと比べ緩和される傾向があることを示した。これは外壁剛性を考慮することで外壁に固有モードの振動分布が生じ、ピストン振動から乖離するためであると考えられた。

本論文における家屋のシェルモデルは壁が折れ曲がっているような状況を想定しており、柱や梁の影響は考慮していない。実際には柱・梁により家屋全体の剛性が大きくなるものと考えられ、ここで示した板モデルとシェルモデルの中間的な状況であるものと推察される。また、実際の家屋では外壁は積層構造が前提となる。低周波領域における積層の影響の把握も家屋外壁のモデル化精度の向上に不可欠である。

第4節では床下空間が及ぼす影響について理論的、数値解析的検討を行った。床下に独立な空間がある場合、家屋外壁、家屋室内、床、床下空気層による2質点、2バネの共振系が生じる。この時、内外レベル差は下式で表される。

$$L_{\text{out}} - L_{\text{in}} = 20 \log_{10} \left\{ 1 - \frac{m_1 \omega^2 V_1}{\gamma P_0 S_1} \left[1 + \frac{V_2}{V_1} \left(1 - \frac{m_2 \omega^2 V_2}{\gamma P_0 S_2} \right)^{-1} \right] \right\} \quad (2.15)$$

上式によれば床・床下空気層のバネマス共振周波数において反共振により ΔL にピークが生じる。また、外壁および床の振動の位相により2つモードが生じ、 ΔL にディップが生じる。ここでは床下空間と屋外の境界は剛として取り扱ったが、実際には振動や、通気口などが存在するため、Fig.2.10の(b),(c)の中間的な状況であるものと推察され、反共振はそれほど明確に生じないものと考えられる。

第3章

縮尺模型を用いた家屋の遮音性能測定

3.1 はじめに

前章では、既往研究における実大実験と数値解析との課題点を踏まえ、外壁の質量・減衰の影響、床下空間の影響、外壁剛性の影響について数値解析モデルを改良し、現象を観察してきた。

しかし、数値解析では基礎的な検討として家屋をかなり単純化したモデルで模擬した上で、それぞれの物理的要素の影響を考察している。従って、実際の現象をどの程度シミュレート出来ているかについては不明確な部分が多く、モデル化精度に関する検証が不可欠である。本章では、実環境に近い状況、かつある程度一般的な家屋を模擬した単純な構造の模型を作成し、低周波音の音響透過・伝搬現象に関する縮尺模型実験を行う。

第2節では、まず遮音に関する縮尺模型実験における相似則について説明し、作成した家屋模型について説明する。第3節では測定方法・分析方法について述べ、第4節では家屋の窓の開放条件や外壁の質量、床下の条件を変化させ計測を行い、数値解析・実大実験と比較することで実環境における低周波音の音響透過・伝搬現象について解明することを目指す。

尚、本章では寸法に関して、括弧の無い値は縮尺、括弧内の値は実寸での値とする。

3.2 家屋模型の作成・測定条件

3.2.1 縮尺模型実験の方針

家屋の縮尺模型の作成に当たり留意した点を以下に示す。

1. 相似則を満たす物性値を持つ材料の選定
2. 窓の開閉・外壁質量・床下空間の条件の可変性
 - 模型の組み立て・解体の簡易性
3. 模型内での多点計測の実施の簡易性
 - 測定点の位置出しの効率・精度の確保

1については実験及び研究の大前提であり、詳細は次項に示す。

2については、いくつかの部材を組み合わせることで、より少ない材料で、家屋に関する種々の条件のパラメトリックスタディを可能にするために設定した。

3については、前章でも述べた通り、低音域においては家屋内に音圧分布を生じるため、内部の平均レベルの算出精度や現象の把握のために音圧の多点計測が必要となる。この時、使用可能なマイクの本数に制限があるため、マイクを移動しながら測定を行うこととなる。その際、マイクの設置の効率性は時変性の影響を低減するため、正確性は測定結果の信頼性を確保する上で非常に重要となる。

最後に、模型作成においては材料入手の容易さ、施工性や実験時の操作性を勘案し模型実験の縮尺は1/4とした。

3.2.2 縮尺模型実験に関する相似則

縮尺模型実験では実大の現象と縮尺模型での現象における全ての物理現象が共通の支配方程式を満たさなければならない、全ての実物大と縮尺模型の物理量が一定の関係を満たす必要がある。以降、実物、模型を下付き添字 r, m で区別し、長さ l に対する相似比として幾何学的縮尺比 $l_m/l_r = 1/n$ とし、縮尺模型実験における周波数 f 、時間 T 、音圧 p 、粒子速度 v における相似則の関係式を以下に示す。

$$f_m = n f_r \quad (3.1)$$

$$T_m = T_r / n \quad (3.2)$$

$$p_m = p_r \quad (3.3)$$

$$v_m = v_r \quad (3.4)$$

また、騒音伝搬に関する模型実験において建築音響として重要なのは、音響透過現象についてであり、模型材料の特性を実物材料の特性と相似にしておく必要がある。石井等は遮音に関する縮尺模型実験について遮音特性のシミュレーションがどの程度可能であるかを調べている [9]。材料の音響透過損失は第1章でも述べたが、質量則によって支配され、材料の面密度 M とすると次式で表される。

$$TL_0 = 20 \log_{10} f M - 43 \quad (3.5)$$

$$TL = TL_0 - 10 \log_{10}(0.23 TL_0) \quad (3.6)$$

ただし, TL_0 は垂直入射透過損失, TL_0 乱入射透過損失である。この質量則を模型において模擬するには fM (面密度) の値を実物と模型とで等しくすれば良い。また, f について 3.1 式を満たさなければならない為, M については Eq.(3.7) が成り立つ。

$$M_m = M_r/n \quad (3.7)$$

すなわち, 模型材料では実物材料の $1/n$ の面密度を持つものを使用する。

次に材料内部を伝わる曲げ波の伝搬性状について考える。厚さ t の材料を伝搬する曲げ波の伝搬速度 c_B は密度 ρ_s , ヤング率 E , ポアソン比 ν とすると下式で表される。

$$c_B = \sqrt{2\pi ft \sqrt{\frac{E}{12\rho_s(1-\nu^2)}}} \quad (3.8)$$

ここで, 曲げ波の伝搬速度を模型実験でもシミュレートすることを考えた場合, Eq.(3.8) においても Eq.(3.1) が成り立たなければならない。また, Eq.(3.7) を厚さ t を用いて書き直すと

$$\rho_m t_m = \rho_r t_r/n \quad (3.9)$$

となるが, Eq.(3.1), (3.9) を Eq.(3.8) に代入すると, 次式が成り立つ。

$$\frac{\rho_r(1-\nu_r^2)}{E_r} = \frac{\rho_m(1-\nu_m^2)}{E_m} \quad (3.10)$$

すなわち, Eq.(3.7) に従って, 面密度を調整すると同時に $\rho_s(1-\nu^2)/E$ を実物と等しい材料の模型材料を用いることで, 質量則から決まる全体的な透過損失だけでなく, 板の固有モード周波数や, コインシデンス効果等も模擬することができる。相似則を満たす材料の選定として非常に単純な方法は, 実物と同じ材料を用いて模型を作成することである。しかし, 実際には入手できる材料の材質や厚さには制限があるため, Eq.(3.10) を満たすような材料を用いれば良い。

3.2.3 家屋模型の作成

家屋模型の概要

実験に使用した家屋模型の概要を Fig.3.1 に示す。家屋模型は単層の亚克力板と角材（木材）を用いて外壁と柱・梁を模擬した。壁面の材料としては亚克力を用いており、実際の家屋の材料と大きく異なる部分である。外壁部分の詳細は後に述べるが、亚克力は実際の家屋相当の面密度が設定しやすいこと、透明であるため内部を見通しやすく、マイク設置の効率・精度を損ないにくいことなどの利点があるため採用した。

大きさは、既往研究の実大実験で用いた模擬家屋の内寸を参考に 1200 mm×450 mm×537.5mm（4.8 m×1.8 m×2.15 m）にした。家屋の一面に 450 mm×450 mm の引き違い窓をつけた。本章では、家屋模型の長手方向を x 方向、短手方向を y 方向、高さ方向 z 方向と定義する。

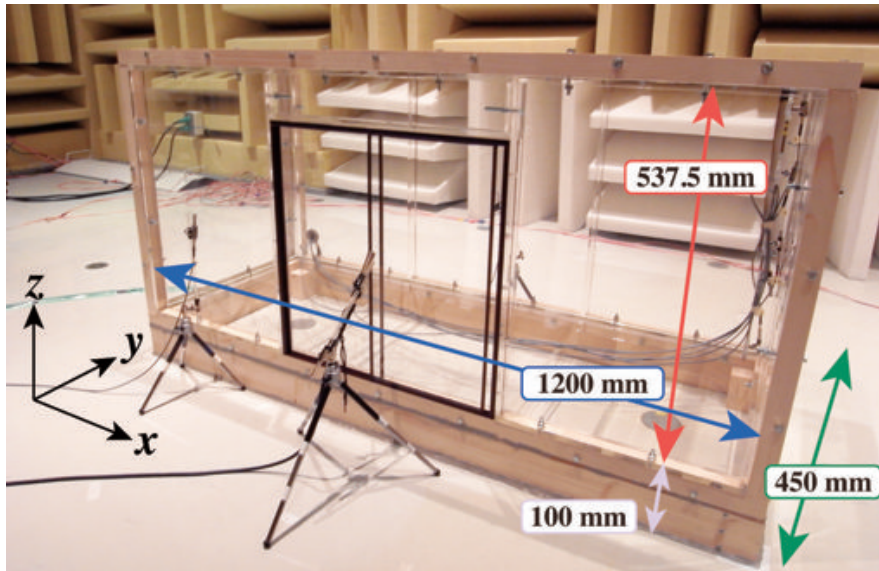


Fig. 3.1: A house model for the 1/4 scale experiment.

柱・梁・土台

木造家屋の柱の小径は建築基準法施行令第 43 条第 1 項によると構造上主要な部分である柱の小径は、建物の階数・屋根材の仕様等に応じて最低限の柱の寸法が定められており、横架材相互間の垂直距離に対して Table 3.1 に掲げる割合以上のものでなければならない。また、一般的な住宅で使用される柱の寸法は 3.5 寸角 (約 105 mm) 又は 4 寸角 (約 120 mm) のものが多い。その為、本研究においては角材の太さは入手可能なサイズであった 30 mm 角 (実大 4 寸角相当) のものを作成した模型では柱、梁に使用した。

Table 3.1: Regulation of the pillars' specification in the Japanese building code.

建築物	最上階又は階数が 1 の建築物の柱	その他の柱
(1) 土蔵造の建築物その他これに類する壁の重量が特に大きい建築物	1/25	1/22
(2) (1) に掲げる建築物以外の建築物で屋根を金属板、石板、木板その他これらに類する軽い材料でふいたもの	1/33	1/30
(3) (1) 及び (2) 以外の建築物	1/30	1/28

柱と壁の接合方法としては、付け外しが可能なようにアクリル板と角材を M6 のボルトで固定した。柱と梁は、家屋の直方体の稜部分にあり、長手方向の面に関しては、さらに柱・梁・大引きの役割として 2 本アクリル板の羽根をつけた。接合部の詳細を Fig. 3.2 に示す。

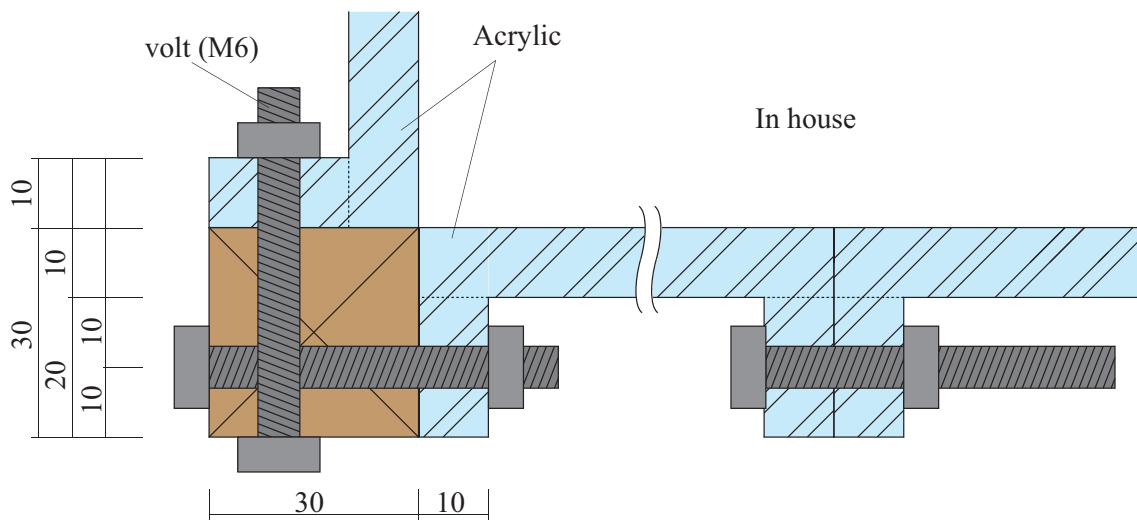


Fig. 3.2: The test house for experiment.

外壁

実際の家屋の外壁は複数面の板材料が平面的に並び1面を形成しているが、実験では複数枚の亚克力板で作成した時の接合部の隙間の影響をなくすことや、接合部が多いことにより測定に時間がかかってしまうことが考えられる為、基本的に家屋模型は1面1枚の亚克力板で作成している。

壁の材料については、質量則に関する相似則を満たすように亚克力板の厚さを変えて面密度 m を調節する。ただし、剛性については、実際の家屋の積層した壁を一体としたときのヤング率 E やポアソン比 σ が不明な為、考慮していない。一般的な木造の家屋及び防音仕様 [33] を想定し、亚克力板の厚さ t を 5, 10 mm (20, 40 mm) の2段階で作成した。これは、実大面密度 24, 48 kg/m² に相当する。尚、実大実験の外壁は外壁材、合板、吸音材、石膏ボード等で構成されており、面密度はおよそ 20×40 kg/m² であると考えられる。10 mm 厚の亚克力板の図面を Fig.3.4, 3.5 に示す。

さらに、外壁の一面の中央部に開口部を設けたものと、比較対象として開口部がなく、壁のみで構成された家屋模型も製作した (Fig.3.3)。

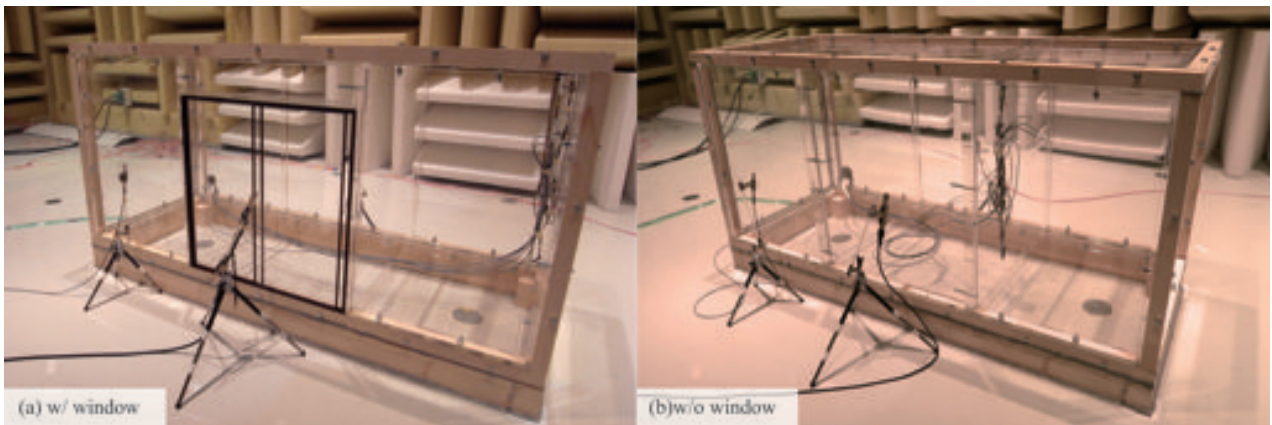


Fig. 3.3: Conditions of outer walls: (a) with and (b) without aperture.

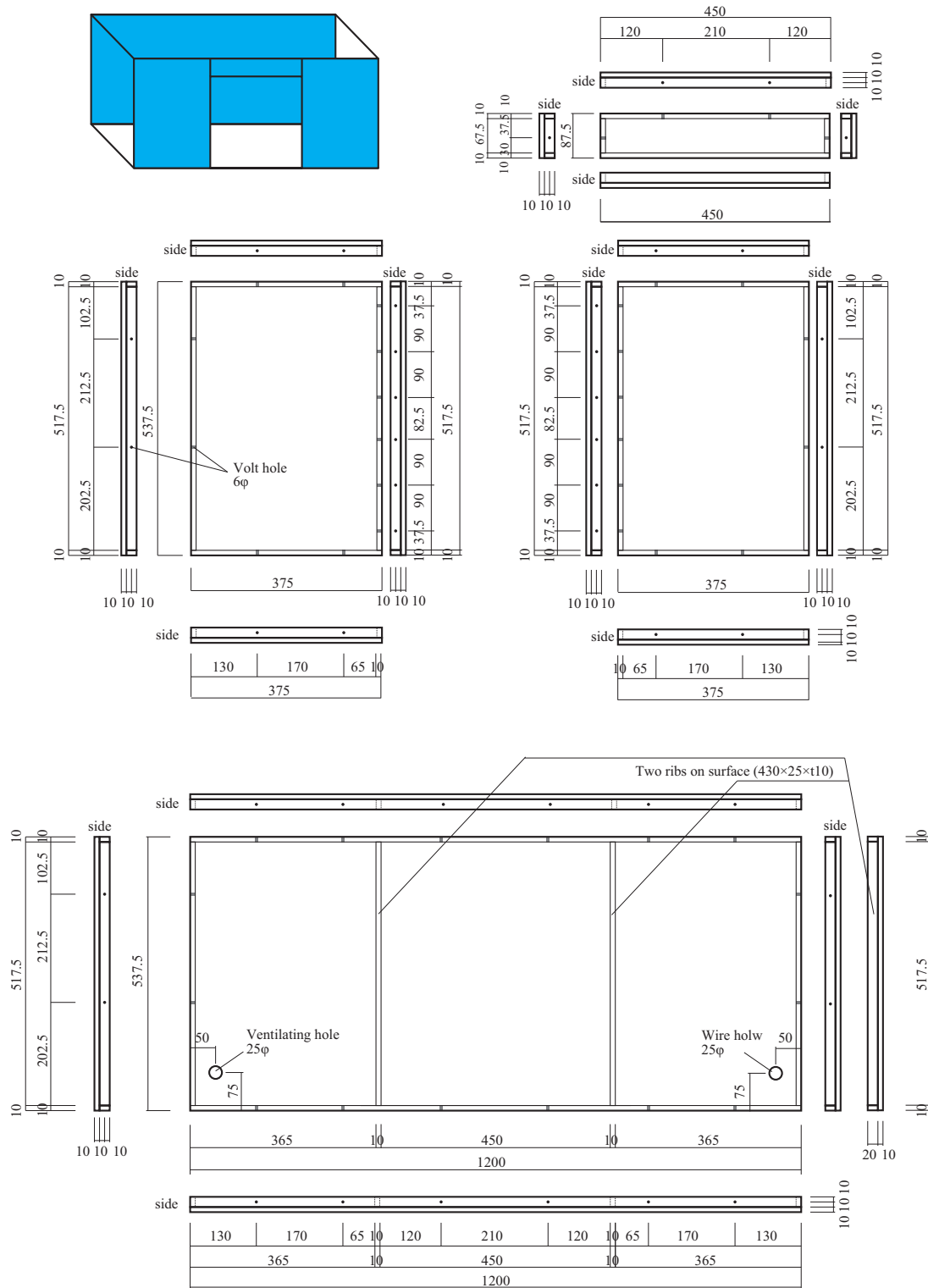


Fig. 3.4: Specification of outer walls made of acrylic resin, part 1.

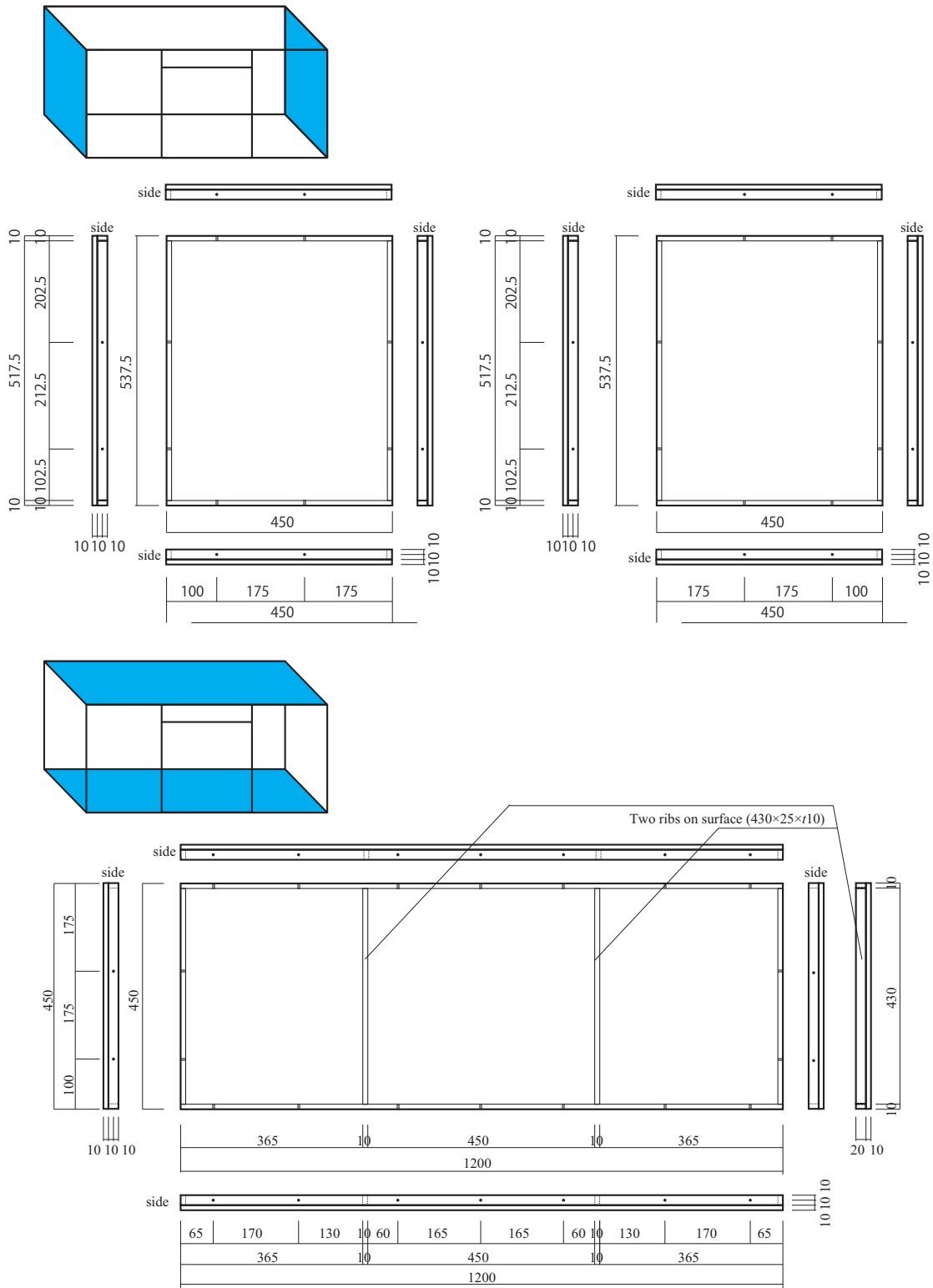


Fig. 3.5: Specification of outer walls made of acrylic resin, part 2.

窓・窓枠

家屋の一面に 450 mm×450 mm (1.8 m×1.8 m) の引き違い窓を設置した。実大の 5.2 mm 厚相当の窓ガラスを想定し、質量則、曲げ波の伝搬速度の相似性を満たすように材料は 1.3 mm 厚のガラスを用いた。サッシ枠として、棚等の引き戸を取り付ける為の市販のレールを模型に取り付け、障子枠としてガラスの四周にシーリング材を用いて保護材 (カブセ) を取り付けた。また、レールや保護材の材質は加工のしやすさから樹脂製 (硬質塩化ビニル) のものを選んだ。詳細を Fig.3.7 に示す。

シーリング材は、容易に施工ができることから 1 成分系のシーリング材を用いた。またシーリング材の配合成分については、硬化塩化ビニルに対して使用する際に、フタル酸エステル系可塑剤及び非反応性高沸点希釈剤の少なくともどちらか一方を成分含んでいると、亀裂が生じる場合がある。これらを考慮し、シーリング材は一成分系アルコールタイプである東レ・ダウコーニング (株) 製の SE960 シーラントを用いた。測定条件は、窓の開放条件について以下の全 3 条件で測定を実施する (Fig.3.6)。

1. 全面開放 (窓なし) 条件：窓をサッシから取り外した状態
2. 一部開放条件：窓の一面片側を 1.25 cm 開放した状態
3. 窓閉じ条件：窓を完全に閉めた状態

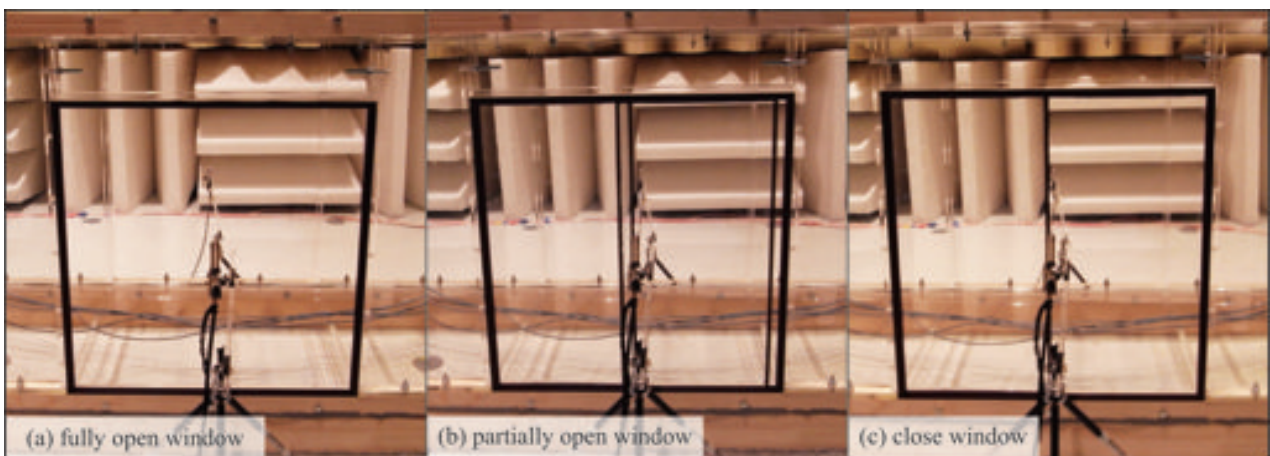


Fig. 3.6: Conditions of the aperture: (a) fully open, (b) partially open and (c) closed window.

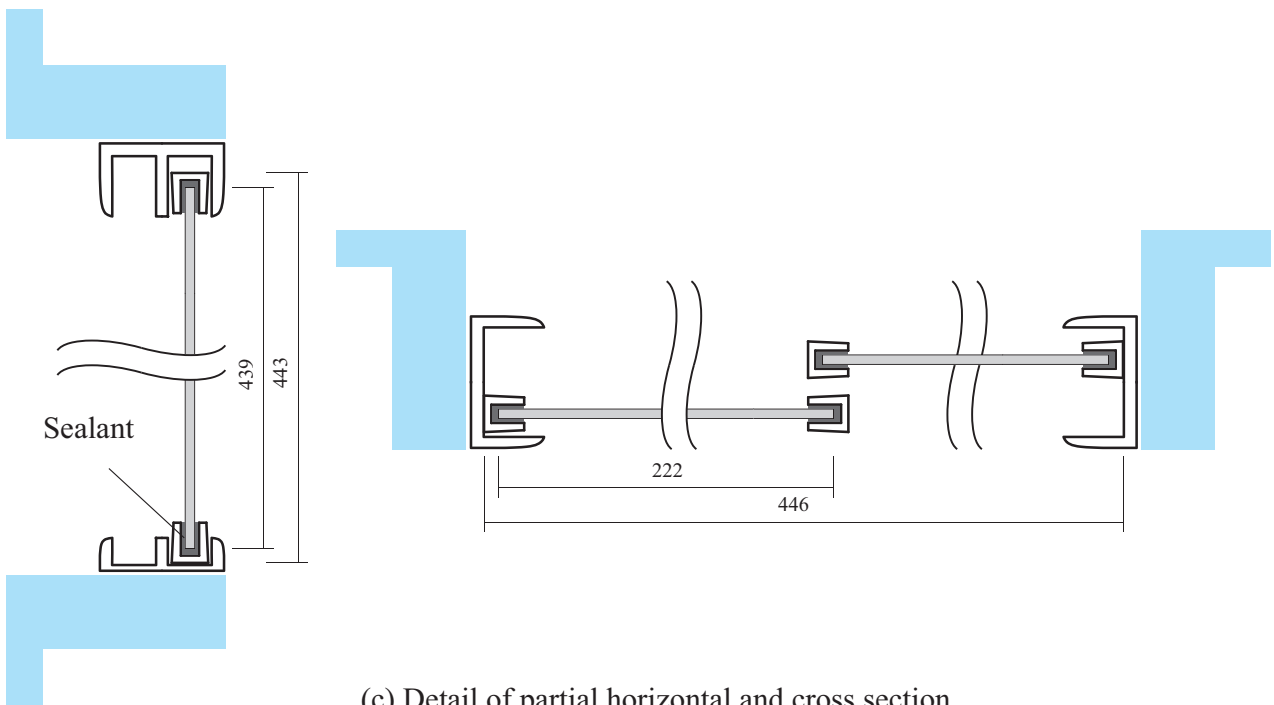
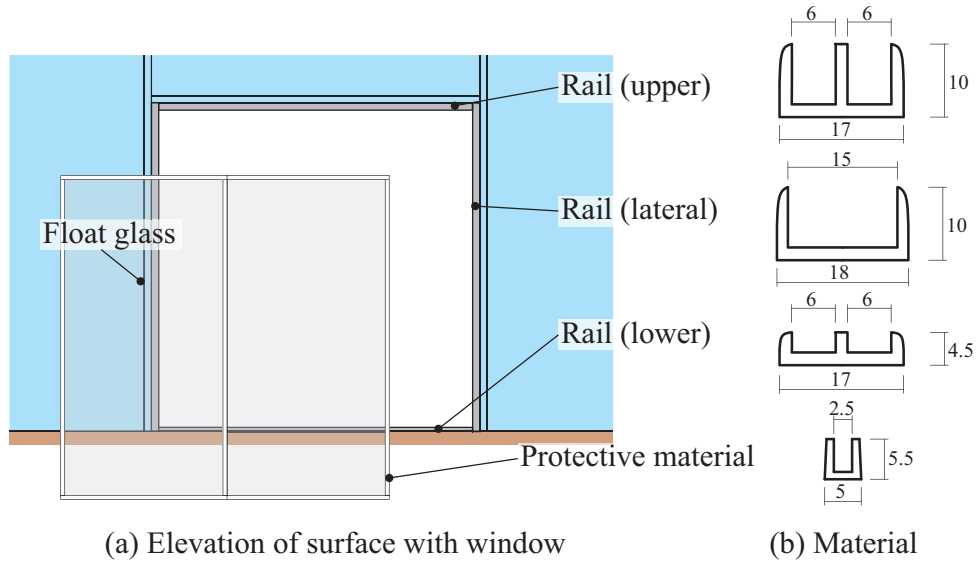


Fig. 3.7: Specification of an aperture, sash and glass.

