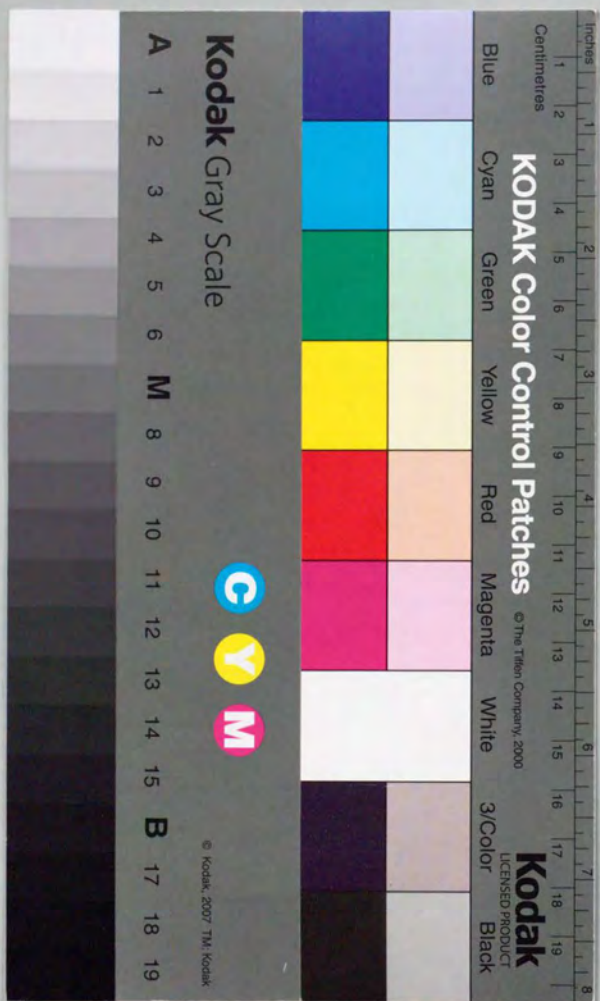


エネルギー原理に基づく構造物の線形および  
非線形破壊力学解析に関する研究

高橋 淳





①

学 位 論 文

エネルギー原理に基づく構造物の線形および  
非線形破壊力学解析に関する研究

高 橋 淳

## 目 次

第1章	序 論	[ 1 ~ 8 ]
1.1	緒 言	1
1.2	研究の背景	2
1.2.1	従来の構造健全性評価における問題点	2
1.2.2	本研究の経緯と関連する主要な研究	4
1.3	本論文の構成	6
第2章	構造力学におけるエネルギー原理とそのき裂問題への拡張	[ 9 ~ 51 ]
2.1	緒 言	9
2.2	構造力学におけるエネルギー諸原理	11
2.2.1	エネルギー諸原理	11
2.2.2	コンプライアンスの導入 (その利点と限界)	14
2.2.3	不静定構造物の解析原理	16
2.2.4	構造物の弾性安定理論	17
2.3	マトリクス法による不静定構造物の解析とその非線形弾性体への拡張	20
2.3.1	基本的考え方	20
2.3.2	線形弾性体に対する一般の定式化	21
2.3.3	非線形弾性体へのマトリクス法の拡張	23
2.4	エネルギー諸原理のき裂問題への拡張	26
2.4.1	き裂がある場合の変形およびエネルギーとエネルギー解放率の関係	27
2.4.2	き裂を有する不静定構造物へのエネルギー原理の拡張	30
2.4.3	エネルギー原理に基づく不安定破壊規準の統一的導出	32
2.5	き裂を有する構造物の安全性評価	39
2.5.1	線形破壊力学および非線形破壊力学の守備範囲	39
2.5.2	非線形破壊力学の適用限界	44
2.6	結 言	48

本書の内容の一部あるいは全部を無断で複製すると、著作権  
および出版権侵害となることがありますので御注意下さい。

- 1991 年 12 月 20 日 -



第3章	き裂部材の変形とエネルギー	[ 52 ~ 82 ]
3.1	緒 言	52
3.2	線形弾性体に対する諸量	53
3.2.1	一般的関係式と諸量のマトリクス表記	53
3.2.2	片側き裂材に対する応力拡大係数	56
3.2.3	応力拡大係数の漸近特性と簡易評価式の精度	58
3.2.4	漸近特性に基づくコンプライアンスの簡易評価式の作成	62
3.3	非線形弾性体に対する諸量	65
3.3.1	複合荷重下の非線形量に関する従来の研究	65
3.3.2	き裂先端近傍の漸近解析と全面塑性解	67
3.3.3	コンプリメンタリエネルギー法の拡張	73
3.3.4	片側き裂材に対する諸量の評価	76
3.4	結 言	80
第4章	マトリクス法による実構造物の破壊力学パラメータ評価	[ 83 ~ 125 ]
4.1	緒 言	83
4.2	エネルギー原理に基づく不静定構造物の破壊力学パラメータ解析	85
4.2.1	線形弾性体に対するマトリクス法破壊力学の定式化	85
4.2.2	非線形弾性体へのマトリクス法破壊力学の拡張	90
4.2.3	Ramberg-Osgood 型へのマトリクス法破壊力学の拡張	92
4.3	軸方向き裂付き円筒の応力拡大係数評価への適用	95
4.3.1	線形弾性体に対する統一的評価手法の定式化	95
4.3.2	軸対称き裂問題における特別な解	102
4.3.3	諸量の漸近特性	107
4.3.4	結果の整理と考察	110
4.4	軸方向き裂付き円筒の $J$ 積分評価への適用	113
4.4.1	Ramberg-Osgood 型に対する統一的評価手法の定式化	113
4.4.2	軸対称き裂問題における特別な関係式	115
4.4.3	結果の整理と考察	118
4.5	その他の具体的問題への適用に関する考察	121
4.6	結 言	123
第5章	軸方向き裂付き円筒の破壊強度評価	[ 126 ~ 170 ]
5.1	緒 言	126
5.2	軸方向き裂付き円筒に関する従来の研究とその問題点	128
5.2.1	研究の背景	128
5.2.2	従来の研究	129
5.2.3	解決すべき問題点	132
5.3	軸対称問題に対する応力拡大係数	134
5.3.1	他者の解析結果との比較	134