床下基礎部

家屋模型の床高が 100 mm(400 mm) となるような木枠の上に設置し、基礎部分を模擬した。木枠と地面（半無響室床面）や、木枠と家屋模型の間には微小な隙間が生じたため、音響伝搬の影響を排除するためにパテを使用して隙間を埋めた。

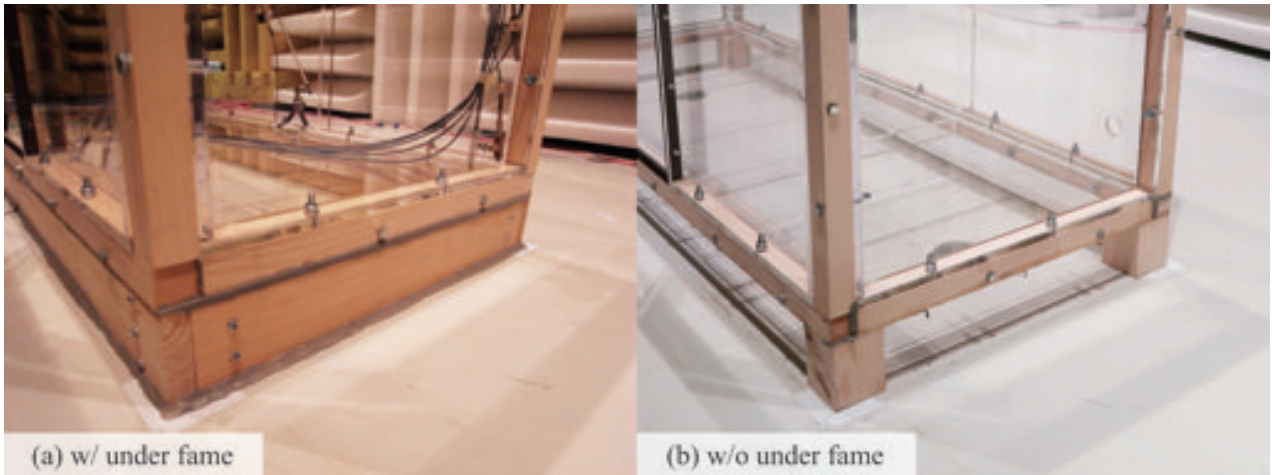


Fig. 3.8: The wood frame under the house model.

換気孔・測定配線用の孔

家屋の外壁面に直径 25 mm の穴を 2 つ空けている。1 つは換気口を模擬し、微小な隙間の影響を観察する為にあけている。この穴についてはパテで埋めた状態を換気口なし、開けた状態を換気口ありとして比較することとした。もう 1 つは、模型内の測定用マイクの配線用として開口を開けている (Fig.3.9)。こちらについては、マイクの配線後、パテで穴をふさいで実験を行った。

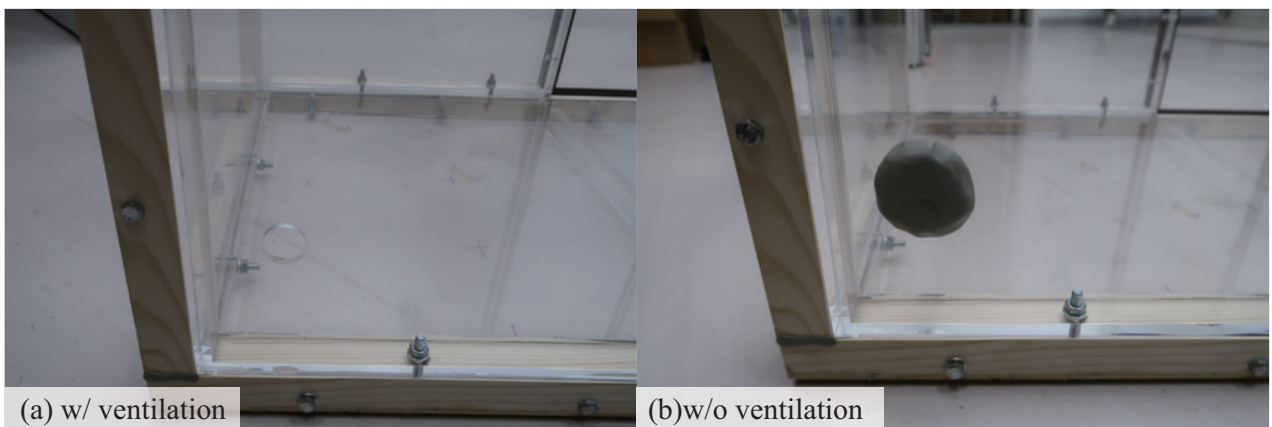


Fig. 3.9: The wood frame under the house model.

3.3 実験方法・分析方法

3.3.1 実験システム・実験場所

本実験に用いた機材を Table3.2 にまた、システムブロック図を Fig.3.10 にまとめた。

Table 3.2: Equipment list for the scale model experiment.

	Equipments	Product name	Manufactures	Notes
Recording system	array microphone	Type 40PL	G.R.A.S sound & vibration	×7
	microphone amplifier	MM ICP professional	Easy measure	
	non-directional microphone	LA-1350	ONO SOKKI	
Recording& Reproducing system	audio interface	FireFace800	RME	
	audio editing software	Adobe Audition CC	Adobe	
	Personal computer	MacBook pro	Mac	
Reproducing system	speaker	8050A	GENELEC	× 2

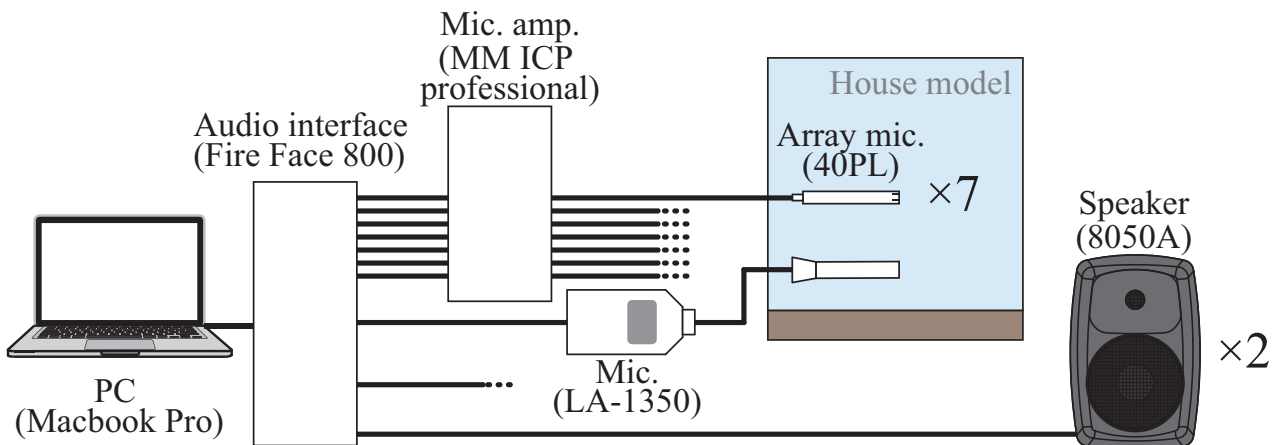


Fig. 3.10: Diagram of the above equipments.

再生系

スピーカは GENELEC 8050A (Fig.3.11) のパワードモニタースピーカを使用し、音源信号は 1/3 オクターブバンドで 40~500Hz 帯域のピンクノイズを発生させた。信号の再生は Digital Audio Workstation (Adobe Audition) を用いて PC 上で行った。AD/DA 変換にはインターフェース (FireFace800,RME) を用いた。実験の音源位置は家屋模型の窓面に対して (1) 正面方向, (2) 斜め方向に配置して実施した。音源と家屋模型の配置を Fig.3.12 に示す。スピーカの実験時の周波数実大のときの周波数に換算して示している。



Fig. 3.11: The speaker, GENELEC 8050A.

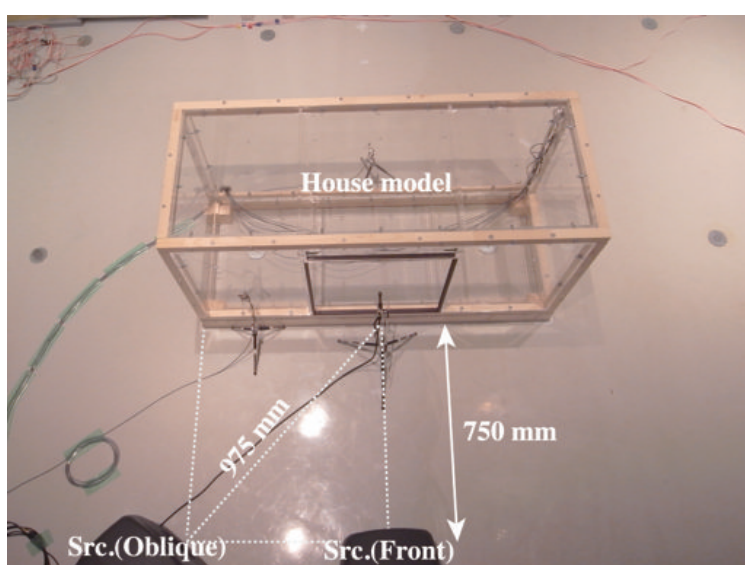


Fig. 3.12: Oblique and front positions of the sound sources.

測定系

長手方向 (x 方向) に 7 点, 短手方向 (y 方向) に 5 点, 高さ方向 (z 方向) に 5 点配置し, 全 175 点でスピーカから流したピンクノイズの音圧レベルを 1 分間計測する。(Fig.3.13)。計測は z 軸方向の 5 点を同時に計測するためのマイクスタンドを作成し, 全 35 列を測定した (Fig.3.16)。マイクロフォンで測定しデータはマイクアンプ (MM ICP professional) を通して増幅を行った後, インターフェースで AD 変換し, データを PC 上で記録した。データのファイルの形式は wav ファイルで, サンプル周波数 f_s は 44,100 Hz, 量子化ビット数は 16 bit で測定した。

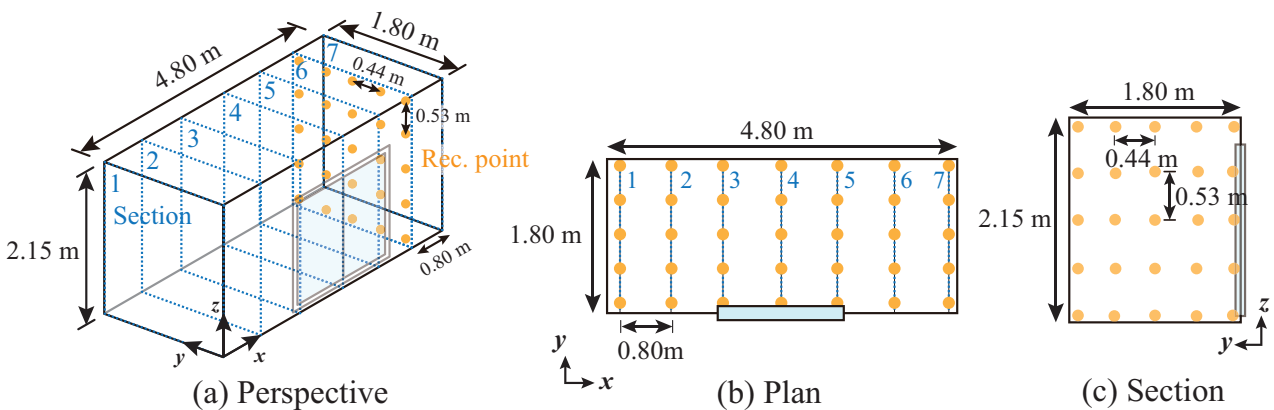


Fig. 3.13: The arrangement of receiving points.

縮尺模型実験での影響がないように, なるべく小さい 1/4 インチのアレイマイクロフォン (40PL, G.R.A.S sound & vibration) を使用した (Fig.3.15)。アレイマイクロフォンだけでは測定したデジタル信号を絶対音圧レベルに変換できない。また, マイクロフォンは個々で感度が異なっており, それぞれの特性を補正する必要がある。そこで, 普通騒音計 (LA-1350, ONO SOKKI) を用いてアレイマイクロフォンと一箇所に円形に並べて 1/3 オクターブバンド中心周波数の 40×500 Hz 帯域のピンクノイズの音圧レベルを 1 分間計測する (Fig.3.14)。同じ場所で測定している為, 音圧レベルに差がないという仮定のもと, wav ファイルに記録されたビット値から音圧レベルへの換算値が求められる。また, それぞれのマイクと騒音計との各帯域ごとの音圧レベルの差分値を求め, 感度補正值として使用した。騒音計の設定レンジは 50~120 dB とした。

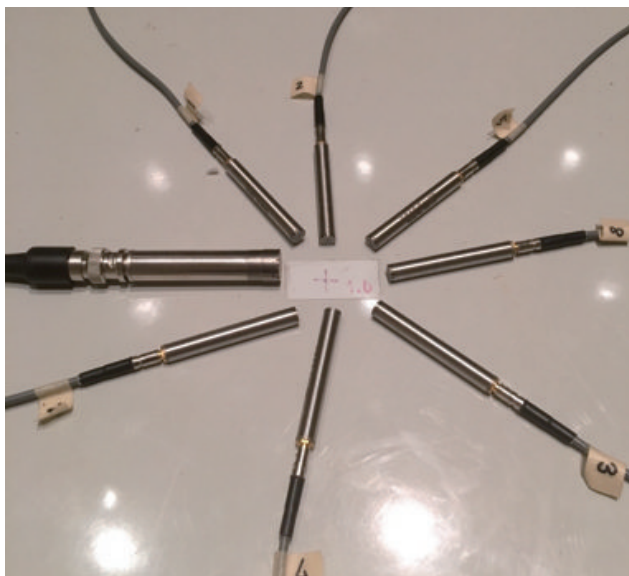


Fig. 3.14: Measurement for the characteristic correction of each microphones in low-frequency.



Fig. 3.15: The array microphones, G.R.A.S type 40 PL.



Fig. 3.16: The microphones stand originally made for the measurement.

実験場所

実験は半無響室で行う。対象周波数帯域で反射の影響がない半自由空間状態となっていることを確認する為、距離減衰の測定を行った。信号は1Hz以上のピンクノイズを使用し、スピーカから0.25, 0.5, 1.0, 2.0 mの位置（実大で1.0, 2.0, 4.0, 8.0m）の地面にマイクを配置し、各点での音圧レベル（Fig.3.17）と音圧レベルの低下量を算出した（Fig.3.18）。Fig.3.18の破線は ± 1 dBを表している。周波数、及び距離は実大のスケールに換算して示している。Fig.3.17をみると8 Hz以下ではスピーカから音が出力されていないことがわかる。その為、本章の模型実験については10Hz以上の結果を示す。使用する周波数帯域で、概ね倍距離6 dB減衰になっており、点音源的な振る舞いとなっていると解釈できる。しかし、8.0 m点の音圧レベルをみると倍距離6 dB減衰の値から大きくずれている周波数があり、半無響室の壁際で測定した為、反射の影響によるものと考えられる。また、他にも周波数帯域や測定点によっては ± 1 dB程度外れている。音源近傍では有限の大きさを持つ面音源的な挙動をしていることが考えられる。その為、算出した測定結果は ± 1 dB程度の誤差を含んだものとして扱うこととする。

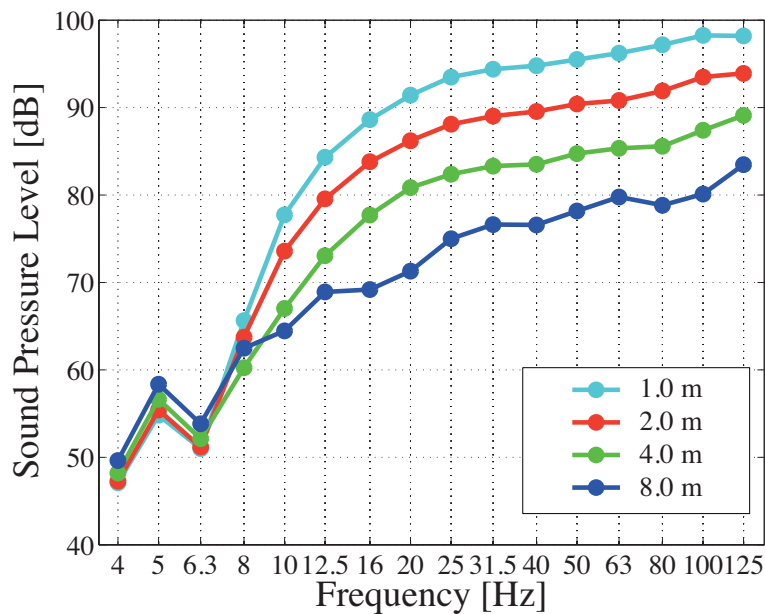


Fig. 3.17: 1/3 octave band sound pressure level at each point from 4 to 125 Hz band.

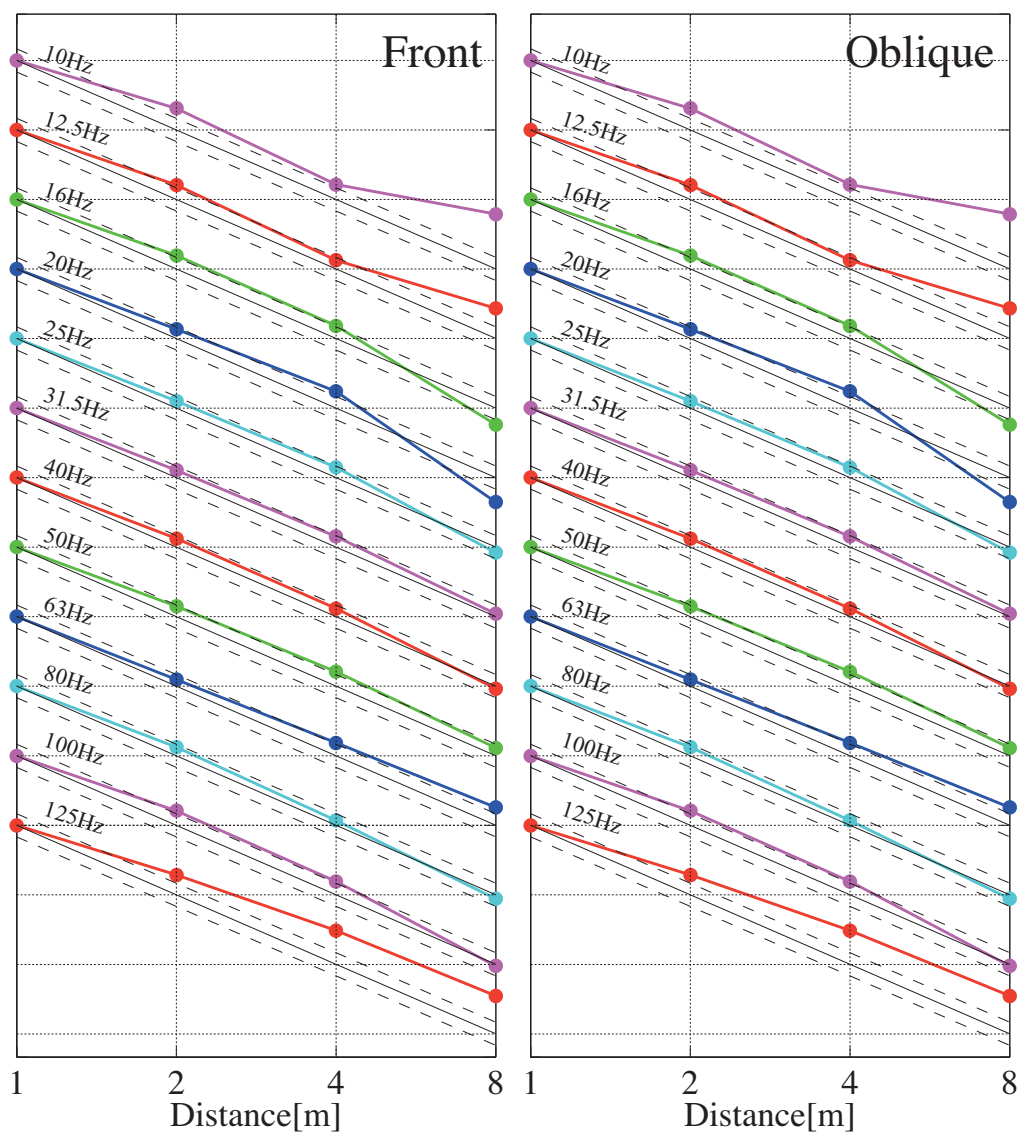


Fig. 3.18: Distance attenuation of 1/3 octave band SPL.

3.3.2 分析方法

実験データから内外音圧レベル差の算出の手順を示す。マイクロフォンから測定したデータを音圧変換する。騒音計のキャリブレーション信号を測定し、絶対音圧レベルを算出した。また、測定データには直流成分が含まれていることがあり、音圧レベルを算出する際、音圧の二乗値をとって計算する為結果に影響がでてしまう。その為、時間波形の各値からそのデータの時間平均値を引くことで直流成分の除去をした。

1/3 オクターブバンドの等価音圧レベルは、データを絶対音圧に変換した後、時間波形の信号にバンドパスフィルターをたたみ込み、時間波形の二乗値を時間平均して算出する。使用したバンドパスフィルタは FIR フィルタを使用し、JIS 規格 ([37]) にのっとり、クラス 0 の最小及び、最大相対減衰量限界値の範囲内のフィルタを使用した (Fig.3.19)。

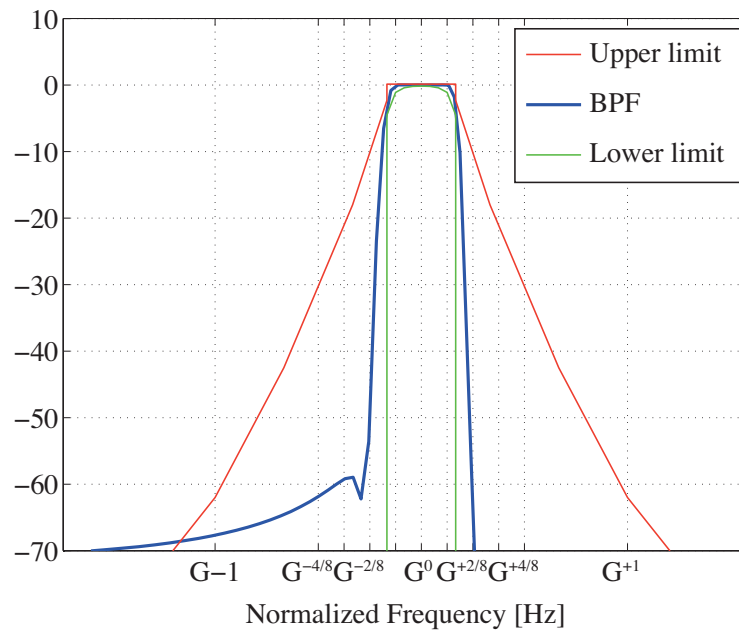


Fig. 3.19: Cut-off characteristics of Band Pass Filter employed for the following calculation of band levels.

■算出指標 模型家屋の遮音性能を評価する指標として、内外音圧レベル差 $L_{out0} - \bar{L}_{in}$ を算出する。屋外音圧レベルについては、模型がない状態における家屋前面の音圧レベル L_{out0} とし、別途で測定した。屋内音圧レベルについては、全測定点 175 点の音圧レベルのエネルギー平均値 \bar{L}_{in} を使用する。

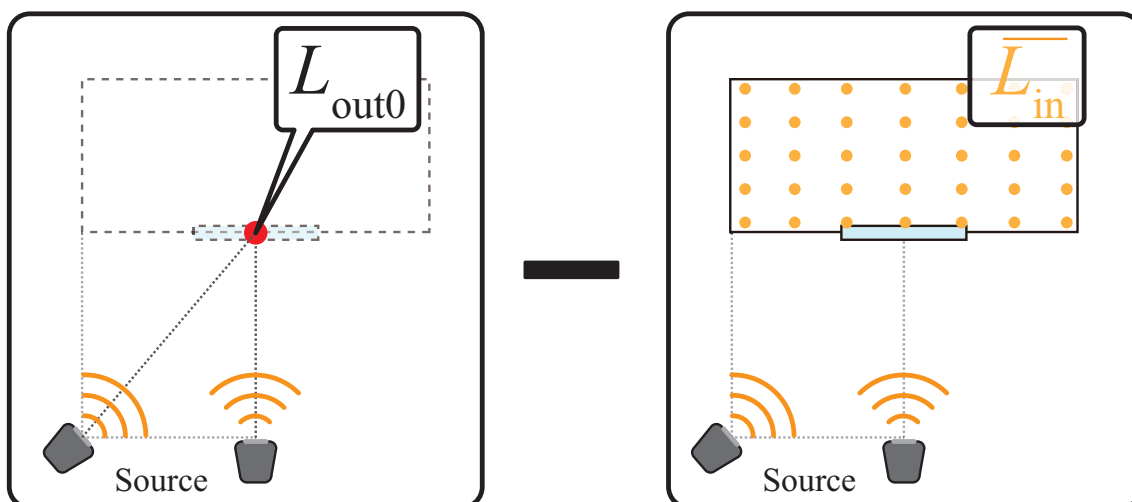


Fig. 3.20: Calculation method for SPL difference between indoor and outdoor.

3.4 測定結果

本節では各種条件下における内外音圧レベル差 ΔL を、10~125 Hz の 1/3 オクターブバンド中心周波数で算出した。

3.4.1 窓開放の影響

■計測条件 窓について3つの条件（開放，一部開放，閉じ）による内外音圧レベル差について検証を行った。音源は正面，床下は木柵ありの条件で計測した。外壁質量は $24, 48 \text{ kg/m}^2$ を設定した。

■内外音圧レベル差 外壁質量 24 kg/m^2 の ΔL の周波数特性を見ると、20Hz 付近で大きくディップが生じている。 48 kg/m^2 の結果では 10 Hz 付近にシフトしているものと考えられる。これは、第2章で考察した数値解析の傾向とも類似しており、家屋内空気、壁面質量によるバネマス系の共振が形成されていることが考えられる。

また、 24 kg/m^2 の結果において 12.5 Hz で、 ΔL が上昇する傾向が見られる。これは前章において述べた、床下空間の影響が考えられるが、床下の木柵が無い条件でも同様に上昇した（後述 Fig. ）。そのため、他の要因により上昇するものと考えられるが、詳細は不明である。

各条件で共通して、 ΔL の周波数特性は 63 Hz 以降の帯域でディップが生じており、室内の固有モードが励起されていることがわかる。

外壁質量によらず、窓の開閉条件における ΔL は窓が開放するほど全体的に下がる傾向が見られる。外壁面密度 $24, 48 \text{ kg/m}^2$ の結果を見比べると、40 Hz 以降の特性はほとんど同じであることがわかる。これは窓により音響透過が支配的になるためと考えられる。これについては次項でより詳細に観察することとする。

■ 家屋内の音圧レベル分布

20 Hz 以上の周波数帯域では、窓の開放条件に関わらず、類似した周波数特性を持っており、窓を開放するほど内外音圧レベル差 $L_{\text{out}} - \bar{L}_{\text{in}}$ が低下している。また、家屋がない状態での家屋前面の音圧レベル $L_{\text{out}0}$ で基準化した家屋内の音圧レベル分布を Fig.3.22-3.27 に示す。各条件の音圧分布において、20 Hz 以下の周波数帯域では、窓の開放条件によらず、家屋内でほぼ一様な音圧分布となっている。周波数が高くなるにつれて、家屋内に分布が生じ始める。63Hz 以上で屋内の音圧レベルが固有モードに近い分布が出ており、特に 100Hz 付近で y 軸方向に対するモードが強く出ている。また、一部開放条件では加振力の対称性が崩れ、40Hz のモードが他の条件よりも強く音圧分布に現れている。これは、Fig.3.21 においても内外音圧レベル差 ΔL の結果にもあらわれており、外壁の厚さに関わらず、一部開放条件では 40Hz 付近で若干の落ちこみが見られる。

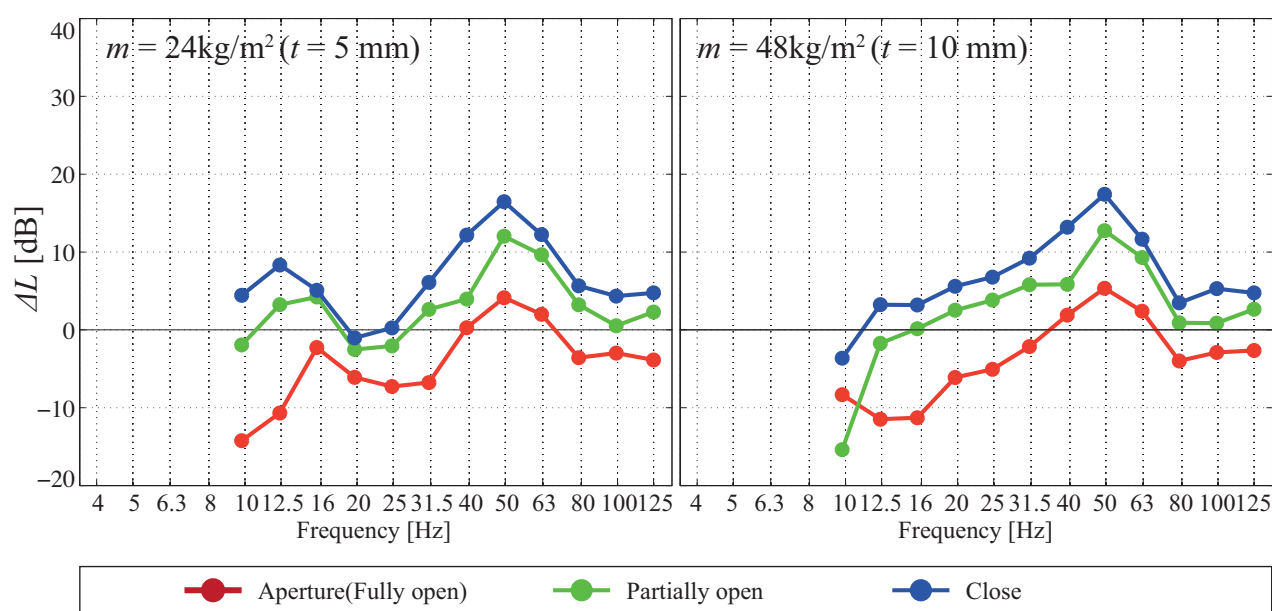


Fig. 3.21: ΔL measured by changing conditions of the aperture. Area density of outer walls is 24 kg/m^2 (left) and 48 kg/m^2 (right)

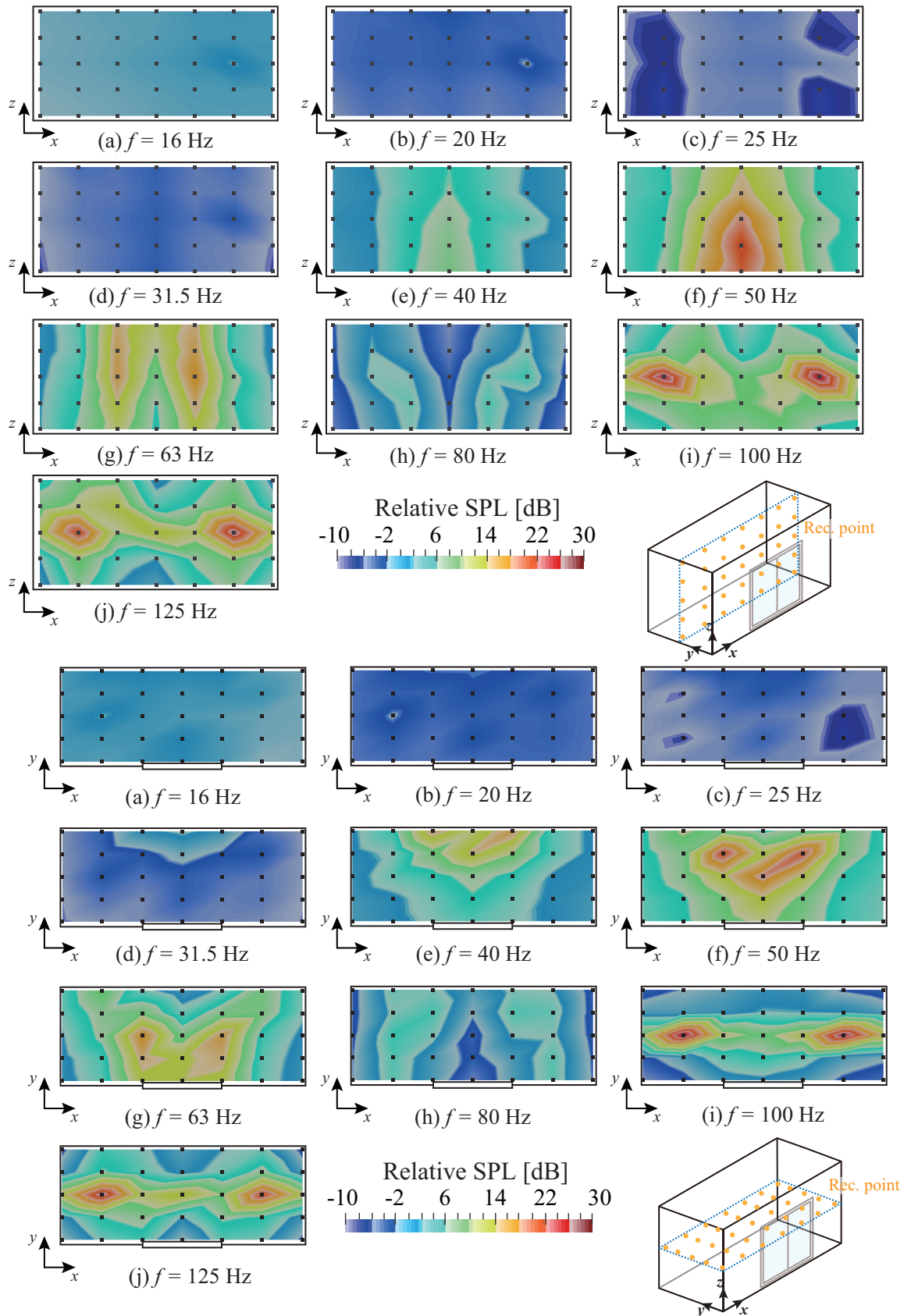


Fig. 3.22: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24kg/m^2 ", "Window = fully open" and "Src. = Front" conditions.

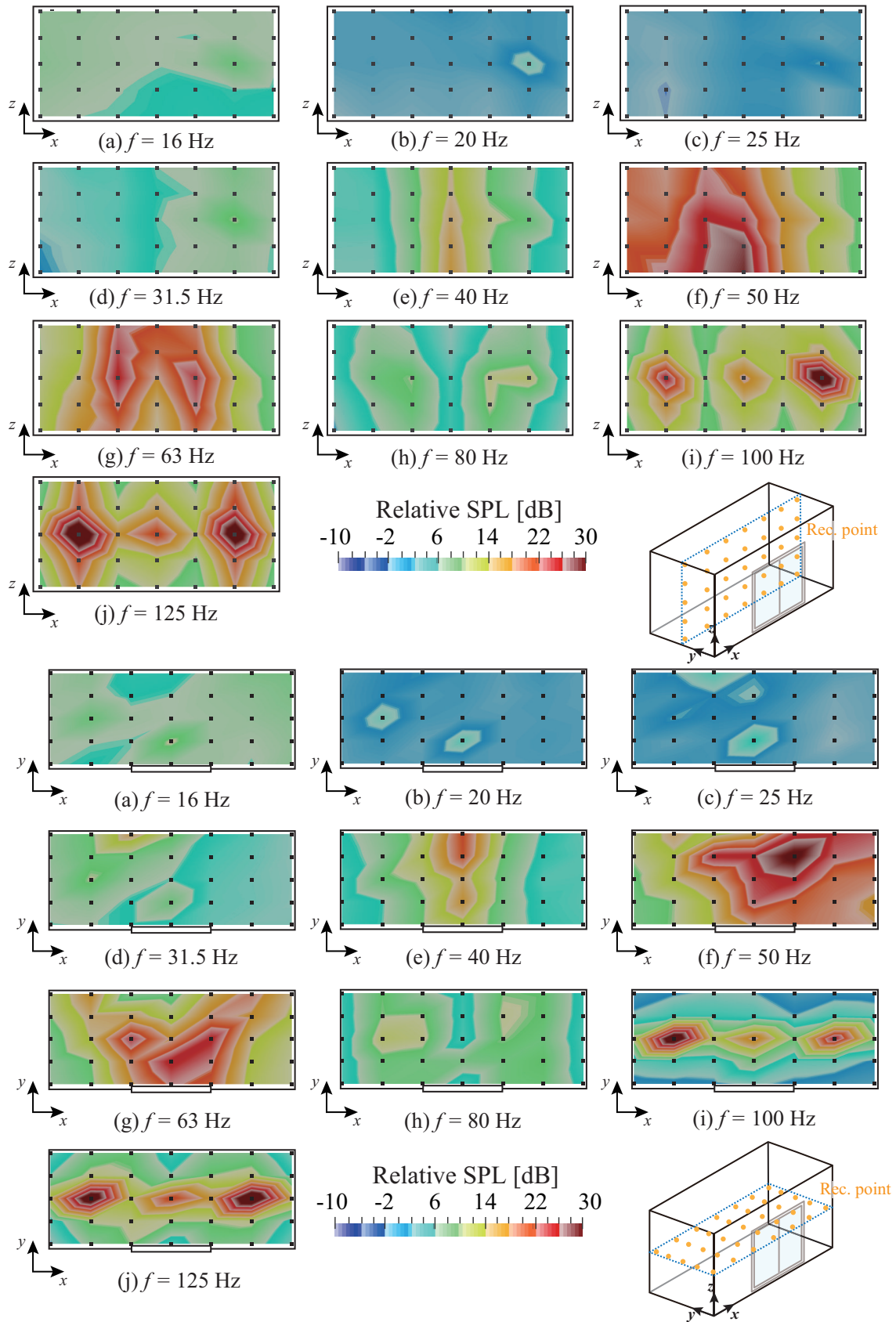


Fig. 3.23: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24kg/m²", "Window = partially open" and "Src. = Front" conditions.

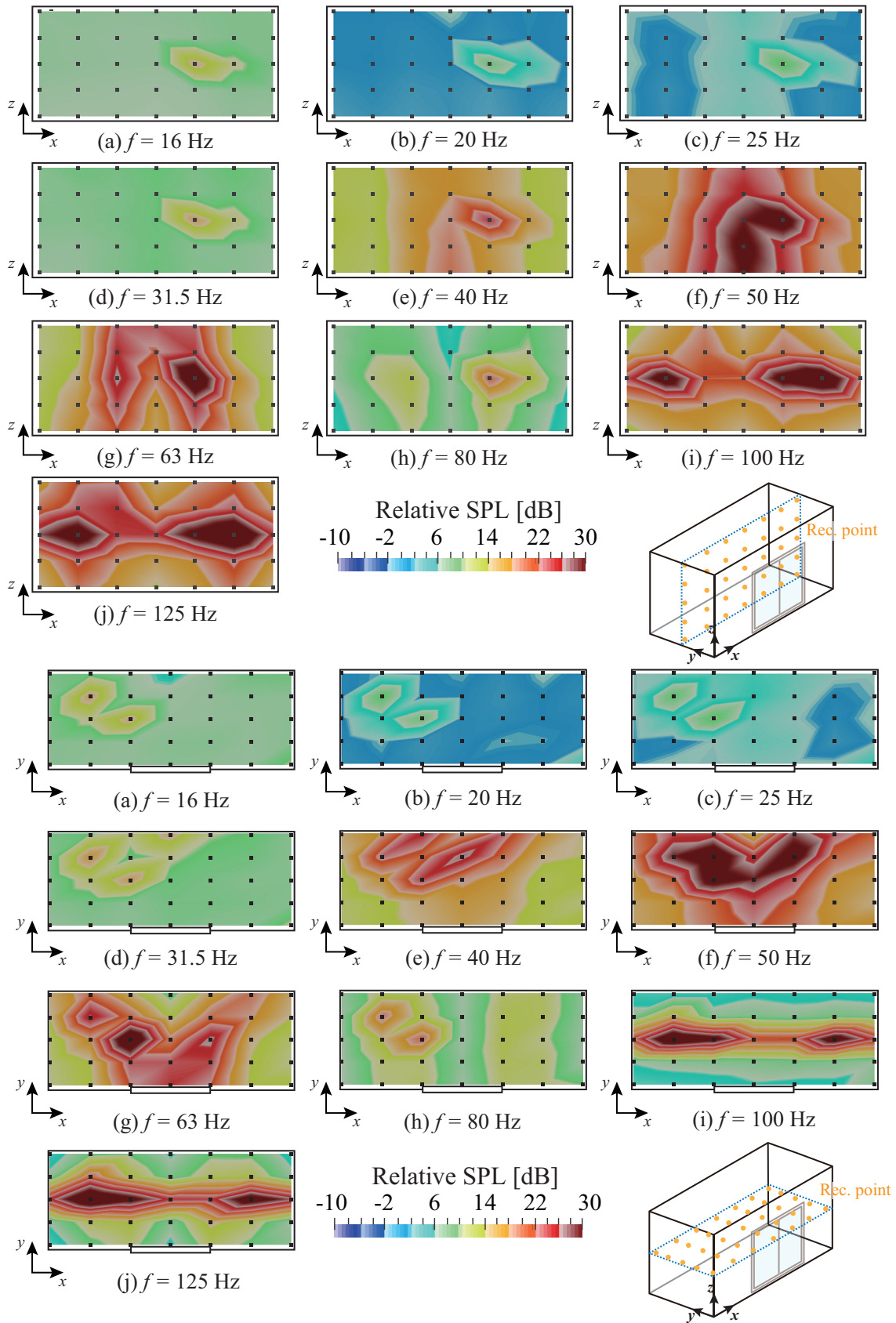


Fig. 3.24: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24 kg/m²", "Window = closed" and "Src. = Front" conditions.

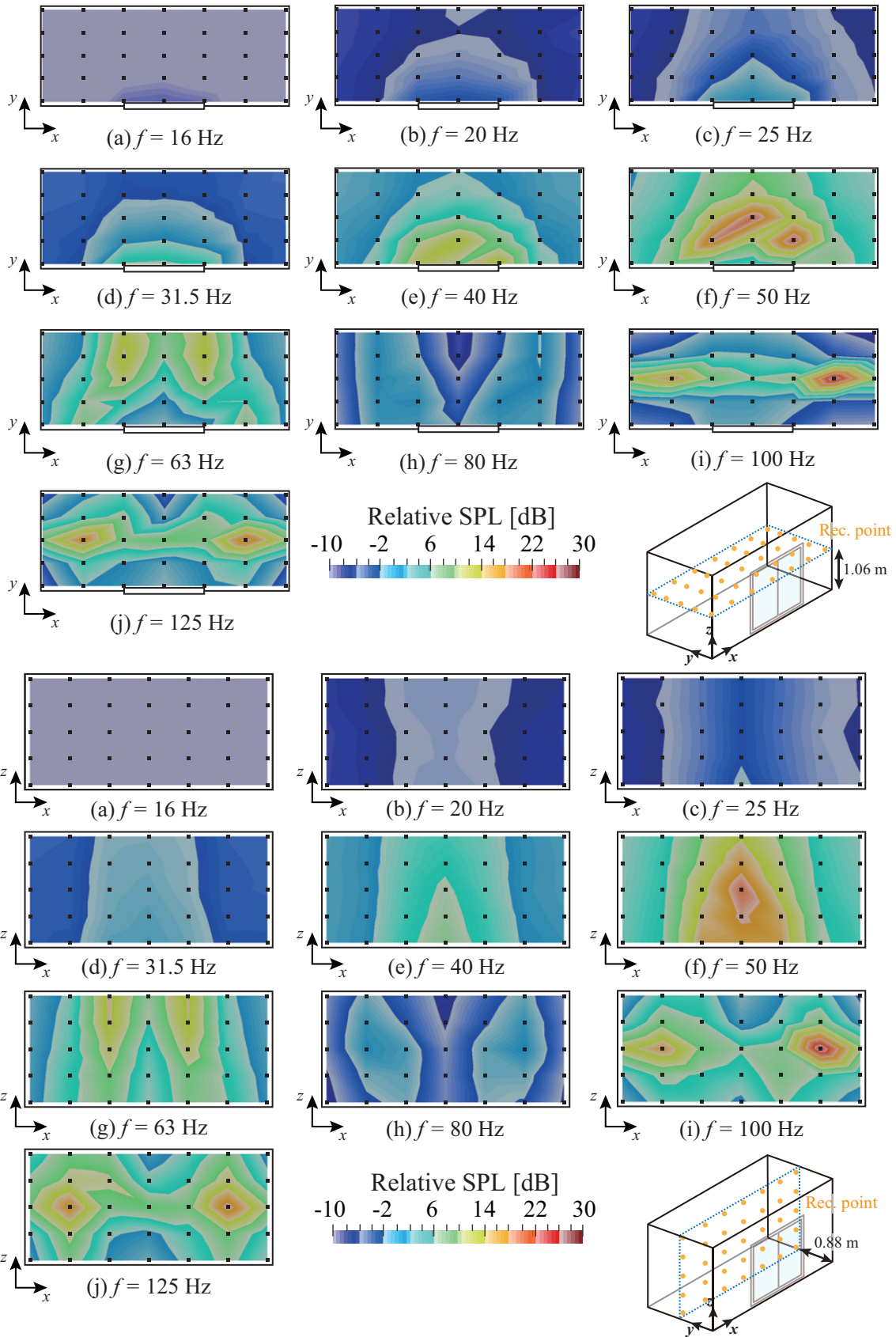


Fig. 3.25: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m²", "Window = fully open" and "Src. = Front" conditions

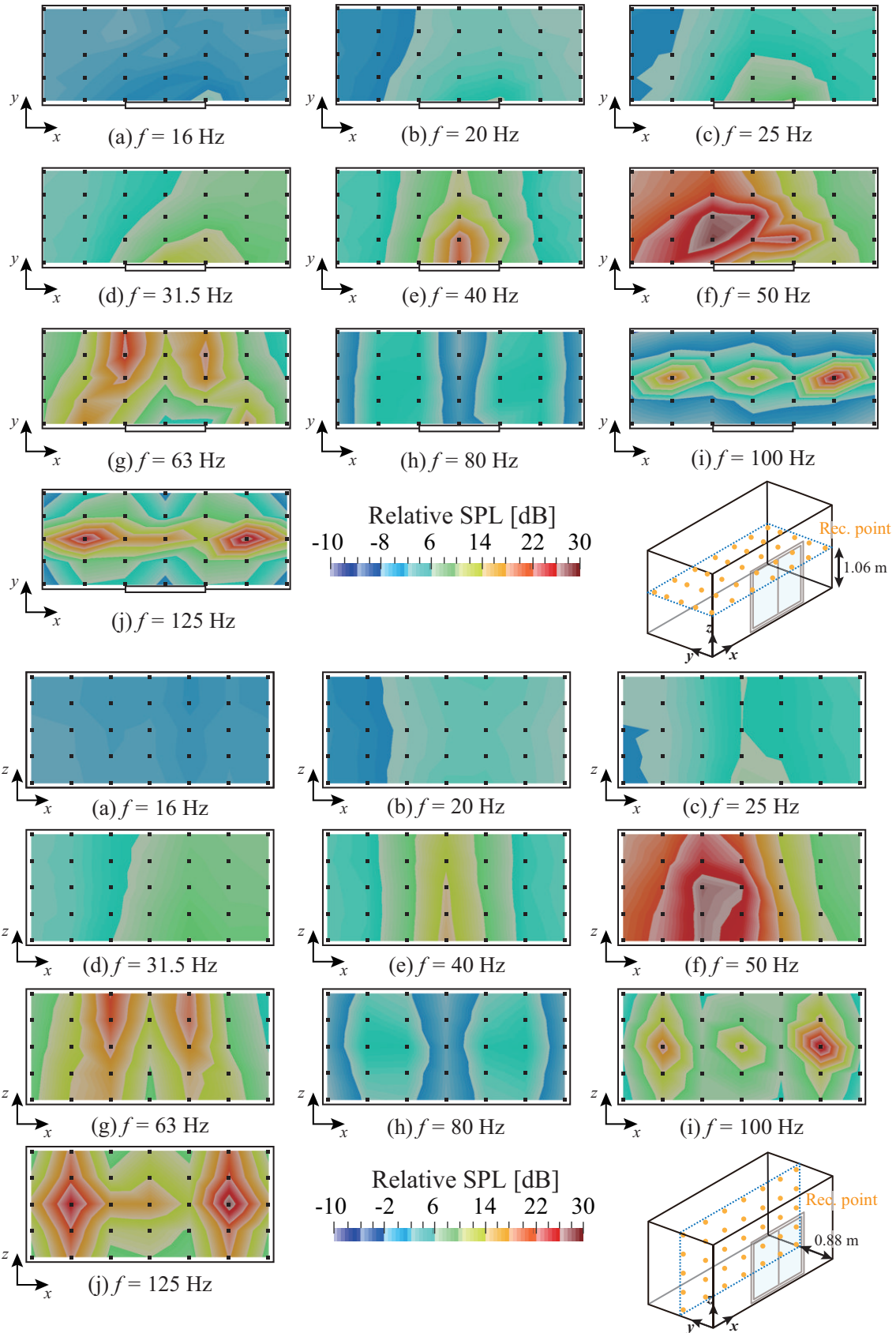


Fig. 3.26: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m²", "Window = partially open" and "Src. = Front" conditions.

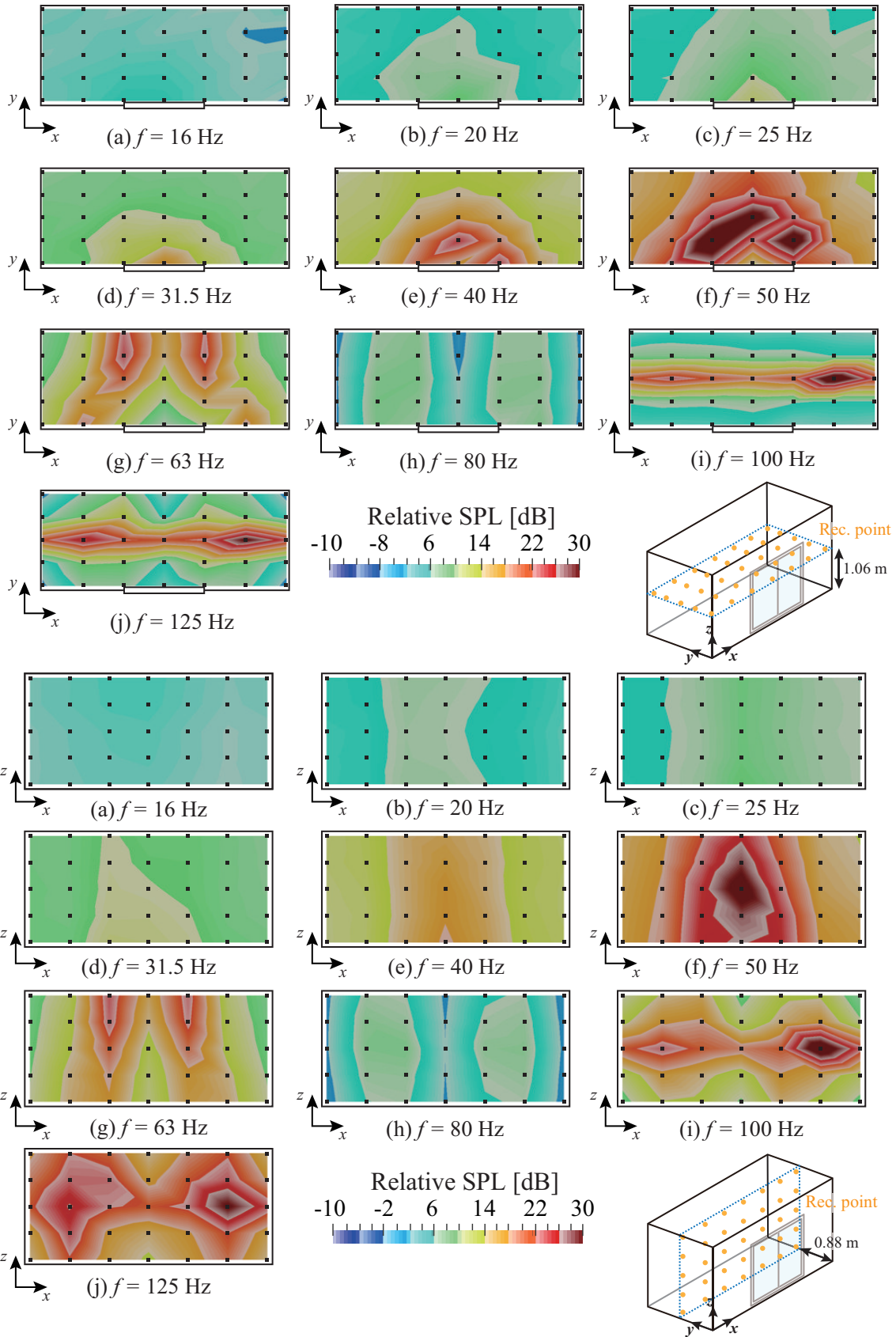


Fig. 3.27: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m²", "Window = closed" and "Src. = Front" conditions.

3.4.2 外壁質量の影響

■計測条件 前項において、窓の質量により家屋遮音性が決定しうることに触れた。ここでは開口部のない壁のみの模型についても計測を行い、外壁質量の影響について考察を行った。音源は正面、床下は木枠ありの条件である。

■結果と考察 各条件において、超低周波音域における共振系の形成により、外壁質量が大きいほど低域側でディップが生じ、それ以降の周波数では 50 Hz 付近まで ΔL は増加傾向である。これに伴い 20~40 Hz では遮音性能の向上が見られるが、開口部を有する条件では 40 Hz 以上の帯域では外壁質量の影響はほとんど見られない。一方、窓無し条件では、外壁質量の増加によりほぼ全帯域で遮音性能の向上が見られる。

従って、開口部のある条件においては開口部や窓を経由した透過が支配的であり、窓の遮音性能で家屋遮音性能が決定することが示唆される。また、80 Hz 以上では室内の固有振動により ΔL が低下しているが、窓の有無により 10 dB 程度の遮音性能の向上が確認できる。一部の低音域では外壁質量増加による遮音性能の向上が見込まれるが、基本的には全帯域において、開口部など、透過損失の小さい部位の対策が不可欠であると言える。

開口無し（全面壁）条件において外壁質量 24, 48 kg/m² での屋内の音圧レベル分布を Fig.3.29, 3.30 に示す。分布としてはほとんど差は無く、外壁質量が増加するにつれ、内部の音圧レベルが小さくなる傾向が見られる。

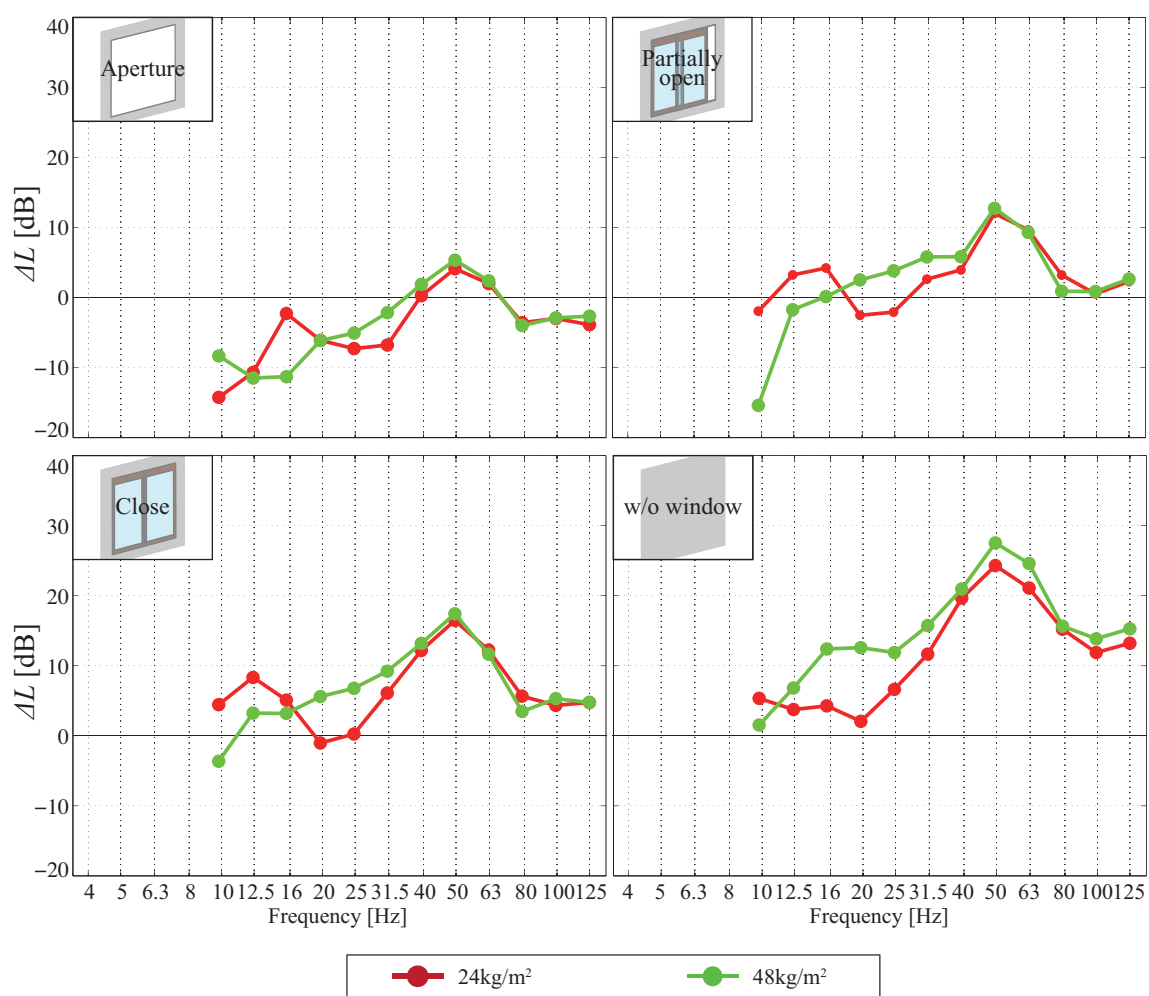


Fig. 3.28: ΔL measured for the aperture with different conditions. Two area densities are considered for the outer walls.

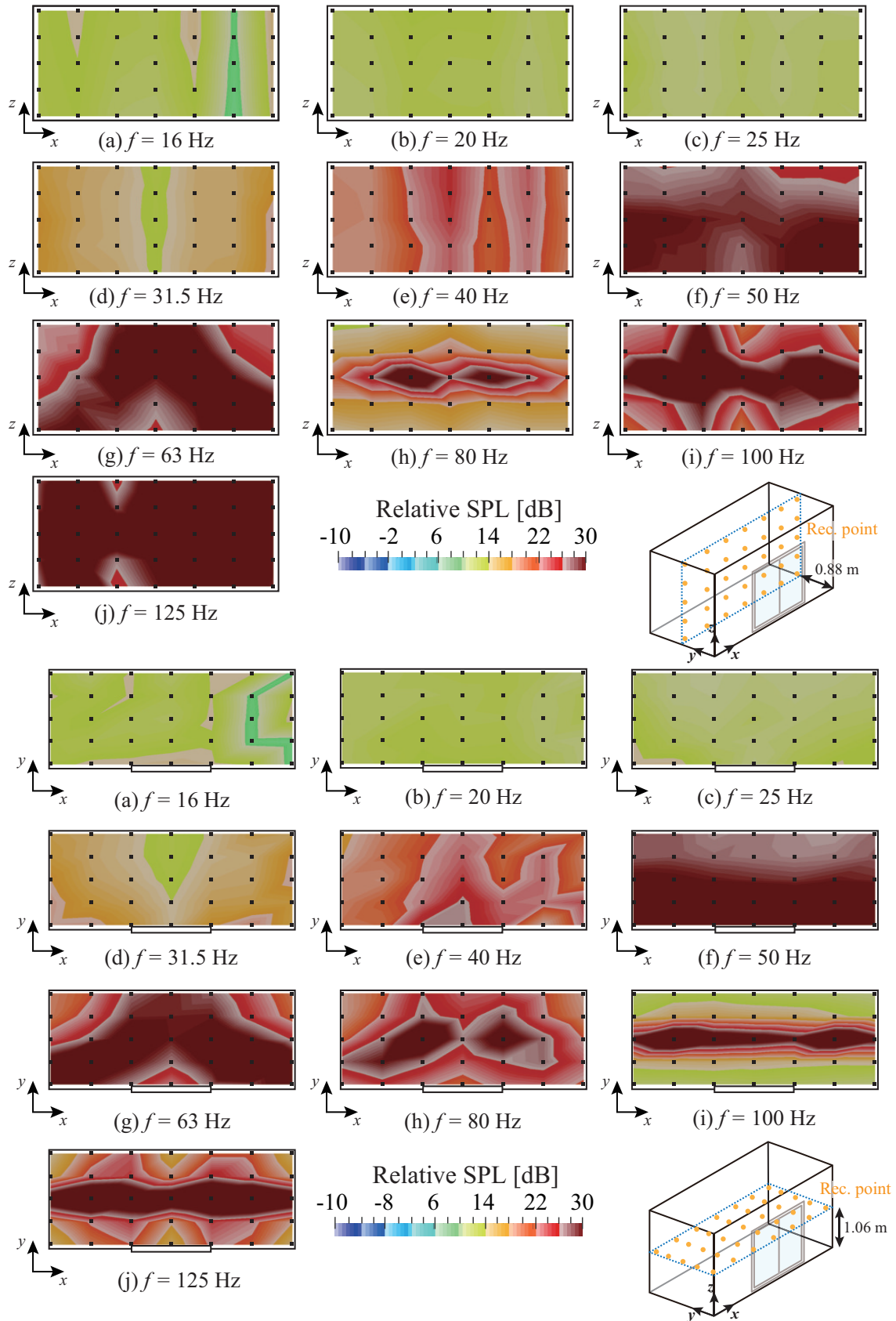


Fig. 3.29: Distribution of indoor SPL on y - z (upper) and x - y (lower) plane under "Wall = 24 kg/m²", "Window = no aperture" and "Src. = Front" conditions.

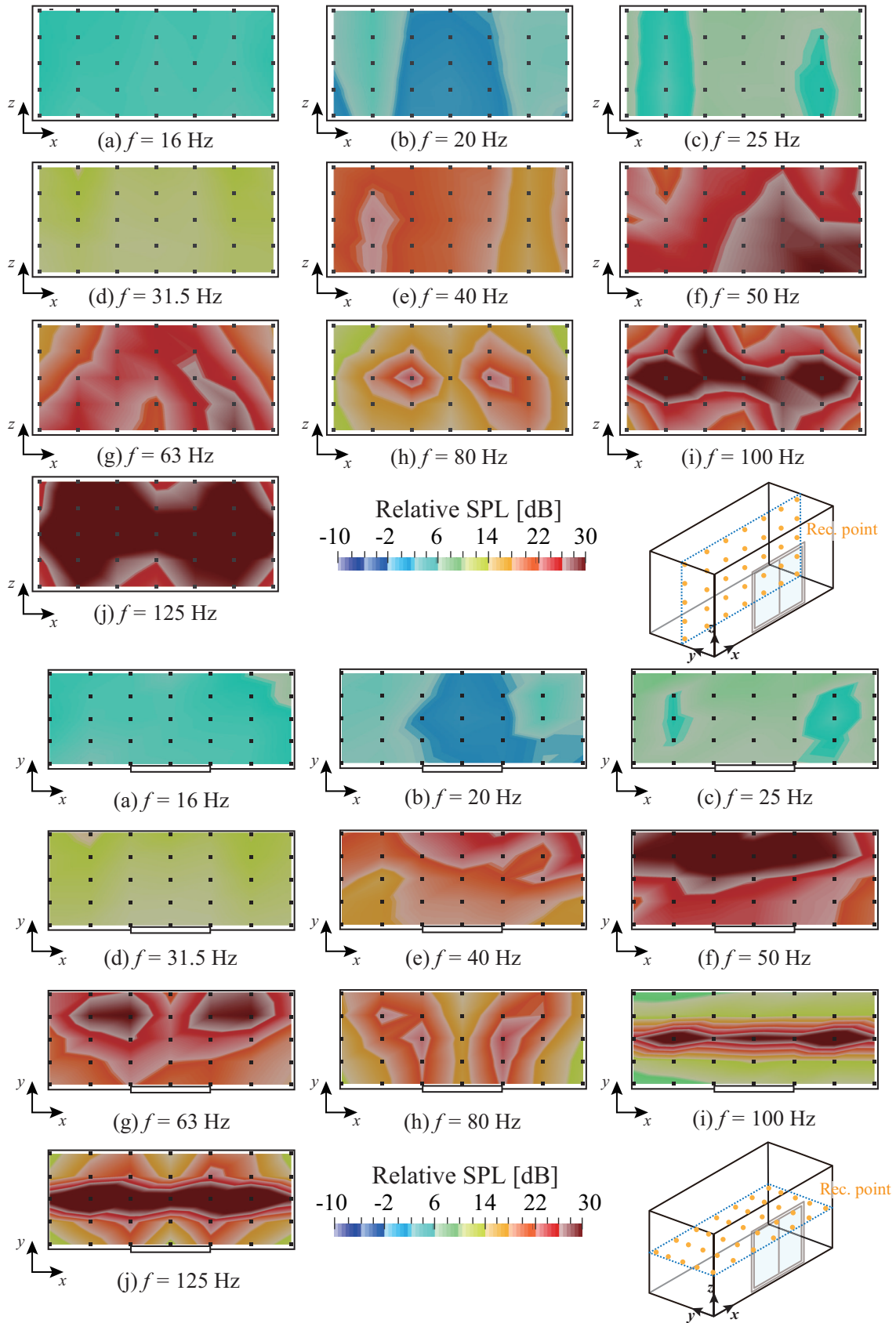


Fig. 3.30: Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m²", "Window = no aperture" and "Src. = Front" conditions.