5.3.2	種々のパラメータが $K$ 値に及ぼす影響	137
5.3.3	結果の整理と考察	142
5.4	非軸対称問題に対する混合モード応力拡大係数	143
5.4.1	非軸対称問題に対する解析の必要性	143
5.4.2	異長き裂の存在が $K$ 値に及ぼす影響	144
5.4.3	非軸対称なき裂配置が $K$ 値に及ぼす影響	146
5.4.4	結果の整理と考察	148
5.5	応力拡大係数の実用式の作成	150
5.5.1	実用式の例	150
5.5.2	実用式の作成	151
5.5.3	三次元表面き裂および非線形弾性体への拡張	153
5.6	回転円筒の非線形破壊力学解析	155
5.6.1	回転円筒の $J$ 積分値と安定・不安定破壊評価	155
5.6.2	破壊力学パラメータとしての $J$ 積分の有効性	157
5.6.3	結果の整理と考察	158
5.7	結 言	160
第6章	加圧熱衝撃時の圧力容器の破壊強度評価	[ 171 ~ 184 ]
6.1	緒 言	171
6.2	加圧熱衝撃事象について	172
6.2.1	加圧熱衝撃事象と従来の研究	172
6.2.2	非定常熱伝導解析および熱応力解析	173
6.3	非線形破壊力学解析	174
6.3.1	解析条件の設定	174
6.3.2	熱衝撃・内圧および加圧熱衝撃下の $J$ 積分値	176
6.3.3	破壊力学的評価とその有効性	178
6.3.4	結果の整理と考察	180
6.4	結 言	180
第7章	リング型破壊力学試験片へのマトリクス法の適用	[ 185 ~ 205 ]
7.1	緒 言	185
7.2	各種リング型試験片について	186
7.3	Cリング試験片の破壊力学パラメータ評価	188
7.3.1	荷重制御型 C リング試験片の混合モード応力拡大係数	188
7.3.2	変位拘束型 C リング試験片の混合モード応力拡大係数	191
7.3.3	実用式の作成とその精度	195
7.3.4	非線形問題への拡張	197
7.3.5	結果の整理と考察	200
7.4	結 言	201



第8章 総 括	[ 206 ~ 211 ]
8.1 本論文の成果	206
8.2 総合的検討	210
Appendix 曲がり梁のコンプライアンス	[ 212 ~ 223 ]
A.1 二次元弾性論による一般解	213
A.2 曲がり梁のコンプライアンスとそのマトリクス表記	217
A.3 材力の解との比較	220
文 献	[ 224 ]
研究業績	[ 238 ]
謝 辞	[ 240 ]

# 1

## 序 論

### 1.1 緒 言

原子炉・航空機・船舶等の大型重要構造物の設計あるいは保守管理において損傷許容設計あるいは破壊管理制御設計という言葉が耳にするようになって久しい。すなわち、構造物中には何らかの欠陥が存在することを認識し、これらの欠陥が構造全体の破損を招かない限りは構造全体は健全であるとして運転を認めるという現実的かつ合理的な考え方が広く普及している。このような背景から、欠陥の中でも最も危険なき裂の挙動を定量的に取り扱う破壊力学に関して今日までに膨大な理論的・実験的・数値解析的研究が蓄積されており、その結果試験片レベルの簡単な部材に対しては各種破壊挙動の精度良い予測が可能となりつつある。

ところがこれは、近年の実験設備・計算機などハードウェアの飛躍的な進歩を背景として、実構造物レベルでの大規模な有限要素解析がますます盛んになる一方で各種破壊現象のミクロな領域にまで踏み込んだ詳細解析が行なわれるようになってきたという現状のたまものである。内実これらの研究成果を実際の構造物の強度評価に反映させる方法論がなおざりになっていることもまた否めない事実であろう。すなわち、この種の方法論としては延性不安定破壊の評価規程である Tearing Instability 理論<sup>(1)</sup>あるいは非線形破壊力学パラメータの評価とそれを用いたき裂進展シミュレーションの方法論である Engineering Approach<sup>(2)</sup>などを最後にここ10年間全く進歩がないままである。そしてこれらの方法論にも後述するようないくつかの問題点が指摘でき、工学の本来の目的<sup>(3)(4)</sup>を考えれば、従来の方法論の改善あるいは新たな方法論の開発が急務であることはもはや明白であろう。

本論文は、以上のような工学の中における破壊力学の役割に着目したものであり、破壊力学の実構造物への適用に際しての種々の問題点を解決し、設計等におけるその地位を向上させるべく筆者がこれまでに行ってきた研究をまとめたものである。