3.4.3 床下空間の影響

■計測条件 第2章の数値解析による検討において床下空間が超低音域の屋内の音圧レベルに影響を及ぼす要因として大きいことが示唆された。そこで、ここでは床下の基礎部分に木枠がある場合と、床下の木枠部分をはずし床高が等しくなるような柱の上に模型を乗せた場合の2条件で実験を行った。外壁は 24kg/m^2 の亚克力板を用いた。音源は正面である。また、床下木枠の有無、窓についても開放、一部開放、閉じの3条件の計6条件で計測を行った。

■結果と考察 結果を Fig.3.31 に示す。窓の全面開放条件や一部開放条件においては、25 Hz 付近と 10 Hz 付近で2つのディップが生じている。しかし、床下の木枠がない条件については、いずれの開口条件においても若干の差が見られるものの、ほぼ同様の周波数特性となっており、床下空気層による共振の影響については確認できなかった。これについては、実測においては床下の木枠自体の振動があること、気密が不十分であったことなどが考えられる。

また、超低周波領域で生じるディップの原因としては固体系の固有振動の影響が考えられるが、詳細については不明である。

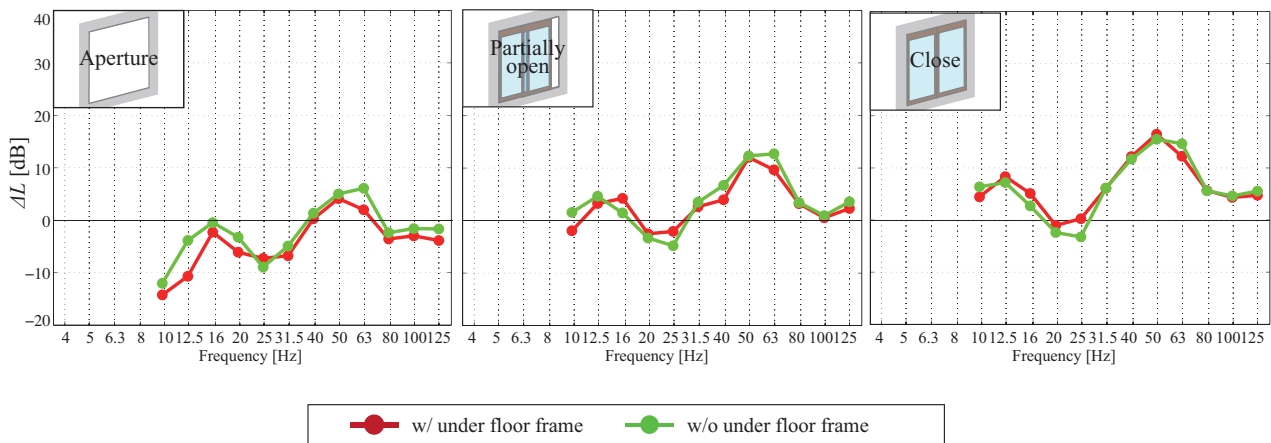


Fig. 3.31: ΔL measured for the conditions with and without underfloor frame.

3.4.4 換気口の影響

■計測条件 ここでは換気口の有無の ΔL への影響について検討を行った。実測は開口無し（全面壁）、音源正面、床下木枠ありで行った。また、外壁質量は $24, 48 \text{ kg/m}^2$ で行った。

■結果と考察 換気口による影響はほぼ見られなかった。これは換気口は波長に大して十分小さく、低周波音の放射効率は非常に小さく、換気口を經由した音響透過は小さいものと考えられる。

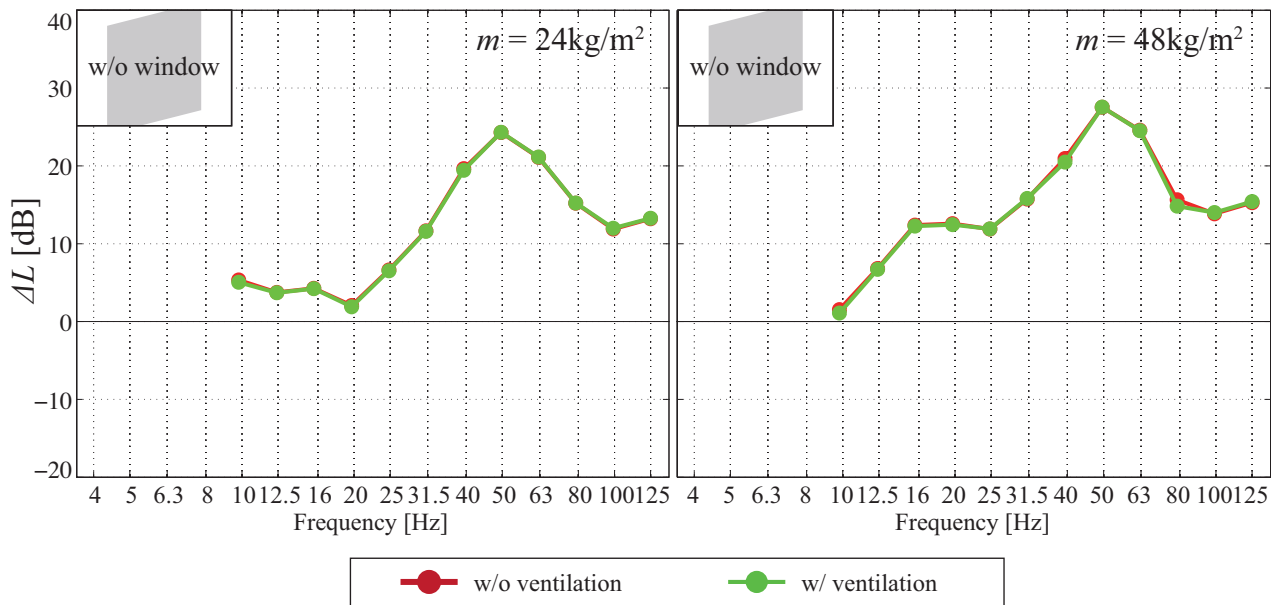


Fig. 3.32: ΔL measured for the conditions with and without ventilation hole.

3.4.5 音源位置の影響

■計測条件 ここでは音源位置の影響について検討を行う。床下には木柱を設けた。開口部は開放、一部開放、閉じて行った。外壁質量については $24, 48 \text{ kg/m}^2$ で行った。

■結果と考察 各条件で、音源位置が家屋の平面に対して斜め方向からにある場合（家屋の角にある）、 ΔL の値が全体的に若干大きくなっており、遮音性能が高くなっている。低周波領域においては波長が長く、透過損失の入射角依存性は小さいものと考えられる。一方、斜め方向から音波が入射した場合は正面方向よりも見つけ面積が小さくなり、その結果に斜め入射で ΔL が若干上昇するものと考えられる。

斜め音源条件では一部開放条件以外でも、40Hz 付近の (1,0,0) の一次モードが励起され、 ΔL が低下する傾向が見られる。特に外壁の質量が 48 kg/m^2 条件の方が顕著にその傾向がみられる。これは、壁質量が重くなることで室の固有モードが強く励起されていることが考えられる。全体的には、 ΔL の変化の影響は小さいことがわかる。

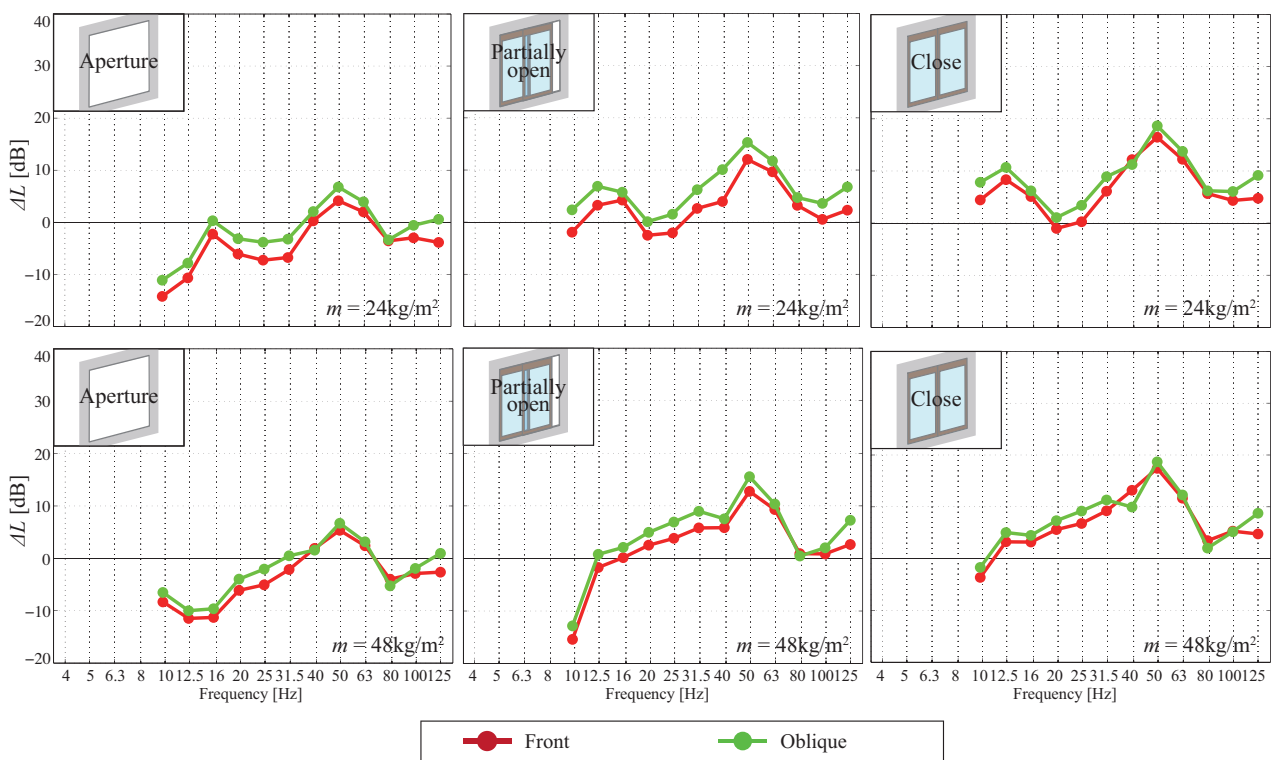


Fig. 3.33: ΔL measured by changing source positions. Upper and lower figures are results for the outer wall with area density 24 and 48 kg/m^2 , respectively.

3.5 数値解析・実大実験との比較

■**比較条件** ある程度現象が単純である窓閉じ及び窓無し条件を比較する。外壁質量は $24,48 \text{ kg/m}^2$ の2水準で検討を行った。これまでの検討から、床下空間の影響が比較的大きいことが示唆された為、床部分のモデルは床下枠部分を剛、床面を振動場として扱い、解析を行った。

■**vs. Membrane モデル** はじめに、外壁と窓面の数値解析モデルについて、最も単純な無張力膜要素モデルについて考察を行う。結果を Fig.3.34 に示す。数値解析と模型実験を比較すると、 31.5Hz 以上で同様な傾向となっており、良い対応が見られる。特に窓無し条件では外壁質量 $24,48\text{kg/m}^2$ の両方でバネマス系の共振周波数から室内の固有モード周波数帯域の間の非共振帯域においてかなり良い対応が見られる。即ち、この帯域において、遮音性能は外壁質量が支配的であることが言える。

窓閉じ条件をみると、同様の傾向はみられるが、実大実験と模型実験では数値解析に比べ ΔL が小さい。一方、実大実験と模型実験は近い値が示されている。模型で制作した窓は精密な設計がされていないため機密性に乏しく、窓質量程度の遮音性能が見込まれないことが一要因として考えられる。

80Hz 以上の室内の固有モードによる ΔL の落ち込みについては数値解析・模型実験・実大実験ともに同様な傾向であるが、模型実験は落ち込みが顕著である。これについても窓周辺の隙間の影響が考えられる。

数値解析では膜振動場での減衰を考慮していないため、ピークディップが強く励起される傾向がある。 20Hz 以下の挙動については、数値解析は同様な理由で、共振系によるディップが顕著であり乖離している。実大実験と模型実験も対応が見られない。

■**vs. plate モデル** 外壁・窓共に板要素を適用し、支持条件は四周単樹支持とした。結果を Fig.3.35 に示す。数値解析結果について、無張力膜要素よりも 20Hz 以下の共振系や 80Hz 以上の室の固有モードの影響によるディップが浅くなり、より模型実験の値へ近づく傾向が見られる。また、剛性や床下空間の影響を両方とも考慮することで、窓有り・ 48kg/m^2 の結果においては 20 Hz 以下で実大との対応が良くなる傾向が見られる。しかし、 $20 \sim 40 \text{ Hz}$ では数値解析で実測にないピークが見られ、乖離点も見られる。窓あり・ 24 kg/m^2 については 40 Hz 以下での対応はよくない。

■**vs. Shell モデル** 外壁にシェル要素、窓に板要素を適用し、支持条件は床四周を固定支持、窓四周を単純支持とした。結果を Fig.3.34 に示す。窓有り条件の数値解析の超低音域での挙動はより実大実験に近づいており、超低音域において床下空間や家屋全体の剛性を考慮する必要があることが示唆された。しかし、 $25 \sim 80\text{Hz}$ の非共振帯域の値はやや乖離が見られる。Membrane, plate, shell モデルを通して、窓なし条件はいずれも数値解析、模型実験は比較的良い対応が見られる。一方、窓あり条件では各モデルでかなり違いが見られることから、窓周辺の数値解析モデルが予測精度上重要である可能性が示唆される。

Table 3.3: Physical properties for the calculation.

		Walls	Window
Young's modulus	[N/m ²]	3.1×10^9	7.5×10^{10}
Poisson's ratio	[-]	0.35	0.22
Density	[kg/m ³]	1,200	2,500
Thickness	[m]	0.02, 0.04	0.0052
Support condition		Fixed(floor perimeter)	Simple

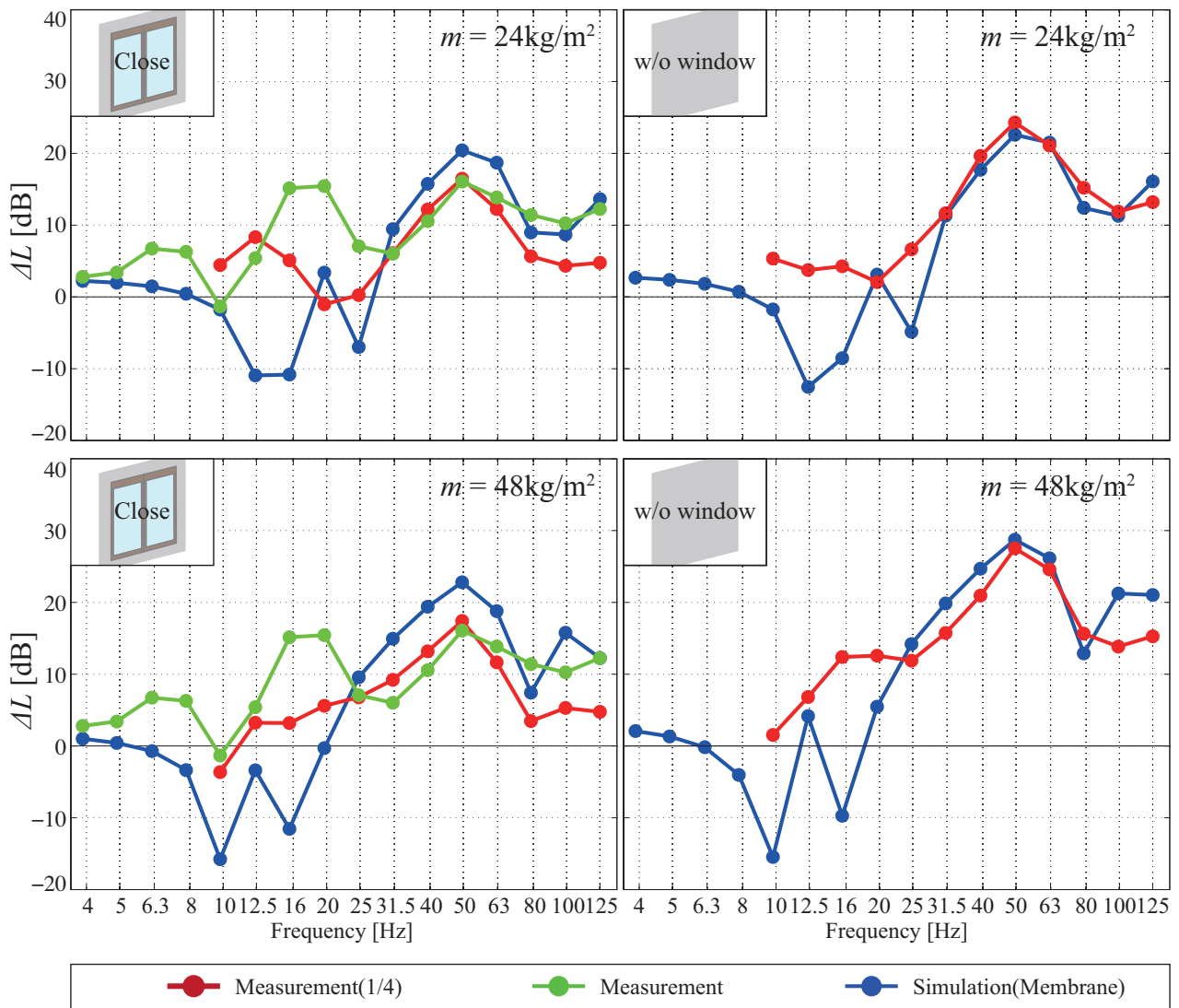


Fig. 3.34: Comparison between measured and calculated value. Outer walls are modeled by limp membrane.

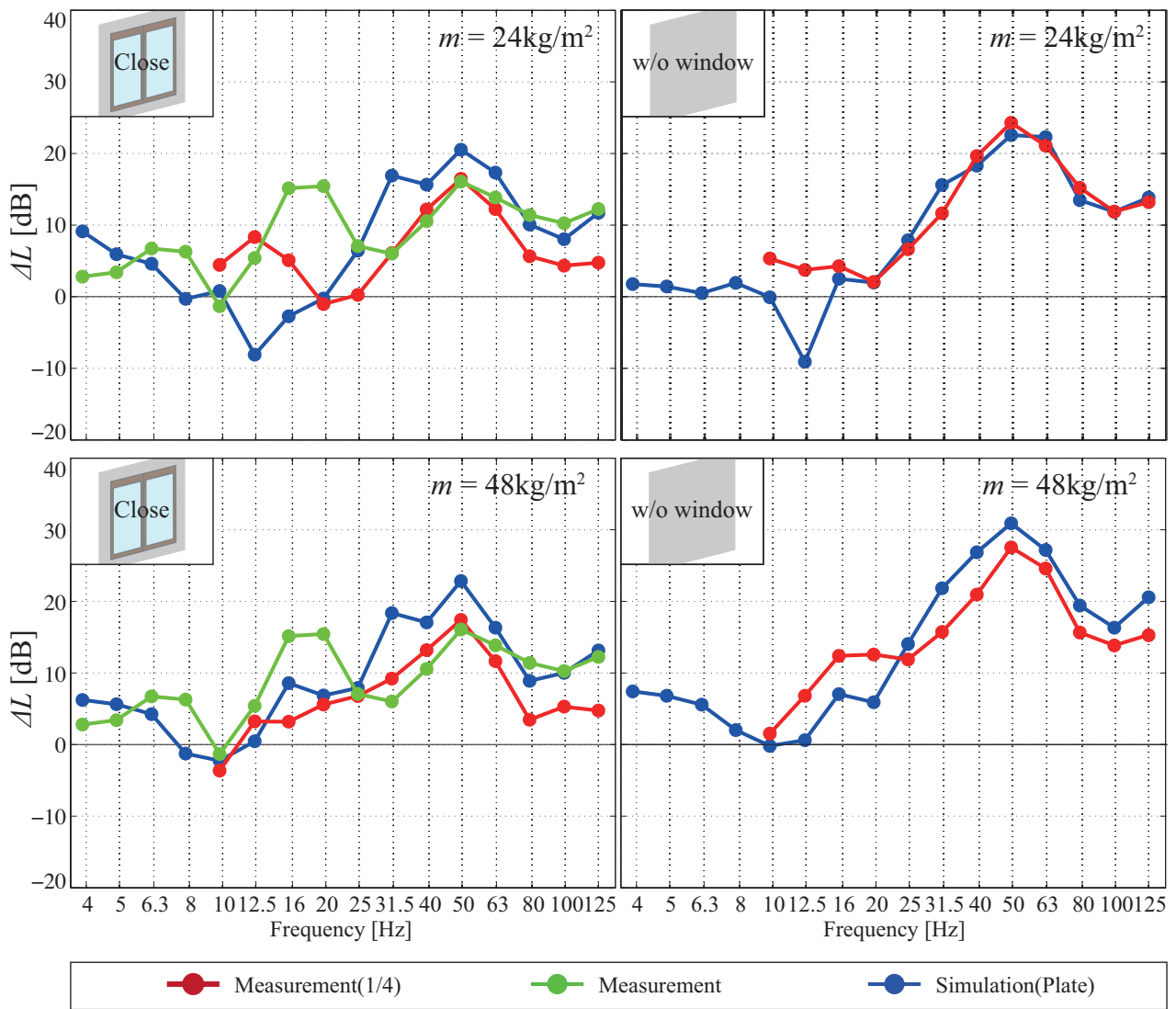


Fig. 3.35: Comparison between measured and calculated value. Outer walls are modeled by elastic plate.

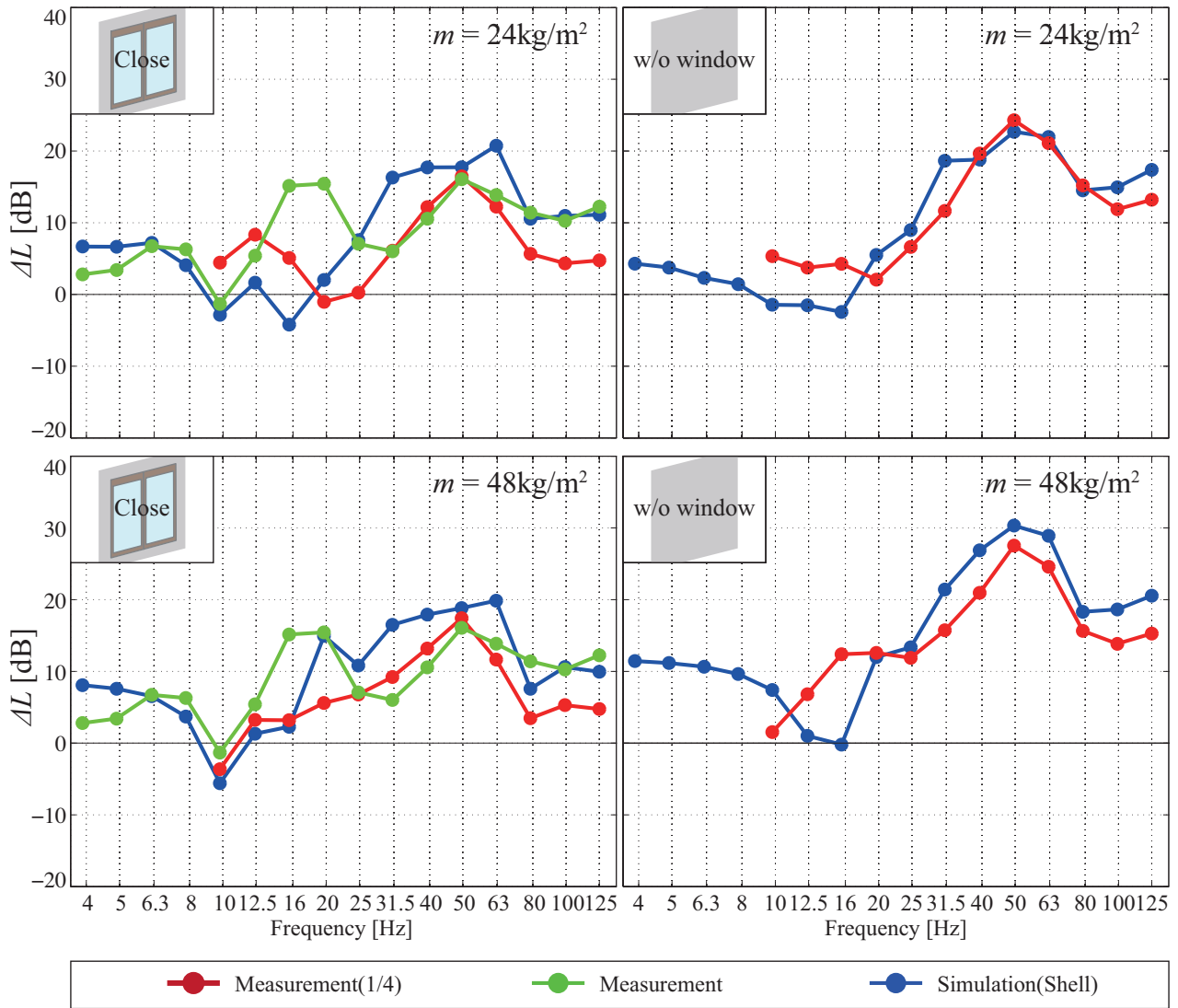


Fig. 3.36: Comparison between measured and calculated value. Outer walls are modeled by elastic shell.

3.6 まとめ

本章では単純な構造の模型を作成し、縮尺模型実験を行った。また、2章で構築した数値解析モデルと模型実験、既報で行った実大実験を比較し低周波音の伝搬現象について考察を行った。

第2節では、実験の方針を決め、縮尺模型実験に使用する模型を作成した。家屋の遮音性能に関わる要因を解明するために、一般的な木造家屋を模擬しつつも、より単純な構造の模型を作成した。最初に遮音に関する模型実験での相似則について述べ、材料の選定をした。一般的な木造家屋の壁と柱の材料にはアクリル板と木材を用い、窓についてはガラスを用いて作成することとした。また、模型は測定条件として窓の開放条件、外壁質量、床下空間、換気口の有無等を可変できるように作成した。

第3節では、実験で使用した測定機器や、実験の音源や測定点の配置や測定環境等の概要、分析に用いたバンドパスフィルタについて述べた。音源の特性を測定し、スピーカの出力帯域が10Hz以上であることを確認したため、模型実験ではそれ以上の帯域以上を測定対象周波数とし実験を行った。

第4節で模型実験の結果を示した。内外音圧レベル差 ΔL の周波数特性は窓の開閉条件に関わらず類似しており、20Hz以下の超低音域で著しく家屋内の音圧レベルが上昇することを示した。これは家屋内の空気をばね、外壁や窓部分を質量とするような共振系によるものであった。従って、外壁質量が重くなるほどこの共振周波数は低域側にシフトする。さらに80Hz以上の帯域においては室の固有モードが励起され、 ΔL は落ち込む。屋内の音圧分布からもこれらが室内の固有モードによるものと考えられた。超低音域でのバネマス系の共振帯域と、室の固有モードの周波数帯域その間の帯域においては質量の影響が支配的であることが示唆された。この帯域において、一部に外壁よりも質量が小さい部分を有する家屋では外壁質量を大きくしても、質量が小さい部分を經由する音響伝搬が卓越し、外壁質量の増加による遮音性能の向上は見込まれないことを示した。

第5節で数値解析と模型実験、実大実験との比較を行った。無張力膜要素を用いた解析では40Hz以上の帯域で模型実験や実大実験とも内外音圧レベル差が比較的良い対応が見られ、質量が遮音性能に大きく影響することが示唆された。しかし、それ以下の帯域ではディップが大きく、乖離していた。板要素やシェル要素で解析した結果では、超低音域において実大実験の結果に近づき、低音域においける剛性考慮の必要性が示された。実大実験の超低音域の挙動については、床下空間や剛性が遮音性能に大きく影響していることが示唆された。

第4章

総括

本章では、本研究により得られた成果を総括し、今後の課題について述べる。

4.1 研究の成果

第1章では研究の背景について、低周波音の動向から近年の苦情内容について概説し、低周波音の受音系での低周波音の遮音に関わる既往研究やこれまでの知見について述べた。そこで家屋近傍の音源から生じる定常的な低周波音を対象とし、家屋遮音性能を総合的に予測すること為の基礎的な知見を得ることを目的とし、数値解析と模型実験を行うこととした。既報の課題点を踏まえ、数値解析では、膜モデルにおける外壁の振動減衰の考慮、床下空間の連成の影響、外壁振動場の剛性の影響について、検討を行うこととした。また単純な構造の模型を用いて窓の開閉条件や床下空間、外壁質量の影響について模型実験を行い実現象の把握、遮音性能に関わる要素の解明を目指した。

第2章では、数値解析モデルの構築を行った。第2節では解析条件について低周波音源のモデル化や、屋外音場のモデル化、本論文で用いる家屋遮音性能指標値について述べた。第3節ではまず、外壁振動場での質量・減衰の影響について観察した。本論文で扱うような単純な直方体の家屋において、内外音圧レベル差の周波数特性は基本的に、超低音域において家屋内空気をばね、外壁を質量とするような共振系の形成により、ディップが生じ、80 Hz以上の帯域で室の固有モードにより、屋内の音圧レベルが上昇する。無張力膜モデルで解析した場合には、振動場での減衰を考慮していないことで共振の影響が強く現れていたが、減衰を考慮することで、共振における内外音圧レベル差のディップは小さくなった。ここでは流れ抵抗に基づき減衰定数を与えたが、面密度の虚部に経験的な値を与えるなどを行えば実務的には実測値の予測を行える可能性が示唆された。

また2つ目の検討として外壁の剛性や家屋全体の剛性の影響について観察した。40Hz以上の帯域において無張力膜要素と薄板要素、シェル要素での解析結果の差が小さく、この帯域においては、家屋の遮音性能に対して質量が支配的であることがわかった。しかし、それよりも低音域では板の固有振動による内外音圧レベル差のピークディップや1次の共振周波数以下では剛性制御による向上が見られた。

第4節では床面が振動し、地面から浮いているような状態（実際は支柱によって支えられているが今回は検討していない）と、建物の基礎部分のように完全剛な枠の上に家が設置してある状態と、全く床面が

振動しない場合の3条件で検討を行った。その結果、屋内空気・床下空気をばね、床・外壁を質点とするような2質点系の共振および反共振が20Hz付近で見られ、床下空間が家屋室内の音圧レベルに大きく寄与することがわかった。

第3章では縮尺模型実験を行った。実験の方針を決め、家屋模型を作成した。家屋の遮音性能に関わる要因を解明するために、より単純な構造の模型を作成し一般的な木造家屋を模擬した。模型は測定条件として窓の開放条件、外壁質量、床下空間、換気口の有無等を可変できるように作成し、実験を行った。超低音域でのバネマス系の共振帯域と、室の固有モードの周波数帯域その間の帯域においては質量の影響が支配的であることが示唆された。また、開口部のある家屋においては外壁質量を大きくしても、基本的には開口部の質量で遮音性能が決まっているため、遮音性能の向上の効果は小さいことがわかった。

最後に、数値解析と模型実験、実大実験との比較を行った。無張力膜要素を用いた解析では40Hz以上の帯域で模型実験や実大実験とも内外音圧レベル差が比較的良い対応が見られ、質量が遮音性能に大きく影響することが示唆された。しかし、それ以下の帯域ではディップが大きく、乖離していた。板要素やシェル要素で解析した結果では、超低音域において実大実験の結果に近づいた。実大実験の超低音域の挙動については、床下空間や剛性が遮音性能に大きく影響していることが示唆された。

4.2 今後の課題

ここでは本論文において残された課題点について述べる。

まず、家屋の大きさや部屋数について、本検討では実際の家とは異なる点である。特に室内の固有モードは容積が大きくなると、より低域側でモードが生じ質量則ほど遮音の効果が見込まれない。家屋の大きさによる屋内レベルの影響について考察する必要がある。本論文では低周波領域においてはやはり家屋の剛性の影響が大きことが示された。従って、家屋の構造要素である柱・梁の考慮は、予測精度に比較的大きい影響を及ぼすものと考えられる。また、実際の家屋の壁は積層した板材料で構成されており、低音域で二重壁共鳴透過現象の影響が大きく影響することが考えられる。そのため本論文の課題点として積層構造を考慮した検討を行う必要があると考えられる。さらに、受音系については、超低周波域では波長が非常に長い為、隣戸や対向する住戸との連成が生じる可能性がある。

本論文では、実測に用いたアクリル板などについては一般的な物性値、及び単板の仮定から算出した曲げ剛性を用いて計算を行った。実測値の予測については、ある程度構造要素の曲げ剛性などの物理的諸元を明らかにすることで、数値解析の精度は向上するものと考えられる。特に複雑な構造となった場合に、以下に簡易な入力で振動を模擬するかについては更なる議論が必要である。

以上、本論文で残された課題を示した。これらが解決され、低周波音に対する効果的な遮音対策の開発に役立て、低周波音問題解決の一助となることを期待し、本論文を締めくくる。

付録 A

有限要素法の基礎理論

A.1 はじめに

本論文では音場・振動場の解析に有限要素法を用い、定常状態における解析を行う。波動音響学的手法による音響数値解析においては、音響伝搬は波動方程式に従うことを前提としており、音響問題に一般的に用いられている断熱過程の仮定をして波動方程式を導出している。断熱過程とは、気体の圧縮・膨張に伴い、微小気体から熱の流入・流出がなく、熱伝導よりも気体の圧縮・膨張のほうが速いことを仮定している。つまり、気体の体積変化は圧力変化によるものであり、温度の変化によるものではないことを仮定している。高周波領域の音波は振動が速く、熱伝導より体積変化の方が速いと考えられるため、一般に断熱過程が成立すると考えられる。一方、低周波領域においては、高周波領域の音波と比べて振動が遅く、熱伝導の影響が少なからず考えられる。そのため、高周波領域よりも断熱過程の仮定が成立しにくいと考えられる。本論文では上記の影響を考慮した上で検討・考察を行うものとする。