以下本章では、まず 1.2 「研究の背景」において、本論文で着目した従来の構造健全性評価における問題点を説明した後に、その解決のために筆者がこれまでに進めてきた研究の経緯とその関連研究を紹介する。そして 1.3 「本論文の構成」においては、各章の概要とそこでの主な成果をまとめて記すと同時に、全体の中での各章の位置付けを明確にすべくここでは投稿論文との対応なども明記しておく。

## 1.2 研究の背景

今日、健全性評価の名のもとに膨大な実験的・解析的研究が集積されているにもかかわらず、例えば同じ圧力容器であってもこれらの結果から異なる境界条件の事象に対する安全性を議論することはできず、結局は想定される事象に対して新たに詳細解析を行わなければならないという現状が指摘できる。以下では、このような現状に至った原因として特に従来の解析的研究がその結果を体系的に整理して構造物の強度特性という知見として後に残すことを前提としていない(あるいはその方法論を持っていない)点にあることを指摘し、さらにこの種の体系的調査を困難としている具体的要因について考察すると共にその解決のために筆者が行ってきた研究について述べる。

### 1.2.1 従来の構造健全性評価における問題点

破壊力学による構造健全性評価の考え方は、基本的には前述のごとく試験片レベルの簡単な部材に対して蓄積されてきた実験的・解析的研究成果を実際の構造物の強度評価に反映させようというものである。そして具体的には、事故解析あるいは非破壊検査から想定される位置及び形状のき裂を付した構造全体に対して、想定される負荷の下での詳細な有限要素解析を行なって対応する降伏規模および破壊現象に応じた破壊力学パラメータを求め、その結果を試験片レベルで検証された破壊基準に照らすことにより構造物中のき裂の安定・不安定進展あるいは疲労寿命を評価するという手順がとられている。

ここでまず、有限要素法の併用によるこの種の健全性評価の宿命として、解析のケースが限られるという大きな問題点が指摘できる。すなわち、有限要素法は任意の状況に対応できるという利点の反面、例えば過渡熱応力のように時々刻々変化する荷重条件に対応する解析やき裂個数とその配置さらには個々のき裂の形状などの変更による構造全体としての破壊強度の変化をパラメトリックに調査する手段としては不利であり<sup>1)</sup>、特に原子力プラントなどで必要性が高まっている非線形領域における破壊強度特性に至ってはこの種のパラメータスタディは事実上不可能であろう。さらに言えば、有限要素法を用

<sup>1)</sup> 特に後者のような場合には、解析のケースごとにそれぞれ別のメッシュを準備する必要があるため、そのパラメータスタディは極めて困難であると考えられる。またこのとき、解の精度がすべてのケースに対して同一となる保証がないなど、計算機の演算速度の向上のみでは解決できない問題点もある。

いる場合、境界条件の入力から破壊力学パラメータの出力までの過程がブラックボックスであるがゆえにその入力パラメータの影響度評価には必要以上に多くの解析を要する反面、実機レベルでの詳細解析に必要な自由度(すなわち計算時間)は線形弾性範囲であっても一般に非常に大きくまた入力パラメータの数も多いという相反する要求があり、このこともまたこの種の解析を単なる仮想事故解析としてのケーススタディに終わらせてしまっている原因となっているものと考えられる。

またこれとは別に次のような問題点も指摘できる。それは、最近 ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section XI において配管の延性不安定破壊の評価規程として取り入れられた<sup>(5)</sup> Tearing Instability 理論<sup>(1)</sup> についてである。延性不安定破壊とは、き裂進展開始後の靱性の増加が大きな材料においてかなり長い安定き裂進展の後に起こる不安定なき裂進展を指すものである。この現象の本質は、安定き裂進展に伴って系全体としての剛性が低下しその結果内力も低下するため、系の剛性の影響(すなわち内力の低下)を無視した評価が過度に安全側の評価となる点にある。ところが、上記の Tearing Instability の理論は線形破壊力学における脆性破壊規程の拡張として定式化されているため、この内力の低下の効果が偏微分を含む複雑な式で記述されており、同式の解釈はもちろんこれを用いて得られた評価結果と現実の現象との対応を理解することが著しく困難となっている。また、この評価規程への入力パラメータとしては前述の非線形有限要素法の出力結果が用いられることもあいまって、各種パラメータの変更に対する破壊強度(あるいは破壊現象)の変化を洞察するなどの構造健全性評価に不可欠となる作業に至ってはもはや不可能である。

すなわち、構造健全性評価の名のもとに結果の解釈も曖昧なまま日々膨大な計算結果が集積され続けている現状は、以上に指摘したような問題点が複合した結果であるというのが筆者の考えであり、本研究の動機でもある。

本研究の目的は、この種の問題点の解決のための具体的手段とその活用のための方法論を提供することである。そしてまず具体的手段に要求した機能は、構造条件(寸法・形状・材料特性)・負荷条件・き裂形状(個数・配置・個々の形状)といった各種パラメータの変更による破壊現象の変化の全体像を大局的に把握し、構造物の強度および健全性に関する本質(これを本論文では強度特性と呼ぶ)を洞察するに足る議論を可能ならしめることである。また一方で、本論文ではこの種のハードウェアを現実問題に活用する方法論についても詳しく論じてある。すなわち、この種の方法論の完成により、実構造物の強度評価をさらに精度良く行なうために現在欠落している情報を明らかにし、今後検討すべき問題点とその解決のための研究の方向性を示すなどの発展性もあり、破壊問題に対する工学的アプローチの一体系としても有用なものとなることが期待できよう。