A.1.1 家屋構造体のモデル化について

本論文において、家屋の構造体(窓, 外壁, 天井, 床)を振動場として扱い、各種物理場の基礎方程式に基づいて有限要素法による数値解析を行う。振動場は以下に示すように、物性的・幾何学的条件に基づき、三次元弾性体, 板, シェル(殻), 膜に分類される。ここでは線形振動について考え、弾性体については構造減衰, 膜材料については通気性に起因する減衰を考慮する。

- 三次元弾性体：寸法の偏差が小さいもの
- 板：広がりに対し厚さが小さく平面形状のもの
- シェル：板状の部材で、湾曲や折れ曲がりのあるもの
- 膜：広がりに対し厚さが小さく、材料自体の剛性が無視できるもの

A.1.2 積分方程式導出のための基礎事項

時間因子と空間微分に関する演算子

本論文では定常状態における音場・振動場の解析を行う。この時、時間因子は一貫して $\exp(j\omega t)$ を採用することとした。

スカラー場 B に対する勾配及びベクトル場 $\mathbf{A}(A_x, A_y, A_z)$ の発散をあらわす演算をそれぞれ以下のよう書く

$$\text{grad}B = \nabla B = \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.1})$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

ただし、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。

発散定理

境界 ∂D で区切られる領域 D におけるベクトル場 \mathbf{A} において、以下の発散定理が成り立つ。

$$\int_D \text{div}\mathbf{A} dV = \oint_{\partial D} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.3})$$

ただし、 \mathbf{n} は境界における外向き法線方向ベクトルである。発散定理の意味するところは、領域内における湧き出しの総和は境界における流出の和に等しい、ということである。

発散定理において $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$ とおくと、Green の第一恒等式は次式のようにかける。

$$\int_D (\text{grad}\phi \cdot \text{grad}\psi + \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial D} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (\text{A.4})$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は境界における法線方向微分を表す。

A.2 音場の数値解析理論

A.2.1 音場の基礎方程式

均質かつ粘性の無い空気中を音波が伝搬する時、以下の連続の式及び運動方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{A.5})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p \quad (\text{A.6})$$

ただし、 p :音圧、 \mathbf{v} :粒子速度ベクトル、 κ :体積弾性率、 ρ :空気密度である。これより、音圧に関して以下の波動方程式が成り立つ。

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

空気中の音速 c は $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ で表される。

ここで、調和振動を仮定すると、流体中の Helmholtz 方程式が以下のように書ける。

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (\text{A.8})$$

A.2.2 音場の境界条件

空気中の定常音場において粒子速度 \mathbf{v} は運動方程式, Eq.(A.6) より以下のようにかける。

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{j\omega\rho} (\operatorname{grad} p) \quad (\text{A.9})$$

この時、単位ベクトル \mathbf{r} 方向への粒子速度は次のように表される。

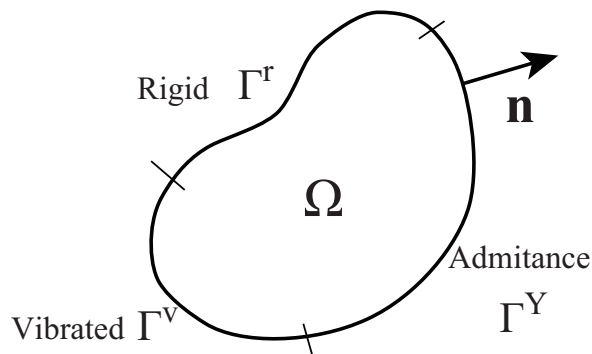


Fig. A.1: Analytical model for acoustic field.

$$\begin{aligned}
v_r &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \\
&= -\frac{1}{j\omega\rho}(\text{grad}p) \cdot \mathbf{r} \\
&= -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

音場の境界では局所作用が成り立つものとし、実際の音場との対応から境界 Γ について剛壁境界 Γ^r , アドミッタンス境界 Γ^Y , 振動境界 Γ^v の 3 種類を考慮する。各々の境界では境界面外向き法線方向の粒子速度 v_n が以下の式を満たすものとする。

$$v_n = \begin{cases} -v^f & (\text{on } \Gamma^v) \\ \beta p & (\text{on } \Gamma^Y) \\ 0 & (\text{on } \Gamma^r) \end{cases}$$

ただし, v^f : 内向き法線方向振動速度, β : 法線方向音響アドミタンスである。これより, 境界面における音圧の法線方向傾度について各々の境界条件は以下のようにかける。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \begin{cases} j\omega\rho v^f & (\text{on } \Gamma^v) \\ -jk\beta_n p & (\text{on } \Gamma^Y) \\ 0 & (\text{on } \Gamma^r) \end{cases} \tag{A.11}$$

β_n は空気のアドミタンスで基準化した法線方向音響アドミタンスである。

A.2.3 有限要素法による音場の解析

Helmholtz 方程式の弱形式化

ここでは重み付き残差法に基づき, 支配方程式を弱形式に変形する。Eq.(A.8) に重み関数 δp を乗じ, 領域内部全体で積分する。

$$\int_{\Omega} \delta p (\nabla^2 p + k^2 p) dV = 0 \tag{A.12}$$

上式第一項は, Green の第一恒等式を適用し下式のように変形できる。

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla^2 p dV = - \int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV + \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS \tag{A.13}$$

Eq.(A.13) を Eq.(A.12) に代入すると以下のように弱形式の積分方程式が得られる。

$$\int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV - \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \tag{A.14}$$

さらに上式第三項に境界条件 Eq.(A.11) を適用すると, 非連成音場について以下の積分方程式が成り立つ。

$$\int_{\Omega} (\text{grad} \delta p \cdot \text{grad} p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV + jk\beta_n \int_{\Gamma^Y} \delta p p dS - j\omega\rho_0 \int_{\Gamma^v} \delta p v^f dS = 0 \tag{A.15}$$

積分方程式の離散化

ここでは Eq.(A.15) にガラーキン法を適用し、数値的に解くことができる形式に変形する過程を示す。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(A.15) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、ある要素内の任意点で音圧 p は要素節点における値 p_i と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$p = \sum_i N_i p_i \quad (\text{A.16})$$

ここで $\{\mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{p}_e\}$ なるベクトルを次式のように定義する。

$$\{\mathbf{N}\} = \{N_1, N_2, N_3, \dots, N_I\} \quad (\text{A.17})$$

$$\{\mathbf{p}_e\} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_I\}^T \quad (\text{A.18})$$

これらを用いると、Eq.(A.16) は次式のようにベクトルの内積として表すことができる。

$$p = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{p}_e\} \quad (\text{A.19})$$

さらに、ガラーキン法では重み関数 δp の内挿を試験関数と同一にとる。

$$\delta p = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\delta \mathbf{p}_e\} \quad (\text{A.20})$$

以上の関係を用い、Eq.(A.15) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

まず、ある要素 e について Eq.(A.15) の第一項は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla \delta p \cdot \nabla p dV &= \int_{\Omega_e} \nabla \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) \cdot \nabla \left(\sum_j N_j p_j \right) dV \\ &= \int_{\Omega_e} \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta p_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} p_j + \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta p_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} p_j + \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta p_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial z} p_j \right) dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^a]^T [\mathbf{B}^a] dV \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{K}_e^a] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

となる。ここで、 $[\mathbf{B}^a]$ 及び $[\mathbf{K}_e^a]$ はそれぞれ歪みマトリックス、剛性マトリックスと呼ばれ、以下のよう定義される。

$$[\mathbf{B}^a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$[\mathbf{K}_e^a] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^a]^T [\mathbf{B}^a] dV \quad (\text{A.23})$$

続いて, Eq.(A.15) 第二項における積分項は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta p p dV &= \int_{\Omega_e} \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) \cdot \left(\sum_j N_j p_j \right) dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dV \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{M}_e^a] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

となる。ここで, $[\mathbf{M}_e^a]$ は慣性マトリックスと呼ばれ, 以下のように定義される。

$$[\mathbf{M}_e^a] = \int_{\Omega_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dV \quad (\text{A.25})$$

次に, Eq.(A.15) 第三項はインピーダンス境界に関する項であり,

$$\begin{aligned} \beta_0 \int_{\Gamma_e} \delta p p dS &= \int_{\Gamma_e} \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) \cdot \left(\sum_j N_j p_j \right) dS \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \beta_0 \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{C}_e^a] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

と表せる。ここで, $[\mathbf{C}_e^a]$ は一般に減衰マトリックスと呼ばれ, 以下のように定義される。

$$[\mathbf{C}_e^a] = \beta_0 \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dS \quad (\text{A.27})$$

最後に第四項は振動境界に対する項であり, 外力条件や弾性体, 板などの変位や速度により記述される振動場との連成条件を表す項である。ここでは一定速度 $v(\Gamma_e)$ で駆動される境界を考える。この時, 第四項における積分項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \delta p v^f dS &= \int_{\Gamma_e} \left(\sum_i N_i \delta p_i \right) dS v(\Gamma_e) \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T v(\Gamma_e) dS \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \{\mathbf{Q}_e^a\} v(\Gamma_e) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

となる。ここで、ベクトル $\{\mathbf{Q}_e^a\}$ は以下のように定義される。

$$\{\mathbf{Q}_e^a\} = \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T dS \quad (\text{A.29})$$

振動場との連成問題における第四項は適合マトリックス $[\mathbf{Q}]$ として表される。各種媒質境界面における適合マトリックスは 2.4 節においてまとめて示すこととする。

本論文では Eq.(A.23),(A.25),(A.27),(A.29) は数値積分により評価する。数値積分の具体的な手順は 2.5 節においてまとめて示す。

A.3 PML(Perfectly Matched Layer) の数値解析理論

A.3.1 PML の基礎方程式

Bermudez らは PML 領域 Ω_A における Helmholtz 方程式を以下のように示している [3]。

$$\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial p_A}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial p_A}{\partial y} \right) + \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial p_A}{\partial z} \right) + k^2 p_A = 0 \quad (\text{A.30})$$

ここで $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ は PML 領域内における減衰関数であり、音響領域から遠ざかるほど減衰が大きくなるように与える。減衰関数 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ は下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma_x(x) &= \begin{cases} 1 & (x < A) \\ 1 + \frac{j}{k(A^* - x)} & (A \leq x < A^*) \end{cases} \\ \gamma_y(y) &= \begin{cases} 1 & (y < B) \\ 1 + \frac{j}{k(B^* - y)} & (B \leq y < B^*) \end{cases} \\ \gamma_z(z) &= \begin{cases} 1 & (z < C) \\ 1 + \frac{j}{k(C^* - z)} & (C \leq z < C^*) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

ここで、 A, B, C 及び A^*, B^*, C^* は PML 内部境界、PML 外部境界の x, y, z の座標を表す。また、Eq.(A.32) において、

$$\begin{aligned} \hat{x}(x) &= \int_0^x \gamma_x(s) dS = x + \frac{j}{k} \int_A^{A^*} \frac{1}{A^* - s} dS & x \in [A, A^*) \\ \hat{y}(y) &= \int_0^y \gamma_y(s) dS = y + \frac{j}{k} \int_B^{B^*} \frac{1}{B^* - s} dS & y \in [B, B^*) \\ \hat{z}(z) &= \int_0^z \gamma_z(s) dS = z + \frac{j}{k} \int_C^{C^*} \frac{1}{C^* - s} dS & z \in [C, C^*) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

となる座標系を導入する。この時、各軸に対する微分オペレータは、

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \gamma_x, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \gamma_y, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = \gamma_z, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\gamma_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.33})$$

と表すことができ、Eq.(A.30) は以下のような一般的な Helmholtz 方程式と等価的な形式に書き換えられる。

$$\hat{\nabla}^2 p_A + k^2 p_A = 0 \quad (\text{A.34})$$

ここで、 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ に関する微分演算子 $\hat{\nabla}, \hat{\nabla}^2$ は下式で与えられる。

$$\hat{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \mathbf{e}_z, \quad \hat{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2}$$

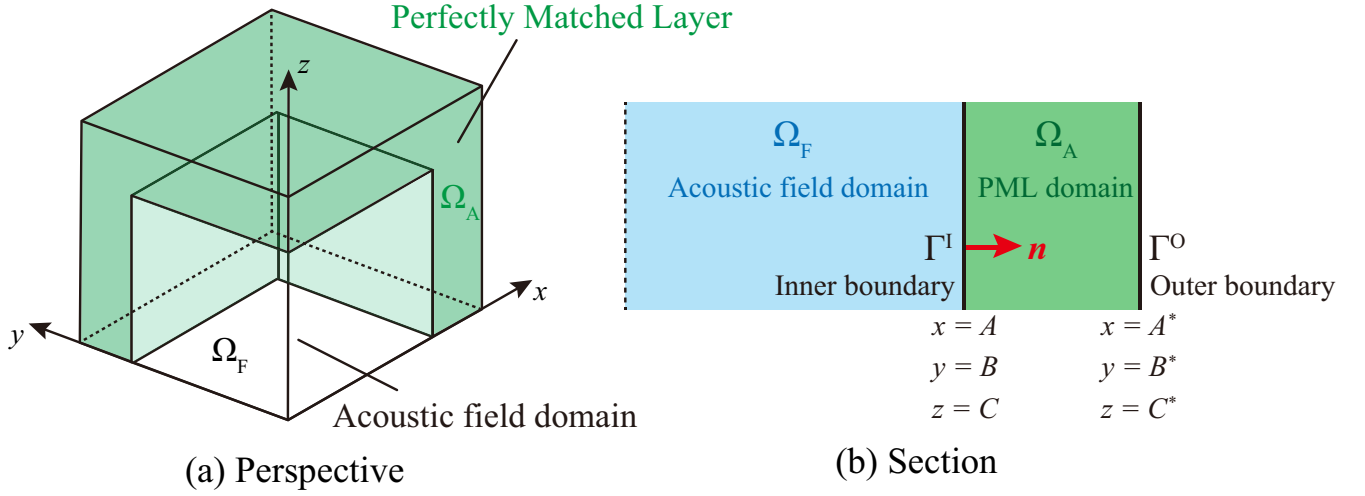


Fig. A.2: Analytical model for perfectly matched layer.

A.3.2 PML と音響領域の連続条件と PML 終端の境界条件

本論文では、Fig.A.2 (a) のように、デカルト座標系の x, y, z 軸に垂直な面で構成される PML を扱うものとし、PML 内部境界 (音響領域との境界) Γ^I において以下の連続条件を満たすものとする。

$$p_F = p_A \quad (\text{on } \Gamma^I) \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{p_F}{\partial n_i} = \frac{\gamma_j \gamma_k}{\gamma_i} \frac{\partial p_A}{\partial n_i} \quad (\text{A.36})$$

上式はそれぞれ、音圧及び粒子速度の連続を意味する。ここで、添え字 (i, j, k) は (x, y, z) を循環的にとるものとし、 n_i は音響領域から外向き方向の単位法線ベクトルの i 方向成分である。また、PML 外部境界 Γ^O においては以下の境界条件を満たすものとする。

$$p_A = 0 \quad (\text{on } \Gamma^O) \quad (\text{A.37})$$

A.3.3 有限要素法による PML の解析

PML 領域内の Helmholtz 方程式の弱形式化

ここでは重み付き残差法に基づき、支配方程式を弱形式化する。Eq.(A.34) に重み関数 δp_A を乗じ、領域内部全体で積分する。

$$\int_{\Omega_A} \delta p_A \left(\hat{\nabla}^2 p_A + k^2 p_A \right) d\hat{V} = 0 \quad (\text{A.38})$$

上式第一項は、Green の第一恒等式を適用し、下式のように変形できる。

$$\int_{\Omega_A} \delta p_A \hat{\nabla}^2 p_A d\hat{V} = - \int_{\Omega_A} (\hat{\nabla} \delta p_A \cdot \hat{\nabla} p_A) d\hat{V} + \int_{\Gamma_A} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} \quad (\text{A.39})$$

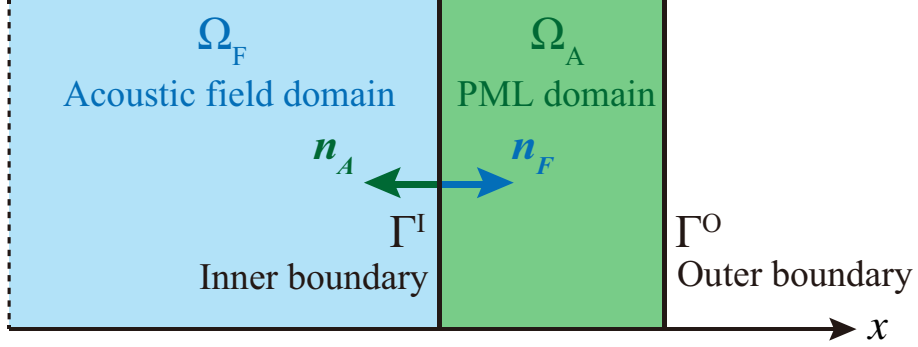


Fig. A.3: Perfectly matched layer in x-dimension with each domain's unit vectors.

Eq.(A.39) を Eq.(A.38) に代入すると、以下のように弱形式の積分方程式が得られる。

$$\int_{\Omega_A} (\hat{\nabla} \delta p_A \cdot \hat{\nabla} p_A) d\hat{V} - k^2 \int_{\Omega_A} \delta p_A p_A d\hat{V} - \int_{\Gamma_A} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} = 0 \quad (\text{A.40})$$

Eq.(A.40) の第三項の境界積分項については、PML 内部境界 Γ^I と PML 外部境界 Γ^O を考慮すると、以式のように表せる。

$$\int_{\Gamma_A} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} = \int_{\Gamma^I} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} + \int_{\Gamma^O} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} \quad (\text{A.41})$$

まず、PML 内部境界 Γ^I について、PML 領域、音響領域のそれぞれの境界積分項 I_1, I_2 の和を考える。ここでは例として、Fig.A.3 のような x 方向の成分のみを考慮することとした。

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{\Gamma^I} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} + \int_{\Gamma^I} \delta p_F \frac{\partial p_F}{\partial n} dS \\ &= \int_{\Gamma^I} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}_{Ax}} d\hat{S} + \int_{\Gamma^I} \delta p_F \frac{\partial p_F}{\partial n_{Fx}} dS \\ &= \int_{\Gamma^I} \delta p_A \frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x} \frac{\partial p_A}{\partial n_{Ax}} dS - \int_{\Gamma^I} \delta p_A \frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x} \frac{\partial p_A}{\partial n_{Ax}} dS \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

I_1 については、 $\frac{\partial}{\partial \hat{n}_i} = \frac{1}{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial n_i}$ 、 $d\hat{S} = \gamma_y \gamma_z dS$ とした。 I_2 については、Eq.(A.35) の音圧の連続条件、(A.36) の境界条件を利用し、各領域の外向き法線方向を考慮すると、 $I_1 + I_2 = 0$ となり、音響領域と PML 領域の境界上で粒子速度の連続は自然に達成される事を意味している。

次に、Eq.(A.41) の PML 外部境界 Γ^O における境界積分項について、Eq.(A.37) より、 $\delta p_A = 0$ となり、

$$\int_{\Gamma^O} \delta p_A \frac{\partial p_A}{\partial \hat{n}} d\hat{S} = 0 \quad (\text{A.43})$$

となる。よって、Eq.(A.40) の境界積分項は 0 となる。ここで、Eq. (A.33) における変数を元に戻し、整理すると下式のように表せる。

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x} \frac{\partial \delta p_A}{\partial x} \frac{\partial p_A}{\partial x} + \frac{\gamma_x \gamma_z}{\gamma_y} \frac{\partial \delta p_A}{\partial y} \frac{\partial p_A}{\partial y} + \frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_z} \frac{\partial \delta p_A}{\partial z} \frac{\partial p_A}{\partial z} \right) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p_A p_A \gamma_x \gamma_y \gamma_z dV = 0 \quad (\text{A.44})$$

積分方程式の離散化

ここでは Eq.(A.44) にガラーキン法を適用し、数値的に解くことができる形式に変形する過程を示す。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(A.44) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、ある要素内の任意点で音圧 p_A は要素節点における値 p_{Ai} と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$p = \sum_i N_i p_{Ai} \quad (\text{A.45})$$

ここで $\{\mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{p}_{Ae}\}$ なるベクトルを次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{N}\} &= \{N_1, N_2, N_3, \dots, N_I\} \\ \{\mathbf{p}_{Ae}\} &= \{p_{A1}, p_{A2}, p_{A3}, \dots, p_{AI}\}^T \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

これらを用いると、Eq.(A.45) は次式のようにベクトルの内積として表すことができる。

$$p_A = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{p}_{Ae}\} \quad (\text{A.47})$$

さらに、ガラーキン法では重み関数 δp_A の内挿を試験関数と同一にとる。

$$\delta p_A = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\delta \mathbf{p}_{Ae}\} \quad (\text{A.48})$$

以上の関係を用い、Eq.(A.44) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

まず、ある要素 e について、Eq.(A.44) の第一項は、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left(\frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x} \frac{\partial \delta p_A}{\partial x} \frac{\partial p_A}{\partial x} + \frac{\gamma_x \gamma_z}{\gamma_y} \frac{\partial \delta p_A}{\partial y} \frac{\partial p_A}{\partial y} + \frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_z} \frac{\partial \delta p_A}{\partial z} \frac{\partial p_A}{\partial z} \right) dV \\ &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x} \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta p_A \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} p_A \right) + \frac{\gamma_x \gamma_z}{\gamma_y} \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta p_A \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} p_A \right) + \frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_z} \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta p_A \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial z} p_A \right) \right) dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_{Ae}\}^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^{\text{pml}}]^T [\mathbf{B}^{\text{pml}}] dV \{\mathbf{p}_{Ae}\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_{Ae}\}^T [\mathbf{K}_e^{\text{pml}}] \{\mathbf{p}_{Ae}\} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

ここで、 $[\mathbf{B}^{\text{pml}}]$ 及び $[\mathbf{K}_e^{\text{pml}}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}^{\text{pml}}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x}} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \sqrt{\frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x}} \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \sqrt{\frac{\gamma_y \gamma_z}{\gamma_x}} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \sqrt{\frac{\gamma_x \gamma_z}{\gamma_y}} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \sqrt{\frac{\gamma_x \gamma_z}{\gamma_y}} \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \sqrt{\frac{\gamma_x \gamma_z}{\gamma_y}} \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \sqrt{\frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_z}} \frac{\partial N_1}{\partial z} & \sqrt{\frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_z}} \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \sqrt{\frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_z}} \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

$$[\mathbf{K}_e^{\text{pml}}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^{\text{pml}}]^T [\mathbf{B}^{\text{pml}}] dV \quad (\text{A.51})$$

続いて, Eq.(A.44) の第二項における積分項は,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta p_A p_A \gamma_x \gamma_y \gamma_z dV &= \int_{\Omega_m} \left(\sum_i N_i \delta p_A \sum_j N_j p_A \right) dV \\ &= \{\delta \mathbf{p}_{Ae}\}^T \gamma_x \gamma_y \gamma_z \int_{\Omega_m} \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{N}\} dV \{\mathbf{p}_{Ae}\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_{Ae}\}^T [\mathbf{M}_e^{\text{pml}}] \{\mathbf{p}_{Ae}\} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

ここで, $[\mathbf{M}_e^{\text{pml}}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{M}_e^{\text{pml}}] = \gamma_x \gamma_y \gamma_z \int_{\Omega_e} \{N\}^T \{N\} dV \quad (\text{A.53})$$

A.4 弾性体振動場の数値解析理論

A.4.1 弾性体振動場の基礎方程式

均質かつ等方的な弾性体中を振動が伝搬する時、弾性体中の微小部分で、各方向について内力と慣性力の釣り合いは以下のように書く事が出来る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} - \rho_E \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} - \rho_E \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho_E \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{A.54}$$

ここで、 u_x, u_y, u_z は各軸方向の変位である。また、 $\sigma_{..}$ は微小部分に働く応力を表し、下付き添字について、一つ目は応力の働く面、二つ目は応力の働く方向を表している。また、 ρ_E は物質の密度である。これらの応力成分を2階のテンソル $\underline{\underline{\sigma}}^E$ として表記し、上の3式をまとめると下式のように書く事が出来る。

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^E - \rho_E \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0\tag{A.55}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^E &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right\}^T\end{aligned}\tag{A.56}$$

また、歪み-応力関係式は次式で表される。

$$\underline{\underline{\sigma}}^E = \lambda_E \text{div} \mathbf{u} \underline{\underline{1}} + 2\mu_E \underline{\underline{\epsilon}}^E\tag{A.57}$$

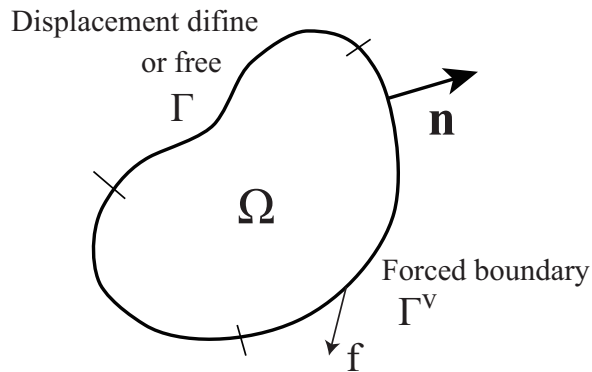


Fig. A.4: Analytical model for elastic body field.

ここで、 λ_E, μ_E はそれぞれ lame の第一、第二係数であり、ヤング率 E 及びポアソン比 ν を用いて以下のように書ける。

$$\lambda_E = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu_E = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.58})$$

$\underline{\underline{1}}$ は単位テンソル、 $\underline{\underline{\varepsilon}}^E$ は歪みテンソルであり各成分は次式で定義される。

$$\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (i, j = x, y, z) \quad (\text{A.59})$$

ここで、調和振動を仮定すると、定常状態における弾性体振動場の基礎方程式は以下のように書ける。

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^E + \rho_E \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.60})$$

A.4.2 有限要素法による弾性体振動場の解析

偏微分方程式の弱形式化

Eq.(A.60) の両辺に仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を掛け、定義領域 Ω 中で積分することで次式が得られる。

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^E + \rho_E \omega^2 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dV = 0 \quad (\text{A.61})$$

上式、第一項は以下のように変形することができる。 $(i, j = x, y, z)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^E dV &= \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}^E}{\partial i} dV \\ &= \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial i} (\delta u_j \cdot \sigma_{ij}^E) - \frac{\partial \delta u_j}{\partial i} \sigma_{ij}^E \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

$$= \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial i} (\delta u_j \cdot \sigma_{ij}^E) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_j}{\partial i} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial j} \right) \sigma_{ij}^E \right\} dV \quad (\text{A.63})$$

$$= \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^E) - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E \right) dV \quad (\text{A.64})$$

$$= \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^E \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E dV \quad (\text{A.65})$$

Eq. (A.62) から Eq. (A.63) の変形では応力テンソルの対称性を利用している。さらに、Eq. (A.64) から Eq. (A.65) の変形では Eq. (A.64) の第一項に発散定理を適用している。また、Eq. (A.65) における $:$ は行列の内積を表す演算子である。

以上の関係から、Eq.(A.61) は弱形式として下式で表される。

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E dV - \rho_E \omega^2 \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^E \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{A.66})$$

積分方程式の離散化

ここでは、Eq.(A.66) にガラーキン法を適用し、数値的に解く事ができる形式に変形する事を考える。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(A.66) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、ある要素内の任意点で変位 $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ を要素節点における値 $\mathbf{u}^i = \{u_x^i, u_y^i, u_z^i\}^T$ と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$\mathbf{u} = \sum_i N_i \mathbf{u}^i \quad (\text{A.67})$$

ここで $[\mathbf{N}]$ なるマトリックス、 $\{\mathbf{u}_e\}$ なるベクトルをそれぞれ次式のように定義する。

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (\text{A.68})$$

$$\{\mathbf{u}_e\} = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, \dots, u_x^I, u_y^I, u_z^I\}^T \quad (\text{A.69})$$

これらを用いると、Eq.(A.67) は次式のようにマトリックス・ベクトル積として表すことができる。

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{u}_e\} \quad (\text{A.70})$$

さらに、ガラーキン法では仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ を試験関数と同一にとる。

$$\delta\mathbf{u} = [\mathbf{N}]\{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (\text{A.71})$$

以上の関係を用い、Eq.(A.66) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

はじめに、ある要素 e について Eq.(A.66) の第一項を考える。ここでは均質、等方性の媒質を考えているため、応力テンソル、歪みテンソルは対称テンソルである。従って、9つの成分のうち独立な成分は6つであり、Eq.(A.66) 第一項におけるマトリックスの内積は次式のように書く事ができる。

$$\begin{aligned} \delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} &= \delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + \delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + \delta\varepsilon_{yz}\sigma_{yz} + \delta\varepsilon_{zx}\sigma_{zx} \\ &\quad + \delta\varepsilon_{yx}\sigma_{yx} + \delta\varepsilon_{zy}\sigma_{zy} + \delta\varepsilon_{xz}\sigma_{xz} \\ &= \delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\varepsilon_{zz}\sigma_{zz} + 2\delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + 2\delta\varepsilon_{yz}\sigma_{yz} + 2\delta\varepsilon_{zx}\sigma_{zx} \\ &= \{\delta\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

ここで、応力テンソル、歪みテンソルに対し、以下のようなベクトル表記を導入した。

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \right\}^T \quad (\text{A.73})$$

$$\{\delta\varepsilon\} = \left\{ \delta\varepsilon_{xx} \quad \delta\varepsilon_{yy} \quad \delta\varepsilon_{zz} \quad 2\delta\varepsilon_{xy} \quad 2\delta\varepsilon_{yz} \quad 2\delta\varepsilon_{zx} \right\}^T \quad (\text{A.74})$$

Eq.(A.74) は Eq.(A.59) より以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{xx} \\ \delta\varepsilon_{yy} \\ \delta\varepsilon_{zz} \\ 2\delta\varepsilon_{xy} \\ 2\delta\varepsilon_{yz} \\ 2\delta\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\delta u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial\delta u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial\delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial\delta u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta u_y}{\partial z} + \frac{\partial\delta u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial\delta u_z}{\partial x} + \frac{\partial\delta u_x}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

さらにある要素 e の内部で変位を Eq.(A.70) により近似することから、

$$\begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{xx} \\ \delta\varepsilon_{yy} \\ \delta\varepsilon_{zz} \\ 2\delta\varepsilon_{xy} \\ 2\delta\varepsilon_{yz} \\ 2\delta\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (\text{A.76})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (\text{A.77})$$

$$= [\mathbf{B}]\{\delta\mathbf{u}_e\} \quad (\text{A.78})$$

と書く事が出来る。ここで、 $[\mathbf{B}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

次に、Eq.(A.57) の関係をベクトル表記で表すと下式のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_E + 2\mu_E & \lambda_E & \lambda_E & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_E & \lambda_E + 2\mu_E & \lambda_E & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_E & \lambda_E & \lambda_E + 2\mu_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.80})$$

同様にある要素 e については以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}_e\} \quad (\text{A.81})$$

ここで、 $[\mathbf{D}]$ は弾性マトリックスであり、以下のように定義した。

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda_E + 2\mu_E & \lambda_E & \lambda_E & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_E & \lambda_E + 2\mu_E & \lambda_E & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_E & \lambda_E & \lambda_E + 2\mu_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_E \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

以上の関係から、Eq.(A.66) の第一項は

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E dV &= \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dV \\
&= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \{\mathbf{u}_e\} \\
&= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{K}_e^E] \{\mathbf{u}_e\}
\end{aligned} \tag{A.83}$$

となる。ここで、 $[\mathbf{K}_e^E]$ は要素剛性マトリックスであり、以下のように定義した。

$$[\mathbf{K}_e^E] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \tag{A.84}$$

続いて、Eq.(A.66) の第二項は、同様に要素内で変位を Eq.(A.70) で近似していることから、

$$\begin{aligned}
\rho_E \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV &= \rho_E \int_{\Omega_e} \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}_e\} dV \\
&= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{M}_e^E] \{\mathbf{u}_e\}
\end{aligned} \tag{A.85}$$

と書く事ができる。ここで要素慣性マトリックス $[\mathbf{M}_e^E]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{M}_e^E] = \rho_E \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \tag{A.86}$$

最後に、Eq.(A.66) の第三項は境界における減衰や加振、異種媒質との連続条件を表す項である。ここではある力 $\mathbf{f}_e = \{f_x, f_y, f_z\}$ により加振される境界を考える。即ち、境界において $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_e$ が規定され、要素にわたって一定値であるとする。この時、Eq.(A.66) の第三項は

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e^v} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^E \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_e^v} \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}_e\} dS \\
&= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^E] \{\mathbf{f}_e\}
\end{aligned} \tag{A.87}$$

と書く事が出来る。ここで、外力ベクトル $[\mathbf{Q}_e^E]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{Q}_e^E] = \int_{\Gamma_e^v} [\mathbf{N}]^T dS \tag{A.88}$$

各種媒質境界面における連続条件及び、その時の Eq.(A.66) 第三項は A.8 節においてまとめて示すこととする。

A.4.3 平面応力問題への適用

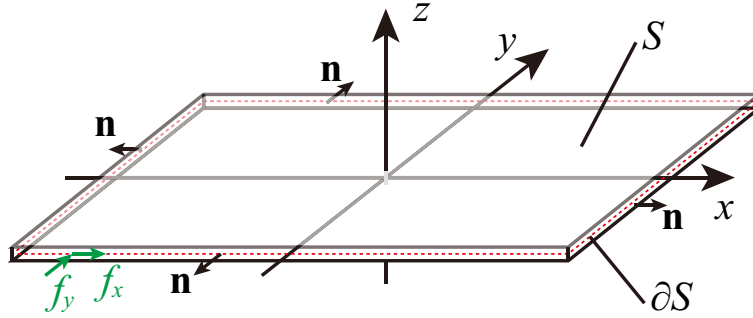


Fig. A.5: Schematic of a plane stress field.

平面応力の仮定

Fig.A.5 に示すような扁平な板状の弾性体では上下面が自由表面であることから、直応力 σ_{zz} 、せん断応力 σ_{zx}, σ_{yz} は共に 0 である。さらに、板が十分薄い場合には、上下面に挟まれた板の内部でも直応力 σ_{zz} 、せん断応力 σ_{zx}, σ_{yz} を 0 と見做すことができる。このような応力状態を平面応力と呼び、本論文ではシェル振動場を扱う際、平面応力による面内変形を考える。

弱形式方程式の変形

平面応力問題における仮定を以下に示す。

1. 弾性体全体に渡り平面応力状態である
2. 面内変位・平面応力は板厚方向に渡って変化しない

仮定 1, 及び Eq.(A.60) 第三式より, $u_z = 0$ である。また仮定 2 より, Eq.(A.66) の板厚方向の積分は板厚 t の乗算に置き換えられ, 以下のように書ける。

$$t \int_S \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E dS - \rho_E t \omega^2 \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dS - t \int_{\partial S} \delta \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^E \cdot \mathbf{n} dL = 0 \quad (\text{A.89})$$

さらに仮定 1 より, Eq.(A.72) において $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0$ とすると, Eq.(A.89) 第一項におけるテンソルの内積は以下のように書ける。

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E = \{\delta \varepsilon_{ps}\}^T \cdot \{\sigma_{ps}\} \quad (\text{A.90})$$

ここで, $\{\delta \varepsilon_{ps}\}$ 及び $\{\sigma_{ps}\}$ を以下のように定義した。

$$\{\delta \varepsilon_{ps}\} = \{\delta \varepsilon_{xx}, \delta \varepsilon_{yy}, 2\delta \varepsilon_{xy}\}^T \quad (\text{A.91})$$

$$\{\sigma_{ps}\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T \quad (\text{A.92})$$

$\{\sigma_{ps}\}$ については, Eq.(A.57) に平面応力の仮定を適用すると, 以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.93})$$

ここで, 弾性マトリックス $[\mathbf{D}_{ps}]$ 及び, 板の面密度を以下のように定義する。

$$[\mathbf{D}_{ps}] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.94})$$

$$\rho_p = \rho E t \quad (\text{A.95})$$

最後に横断面に働く断面力ベクトル $\mathbf{Q}_{ps} = \{Q_x, Q_y\}^T$ を以下のように定義する。

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = t \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.96})$$

最終的に平面応力問題における弱形式方程式は以下のように書ける。

$$\int_S \{\delta\varepsilon_{ps}\} [\mathbf{D}_{ps}] \{\varepsilon_{ps}\} dS - \rho_p \omega^2 \int_S \delta \mathbf{u}_{ps} \cdot \mathbf{u}_{ps} dS - \int_{\partial S} \delta \mathbf{u}_{ps} \cdot \mathbf{Q}_{ps} dL = 0 \quad (\text{A.97})$$

積分方程式の離散化

ここでは, Eq.(A.97) にガラーキン法を適用し, 数値的に解く事ができる形式に変形する事を考える。積分領域を N 個の要素に分割し, 各要素内について Eq.(A.97) を評価し, 領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで, ある要素内の任意点で変位 $\mathbf{u}_{ps} = \{u_x, u_y\}^T$ を要素節点における値 $\mathbf{u}_{ps}^i = \{u_x^i, u_y^i\}^T$ と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$\mathbf{u}_{ps} = \sum_i N_i \mathbf{u}_{ps}^i \quad (\text{A.98})$$

ここで $[\mathbf{N}_{ps}]$ なるマトリックス, $\{\mathbf{u}_{pse}\}$ なるベクトルをそれぞれ次式のように定義する。

$$[\mathbf{N}_{ps}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_I & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (\text{A.99})$$

$$\{\mathbf{u}_{pse}\} = \{u_x^1, u_y^1, \dots, u_x^I, u_y^I\}^T \quad (\text{A.100})$$

これらを用いると, Eq.(A.98) は次式のようにマトリックス・ベクトル積として表すことができる。

$$\mathbf{u}_{ps} = [\mathbf{N}_{ps}] \{\mathbf{u}_{pse}\} \quad (\text{A.101})$$

さらに, ガラーキン法では仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を試験関数と同一にとる。

$$\delta \mathbf{u}_{ps} = [\mathbf{N}_{ps}] \{ \delta \mathbf{u}_{pse} \} \quad (\text{A.102})$$

以上の関係を用い, Eq.(A.97) を各要素内におけるマトリックス形式として表し, 最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

はじめに, ある要素 e について Eq.(A.97) の第一項を考える。Eq.(A.91) は Eq.(A.59) より以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ 2\delta \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.103})$$

さらにある要素 e の内部で変位を Eq.(A.101) により近似することから,

$$\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ 2\delta \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_I & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_I \end{bmatrix} \{ \delta \mathbf{u}_{pse} \} \quad (\text{A.104})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \{ \delta \mathbf{u}_{pse} \} \quad (\text{A.105})$$

$$= [\mathbf{B}_{ps}] \{ \delta \mathbf{u}_{pse} \} \quad (\text{A.106})$$

と書く事が出来る。ここで, $[\mathbf{B}_{ps}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}_{ps}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.107})$$

従って, Eq.(A.92) は以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_{ps}] [\mathbf{B}_{ps}] \{ \mathbf{u}_{pse} \} \quad (\text{A.108})$$

以上の関係から、Eq.(A.97)の第一項は

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \{\delta\varepsilon_{ps}\} [\mathbf{D}_{ps}] \{\varepsilon_{ps}\} dS &= \{\delta\mathbf{u}_{pse}\}^T \int_{S_e} [\mathbf{B}_{ps}]^T [\mathbf{D}_{ps}] [\mathbf{B}_{ps}] dS \{\mathbf{u}_{pse}\} \\ &= \{\delta\mathbf{u}_{pse}\}^T [\mathbf{K}_e^{\mathbf{ps}}] \{\mathbf{u}_{pse}\} \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

となる。ここで、 $[\mathbf{K}_e^{\mathbf{E}}]$ は要素剛性マトリックスであり、以下のように定義した。

$$[\mathbf{K}_e^{\mathbf{ps}}] = \int_{S_e} [\mathbf{B}_{ps}]^T [\mathbf{D}_{ps}] [\mathbf{B}_{ps}] dS \quad (\text{A.110})$$

続いて、Eq.(A.97)の第二項は、同様に要素内で変位をEq.(A.101)で近似していることから、

$$\begin{aligned} \rho_p \int_{S_e} \delta\mathbf{u}_{ps} \cdot \mathbf{u}_{ps} dS &= \rho_p \int_{S_e} \{\delta\mathbf{u}_{pse}\}^T [\mathbf{N}_{ps}]^T [\mathbf{N}_{ps}] \{\mathbf{u}_{pse}\} dS \\ &= \{\delta\mathbf{u}_{pse}\}^T [\mathbf{M}_e^{\mathbf{ps}}] \{\mathbf{u}_{pse}\} \end{aligned} \quad (\text{A.111})$$

と書く事ができる。ここで要素慣性マトリックス $[\mathbf{M}_e^{\mathbf{ps}}]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{M}_e^{\mathbf{ps}}] = \rho_p \int_{S_e} [\mathbf{N}_{ps}]^T [\mathbf{N}_{ps}] dS \quad (\text{A.112})$$

最後に、Eq.(A.97)の第三項は境界における減衰や加振、異種媒質との連続条件を表す項である。ここではある力 $\mathbf{Q}_{pse} = \{Q_x, Q_y\}$ により加振される境界を考える。即ち、境界において $\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_e$ が規定され、要素にわたって一定値であるとする。この時、Eq.(A.97)の第三項は

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_e} \delta\mathbf{u}_{pse} \cdot \mathbf{Q}_{pse} dS &= \int_{\partial S_e} \{\delta\mathbf{u}_{pse}\}^T [\mathbf{N}_{ps}]^T \{\mathbf{Q}_{pse}\} dS \\ &= \{\delta\mathbf{u}_{pse}\}^T [\mathbf{Q}_e^{\mathbf{ps}}] \{\mathbf{Q}_{pse}\} \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

と書く事が出来る。ここで、外力ベクトル $[\mathbf{Q}_e^{\mathbf{ps}}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{Q}_e^{\mathbf{ps}}] = \int_{\partial S_e} [\mathbf{N}_{ps}]^T dS \quad (\text{A.114})$$

A.5 板振動場の数値解析理論

A.5.1 板振動場の基礎方程式

板振動場としてここでは Kirchhoff の薄板理論について定式化を行う。平板が $z = 0$ の xy 平面上にあるものとする。Mindlin の厚板や Kirchhoff の薄板における仮定を 4 つ以下に示す。

1. 面内方向の変形は板断面にわたって線形に変化する。
2. 板中のある点 (x, y, z) の z 方向の変位は z に依存しない。
3. 中立面の変位は z 方向にのみ生じる。
4. z 方向に対する垂直応力は生じない。

さらに Kirchhoff の薄板理論では次のような仮定を行う。

5. 中立面に対する垂線は、変形後も中立面に垂直である。

板を扁平な弾性体振動場として捉えた場合、仮定 1, 2, 3 より、三次元的な変位が次式のように表される。

$$u_\alpha(x, y, z) = \Psi_\alpha(x, y)z \quad (\alpha = x, y) \quad (\text{A.115})$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (\text{A.116})$$

ここで、 Ψ_α は αz 平面における平板の回転角、 w は平板の面外方向変位である (Fig.A.6)。

さらに、仮定 5 より面外方向変位と回転角の間には次式の関係が成立する。

$$\Psi_\alpha(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (\alpha = x, y) \quad (\text{A.117})$$

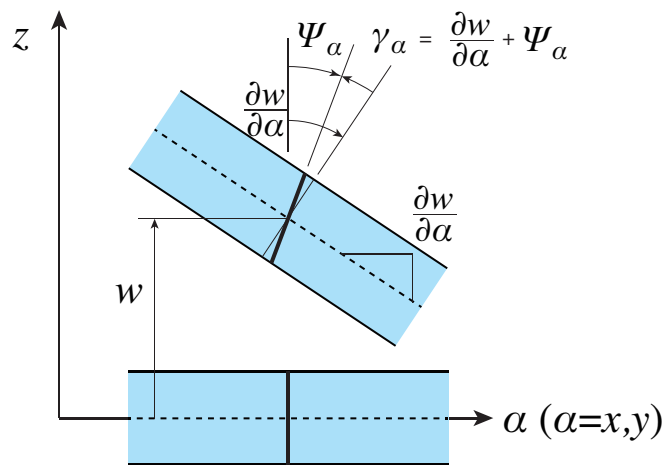


Fig. A.6: Plate kinematics and definition of rotations.

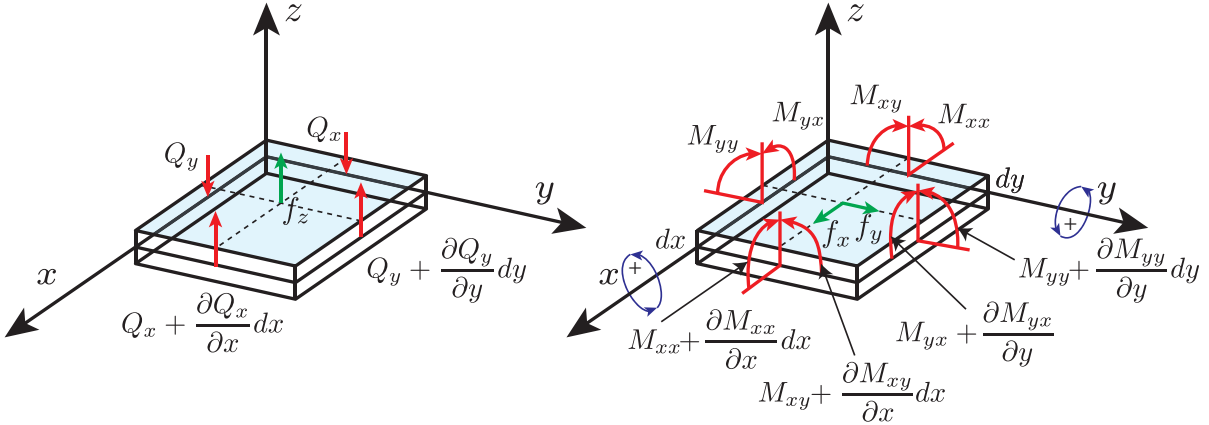


Fig. A.7: Stresses on infinitesimal element.

よって、Fig.A.6 よりせん断ひずみ成分 γ_α は 0 となり、歪みテンソルの各成分 ε_{ij}^p は Eq. (A.59) に Eq. (A.115), Eq. (A.116) を用いて次式のように書くことができる。

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^p = -z \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \varepsilon_{\alpha z}^p = \varepsilon_{z\alpha}^p = 0, \quad \varepsilon_{zz}^p = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\alpha, \beta = x, y) \quad (\text{A.118})$$

ここで、仮定 2 によれば上式の ε_{zz}^p は 0 であるが、x,y 方向の直応力が有限の値を持つ場合、Eq.(A.57) の関係から仮定 4 と矛盾が生じることは明らかである。そこで、仮定 4 をもとに ε_{zz}^p を差し替える。Eq. (A.57) の σ_{zz}^s に 0 を代入し、 ε_{zz}^s について解くことで次式が導出される。

$$\varepsilon_{zz}^p = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p) \quad (\text{A.119})$$

これをさらに Eq. (A.57) に代入することで、 $(i, j = x, y, z)$ としたとき応力テンソルの各成分 σ_{ij}^p は次式で表される。

$$\sigma_{ij}^p = 2\mu \varepsilon_{ij}^p + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p) \delta_{ij} \quad (i, j) \neq (z, z) \quad (\text{A.120})$$

これが Kirchhoff の平板理論における歪み-応力関係式である。

次に、支配方程式の導出をモーメントを用いて行う。Fig.A.7 のような向きのモーメントテンソルの各成分 $M_{\alpha\beta}$ は応力 $\sigma_{\alpha\beta}^p$ を板厚方向に積分し、次式で与えられる $(\alpha, \beta = x, y)$ 。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}^p z dz \quad (\text{A.121})$$

ここで、 z は中立面を原点とした板厚さ方向の座標値であり、 h を平板の板厚とすると板裏面で $z = -h/2$ 、板表面で $z = h/2$ である。なお、Eq.(A.118), Eq.(A.120), Eq.(A.121) より、モーメントテンソルの各成分は変位 w を用いて次式で表される。

$$M_{\alpha\beta} = \mu \frac{h^3}{12} \left\{ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2\lambda}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta_{\alpha,\beta} \right\} \quad (\text{A.122})$$

一方、矩形要素の角運動量の効果が小さく無視できるとき、モーメント、せん断力及び板表面における面内外力に関し x, y 軸回りのモーメントのつり合いから以下の関係が得られる。

$$-Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - z f_x \quad (\text{A.123})$$

$$-Q_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - z f_y \quad (\text{A.124})$$

上の2式において右辺第三項 f_x, f_y は板断面に単位面積あたり働く面内方向外力であり、各軸 + 方向を正方向とする。また、 z 方向の並進運動に関するせん断力、慣性力、面内外力のつり合いから以下の関係が導かれる。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - h\rho_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_z = 0 \quad (\text{A.125})$$

ここで、上式第三項は単位面積当たりの慣性力、 f_z は単位面積当たりに働く面外方向外力、 ρ_p は平板材料の密度である。

以上の関係から、調和振動を仮定し Eq. (A.123), Eq. (A.124), Eq. (A.125) より Q_x, Q_y を消去すると、定常状態における板表面で三次元的な外力 $\mathbf{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$ が加わる場合の板振動場の基礎方程式が以下の様に書ける。

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - h\rho_p \omega^2 w - z\frac{\partial f_x}{\partial x} - z\frac{\partial f_y}{\partial y} - f_z = 0 \quad (\text{A.126})$$

A.5.2 有限要素法による板振動場の解析

偏微分方程式の弱形式化

Eq.(A.126) の両辺に仮想変位 δw を掛け、定義領域 Γ 中で積分することで次式が得られる。 ($\alpha, \beta = x, y$)

$$\int_{\Gamma} \left\{ \delta w \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - z \delta w \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \alpha} \right) - \delta w f_z - \delta w h \rho_p \omega^2 w \right\} dS = 0 \quad (\text{A.127})$$

上式、左辺第一項は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta w \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) dS \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\delta w \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

$$= \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\delta w \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} M_{\alpha\beta} \right) + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha\beta} \right\} dS \quad (\text{A.129})$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha\beta} \right) dL + \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha\beta} \right) dS \quad (\text{A.130})$$

Eq. (A.129) から Eq. (A.130) の変形では Eq. (A.129) の第一項、第二項に発散定理を適用している。続いて、Eq.(A.127) 第二項は以下のように変形する事ができる。

$$\int_{\Gamma} z \delta w \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \alpha} \right) dS = z \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta w f_{\alpha}) - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} f_{\alpha} \right\} dS \quad (\text{A.131})$$

$$= z \int_{\partial \Gamma} \sum_{\alpha} (\delta w f_{\alpha} n_{\alpha}) dL - z \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} f_{\alpha} \right) dS \quad (\text{A.132})$$

$$= -z \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} f_{\alpha} \right) dS \quad (\text{A.133})$$

Eq.(A.131) から Eq.(A.132) の変形では Eq.(A.131) の第一項に発散定理を適用している。Eq.(A.132) 第一項は面外変位と面内外力の仕事と見なせることから、その値は 0 である。以上の関係から、Eq.(A.127) は弱形式として下式で表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha \beta} \right) dS - h \rho_p \omega^2 \int_{\Gamma} \delta w w dS - \int_{\Gamma} \delta w f_z dS \\ & + z \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} f_{\alpha} \right) dS + \int_{\partial \Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha \beta} \right) dL = 0 \quad (\text{A.134}) \end{aligned}$$

積分方程式の離散化

ここでは、Eq.(A.134) にガラーキン法を適用し、数値的に解くことができる形式に変形することを考える。積分領域を N 個の要素に分割し、各要素内について Eq.(A.134) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせることを考える。ここで、要素節点 i における変位ベクトルを次式のように板の面外変位とたわみ角で定義する。なおここでは右手系座標系を用い、各軸の右ねじ方向を回転角の正方向とし定式化を行う。

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x (= \partial w / \partial y) \\ \theta_y (= -\partial w / \partial x) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.135})$$

ある要素内の任意点での変位 w を要素節点における変位ベクトル $\mathbf{w}^i = \{w^i, \theta_x^i, \theta_y^i\}^T$ と内挿関数近似 $N_w^i, N_{\theta_x}^i, N_{\theta_y}^i$ を用いて次式で近似する。

$$w = \sum_i (N_w^i w^i + N_{\theta_x}^i \theta_x^i + N_{\theta_y}^i \theta_y^i) \quad (\text{A.136})$$

ここで $\{\mathbf{N}^p\}$ なるベクトル、 $\{\mathbf{w}_e\}$ なるベクトルをそれぞれ次式のように定義する。

$$\{\mathbf{N}^p\} = \left\{ N_w^1 \quad N_{\theta_x}^1 \quad N_{\theta_y}^1 \quad \dots \quad N_w^I \quad N_{\theta_x}^I \quad N_{\theta_y}^I \right\} \quad (\text{A.137})$$

$$\{\mathbf{w}_e\} = \{w^1, \theta_x^1, \theta_y^1, \dots, w^I, \theta_x^I, \theta_y^I\}^T \quad (\text{A.138})$$

これらを用いると、Eq.(A.136) は次式のようにベクトル積として表すことができる。

$$w = \{\mathbf{N}^p\}\{\mathbf{w}_e\} \quad (\text{A.139})$$

さらに、ガラーキン法では仮想変位 δw を試験関数と同一にとる。

$$\delta w = \{\mathbf{N}^p\}\{\delta\mathbf{w}_e\} \quad (\text{A.140})$$

以上の関係を用い、Eq.(A.134) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

はじめに、ある要素 e について Eq.(A.134) の第一項を考える。ここでは均質、等方性の平板を考えているため、モーメントテンソルの4つの成分のうち独立な成分は3つであり、Eq.(A.134) 第一項の積は次式のように書く事ができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha \beta} &= \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} M_{xx} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial xy} M_{xy} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial yx} M_{yx} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_{yy} \\ &= M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_{xy} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial yx} 2M_{yx} \\ &= \{\delta R\}^T \cdot \{M\} \end{aligned} \quad (\text{A.141})$$

ここで、以下のようなベクトル表記を導入した。

$$\{\delta R\} = \left\{ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial yx} \right\}^T \quad (\text{A.142})$$

$$\{M\} = \left\{ M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy} \right\}^T \quad (\text{A.143})$$

さらにある要素 e の内部で変位を Eq.(A.139) により近似することから、

$$\{\delta R\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \left[N_w^1 \quad N_{\theta_x}^1 \quad N_{\theta_y}^1 \quad \dots \quad N_w^I \quad N_{\theta_x}^I \quad N_{\theta_y}^I \right] \{\delta \mathbf{w}_e\} \quad (\text{A.144})$$

$$= [\mathbf{B}]\{\delta \mathbf{w}_e\} \quad (\text{A.145})$$

と書くことができる。ここで、 $[\mathbf{B}]$ は以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_w^1 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_x}^1 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_y}^1 & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_w^I & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_x}^I & \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{\theta_y}^I \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_w^1 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_x}^1 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_y}^1 & \dots & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_w^I & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_x}^I & \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_{\theta_y}^I \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_w^1 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_x}^1 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_y}^1 & \dots & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_w^I & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_x}^I & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_{\theta_y}^I \end{bmatrix} \quad (\text{A.146})$$

次に, Eq.(A.122) の関係を Eq.(A.59) を用いてベクトル表記で表すと下式のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_p(1+j\eta_p)h_p^3}{12(1-\nu_p^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_p)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.147})$$

同様にある要素 e については以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{w}_e\} \quad (\text{A.148})$$

ここで, $[\mathbf{D}]$ は弾性マトリックスであり, 以下のように定義した。

$$[\mathbf{D}] = \frac{E_p(1+j\eta_p)h_p^3}{12(1-\nu_p^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_p)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.149})$$

以上の関係から, Eq.(A.134) の第一項は

$$\int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha\beta} \right) dS = \{\delta R\}^T \cdot \{\mathbf{M}\} \quad (\text{A.150})$$

$$\begin{aligned} &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dS \{\mathbf{w}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{K}_e^P] \{\mathbf{w}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

となる。ここで, $[\mathbf{K}_e^P]$ は要素剛性マトリックスであり, 以下のように定義した。

$$[\mathbf{K}_e^P] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dS \quad (\text{A.152})$$

続いて, Eq.(A.134) の第二項は, 同様に要素内で変位を Eq.(A.139) で近似していることから,

$$\begin{aligned} h\rho_p \int_{\Gamma_e} \delta w \cdot w dS &= h\rho_p \int_{\Gamma_e} \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \{\mathbf{N}^P\}^T \{\mathbf{N}^P\} \{\mathbf{w}_e\} dS \\ &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{M}_e^P] \{\mathbf{w}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.153})$$

と書く事ができる。ここで要素慣性マトリックス $[\mathbf{M}_e^P]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{M}_e^P] = h\rho_p \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}^P\}^T \{\mathbf{N}^P\} dS \quad (\text{A.154})$$

次に, Eq.(A.134) の第三項は平板に加わる面外方向の外力をあらわす項である。単位面積あたり f_z の力による板表面への加振を考える。この時, Eq.(A.134) の第三項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta w f_z dS &= \int_{\Gamma} \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \{\mathbf{N}^P\}^T \{\mathbf{f}_e\} dS \\ &= \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^P] \{\mathbf{f}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.155})$$

と書くことが出来る。ここで、外力ベクトル $\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{P}}\}$ は以下のように定義した。

$$\{\mathbf{Q}_e^{\mathbf{P}}\} = \int_{\Gamma} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T dS \quad (\text{A.156})$$

Eq.(A.134) の第四項は平板表面に加わる面内方向の外力をあらわす項である。現実的な問題としては板への加振力は上に示した面外方向のみと考えられる場合が多い。

最後に、Eq.(A.134) の第五項は境界における減衰や加振、異種媒質との連続条件を表す項である。 x, y 方向の微分を垂直な方向 n と境界に平行な方向 s に分解すると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha\beta} \right) dL \\ &= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n + \frac{\partial \delta w}{\partial s} M_s - \delta w \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_s}{\partial s} \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (\text{A.157})$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n - \delta w \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (\delta w M_s) \right\} dL \quad (\text{A.158})$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n - \delta w \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial s} \right) \right\} dL + \int_{\partial\partial\Gamma} \{ \delta w n_s M_s \} dP \quad (\text{A.159})$$

ただし、 $M_n = M_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\beta} \mathbf{n}_{\alpha}$ 、 $M_s = M_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\beta} \mathbf{s}_{\alpha}$ である。また、Eq. (A.158) から Eq. (A.159) の変形では Eq. (A.158) の第三項に発散定理を適用している。この式により、境界積分項は境界上での変位 δw と境界線に対する法線方向回転角 $\partial \delta w / \partial n$ 、法線方向曲げモーメント M_n 、及び板縁辺における有効せん断力 $(\partial M_n / \partial n + 2 \partial M_s / \partial s)$ [6] により表される事がわかる。

はじめに Fig.A.8 に示す板振動場における 4 つの基本境界条件を考える。これらの条件は何れも Eq.(A.159) に代入すると縁边上の積分項が 0 となることから、これら 4 つの基本境界条件では境界積分項を考慮する必要がないことを表している。従って有限要素法においては変位、及び法線方向回転角についてのみ拘束条件を与えることでこれらの境界条件を考慮する事ができる。

次に、境界における減衰条件として境界線上の変位と回転角に対し有効せん断力を $Z_Q w$ 、境界に垂直な方向の曲げモーメントを $Z_M (\partial w / \partial n)$ と与える。ここで Z_Q をは並進運動の機械インピーダンス、 Z_M はモーメントインピーダンスである。このとき、(A.134) の第四項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Gamma} \left(\delta w Z_Q w + \frac{\partial \delta w}{\partial n} Z_M \frac{\partial w}{\partial n} \right) dL \\ &= \int_{\partial\Gamma_e} \left(Z_Q \{\delta \mathbf{u}_e\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\} \{\mathbf{u}_e\} + Z_M \{\delta \mathbf{u}_e\}^T \frac{\partial}{\partial n} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \frac{\partial}{\partial n} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\} \{\mathbf{u}_e\} \right) dL \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{Z}_e^{\mathbf{P}}] \{\mathbf{u}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.160})$$

ここで、境界条件に関するマトリックス $[\mathbf{Z}_e^{\mathbf{P}}]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{Z}_e^{\mathbf{P}}] = \int_{\partial\Gamma} \left(Z_Q \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\} + Z_M \frac{\partial}{\partial n} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\}^T \frac{\partial}{\partial n} \{\mathbf{N}^{\mathbf{P}}\} \right) dL \quad (\text{A.161})$$

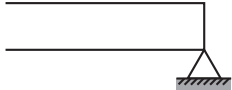
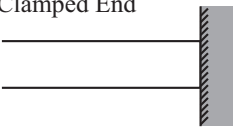

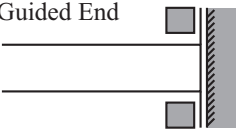
	Normal Moment $M_n = 0$	Normal Slope $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$
Displacement $w = 0$	Simple Support End 	Clamped End 
Shear Force $\frac{\partial M_n}{\partial n} + 2\frac{\partial M_s}{\partial s} = 0$	Free End 	Guided End 

Fig. A.8: Fundamental boundary condition for the bending plate.

A.6 シェル振動場の数値解析理論

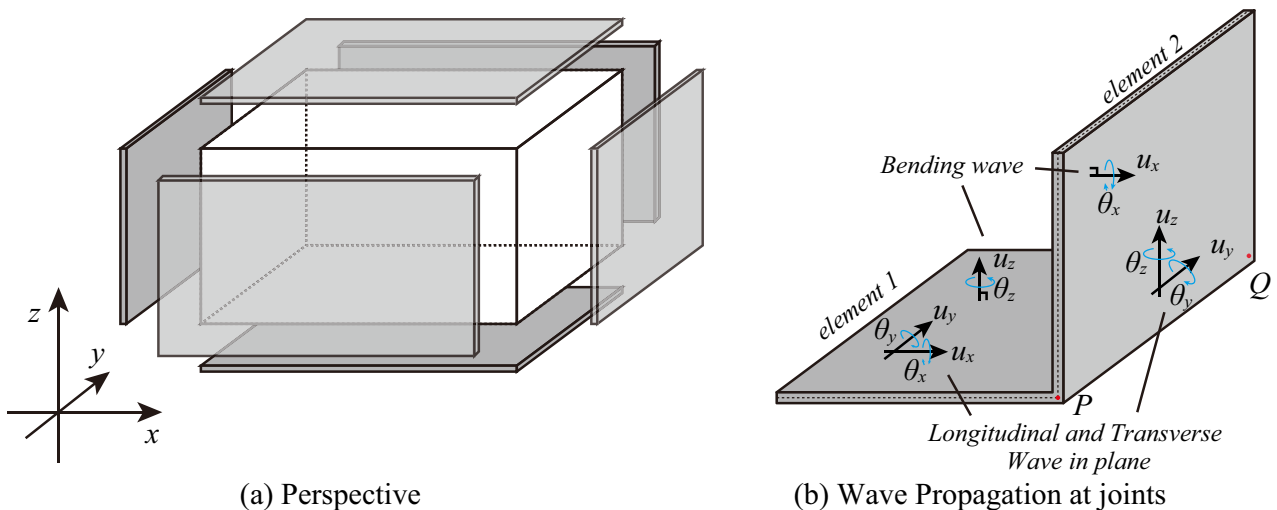


Fig. A.9: Vibration field of a box shape shell.