## 1.2.2 本研究の経緯と関連する主要な研究

本論文では、前述のような現状を打開すべく、従来の破壊力学および構造力学の知識を効果的に活用し、詳細な応力解析を行なうことなく構造物中のき裂の挙動を精度良く評価する方法論を展開すると同時に、導かれた諸式およびそれに基づく強度評価結果の知見を構造健全性評価に活用する考えなどが詳細に論じてある。以下では、本論文としてまとめるまでに筆者の行ってきた研究の経緯とこれに関連する主要な研究を簡単に紹介したい。なお、文献調査の詳細は個々の章でそのつと行なっているのを参照されたい。

(1) 不特定構造物中のき裂の取扱い 本研究では、まず前項で指摘した現状を打開するための数値解析手法として岡村らの方法論に着目した。すなわち、岡村ら<sup>(6)~(9)</sup>は線形破壊力学の範囲において、き裂の存在による構造全体の変形(すなわちコンプライアンス)の増加分が無次元応力拡大係数から容易に計算できることに着目して不特定構造物中のき裂の挙動を論じる一般論を提唱し、いくつかの応用例を示すと同時に実験によりその妥当性を実証している。

この方法論の特徴は、材料力学および破壊力学における既存の解を有効に活用して実構造物中のき裂の挙動をパラメトリック評価できる点にあり、現に最も基本的なケースに対してではあるが上記理論の一応用例として加圧熱衝撃時の圧力容器を対象とした応力拡大係数の解析が行なわれ、その現象の解明に大きな貢献をしている<sup>(10)</sup>。また、本手法を圧力容器の解析に適用した場合には Cheng ら<sup>(11)~(13)</sup>のものおよびラインスプリング法<sup>(14)</sup>による同様の解析と等価な手法となるが、その一般論<sup>(9)</sup>から得られる情報量がこれらのものよりもはるかに豊富なものであったことは、以下に示される非線形弾性体への拡張の際に線形弾性体における定式化の利点を十分に反映させることが可能であったことから理解できるであろう。

(2) 上記理論の非線形弾性体への拡張 ところで今日の高靱性材料の多用に伴い、実構造物においても小規模降伏域を逸脱した後のき裂の挙動を評価する必要性が高まり、学会・産業界の強度評価の主流は線形破壊力学から非線形破壊力学によるものへと移行しつつある(2.5.1項参照)。そこで筆者はまず、非線形領域においては前述のような有限要素法の難点がさらにクローズアップされることに着目し、岡村らによる不特定構造物中のき裂の取り扱いの方法論を全面塑性解<sup>(2)</sup>を用いて非線形弾性体へ拡張する考え方を示した<sup>(15)~(18)</sup>。そして、この考え方を軸方向き裂付き円筒の $J$ 積分値の評価に適用し、熱衝撃<sup>(17)</sup>・回転<sup>(18)</sup>・加圧熱衝撃<sup>(19)</sup>に対して詳細な解析を行なってそれぞれに固有の破壊強度特性を明らかにすると同時に、ここで開発した方法論に関する以下のような利点を示した。

- (a) 非線形領域においても、肉厚比・き裂深さなどの構造物の形状のみならず複雑な荷重条件の変更に對して線形弾性領域と同様な繊細なパラメータスタディが可能となり、構造物の健全性を議論するうえで有用となる多くの強度特性を導くことができる<sup>(18)</sup>。
- (b) この種の解析においては不可欠なものでありながら従来実験レベルでは全く行なわれていなかった $J$ 積分の有効条件の検討が本手法によって容易に可能となることが示され、種々の荷重条件下に対してこれを定量的に示した<sup>(17)~(19)</sup>。
- (c) 本理論の延長として荷重変位線図を用いた延性不安定破壊評価手法が導かれる。この評価手法は Tearing Instability 理論などと等価であるが<sup>(15)</sup>、荷重および変位といった実測可能な物理量のみを用いてき裂の安定・不安定を論じることができることから、各種パラメータの変更による現象の推移などが直観的に理解でき、やはり強度特性の議論に有効な手段となる<sup>(15)~(17)</sup>。

ここで、同様の研究としてはまず松原ら<sup>(20)~(22)</sup>によるものおよびラインスプリング法による一連の解析<sup>(23)</sup>が挙げられるが、これらは前項の結びにもその必要性を指摘した上記(a)~(c)(詳しくは本論文第4章)に示されるような強度特性に関する考察を欠いているため単なる簡易解析手法の域を出ておらず、今日の計算機能力の向上を考えれば今後有限要素法に優る利点を主張することは困難と考えられる<sup>2)</sup>。一方、非線形領域におけるパラメトリックな解析および破壊現象の評価を可能とする手法として GE-EPRI のスタッフによる Engineering Approach<sup>(2)</sup>なる方法論があげられる。本方法論は、簡易解析手法としての利点のみならず $J_R$ カーブとの比較による延性不安定破壊評価手順などとの連結が体系的に整理されたもので、それまでの非線形破壊力学の英知を結集した画期的な評価体系であるといえよう。ところが、Engineering Approach の最大の難点は後述する複雑なき裂形状に対してはもちろん上記(a)に示されるような任意の荷重状態に対する解析ができない点であり、やはり本論文で目指す評価体系の基盤とはなり得ないのである。以下では、筆者によるものも含めて以上すべての手法に共通する難点を改善した評価体系が示されることになるので、以上に示したものの詳しい比較検討は別報<sup>(15)</sup>に譲ることとする。

(3) 上記理論のより現実的なき裂形状への拡張と構造物の破壊強度特性 次に筆者が問題としたのは、従来の健全性評価が上述の筆者らの研究も含めて基本的に一個のき裂に対して行なわれており<sup>(24)~(25)</sup>、他のき裂の存在が構造物の破壊強度に及ぼす影響は不問に付されている点であった。そこで筆者は、有限要素法がそうであったように、構造解析の対象が複雑な構造(特に不特定構造)となりさらにその非線形性を考慮すべき場合には変形をベースとする材料力学的な議論よりもエネルギー停留原理に基づく議論の方が有利である点に着目して、構造力学の基礎であるエネルギー停留原理をき裂を有する構造物の解析に拡張適用する考え方を新たに提唱した<sup>(26)~(28)</sup>。

具体的には、構造解析理論の表現とその計算機を用いた数値演算に有利なマトリクス表記を用いて線形弾性体<sup>(26)</sup>および非線形弾性体<sup>(27)</sup>に対して複数のき裂を有する不特定構造物の破壊力学パラメータを求める手順を一般的な形で定式化すると同時に、これを複数の軸方向き裂を有する円筒の混合モード応力拡大係数および $J$ 積分値の評価に適用する具体的手順を示し、き裂個数とそれぞれの配置および長さが破壊力学パラメータさらには破壊基準に及ぼす影響を詳細に調べた<sup>(29)</sup>。さらに、本手法の陽な定式化により上記(1)および(2)の利点がそのまま活用できることはもちろん、これを用いた統一的な議論の手順も同時に示され<sup>(27)~(28)</sup>、単なる簡易解析手法としてではなく、構造物の強度特性に関する体系的調査の方法論としての有用性が明らかにされている。

ところで、この種の複数のき裂問題に対応すべく、コンプライアンス概念に基づく前述の理論をそのまま拡張する試みも見られる<sup>(30)~(31)</sup>が、これらの適用可能なき裂形状は極めて限られている。すなわち、これらは幾何学的対称性が成立する場合にモードIのみの単純な問題となることに着目したものであって、不特定な(すなわち変位拘束条件下での)曲がり梁<sup>(30)</sup>および帯板<sup>(31)</sup>に同じ長さのき裂が並列に配置される場合にはその内力の低下に及ぼす系のコンプライアンスの寄与分がき裂個数に反比例するという事実を式で記述しているに過ぎない。なお、このような変形をベースとする議論の限界は本論文第2章および第4章で詳しく議論することとする。

<sup>2)</sup> ところで、ラインスプリング法はそもそも三次元き裂の解析を目的としていたため、二次元き裂の段階から有限要素法に組み込んで用いられている点で筆者らの手法に見られる簡便性が失われている点も指摘できる。



## 1.3 本論文の構成

以下では、各章ごとに分けてその概要と主な成果を紹介する。またここでは、本論文中における各章の位置付けを明確にすべく投稿論文との対応を示してあるため、ここでの文献番号は本論文の末尾に付した「研究業績」のものに対応するものである。なお、本論文における各章の位置付けを示した簡単なフローを図1.1に示したので同時に参照されたい。

第2章「構造力学におけるエネルギー原理とそのき裂問題への拡張」においては、従来の破壊力学が非線形問題や複雑な構造物への展開の際に極端に見通しが悪くなる原因としてこれらがすべて変形をベースとした理論で展開されていたためであることを指摘し、エネルギーベースでの議論を提唱している。具体的には、き裂の存在による変形の増加分がコンプリメンタリエネルギーを仲介として破壊力学パラメータから容易に計算できることに着目して、すべての構造解析の基本となるエネルギー停留原理からき裂を有する構造物の内力を求める方程式が直接導かれることを示し<sup>(5)(8)</sup>、さらに弾性安定理論と同じエネルギー原理から従来からある不安定き裂進展規程が統一的に導かれることを示してある(未発表)。これらによって非線形問題や複雑な構造物に対しても破壊力学を無理なく拡張でき、き裂を有する構造物の安定および不安定破壊を良く知られたエネルギー原理に対応させて明確に理解できるようになっている。また、従来の破壊力学理論との対応を明確にして膨大な実験データの蓄積を活用すべく別報<sup>(1)(2)(10)</sup>で提案した荷重変位線図上において破壊を議論する手順もまた、エネルギー原理の拡張の一つとして導かれるものであることも同時に明らかにしてある。

第3章「き裂部材の変形とエネルギー」においては、前章の理論の現実問題への適用に不可欠となるき裂部材の変形を計算する一般的手順を示し、線形弾性体および非線形弾性体に対してそれぞれ任意の応力分布に対するき裂部材の変形の一般形を導いている。特に線形弾性体に対しては解析的漸近特性に基づいた各種変形に対する高精度な簡易評価式が初めて導かれ(未発表)、一方非線形弾性体に対しては全ひずみ塑性理論に基づいて軸力・曲げ・せん断力の複合荷重下における変形および破壊力学パラメータ( $J$ 積分値)をパラメトリックに評価する手順を提唱している<sup>(3)(8)</sup>。