A.6.1 シェル振動の運動について

一般に構造分野の有限要素法において、シェルは曲面形状の板状構造を指すことが多いが、本論文では Fig.A.9(a) のような箱型のシェルの振動を考える。はじめに、以降で考える振動場を整理するために Fig.A.9(b) に示すような折れ曲がり部分における運動について整理する。

板状部材同士は剛接されているものとし、接合上の点 P(Fig.A.9(b)) においては各軸方向の変位、応力、各軸周りの回転角、モーメントが連続するものとする。はじめに部材 1 から部材 2 へ曲げ波が入射する場合を考える。接合点では z 方向変位が発生するため、部材 2 を z 方向 (部材 2 の面内方向) に振動させる。従って部材 2 では縦波、及び横波が発生する。さらに接合点は回転するため、部材 2 にも曲げ波が生じる。この時、部材 2 に生じた曲げ波により部材 1 の面内方向変位が生じ、結果的に部材 1 にも縦波、横波が生じる。縦波、横波が入射した場合も同様である。従って、シェル状の構造体では曲げ波、縦波、横波を考慮した解析が必要となる。

しかしながら一般に、任意の形状のシェル構造に対する基礎方程式の導出は困難であるため、基礎方程式に重み付き残差法を適用することも難しい。そこで、本論文では Zienkiewicz らの平面要素近似を用い、次のようなアプローチでシェルの振動解析を行う。

1. 平面要素の集合として曲面を近似する
2. 平面要素内部における面内及び面外変形の連成は無視する (境界においては上述のような連成を考慮する)
3. 各平面要素内に局所座標を設定し、面内方向に平面応力、面外方向に曲げ振動場を考え、要素マトリックスを算出する
4. 要素マトリックスを全体座標系に変換し、重ね合わせる

ただし、本論文では平面板のみで構成された箱型のシェルを対象とすることから、形状に関する幾何学的な近似誤差は生じない。はじめに折れ曲がり部分における連続条件について数値解析の定式化を行い、続いて座標変換を用いたシェル振動場の係数行列の作成法を示す。以降では、簡単のため、本論文で用いる三角形要素を前提として定式化をすすめるが、四角形要素の場合もほぼ同様の手順である。

A.6.2 端部における連続条件と境界積分

ここでは、仮定 2 における境界における面内・面外方向振動の連成について、Eq.(A.97), (A.134) の境界積分項の振る舞いに関する議論を行う。尚、Eq.(A.134) の境界積分項については Eq.(A.159) のように法線、接線方向成分について考え、第二項は有効せん断力について書く。

部材 1 について、

$$I_{ps}^1 = \int_{\partial\Gamma} (\delta u_x^1 Q_x^1 + \delta u_y^1 Q_y^1) dL \quad (\text{A.162})$$

$$\begin{aligned} I_{plt}^1 &= \int_{\partial\Gamma} \left[\frac{\partial \delta u_z^1}{\partial x} M_{xx}^1 - \delta u_z^1 \left(\frac{\partial M_{xx}^1}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}^1}{\partial y} \right) \right] dL \\ &= \int_{\partial\Gamma} [\delta \theta_y^1 M_{yy}^1 + \delta u_z^1 Q_z^1] dL \end{aligned} \quad (\text{A.163})$$

部材 2 について、

$$I_{ps}^2 = \int_{\partial\Gamma} (\delta u_y^2 Q_y^2 + \delta u_z^2 Q_z^2) dL \quad (\text{A.164})$$

$$\begin{aligned} I_{plt}^2 &= \int_{\partial\Gamma} \left[\frac{\partial \delta u_x^2}{\partial z} M_{zz}^2 - \delta u_x^2 \left(\frac{\partial M_{zz}^2}{\partial z} + 2 \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} \right) \right] dL \\ &= \int_{\partial\Gamma} [\delta \theta_y^2 M_{yy}^2 + \delta u_x^2 Q_x^2] dL \end{aligned} \quad (\text{A.165})$$

ただし、ここでは i 軸周りの回転角を θ_i 、 j 軸に平行な面に i 軸回りに加わるモーメントを M_{ij} とした。従って、回転角について $\frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_y^1$ 、 $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \theta_y^2$ 、曲げモーメントについて $M_{xx} = M_{yy}^1$ 、 $M_{zz} = M_{yy}^2$ とした。

先にも述べたように、Fig.A.9(b) のような接合線における連続条件以下のように表される。

$$u_i^1 = u_i^2 \quad (\text{A.166})$$

$$Q_i^1 = -Q_i^2 \quad (\text{A.167})$$

$$\theta_i^1 = \theta_i^2 \quad (\text{A.168})$$

$$M_{ij}^1 = -M_{ij}^2 \quad (\text{A.169})$$

以上の関係より、全境界積分項は以下のように 0 となる。

$$\begin{aligned} I_{ps}^1 + I_{plt}^1 + I_{ps}^2 + I_{plt}^2 &= \int_{\partial\Gamma} (\delta u_x^1 Q_x^1 + \delta u_y^1 Q_y^1 + \delta u_z^1 Q_z^1 + \delta \theta_y^1 M_{yy}^1 \\ &\quad + \delta u_x^2 Q_x^2 + \delta u_y^2 Q_y^2 + \delta u_z^2 Q_z^2 + \delta \theta_y^2 M_{yy}^2) dL = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.170})$$

即ち、有限要素法においては接合線上において境界積分を考慮する必要がなく、変位及び回転角の連続条件のみを考慮すれば良いこととなる。

A.6.3 座標変換を用いた係数行列の組み立て

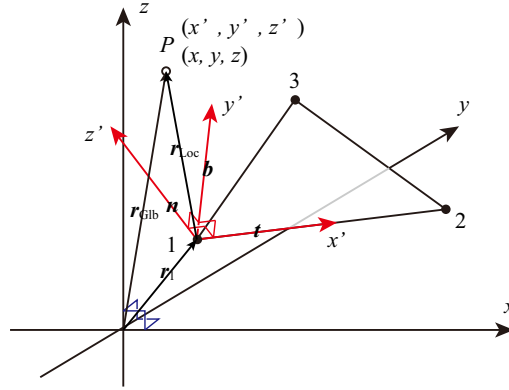


Fig. A.10: Local and global coordinate transformation.

座標変換マトリックスの導出

はじめに、全体座標 (x, y, z) と、局所座標 (x', y', z') の関係性を表す。Fig.A.10 において、 $\mathbf{r}_{\text{Loc}} = \mathbf{r}_{\text{Glb}} - \mathbf{r}_1$ である。さらに、各軸方向の成分は \mathbf{r}_{Loc} と各局所座標軸 $\mathbf{t}(t_x, t_y, t_z)$, $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ との内積で表される。また、局所座標軸の取り方はベクトル演算の図形的意味から以下のように要領でおこなうことができる。

$$\mathbf{t} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (\text{A.171})$$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) / |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)| \quad (\text{A.172})$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t} \quad (\text{A.173})$$

従って、

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \\ b_x & b_y & b_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \\ b_x & b_y & b_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.174})$$

ただし、上式右辺第二項は局所座標系における原点の平行移動を表すが、以降の議論においては不要であるため、座標変換マトリックス $[\boldsymbol{\lambda}]$ を以下のように定義する。

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \\ b_x & b_y & b_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.175})$$

局所座標系での要素マトリックス

面内・面外振動系を結合した節点変位 $\{\mathbf{u}_e^{\text{sh}}\}$ 、節点外力 $\{\mathbf{f}_e^{\text{sh}}\}$ を改めて次のように定義する。

$$\{\mathbf{u}_e^{\text{sh}}\} = \{u'_{x1}, u'_{y1}, u'_{z1}, \theta'_{x1}, \theta'_{y1}, \theta'_{z1}, \dots, u'_{x3}, u'_{y3}, u'_{z3}, \theta'_{x3}, \theta'_{y3}, \theta'_{z3}\}^T \quad (\text{A.176})$$

$$\{\mathbf{f}'^{\text{sh}}\} = \{Q'_{x1}, Q'_{y1}, Q'_{z1}, M'_{x1}, M'_{y1}, M'_{z1}, \dots, Q'_{x3}, uQ'_{y3}, Q'_{z3}, M'_{x3}, M'_{y3}, M'_{z3}\}^T \quad (\text{A.177})$$

さらに、例えば局所座標系において算出した剛性マトリックスについて以下のように $[\mathbf{K}_e^{\text{ps}}]$, $[\mathbf{K}_e^{\text{pl}}]$ の各成分を並べたマトリックスを $[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}]$ とする。

$$[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{\text{ps}} & K_{12}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{\text{ps}} & K_{22}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^{\text{pl}} & K_{12}^{\text{pl}} & K_{13}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^{\text{pl}} & K_{22}^{\text{pl}} & K_{23}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^{\text{pl}} & K_{32}^{\text{pl}} & K_{33}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} K_{15}^{\text{ps}} & K_{16}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{25}^{\text{ps}} & K_{26}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{17}^{\text{pl}} & K_{18}^{\text{pl}} & K_{19}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{27}^{\text{pl}} & K_{28}^{\text{pl}} & K_{29}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{37}^{\text{pl}} & K_{38}^{\text{pl}} & K_{39}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} K_{51}^{\text{ps}} & K_{52}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61}^{\text{ps}} & K_{62}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{71}^{\text{pl}} & K_{72}^{\text{pl}} & K_{73}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{81}^{\text{pl}} & K_{82}^{\text{pl}} & K_{83}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{91}^{\text{pl}} & K_{92}^{\text{pl}} & K_{93}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} K_{55}^{\text{ps}} & K_{56}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{65}^{\text{ps}} & K_{66}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{77}^{\text{pl}} & K_{78}^{\text{pl}} & K_{79}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{87}^{\text{pl}} & K_{88}^{\text{pl}} & K_{89}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{97}^{\text{pl}} & K_{98}^{\text{pl}} & K_{99}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.178})$$

質量マトリックス $[\mathbf{M}_e^{\text{ps}}]$, $[\mathbf{M}_e^{\text{pl}}]$ について同様に成分を並べたマトリックスを $[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}]$ とすると、ある要素 e に対する局所座標系におけるマトリックス方程式は以下のように与えられる。

$$([\mathbf{K}_e^{\text{sh}}] - \omega^2[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}])\{\mathbf{u}'^{\text{sh}}\} = \{\mathbf{f}'^{\text{sh}}\} \quad (\text{A.179})$$

ここで、局所座標系における変位 $\{\mathbf{u}'\} = \{u'_x, u'_y, u'_z\}^T$ 及び回転角 $\{\boldsymbol{\theta}'\} = \{\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z\}^T$ は座標変換マトリックス $[\boldsymbol{\lambda}]$ を用いて以下のように全体座標系の変位 $\{\mathbf{u}\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$, 回転角 $\{\boldsymbol{\theta}\} = \{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$ に関係づけることができる。

$$\{\mathbf{u}'\} = [\boldsymbol{\lambda}]\{\mathbf{u}\}, \quad \{\boldsymbol{\theta}'\} = [\boldsymbol{\lambda}]\{\boldsymbol{\theta}\} \quad (\text{A.180})$$

従って、局所座標系の節点変位 $\{\mathbf{u}_e^{\text{sh}}\}$ は以下のように全体座標系の節点変位 $\{\mathbf{u}_e^{\text{sh}}\}$ と関係づけられる。

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}'_1\} \\ \{\boldsymbol{\theta}'_1\} \\ \{\mathbf{u}'_2\} \\ \{\boldsymbol{\theta}'_2\} \\ \{\mathbf{u}'_3\} \\ \{\boldsymbol{\theta}'_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_1\} \\ \{\boldsymbol{\theta}_1\} \\ \{\mathbf{u}_2\} \\ \{\boldsymbol{\theta}_2\} \\ \{\mathbf{u}_3\} \\ \{\boldsymbol{\theta}_3\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.181})$$

$[\mathbf{0}]$ は 3×3 の 0 行列である。節点変位のための座標変換マトリックス $[\boldsymbol{\Lambda}]$ を、

$$[\boldsymbol{\Lambda}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}] \end{bmatrix} \quad (\text{A.182})$$

と定義すると、Eq.(A.179) は以下のように変形できる。

$$([\mathbf{K}_e^{\text{sh}}] - \omega^2[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}])[\mathbf{\Lambda}]\{\mathbf{u}_e^{\text{sh}}\} = \{\mathbf{f}_e^{\text{sh}}\} \quad (\text{A.183})$$

さらに、上式に左から $[\mathbf{\Lambda}]^T$ を掛けると最終的に、全体座標系におけるシェル要素のマトリックス方程式が得られる。

$$[\mathbf{\Lambda}]^T([\mathbf{K}_e^{\text{sh}}] - \omega^2[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}])[\mathbf{\Lambda}]\{\mathbf{u}_e^{\text{sh}}\} = [\mathbf{\Lambda}]^T\{\mathbf{f}_e^{\text{sh}}\} \quad (\text{A.184})$$

以上より、シェル要素における剛性マトリックス $[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}]$ 、質量マトリックス $[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}]$ が以下のように得られる。

$$[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}] = [\mathbf{\Lambda}]^T[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}][\mathbf{\Lambda}], \quad [\mathbf{M}_e^{\text{sh}}] = [\mathbf{\Lambda}]^T[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}][\mathbf{\Lambda}] \quad (\text{A.185})$$

■ドリル自由度について Eq.(A.178)において、 θ_{zi} に対応する行、列の成分は全て0であることがわかる。 θ_{zi} は平面要素に対して垂直な軸回りの回転であることから、この成分はドリル自由度と呼ばれる。この時、 $0\theta_z = 0$ のような式を持つため、0割が生じ、通常の連立方程式ソルバでは解くことができない。本論文ではこのような問題を避けるため、Zienkiewicz らが提案する疑似回転剛性 k_z を与える方法を振動問題に拡張した手法 [24] を採用する。即ち、 $[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}]$ を以下のように与える。

$$[\mathbf{K}_e^{\text{sh}}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{\text{ps}} & K_{12}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{\text{ps}} & K_{22}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^{\text{pl}} & K_{12}^{\text{pl}} & K_{13}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^{\text{pl}} & K_{22}^{\text{pl}} & K_{23}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^{\text{pl}} & K_{32}^{\text{pl}} & K_{33}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{\text{dr}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} K_{15}^{\text{ps}} & K_{16}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{25}^{\text{ps}} & K_{26}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{17}^{\text{pl}} & K_{18}^{\text{pl}} & K_{19}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{27}^{\text{pl}} & K_{28}^{\text{pl}} & K_{29}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{37}^{\text{pl}} & K_{38}^{\text{pl}} & K_{39}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13}^{\text{dr}} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} K_{51}^{\text{ps}} & K_{52}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61}^{\text{ps}} & K_{62}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{71}^{\text{pl}} & K_{72}^{\text{pl}} & K_{73}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{81}^{\text{pl}} & K_{82}^{\text{pl}} & K_{83}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{91}^{\text{pl}} & K_{92}^{\text{pl}} & K_{93}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{\text{dr}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} K_{55}^{\text{ps}} & K_{56}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{65}^{\text{ps}} & K_{66}^{\text{ps}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{77}^{\text{pl}} & K_{78}^{\text{pl}} & K_{79}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{87}^{\text{pl}} & K_{88}^{\text{pl}} & K_{89}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{97}^{\text{pl}} & K_{98}^{\text{pl}} & K_{99}^{\text{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{33}^{\text{dr}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.186})$$

ここで、疑似回転剛性マトリックスに対応する各成分は、以下のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\text{dr}} & K_{12}^{\text{dr}} & K_{13}^{\text{dr}} \\ K_{21}^{\text{dr}} & K_{22}^{\text{dr}} & K_{23}^{\text{dr}} \\ K_{31}^{\text{dr}} & K_{32}^{\text{dr}} & K_{33}^{\text{dr}} \end{bmatrix} = \alpha Et \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.187})$$

ここで、 Δ は三角形要素の面積、 α は任意の係数である。質量マトリックス $[\mathbf{M}_e^{\text{sh}}]$ についても同様であり、疑似回転質量マトリックスに対応する各成分は以下のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} M_{11}^{\text{dr}} & M_{12}^{\text{dr}} & M_{13}^{\text{dr}} \\ M_{21}^{\text{dr}} & M_{22}^{\text{dr}} & M_{23}^{\text{dr}} \\ M_{31}^{\text{dr}} & M_{32}^{\text{dr}} & M_{33}^{\text{dr}} \end{bmatrix} = \beta \rho_s t \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.188})$$

ここで、 β は任意の係数である。本論文では $\alpha = 0.03$ 、 $\beta = 0.03 \times 10^{-5}$ を採用した。

A.7 膜振動場の数値解析理論

A.7.1 膜振動場の基礎方程式

均質かつ等方的で、しなやかな膜中を振動が伝搬する時、膜の微小部分で張力による復元力と慣性力の膜の面外方向に関する釣り合いから以下の膜振動方程式が得られる。

$$T\nabla_m^2 u_m - \rho_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + (p^+ - p^-) = 0 \quad (\text{A.189})$$

ただし、 T, ρ_m, u_m はそれぞれ膜に働く張力及び膜の面密度、面外変位である。また p^+, p^- は膜の表裏面の音圧、 ∇_m は膜面内のナブラであり、膜が xy 平面内で定義される場合 ∇_m^2 は以下のように表される。

$$\nabla_m = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{A.190})$$

ここで調和振動を仮定すると、定常状態における膜振動場の基礎方程式は以下のように書ける。

$$T\nabla_m^2 u_m + \rho_m \omega^2 u_m + (p^+ - p^-) = 0 \quad (\text{A.191})$$

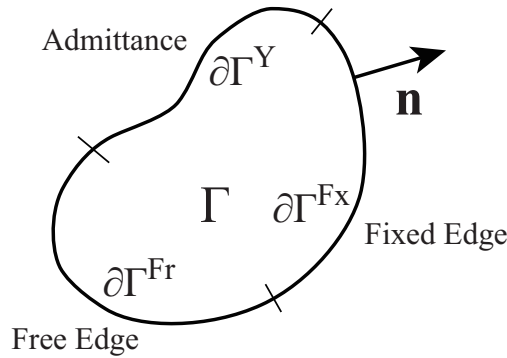


Fig. A.11: Boundary conditions and domain notation for membrane vibration field.

A.7.2 膜通気性の考慮

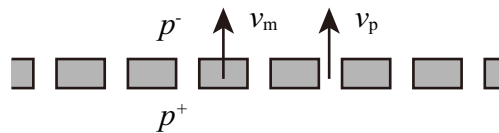


Fig. A.12: Breathability of a membrane.

Fig.A.12 流れ抵抗は以下のように定義される。

$$\sigma = \frac{p^+ - p^-}{v_m - v_p} \quad (\text{A.192})$$

上式を定常状態における膜変位について解くと

$$u_m = u_p + \frac{1}{j\omega\sigma} (p^+ - p^-) \quad (\text{A.193})$$

上式を Eq.(A.191) に代入すると細孔内空気の変位に関する以下の方程式が得られる。

$$T\nabla_m^2 u_p + \rho_m \omega^2 u_p + \frac{T}{j\omega\sigma} (\nabla_m^2 p^+ - \nabla_m^2 p^-) + \left(1 + \frac{\rho_m \omega^2}{j\omega\sigma}\right) (p^+ - p^-) = 0 \quad (\text{A.194})$$

ここで、無張力 $T = 0$ を仮定すると、以下のように変形できる。

$$\left(\frac{\rho_m}{1 - j\omega \frac{\rho_m}{\sigma}} \right) \omega^2 u_p + p^+ - p^- = 0 \quad (\text{A.195})$$

即ち、無張力膜の有限要素解析においては膜面密度 ρ_m を以下に定義する実効面密度 $\tilde{\rho}_m$ に置き換えれば良い。

$$\tilde{\rho}_m = \frac{\rho_m}{1 - j\omega \frac{\rho_m}{\sigma}} \quad (\text{A.196})$$

A.7.3 有限要素法による膜振動場の解析

Eq.(A.191) は二次元空間における Helmholtz 方程式と等価である。従って、有限要素解析に関する定式化についても音場における定式化と共通する部分が多い。従って、以下では重複を避けるため、注意を要する部分を除き式変形の詳細は省略する。

偏微分方程式の弱形式化

Eq.(A.191) の両辺に仮想面外変位 δu^m を掛け、定義領域中で積分した以下の方程式を考える。

$$\int_{\Gamma} [T\delta u^m \nabla_m^2 u_m + \rho_m \omega^2 \delta u^m u^m + \delta u^m (p^+ - p^-)] dS = 0 \quad (\text{A.197})$$

上式第一項に二次元面内での Green の第一恒等式を適用し、整理すると以下の弱形式方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} T \nabla_m \delta u^m \cdot \nabla_m u^m dS - \int_{\Gamma} \rho_m \omega^2 \delta u^m u^m dS \\ - \int_{\Gamma} \delta u^m (p^+ - p^-) dS - T \int_{\partial\Gamma} \delta u^m \frac{\partial u^m}{\partial n} dL = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.198})$$

積分方程式の離散化

ここでは Eq.(A.198) にガラーキソ法を適用し、数値的に解く事が出来る形式に変形する過程を示す。領域を N 個の要素に分割し、各要素について Eq.(A.198) を評価し、領域全体でその影響を重ね合わせる

事を考える。ここで、ある要素内の任意点で面外変位 u_m を要素節点における値 u_m^i と内挿関数 N_i を用いて次式で近似する。

$$\begin{aligned} u^m &= \sum_i N_i u^{mi} \\ &= [\mathbf{N}^m] \{\mathbf{u}^m\} \end{aligned} \quad (\text{A.199})$$

ただし、 $[\mathbf{N}^m] = [N_1, N_2, N_3, \dots, N_I]$ 、 $\{\mathbf{u}^m\} = \{u^{m1}, u^{m2}, u^{m3}, \dots, u^{mI}\}$ と定義する。さらに、ガラキン法では仮想変位面外 δu^m を試行関数と同一にとり以下のように与える。

$$\delta u^m = [\mathbf{N}^m] \{\delta \mathbf{u}^m\} \quad (\text{A.200})$$

以上の関係を用い、Eq.(A.198) を各要素内におけるマトリックス形式として表し、最終的に全体マトリックスを構築する過程を以下に示す。

要素マトリックスの導出

はじめに、ある要素 e について Eq.(A.198) の第一項、第二項は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \nabla_m \delta u^m \cdot \nabla_m u^m dS &= \int_{\Gamma_e} \nabla_m \left(\sum_i N_i \delta u^{mi} \right) \cdot \nabla_m \left(\sum_i N_i u^{mi} \right) dS \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e^m\}^T \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}^m]^T [\mathbf{B}^m] dS \{\mathbf{u}_e^m\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e^m\}^T [\mathbf{K}^m] \{\mathbf{u}_e^m\} \end{aligned} \quad (\text{A.201})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \delta u^m u^m dS &= \int_{\Gamma_e} \left(\sum_i N_i \delta u^{mi} \right) \left(\sum_i N_i u^{mi} \right) dS \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e^m\}^T \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}^m]^T [\mathbf{N}^m] dS \{\mathbf{u}_e^m\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e^m\}^T [\mathbf{M}^m] \{\mathbf{u}_e^m\} \end{aligned} \quad (\text{A.202})$$

ここで、歪みマトリックス $[\mathbf{B}^m]$ 、要素剛性マトリックス $[\mathbf{K}_e^m]$ 、要素慣性マトリックス $[\mathbf{M}_e^m]$ をそれぞれ以下のように定義した。

$$[\mathbf{B}^m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [\mathbf{N}^m], \quad [\mathbf{K}_e^m] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{B}^m]^T [\mathbf{B}^m] dS, \quad [\mathbf{M}_e^m] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}^m]^T [\mathbf{N}^m] dS \quad (\text{A.203})$$

続いて、ある要素について Eq.(A.198) の第三項を考える。音場との連成については次節に譲り、ここではある要素内で一定の圧力差 $f_z^e = (p^+ - p^-)$ が規定される条件を考える。この時、Eq.(A.198) 第三項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \delta u^m f_z dS &= \{\delta \mathbf{u}_e^m\}^T \int_{\Gamma} [\mathbf{N}^m]^T dS \{f_z^e\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e^m\}^T [\mathbf{Q}_e^m] \{f_z^e\} \end{aligned} \quad (\text{A.204})$$

ここで、要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^m]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{Q}_e^m] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}^m]^T dS \quad (\text{A.205})$$

最後に、ある境界要素について Eq.(A.198) の第四項を考える。膜振動場において最も単純な境界条件は固定端、及び自由端でありそれぞれ膜境界上において $u^m = 0$ (on $\partial\Gamma^{Fx}$), 及び $\partial u^m / \partial n = 0$ (on $\partial\Gamma^{Fr}$) により表される。これらの境界条件では Eq.(A.198) の第四項が 0 となることは明らかである。

また、音場と同様に、膜振動場境界において面外変位の法線方向傾度と面外変位に対して下式の局所作用を仮定する事で、インピーダンス境界条件を考慮することができる。

$$\frac{\partial u^m}{\partial n} = -jk^m \beta_n^m u^m \quad (\text{A.206})$$

ここで、 β_n^m は膜振動場の固有アドミッタンス $\beta_c^m = 1/\sqrt{\rho_m T}$ で正規化した法線方向アドミッタンス、 k^m は膜振動場の波数である。この時、Eq.(A.198) 第四項は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Gamma} \delta u^m \frac{\partial u^m}{\partial n} dL &= -jk^m \beta_n^m \int_{\partial\Gamma} \delta u^m u^m dL \\ &= -jk^m \{\delta u_e^m\}^T \left(\beta_n^m \int_{\partial\Gamma} [\mathbf{N}^m]^T [\mathbf{N}^m] dL \right) \{u_e^m\} \\ &= -jk^m \{\delta u_e^m\}^T [\mathbf{C}_e^m] \{u_e^m\} \end{aligned} \quad (\text{A.207})$$

ここで、要素減衰マトリックス $[\mathbf{C}^m]$ を以下のように定義した。

$$[\mathbf{C}_e^m] = \beta_n^m \int_{\partial\Gamma} [\mathbf{N}^m]^T [\mathbf{N}^m] dL \quad (\text{A.208})$$

A.8 音響振動連成系の取扱い

A.8.1 連成問題における弱形式積分方程式

連成問題においては最終的な全体マトリックスを対称にするために係数の調整を行う。以下に本節で用いる弱形式積分方程式を示す。式中下括弧は連成に関する項を示している。本節では異種媒質境界面におけるこれら連成項の振る舞いを具体的に述べる。

■音場

$$\frac{1}{\rho\omega^2} \left(\int_{\Omega} (\nabla\delta p \cdot \nabla p) dV - k^2 \int_{\Omega} \delta p p dV \right) - \underbrace{\frac{1}{\rho\omega^2} \int_{\Gamma} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS}_{=I_a} = 0 \quad (\text{A.14}')$$

■弾性体振動場

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E : \underline{\underline{\sigma}}^E dV - \rho_E \omega^2 \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV - \underbrace{\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^E \cdot \mathbf{n}) dS}_{=I_E} = 0 \quad (\text{A.66}')$$

■板振動場

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \alpha \beta} M_{\alpha\beta} \right) dS - h \rho_p \omega^2 \int_{\Gamma} \delta w w dS - \underbrace{\int_{\Gamma} \delta w f_z dS}_{=I_{PLn}} - \underbrace{\left(-z \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} f_{\alpha} \right) dS \right)}_{=I_{PLt}} \\ & + \int_{\partial\Gamma} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\delta w n_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} n_{\beta} M_{\alpha\beta} \right) dL = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.134}')$$

■膜振動場

$$\begin{aligned} & T \int_{\Gamma} \nabla_m \delta u^m \cdot \nabla_m u^m dS - \rho_m \omega^2 \int_{\Gamma} \delta u^m u^m dS \\ & - \underbrace{\int_{\Gamma} \delta u^m f_z dS}_{=I_m} - T \int_{\partial\Gamma} \delta u^m \frac{\partial u^m}{\partial n} dL = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.198}')$$

尚、シェル振動では、面外変位は曲げ振動によることから、音場-板振動場の項目において述べることにする。

A.8.2 音響系-振動系の結合

音場-弾性体振動場の結合

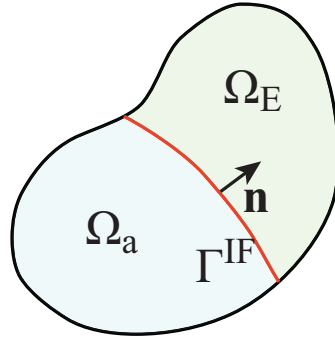


Fig. A.13: The notation on the acoustic elastic coupling problem.

音場と弾性体振動場の境界面では以下のような音圧-応力及び法線方向音圧傾度-振動変位の連続条件が満たされなければならない。

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^E \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} & \text{(A.209)} \\ \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{(A.210)} \end{cases}$$

ここで、Eq.(A.14'),(A.66') 共に、境界積分項は発散定理を適用した事により生じた項であるため、法線方向は領域に対し外向きに定義している。ここでは法線方向を音場に対して外向きに統一し、境界積分項を評価することを考える。はじめに、Eq.(A.14') 第三項に Eq.(A.210) を代入すると、 I_a はある要素について以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{\rho\omega^2} \int_{\Gamma_e} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS \\ &= \int_{\Gamma_e} \delta p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \cdot \mathbf{n} \cdot [\mathbf{N}] dS \{\mathbf{u}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\text{aE}}] \{\mathbf{u}_e\} \end{aligned} \quad \text{(A.211)}$$

ここで要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\text{aE}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{aE}}] = \int_{\Gamma_e} \{\mathbf{N}\}^T \cdot \mathbf{n} \cdot [\mathbf{N}] dS \quad \text{(A.212)}$$

次に, Eq.(A.209) を Eq.(A.66') 第三項に代入すると, I_E はある要素について以下のように表される。

$$\begin{aligned} I_E &= - \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot p \mathbf{n}^E dS \\ &= \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot p \mathbf{n}^a dS \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{n}^{aT} \cdot \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_e\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\mathbf{Ea}}] \{\mathbf{p}_e\} \end{aligned} \quad (\text{A.213})$$

$$(\text{A.214})$$

ここで, $\mathbf{n}^E, \mathbf{n}^a$ はそれぞれ弾性体振動場, 音場に対する外向き法線ベクトルであり, 要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\mathbf{Ea}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\mathbf{Ea}}] = \int_{\Gamma_e} [\mathbf{N}]^T \cdot \mathbf{n}^{aT} \cdot \{\mathbf{N}\} dS \quad (\text{A.215})$$

音場及び弾性体振動場のマトリックス方程式にそれぞれ上述の境界積分項を加え連立させる事で, 以下のように, 連成系のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \omega^2} ([\mathbf{K}^a] - k^2 [\mathbf{M}^a] + jk [\mathbf{C}^a]) & -[\mathbf{Q}^{\mathbf{aE}}] \\ -[\mathbf{Q}^{\mathbf{Ea}}] & [\mathbf{K}^E] - \omega^2 [\mathbf{M}^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{u}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^a] \{\mathbf{v}^f\} \\ [\mathbf{Q}^E] \{\mathbf{f}^s\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.216})$$

要素適合マトリックス Eq.(A.212) と Eq.(A.215) を比較すると, $[\mathbf{Q}_e^{\mathbf{Ea}}] = [\mathbf{Q}_e^{\mathbf{aE}}]^T$ であることがわかる。従って, 全体適合マトリックスについても $[\mathbf{Q}^{\mathbf{Ea}}] = [\mathbf{Q}^{\mathbf{aE}}]^T$ であり, Eq.(A.216) の係数行列も対称行列となっている。

音場-板振動場の結合

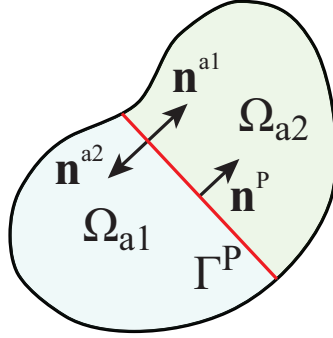


Fig. A.14: The notation on the acoustic plate coupling problem.