第4章「マトリクス法による実構造物の破壊力学パラメータ評価」においては、マトリクス表記が構造解析理論の表現とその計算機を用いた数値演算に極めて有効であることに着目して、第2章に示した解析理論のマトリクス表記による一般形を線形弾性体・非線形弾性体さらに実用を考えてRamberg-Osgood型の構成式に対してそれぞれ導いている<sup>(5)(8)</sup>。またここではマトリクス表記を用いることの利点として、上記のもの他に材料力学および破壊力学において整備されてきた解析解が有効に活用できる点、陽な形で定式化されているため線形・非線形領域における統一的議論および各種パラメータの影響度を通した現象の考察に極めて有効である点などが多くの実例と共に示してある。

以下の章は、以上に示してきた理論と手法の具体的な応用である。全体の流れの理解のために解析的側面からこれらを分類すれば、第5章は第4章に示した方法論の精度の検討および複雑なき裂形態への適用であり、第6章は複雑な負荷への適用であるといえる。そして第7章では、以上のものが分布荷重に対するものであるのに対して各種破壊強度試験片で見られるように集中荷重が外力として作用する場合への適用である。

まず第5章「軸方向き裂付き円筒の破壊強度評価」においては、配管あるいは压力容器といった各種プラントの中核に用いられている円筒型構造物に第4章で示したマトリクス法破壊力学を適用して広範

面にわたる破壊強度評価を行なうと同時に、得られた結果を総合してこれを健全性評価に活用する考え方を論じてある。

ここではまず、円筒の破壊力学解析では軸方向き裂の解析が最も重要であることを示した後に、種々の軸方向き裂を有する内圧円筒に対して混合モード応力拡大係数の解析を行なって円筒の肉厚比およびき裂個数とそれぞれのき裂配置と深さなどが解に及ぼす影響を体系的に明らかにし、設計および供用期間中の強度評価に有用となる多くの知見を導いている<sup>(7)</sup>。また、 $J$ 積分値に対しても回転円筒を対象とした解析を行ない<sup>(3)</sup>、非線形領域における本手法の精度を検討すると同時にその破壊強度特性を明らかにしたが、特にここでは非線形破壊力学評価において不可欠でありながらこれまで実構造物に対してはほとんど議論されていなかったき裂進展解析時の $J$ 積分の有効条件が詳細に検討してある。

第6章「加圧熱衝撃時の压力容器の破壊強度評価」においては、原子炉压力容器の構造健全性を考えるうえで最重要課題として注目されている加圧熱衝撃問題にマトリクス法破壊力学を適用して、非線形領域におけるパラメトリカル・サーベイを行なっている<sup>(2)(4)</sup>。

従来、遷移温度域における加圧熱衝撃時のき裂進展挙動においては熱衝撃による負荷が大きな影響力を持つことが知られていたが、ここでは上部槽領域における安定き裂進展量にはやはり熱衝撃による負荷が大きく影響するが、その後の不安定き裂進展の評価においては内圧が大きく影響することを定量的に明らかにし、構造健全性評価においては内圧の時間変動を正確に把握することが極めて重要となることなどを指摘している。また、 $J$ 積分の有効条件も前章と同様に詳細に調べた結果、加圧熱衝撃時の破壊力学評価においては広い範囲で $J$ 積分が破壊力学パラメータとして有効であるが、内圧が支配的な負荷状態では $J$ 積分の有効範囲は狭くその使用には注意を要することなどを初めて定量的に明らかにしている。

第7章「リング型破壊力学試験片へのマトリクス法の適用」においては、実機材料の破壊靱性および疲労特性評価のための試験片として注目されておりながら解析例の少ない各種リング型試験片に注目し、特に今後その実用が期待されるCリング試験片に対してマトリクス法破壊力学を適用し<sup>(6)</sup>、その混合モード応力拡大係数<sup>(6)</sup>および $J$ 積分値(未発表)を評価する手順を示している。

広範囲にわたる解析結果から、この種の試験片では実機の円筒と同様の応力状態が容易に再現でき、また変位制御型の実験を行なえば破壊力学パラメータのき裂深さに対する変動特性が本論文第5章および第6章に示した円筒のものと類似することを明らかにして、実機の破壊挙動の正確な予測にはこの種の試験片が適していることを指摘している。さらに、肉厚比およびき裂個数とその配置を選べば、かなり長いき裂進展の間応力拡大係数あるいは $J$ 積分値が一定となることを明らかにして、き裂長さの正確な計測を必要としない簡便な定 $\Delta K$ および定 $\Delta J$ 試験片としての利用も提唱している。

第8章「総括」は、以上の各章における成果とそこで得られた具体的な知見を要約すると同時に、強度特性あるいは破壊現象のさらなる解明のために残された課題を整理したものである。

本論文で示された新しい手法および評価体系の実現により、複雑な構造物の線形および非線形領域における破壊強度評価が実用レベルで可能となるであろう。また、本評価手法は単なる破壊力学解析の手法にとどまらず、各種パラメータの変更による破壊強度の変化を具体的かつ大局的に把握し、現象の本質に対する洞察を可能ならしめるものとしても工学的に非常に有用な方法論となるものと考えられる。



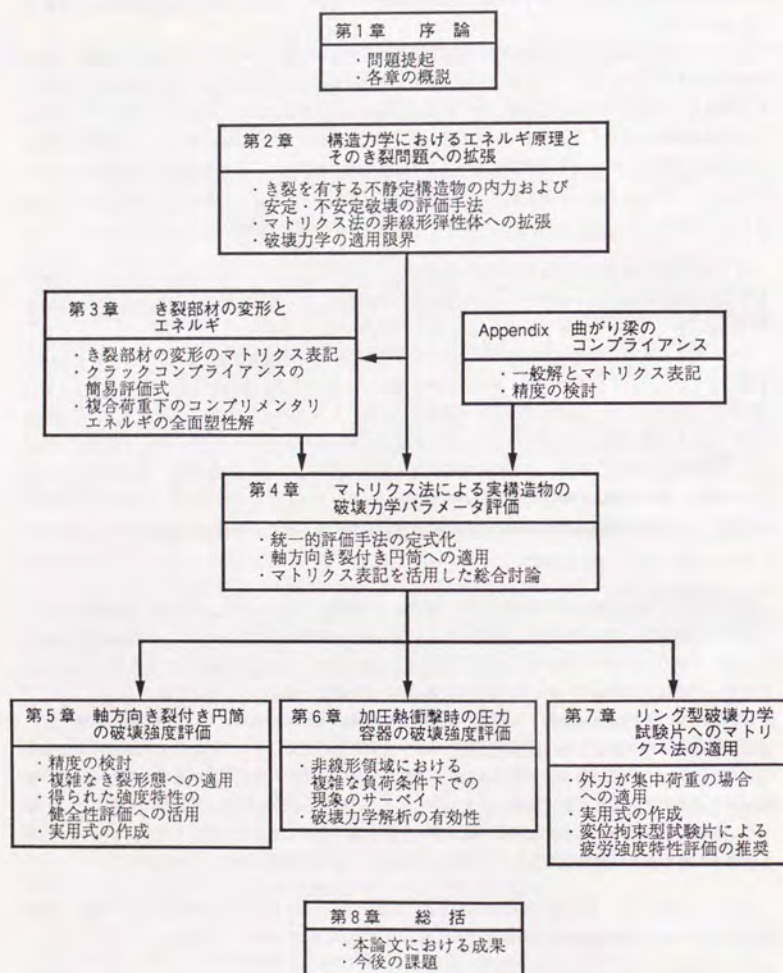


図 1.1 本論文における各章の内容とそれらの相互関係

## 2

## 構造力学におけるエネルギー原理と そのき裂問題への拡張

### 2.1 緒 言

有限要素法がそうであったように、構造解析の対象が複雑な構造(特に不静定構造)となり、さらにその非線形性を考慮すべき場合には、変形をベースとする材料力学的な解析よりもエネルギー原理に基づく解析の方が理論の展開などにおいてははるかに見通しが良い。また、導かれた式が結果的に変形をベースとした議論から求まるものと同じであっても、その物理的意味や力学的妥当性が明確であったり、さらにその導出過程から得られる情報量をはるかに豊富でありかつ有用であるなどの利点は経験上良く知られていることであろう。

本章では、このようなエネルギーベースの議論の利点を破壊力学解析にも活かすべく、良く知られたエネルギー停留原理をき裂問題に拡張する考え方を論じてある。特にここでは、トラスやラーメンなどの不静定構造の解析において絶大な威力を発揮した古典的構造解析理論に着目している。その具体的理由は次の二点に分けられる。まずその一つは、構造欠陥の代表として多くの実験的・解析的研究が重ねられている片側き裂材とこれを用いたラインスプリング法による多くの解析があることからわかるように、実際の構造要素は梁あるいは壁のように部材の一方の寸法が他の方向の寸法に比べて十分に小さく、その断面に作用する内力が集中力によって代表でき、また現にそのような場所に生じるき裂が構造健全性で問題となる場合が多い点である。このことは、トラスやラーメンを梁の集合として解析してきた古典構造力学と全く同じ根拠であり、そこで威力を発揮する手順をき裂問題に拡張することは極めて自然であると同時に多くの現実的問題に応用できることが期待されよう。

もう一つの理由として加えたいのが、延性不安定破壊における Tearing Instability の考え方とエネルギー停留原理に基づく不静定梁の解析の考え方が類似している点である。すなわち、不静定構造物の解析



においては構造全体の変形を考慮して内力を議論する必要があるが、Tearing Instability の考え方もまた後述するようにこれと全く同様の考え方に基づいている。ただし、き裂の存在および成長に伴って系全体の剛性が変化し、その結果として変化する内力をき裂長さの関数として偏微分の式で記述している点は、前章でも指摘したとおり Tearing Instability の難点であった。本章では、両手法の等価性から発想した変形をベースとする新しい延性不安定破壊評価手法も同時に示してある。

以下、まず 2.2 「構造力学におけるエネルギー諸原理」では、本論文の基礎理論となるエネルギー停留原理をそのき裂問題への拡張のための関連性に触れながら導く過程を示す。特に、本論文で重要となるコンプライアンスの概念と不静定構造物の解析原理については別に項を設けて詳細な説明を行なう。また、後節ではき裂を有する構造物の脆性および延性不安定破壊を構造不安定現象の一つとしてとらえ、エネルギー原理からそのクライテリアを導くが、その基礎となる構造物の弾性安定理論についてもここでその一般的概念を説明しておく。