音場と板振動場の境界面では以下のような音圧-外力及び法線方向音圧傾度-振動変位の連続条件が満たされなければならない。

$$\begin{cases} f_\alpha = 0, & (\alpha = x, y) & \text{(A.217)} \\ f_z = \pm p & & \text{(A.218)} \\ \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} = \pm w & & \text{(A.219)} \end{cases}$$

この時、板面は法線方向側を表面と定義し、上式においては裏面の音場-板振動場連成では正符号、表面の音場-板振動場連成では負符号を採用する。ここでは音場に対する法線方向は領域外向きに統一し、音場の境界積分項と振動場の外力項を評価することを考える。はじめに、Eq.(A.14') 第三項に Eq.(A.219) を代入すると、 I_a はある要素について以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{\rho\omega^2} \int_{\Gamma_e^P} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS \\ &= \pm \int_{\Gamma_e^P} \delta p w dS \\ &= \pm \{\delta \mathbf{p}_e\}^T \int_{\Gamma_e^P} \{\mathbf{N}\}^T [\mathbf{N}^P] dS \{\mathbf{w}_e\} \\ &= \pm \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}] \{\mathbf{w}_e\} \end{aligned} \quad \text{(A.220)}$$

である。ここで要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{ap}}] = \int_{\Gamma_e^P} \{\mathbf{N}\}^T [\mathbf{N}^P] dS \quad \text{(A.221)}$$

Eq.(A.217) より、 $I_{\text{PL}_t} = 0$ である。また、Eq.(A.218) を Eq.(A.134') 第三項に代入すると、 I_{PL_n} はあ

る要素について以下のように表される。

$$\begin{aligned}
I_{PL_n} &= \int_{\Gamma_e^p} \delta w f_z dS \\
&= \pm \int_{\Gamma_e^p} \delta w p dS \\
&= \pm \{\delta \mathbf{w}_e\}^T \int_{\Gamma_e^p} \{\mathbf{N}^p\}^T \{\mathbf{N}\} dS \{\mathbf{p}_e\} \\
&= \pm \{\delta \mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{pa}] \{\mathbf{p}_e\}
\end{aligned} \tag{A.222}$$

要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}_e^{pa}]$ は下式で定義される。

$$[\mathbf{Q}_e^{pa}] = \int_{\Gamma_e^p} [\mathbf{N}^p]^T \{\mathbf{N}\} dS \tag{A.223}$$

音場及び板振動場のマトリックス方程式にそれぞれ上述の境界積分項を加え連立させる事で、以下のようになり、連成系のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho\omega^2} ([\mathbf{K}^a] - k^2[\mathbf{M}^a] + jk[\mathbf{C}^a]) & -[\mathbf{Q}^{ap}] \\ -[\mathbf{Q}^{pa}] & [\mathbf{K}^p] - \omega^2[\mathbf{M}^p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^a] \{\mathbf{v}^f\} \\ [\mathbf{Q}^p] \{\mathbf{f}^p\} \end{Bmatrix} \tag{A.224}$$

要素適合マトリックス Eq.(A.221) と Eq.(A.223) を比較すると、 $[\mathbf{Q}_e^{pa}] = [\mathbf{Q}_e^{ap}]^T$ であることがわかる。従って、全体適合マトリックスについても $[\mathbf{Q}^{pa}] = [\mathbf{Q}^{ap}]^T$ であり、Eq.(A.224) の係数行列も対称行列となっている。

さらに、音場 1-板振動場-音場 2 の適合を行う場合には、以下のように、連成系のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^{a1}] & -[\mathbf{Q}^{a1p}] & [\mathbf{0}] \\ -[\mathbf{Q}^{pa1}] & [\mathbf{A}^p] & [\mathbf{Q}^{pa2}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}^{a2p}] & [\mathbf{A}^{a2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}^1\} \\ \{\mathbf{w}\} \\ \{\mathbf{p}^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^{a1}] \{\mathbf{v}^{f1}\} \\ [\mathbf{Q}^p] \{\mathbf{f}^p\} \\ -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^{a2}] \{\mathbf{v}^{f2}\} \end{Bmatrix} \tag{A.225}$$

ただし、 $[\mathbf{A}^a] = \frac{1}{\rho\omega^2} ([\mathbf{K}^a] - \omega^2[\mathbf{M}^a] + jk[\mathbf{C}^a])$ 、 $[\mathbf{A}^p] = [\mathbf{K}^p] - \omega^2[\mathbf{M}^p]$ である。

■音場-シェル振動との結合 要素適合マトリックス $[\mathbf{Q}^{ap}]$ の成分を以下のように並べた適合マトリックス $[\mathbf{Q}'^{ash}]$ を定義する。

$$[\mathbf{Q}'^{ash}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{11}^{ap} & Q_{12}^{ap} & Q_{13}^{ap} & 0 & \dots & 0 & 0 & Q_{17}^{ap} & Q_{18}^{ap} & Q_{19}^{ap} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{21}^{ap} & Q_{22}^{ap} & Q_{23}^{ap} & 0 & \dots & 0 & 0 & Q_{27}^{ap} & Q_{28}^{ap} & Q_{29}^{ap} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{31}^{ap} & Q_{32}^{ap} & Q_{33}^{ap} & 0 & \dots & 0 & 0 & Q_{37}^{ap} & Q_{38}^{ap} & Q_{39}^{ap} & 0 \end{bmatrix} \tag{A.226}$$

この時、Eq.(A.220) はシェル要素における節点変位ベクトルを用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
I_a &= \pm \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}'_e^{ash}] \{\mathbf{u}_e^{sh}\} \\
&= \pm \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}'_e^{ash}] [\mathbf{\Lambda}] \{\mathbf{u}_e^{sh}\} \\
&= \pm \{\delta \mathbf{p}_e\}^T [\mathbf{Q}_e^{ash}] \{\mathbf{u}_e^{sh}\}
\end{aligned} \tag{A.227}$$

ここで、全体座標系での要素適合マトリックスを以下のように定義した。

$$[\mathbf{Q}_e^{\text{ash}}] = [\mathbf{Q}_e^{\prime\text{ash}}][\mathbf{\Lambda}] \quad (\text{A.228})$$

板要素の境界積分についても同様の方法で適合マトリックスが計算可能である。

音場-膜振動場の結合

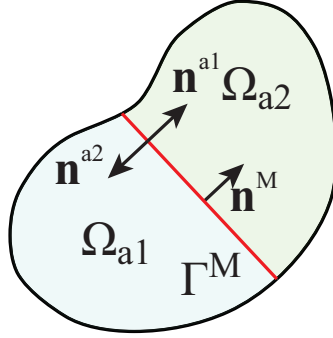


Fig. A.15: The notation on the acoustic membrane coupling problem.

音場と膜振動場の境界面では以下のような音圧-外力及び法線方向音圧傾度-振動変位の連続条件が満たされなければいけない。

$$\begin{cases} f_z = \pm p & (\text{A.229}) \\ \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} = \pm u^m & (\text{A.230}) \end{cases}$$

音場-膜振動場の連成は音場-板振動場の連成と全く同様に展開できる。ここでは重複を避けるため、結果のみを示す。Fig.A.15 に示すような音場 1-膜振動場-音場 2 の連成系のマトリックス方程式は以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^{a1}] & -[\mathbf{Q}^{a1m}] & [0] \\ -[\mathbf{Q}^{ma1}] & [\mathbf{A}^m] & [\mathbf{Q}^{ma2}] \\ [0] & [\mathbf{Q}^{a2m}] & [\mathbf{A}^{a2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}^1\} \\ \{\mathbf{u}^m\} \\ \{\mathbf{p}^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^{a1}] \{\mathbf{v}^{f1}\} \\ [\mathbf{Q}^m] \{\mathbf{f}^m\} \\ -\frac{1}{j\omega} [\mathbf{Q}^{a2}] \{\mathbf{v}^{f2}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.231})$$

ただし、 $[\mathbf{A}^a] = \frac{1}{\rho\omega^2}([\mathbf{K}^a] - \omega^2[\mathbf{M}^a] + jk[\mathbf{C}^a])$, $[\mathbf{A}^m] = [\mathbf{K}^m] - \omega^2[\mathbf{M}^m]$, または $[\mathbf{A}^m] = -\omega^2[\mathbf{M}^m]$ である。また、 $[\mathbf{Q}^{am}]$, $[\mathbf{Q}^{ma}]$ は以下のように与えられる。

$$[\mathbf{Q}_e^{am}] = \int_{\Gamma_e^M} \{\mathbf{N}\}^T [\mathbf{N}^m] dS \quad (\text{A.232})$$

$$[\mathbf{Q}_e^{ma}] = \int_{\Gamma_e^M} [\mathbf{N}^m]^T \{\mathbf{N}\} dS \quad (\text{A.233})$$

A.9 要素積分の評価

ここでは、これまでに扱ってきた内挿関数 N_i について述べ、それを用いた数値積分法を示す。ここでは、本研究で使用している三角形二次要素と四面体二次要素について、具体的に説明する。ここでは Fig.A.16 の番号付けに基づくものとする。

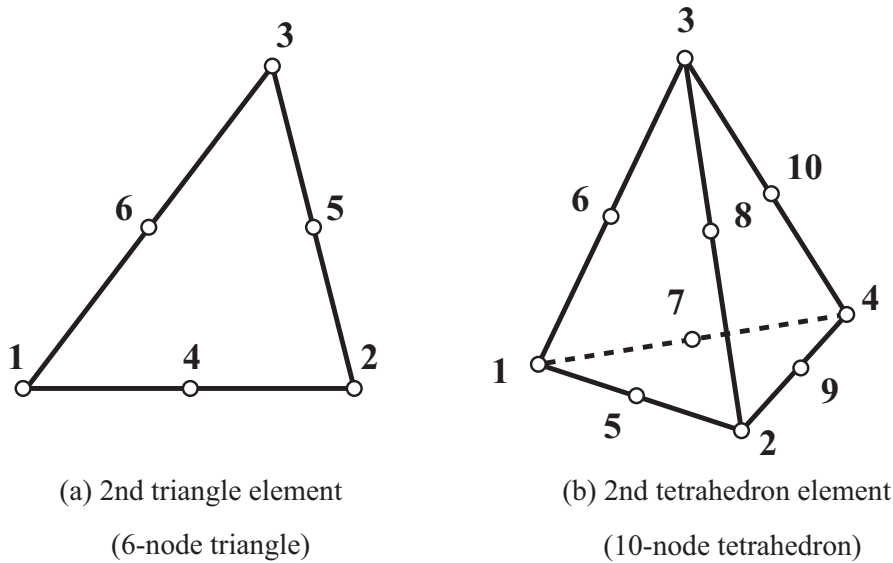


Fig. A.16: The shape of element with nodes.

A.9.1 内挿関数とその微分形

■ 三角形二次要素

面積座標

デカルト座標系 (Fig.A.17(b)) で三角形の頂点の座標が (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) となる三角形において、 L_1, L_2, L_3 で示される面積座標系 ((Fig.A.17(c)) と以下の線形関係を持っている。

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \tag{A.234}$$

L_1, L_2, L_3 は点 $P(L_1, L_2, L_3)$ と三角形の一辺からなる三角形と要素三角形全体の面積の比を表している。また、面積座標系と局所座標系は以下のような関係である。

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - \xi - \eta \\ L_2 &= \xi \\ L_3 &= \eta \end{aligned} \tag{A.235}$$

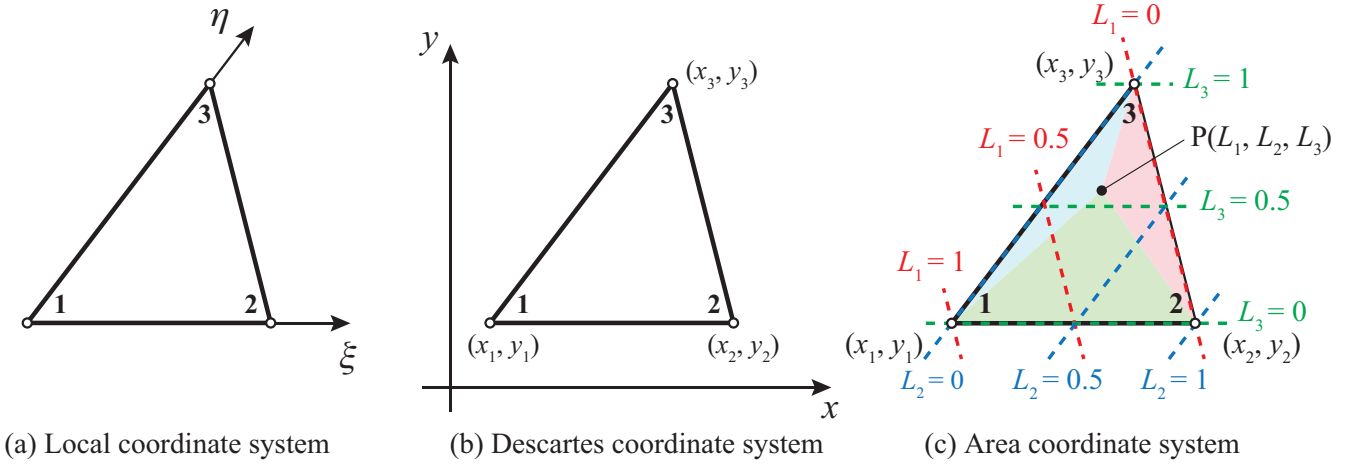


Fig. A.17: The coordinate systems of triangle element.

内挿関数

要素内の座標 (x, y) は三角形二次要素において、 i 番目の節点における内挿関数 N_i は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\
 N_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\
 N_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\
 N_4 &= 4L_1L_2 \\
 N_5 &= 4L_2L_3 \\
 N_6 &= 4L_3L_1
 \end{aligned}
 \tag{A.236}$$

内挿関数の微分形

以上の内挿関数は局所座標を用いて表されている。前節までに示した要素剛性マトリックスの計算には、内挿関数の全体座標系での空間偏微分値 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を算出する必要がある。しかし、この値は陽な形で表示することは大変な労力であり、有限要素法のプログラムを構築する際に必ずしも効率的であるとは限らない。ここでは内挿関数の全体座標系での空間偏微分値と局所座標系での空間偏微分値を対応づける方法を説明する。

合成関数の偏微分に関するチェインルールより以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}
 \end{aligned}
 \tag{A.237}$$

上式をマトリックス形式で表すと、以下のように書く事ができる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= [\mathbf{J}] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.238}$$

従って、内挿関数の全体座標系での空間偏微分は以下のように表す事ができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{A.239}$$

ここで、 $[\mathbf{J}]$ は座標変換に関するヤコビ行列であり以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.240}$$

以上の関係から、内挿関数の局所座標系での偏微分値及び節点の座標より、内挿関数の全体座標系での偏微分値を算出する事が可能である。

内挿関数の局所座標系での偏微分値について、Eq.(A.237) は下式のように書き換え、 i 番目の節点における内挿関数 N_i のそれぞれについて算出する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} = \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= 1 - 4L_1 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= 1 - 4L_1 \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= 4L_2 - 1 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= 0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= 4L_3 - 1 \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= 4(L_1 - L_2) & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= -4L_2 \\
\frac{\partial N_5}{\partial \xi} &= 4L_3 & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} &= 4L_2 \\
\frac{\partial N_6}{\partial \xi} &= -4L_3 & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} &= 4(L_1 - L_3)
\end{aligned}
\tag{A.241}$$

■ 四面体二次要素

体積座標

デカルト座標系 (Fig.A.18(b)) で四面体の頂点の座標が (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) となる四面体において, L_1, L_2, L_3, L_4 で示される体積座標系 (Fig.A.18(c)) と以下の線形関係を持っている。

$$\begin{aligned}
x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4 \\
y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 + L_4y_4 \\
z &= L_1z_1 + L_2z_2 + L_3z_3 + L_4z_4 \\
1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4
\end{aligned}
\tag{A.242}$$

L_1, L_2, L_3, L_4 は点 $P(L_1, L_2, L_3, L_4)$ と三角形からなる四面体と要素四面体全体の体積の比を表している。また, 体積座標系と局所座標系は以下のような関係である。

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\
L_2 &= \xi \\
L_3 &= \eta \\
L_4 &= \zeta
\end{aligned}
\tag{A.243}$$

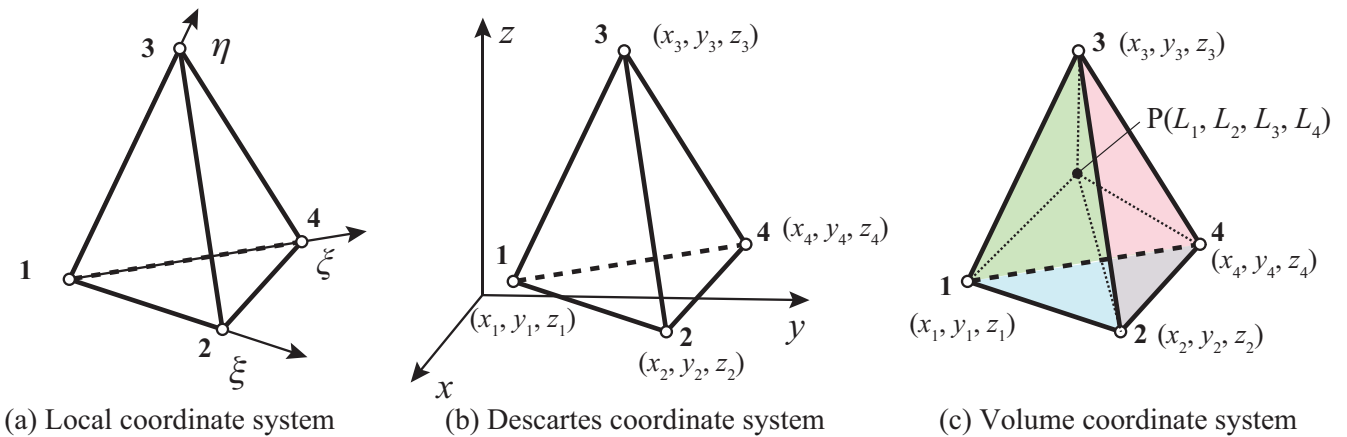


Fig. A.18: The coordinate systems of tetrahedron element.

内挿関数

要素内の座標 (x, y) は四面体二次要素において、 i 番目の節点における内挿関数 N_i は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\
 N_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\
 N_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\
 N_4 &= 4L_1L_2 \\
 N_5 &= 4L_1L_3 \\
 N_6 &= 4L_1L_4 \\
 N_7 &= 4L_4L_1 \\
 N_8 &= 4L_2L_3 \\
 N_9 &= 4L_2L_4 \\
 N_{10} &= 4L_3L_4
 \end{aligned} \tag{A.244}$$

内挿関数の微分形

ここでは内挿関数の全体座標系での空間偏微分値と局所座標系での空間偏微分値を対応づける方法を説明する。

合成関数の偏微分に関するチェインルールより以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}
 \end{aligned} \tag{A.245}$$

上式をマトリックス形式で表すと、以下のように書く事ができる。

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \\
 &= [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.246}$$

従って、内挿関数の全体座標系での空間偏微分は以下のように表す事ができる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.247})$$

ここで、 $[\mathbf{J}]$ は座標変換に関するヤコビ行列であり以下のように定義される。

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{10} & y_{10} & z_{10} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.248})$$

以上の関係から、内挿関数の局所座標系での偏微分値及び節点の座標より、内挿関数の全体座標系での偏微分値を算出する事が可能である。内挿関数の局所座標系での偏微分値について、Eq.(A.245) は下式のよ
うに書き換え、 i 番目の節点における内挿関数 N_i のそれぞれについて算出する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} + \frac{\partial L_4}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial L_4} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} + \frac{\partial L_4}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial L_4} = \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial L_1}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} + \frac{\partial L_4}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial L_4} = \frac{\partial N_i}{\partial L_4} - \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 1 - 4L_1 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = 1 - 4L_1 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = 1 - 4L_1 \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 4L_2 - 1 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = 0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 4L_3 - 1 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = 0 \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = 4L_4 - 1 \\
\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = 4(L_1 - L_2) & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -4L_2 & \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = -4L_2 \\
\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -4L_3 & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} = 4(L_1 - L_3) & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = -4L_3 \\
\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -4L_4 & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} = -4L_4 & \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = 4(L_1 - L_4) \\
\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = 4L_3 & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} = 4L_2 & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = 0 \\
\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = 4L_4 & \frac{\partial N_9}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_9}{\partial \zeta} = 4L_2 \\
\frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} = 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} = 4L_4 & \frac{\partial N_{10}}{\partial \zeta} = 4L_3
\end{array} \tag{A.249}$$

A.9.2 Gauss-Legendre 積分による面積分・体積分の評価

Gauss-Legendre 積分は数値積分法の一つであり、積分値を総和の形式で得る手法である。Gauss-Legendre 積分では $\xi \in [-1, 1]$ に正規化された区間における積分に対し、積分区間内における評価点 ξ_i 及びその点における重み w_i が与えられ、任意の関数 $f(x)$ の積分を以下のような総和で表すことができる。

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_i f(\xi_i) w_i \tag{A.250}$$

また、任意の積分区間については座標変換を行い、積分区間を $x \in [-1, 1]$ に正規化することで表す事ができる。

$$\begin{aligned}
\int_b^a f(x) dx &= \frac{a-b}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi)) d\xi \\
&= \frac{a-b}{2} \sum_i f(x(\xi_i)) w_i
\end{aligned} \tag{A.251}$$

さらに、多次元化することも可能であり、任意の三角形領域に対する面積分、及び任意の四面体領域に対する体積分について以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
&= \sum_i \sum_j f(x(\xi_i, \eta_j), y(\xi_i, \eta_j)) |\mathbf{J}| w_i w_j
\end{aligned} \tag{A.252}$$

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k f(x(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k), z(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)) |\mathbf{J}| w_i w_j w_k\end{aligned}\quad (\text{A.253})$$

ただし、 $|\mathbf{J}|$ は座標変換によるヤコビ行列の行列式の値である。

目次

1.1	The Number of complaints about low frequency.	8
2.1	A house is assumed to be a box-shaped placed on the semi-free field. A stationary sound source generating low-frequency noise is assumed to be equipment item placed closely to the house.	15
2.2	A numerical model of the box-shaped house. External acoustic field is truncated with Perfectly Matched Layer(PML).	16
2.3	A numerical model of a sound source such as a heat pump unit.	17
2.4	Schematic diagram of the calculation of insertion loss before and after the house placement.	18
2.5	Examples of outer wall specification.	19
2.6	ΔL of house with changing the area density of a membrane wall.	22
2.7	Delta L of house with changing the area density of a membrane wall.	23
2.8	An example of deformations of a house modeled with plates and a shell	24
2.9	Delta L of house with changing the area density of a membrane wall.	27
2.10	Numerical models of several underfloors.	28
2.11	ΔL calculated for a model house with different underfloors.	29
2.12	Schematics for deriving theoretical formula.	30
2.13	Numerical models of the box-shaped house with rigid and membrane walls.	32
3.1	A house model for the 1/4 scale experiment.	38
3.2	The test house for experiment.	39
3.3	Conditions of outer walls: (a) with and (b) without aperture.	40
3.4	Specification of outer walls made of acrylic resin, part 1.	41
3.5	Specification of outer walls made of acrylic resin, part 2.	42
3.6	Conditions of the aperture: (a) fully open, (b) partially open and (c) closed window.	43
3.7	Specification of an aperture, sash and glass.	44
3.8	The wood frame under the house model.	45
3.9	The wood frame under the house model.	45
3.10	Diagram of the above equipments.	46
3.11	The speaker, GENELEC 8050A.	47
3.12	Oblique and front positions of the sound sources.	47
3.13	The arrangement of receiving points.	48
3.14	Measurement for the characteristic correction of each microphones in low-frequency.	49
3.15	The array microphones, G.R.A.S type 40 PL.	49
3.16	The microphones stand originally made for the measurement.	49
3.17	1/3 octave band sound pressure level at each point from 4 to 125 Hz band.	50
3.18	Distance attenuation of 1/3 octave band SPL.	51
3.19	Cut-off characteristics of Band Pass Filter employed for the following calculation of band levels.	52
3.20	Calculation method for SPL difference between indoor and outdoor.	53
3.21	ΔL measured by changing conditions of the aperture. Area density of outer walls is 24 kg/m ² (left) and 48 kg/m ² (right)	55
3.22	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24kg/m ² ", "Window = fully open" and "Src. = Front" conditions.	56
3.23	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24kg/m ² ", "Window = partially open" and "Src. = Front" conditions.	57

3.24	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24 kg/m ² ", "Window = closed" and "Src. = Front" conditions.	58
3.25	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m ² ", "Window = fully open" and "Src. = Front" conditions	59
3.26	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m ² ", "Window = partially open" and "Src. = Front" conditions.	60
3.27	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m ² ", "Window = closed" and "Src. = Front" conditions.	61
3.28	ΔL measured for the aperture with different conditions. Two area densities are considered for the outer walls.	63
3.29	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 24 kg/m ² ", "Window = no aperture" and "Src. = Front" conditions.	64
3.30	Distribution of indoor SPL on y-z (upper) and x-y (lower) plane under "Wall = 48 kg/m ² ", "Window = no aperture" and "Src. = Front" conditions.	65
3.31	ΔL measured for the conditions with and without underfloor frame.	66
3.32	ΔL measured for the conditions with and without ventilation hole.	67
3.33	ΔL measured by changing source positions. Upper and lower figures are results for the outer wall with area density 24 and 48 kg/m ² , respectively.	68
3.34	Comparison between measured and calculated value. Outer walls are modeled by limp membrane.	70
3.35	Comparison between measured and calculated value. Outer walls are modeled by elastic plate.	71
3.36	Comparison between measured and calculated value. Outer walls are modeled by elastic shell.	72
A.1	Analytical model for acoustic field.	79
A.2	Analytical model for perfectly matched layer.	85
A.3	Perfectly matched layer in x-dimension with each domain's unit vectors.	86
A.4	Analytical model for elastic body field.	89
A.5	Schematic of a plane stress field.	95
A.6	Plate kinematics and definition of rotations.	99
A.7	Stresses on infinitesimal element.	100
A.8	Fundamental boundary condition for the bending plate.	106
A.9	Vibration field of a box shape shell.	107
A.10	Local and global coordinate transformation.	109
A.11	Boundary conditions and domain notation for membrane vibration field.	112
A.12	Breathability of a membrane.	112
A.13	The notation on the acoustic elastic coupling problem.	117
A.14	The notation on the acoustic plate coupling problem.	119
A.15	The notation on the acoustic membrane coupling problem.	122
A.16	The shape of element with nodes.	123
A.17	The coordinate systems of triangle element.	124
A.18	The coordinate systems of tetrahedron element.	126

表目次

1.1	Movements related to low-frequency noise.	9
2.1	Physical properties and support condition of membrane and plate.	19
2.2	Natural frequencies of the test houses.	20
2.3	Physical properties and support condition of membrane and plate.	25
2.4	Natural frequencies of simple supported plates.	26
3.1	Regulation of the pillars' specification in the Japanese building code.	39
3.2	Equipment list for the scale model experiment.	46
3.3	Physical properties for the calculation.	70

参考文献

- [1] Albert London, Transmission of reverberant sound through single walls. *J. Research Natl. Bur Standards*, Vol.42(605), pp.77-88, 1949.
- [2] Albert London, Transmission of Reverberant Sound Through Double Walls. *J. Research Natl. Bur Standards*, Vol.44(2058), pp.77-88, 1950.
- [3] A. Bermudez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, R. Ropdriguez, An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problem. *J. Comp. Physics.*, Vol. 223, Issue 2., pp469-488, 2007.
- [4] Doi. T, Kaku. J. Investigation of sound insulation of bulidings to low frequency sounds. *Inter Noise 2010*
- [5] Doi. T, Iwanaga, K, Naka. Y. Experimental approach on transmission of low-frequency sound into a buliding. *Inter Noise 2014*
- [6] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger,S. (1959) Theory of plate and shells (2nd ed.). McGraw-Hill, NewYork.
- [7] 山田一郎, 空気による音の吸収, 騒音制御, Vol.14, No.1, pp.23 27, 1990.
- [8] 橘秀樹, 石井聖光, 音響模型実験における相似則と実験手法, 日本音響学会誌, Vol.32, No.10, pp.621 630, 1976.
- [9] 橘秀樹, 石井聖光, 遮音に関する模型実験, 音響技術, No.6, pp.95 103, Apr. 1974.
- [10] 広沢邦一, 藤原恭司, 山川啓介 回折伝搬音に対する建築物窓面の遮音性能に関する研究, 日本音響学会誌, Vol.56, No.5, pp.324 333, 2000.
- [11] 土肥哲哉, 加来治郎, 可搬型低周波音発生装置の開発, 日本音響学会講演論文集, pp. 955-956, 2010.9.
- [12] 土肥哲哉, 中右介, 家屋内外における低周波音の音圧レベル分布 -低周波音発生装置と模擬家屋を用いたフィールド実験-, 日本音響学会騒音・振動研究会資料, N-2012-26.
- [13] 土肥哲哉, 超低周波音の建物内外音圧レベル分布 -超低周波音発生装置を用いたフィールド試験-, 日本音響学会誌, Vol.70, No.11, pp.593-598, 2014.
- [14] 時田保夫, 低周波音公害をめぐって, 日本音響学会誌, pp.395-401, 1979.
- [15] 落合博明, 低周波音の評価, 騒音制御, Vol.17, No.6, pp.13 16, 1993.
- [16] 落合博明, 田矢晃一, 低周波音による建具のがたつき始める音圧レベルについて, 騒音制御, Vol.26, No.2, pp.120 128, 2002.4.
- [17] 落合博明, 牧野康一, 低周波音の家屋内外レベル差の測定, 日本音響学会騒音・振動研究会資料,

N-2004-37.

- [18] 井上尚久, 音響振動連成解析による積層型音響材料の部材性能予測に関する研究, 東京大学博士論文, 2015.
- [19] 橋本梯, 低周波音の家屋内外伝搬に関する数値解析, 東京大学修士論文, 2016.
- [20] 橋本梯, 井上尚久, 佐久間哲哉, 音響振動連成解析による低周波音の屋外から住宅内への伝搬予測, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 40095, pp.189-190, 2015.
- [21] 橋本梯, 井上尚久, 佐久間哲哉, 低周波音の家屋内外伝搬に関する数値解析-家屋モデルの基礎的検討-, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会講演論文集, 1-3-04, pp.47-48, 2015.
- [22] 橋本梯, 井上尚久, 佐久間哲哉, 低周波音の家屋内外伝搬に関する数値解析-開口部モデルの検討- 日本音響学会秋季研究発表会講演論文集, 1-10-2, pp.795-796, 2015.
- [23] 橋本梯, 井上尚久, 佐久間哲哉, 土肥哲也, 低周波音の家屋内外伝搬に関する数値解析-模擬家屋を用いた実測との比較-, 日本音響学会春季研究発表会講演論文集, 1-9-4, pp.963-964, 2016.
- [24] 橋本敦, 名古屋大学 博士論文, 流体構造連成法に基づくフラッタ現象の数値解析, <http://hdl.handle.net/2237/7528>, 2007
- [25] O.C.Zienkiewicz, 吉識雅夫, 山田歌藍監訳, 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1975.
- [26] 前川純一, 森本政之, 阪上公博, 建築・環境音響学 第三版. 共立出版, 2000.
- [27] 環境庁, 昭和 52 年度低周波空気振動等実態調査 (低周波空気振動の家屋等に及ぼす影響の研究) 報告書, 1977.
- [28] 環境庁大気保全局, 低周波空気振動等実態調査報告書 -低周波空気振動の実態と調査-, 1984.
- [29] 環境庁大気保全局, 低周波音の測定方法に関するマニュアル, 2000.
- [30] 環境省環境管理局大気生活環境室, 低周波音防止対策事例集, 2002.
- [31] 環境省環境管理局大気生活環境室, 低周波音問題対応のための手引書, 2004.
- [32] 環境省水・大気環境大気生活環境局, よくわかる低周波音, 2007.
- [33] 防衛省地方協力局, 演習場周辺住宅防音工事標準仕方書, 平成 25 年 12 月.
- [34] 防衛省地方協力局, 住宅防音工事標準仕方書, 平成 26 年 6 月.
- [35] 社団法人 日本冷凍空調工業会 ヒートポンプ給湯機委員会, 騒音防止を考えた 家庭用ヒートポンプ給湯機の据付けガイドブック, 2011.
- [36] 日本建築学会, 住宅の設備機器を対象とした低周波領域の音と振動問題への対応資料, 2010.
- [37] JIS C 1514: 2002, 『オクターブ及び 1/N オクターブバンドフィルタ』

謝辞

本論文は、筆者が東京大学 大学院新領域創成科学研究科 社会文化環境学専攻修士課程において、同専攻の佐久間哲哉准教授の指導のもとに行った研究をまとめたものであります。佐久間先生には本研究を遂行し論文をまとめるに当たり、物事に対する考え方や姿勢、文章の書き方や適切な言葉遣い等あらゆる面でご指導して頂きました。また、筆者の知識不足やにも適切なご指導頂きましたこと、心から感謝致します。

副指導教員である同専攻の佐藤淳准教授には、普段見落としがちな視点からご助言を頂きました。また、同専攻の清水亮准教授には本論文の副査を担当して頂きました。ここに感謝申し上げます。

同専攻特任研究員の井上尚久博士には音響学の基礎から、プログラム作成や技術面の補助、文章作成、発表練習等に対して日々ご指導を賜りました。研究以外の他愛のない相談にも乗っていただき、充実した研究生活を過ごすことができ、無事に本論文を執筆することができました。心から感謝致します。

小林理学研究所 土肥哲也博士、岩永景一郎氏には測定の機会を始め、有益な議論の場を与えて頂きました。小林理学研究所の皆様にご多大お世話になりました。ここに感謝申し上げます。

東京大学生産技術研究所 坂本慎一准教授には、大学院の授業を始め、筆者の研究を行う上での貴重なご助言を頂きました。

佐久間研究室の先輩であります李孝振さん、江田和司さん、土屋裕造さん、石川聡史さん、會田祐さん、橋本悌さん、同期の藤浪南夏子さん、深町知貴さん、福田雄也さん、LIMESA Richard Arthur Jeremia さん、後輩の大場みず穂さん、西川宏作さん、角谷純平さん、駒井彩乃さん、坂吉佑太さん、亀田智太さん、中野耀さん、劉金雨さん、兪凡さんとは修士課程の短い間でしたが楽しい時間を過ごさせて頂きました。

学習院大学大学院落合研究室の神保美智子さんには、測定や測定データの分析にご協力して頂きました。ここに感謝申し上げます。

最後になりましたが、筆者の学生生活を暖かく見守り、支えてくださった家族に多大なる感謝の意を表します。

2017年1月23日

加美 梢

発表論文一覧

■修士論文梗概

■本研究に関する発表論文

1. 加美梢, 井上尚久, 佐久間哲哉, ”低周波音の家屋内外伝搬に関する実測と数値解析の比較 -外壁質量及び減衰の影響”, 日本建築学会研究発表会講演論文集, 40095, pp.317-318, 2016.
2. 加美梢 井上尚久, 佐久間哲哉, ”低周波音の家屋内外伝搬に関する縮尺模型実験”, 日本騒音制御工学会秋季研究発表会講演論文集, 2-4-10, pp.257-258, 2016.
3. 加美梢, 井上尚久, 佐久間哲, ”低周波音の家屋遮音性能に関する研究 -縮尺模型実験による外壁質量の影響の検討”, 日本音響学会春季研究発表会講演論文集, 1-3-8, 2016.3.