2.3 「マトリクス法による不静定構造物の解析とその非線形弾性体への拡張」では、構造解析理論の表現と計算機を用いた数値演算に有利なマトリクス表記を用いて、エネルギー原理を用いた不静定構造物の解析手順を記述する考え方を示す。特にここでは、線形弾性体に対するコンプライアンスを用いた従来の定式化を示すと同時に、そこから発想される非線形弾性体特有の定式化の手順を新たに導いてある。なお、この定式化の考案によって始めて、本論文第4章に示されるき裂を有する構造物の非線形領域における解析手順をマトリクス表記を用いて書き下すことが可能となり(4.4節)、線形弾性範囲における定式化(4.3節)およびそれに基づく解析のみからははかり得なかった多くの知見が導かれる(4.4.3項)ものである点に注目されたい。

2.4 「エネルギー諸原理のき裂問題への拡張」では、き裂の存在によるコンプライアンスおよびコンプライメントエネルギーの増加が破壊力学パラメータから容易に計算できることに着目して、エネルギー諸原理の中にき裂の概念を導入するための基礎的検討を行なう。具体的には、荷重変位線図上でのエネルギー解放率の説明の延長として、エネルギー停留原理からき裂を有する不静定構造物の内力を求める方程式を導き、さらに弾性安定理論のき裂問題への拡張として不安定き裂進展の判定規程が統一的に導かれることを示す。また、本論文における解析手順と従来の破壊力学理論との対応を明確にして膨大な解析的知見および実験データの蓄積を効果的に活用すべく、筆者が別報で提案した荷重変位線図上において破壊を議論する手順との関連もここで同時に紹介したい。

ところで、上記の手順は弾性体のエネルギー平衡に基づいて構造物の内力さらにはエネルギー解放率等の物理量を求めるものであるが、ここで導かれた  $K$  値あるいは  $J$  積分値などが破壊力学パラメータとして有効である(すなわち破壊力学試験片から得られる破壊靱性値との比較によって構造物の破壊が議論できる)かどうかは以上の議論とは全くの別問題である。そこで、2.5 「き裂を有する構造物の安全性評価」ではこの種の問題に答えるべく、本論文に示す手法で得られる物理量が破壊力学パラメータとして有効となる条件を検討し、実構造物の解析においてこれらが容易に確認できる形に整理しておく。

## 2.2 構造力学におけるエネルギー諸原理

### 2.2.1 エネルギー諸原理<sup>(1)</sup>

弾性構造における各点の応力( $\sigma_{ij}$ )、ひずみ( $\epsilon_{ij}$ )、変形( $u_i$ )といった諸量は、理論的には次の微分方程式を積分し、与えられた境界条件のもとで解くことにより得られる<sup>(2)</sup>。

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.3)$$

ここで、式(2.1)、式(2.2)、式(2.3)はそれぞれ「応力のつりあい方程式」、「微小変形状態のひずみと変位の関係」および「構成方程式」であり、 $f_i$ は体積力の成分、 $C_{ijkl}$ は弾性係数を表している。また、 $i, j$ なる添字は $x_1-x_2-x_3$ 座標系における $x_j$ による偏微分を意味する。ところが、実際の構造解析においては解析的に積分を実行することはほとんどの場合不可能であり、以下に紹介するエネルギーに関する種々の原理および定理が重要な役割を果たすことになる。

本項では、本論文で提唱する解析理論の基礎となる構造力学におけるエネルギー諸原理を紹介する。ただし、ここでは次節以降の具体的議論に役立つようにこれらの相互関係と適用限界を整理することにとどめ、これらの導出手順および物理的意味の詳細は文献<sup>(1)(2)</sup>にゆずることとする。

(1) 仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理 図2.1に示されるように、いかなる剛体運動もできないように支持された物体に外力 $Q_i$  ( $i=1 \sim n$ )が作用する場合を考える。仮想仕事の原理および補仮想仕事の原理はエネルギー保存則(熱力学の第一法則)に式(2.1)、式(2.2)を用いることによって導かれ、それぞれ次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \delta W_E &= \delta U \\ \delta W_E^* &= \delta \Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ここで、 $\delta W_E$ 、 $\delta W_E^*$ は外力による仮想仕事および補仮想仕事、 $\delta U$ 、 $\delta \Omega$ は内力による仮想仕事および補仮想仕事<sup>\*1</sup>であり、それぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \delta W_E &= \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, & \delta U &= \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \\ \delta W_E^* &= \sum_{i=1}^n q_i \delta Q_i, & \delta \Omega &= \int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここで注意したいのは、式(2.4)は任意の材料特性<sup>\*2</sup>を有する構造が任意の荷重を受ける場合の微小変形<sup>\*3</sup>に対して成立することである。

<sup>\*1</sup> これらは、線形および非線形弾性体に対してはそれぞれひずみエネルギーおよび補ひずみエネルギーの増加分と等価となる。

<sup>\*2</sup> 式(2.3)が線形弾性・非線形弾性のいずれでも良いことはもちろん、弾性である必要もないことを意味する。

<sup>\*3</sup> 式(2.4)は微小変形状態でのひずみと変位の関係である式(2.2)を用いて導かれていることによる。



(2) 最小ポテンシャルエネルギーの原理と最小コンプリメンタリエネルギーの原理 次に、外力が保存力<sup>\*4</sup>であり次式のようにポテンシャル関数  $V_E$  およびコンプリメンタリポテンシャル関数  $V_E^*$  が定義でき、

$$\left. \begin{aligned} \delta V_E &= -\delta W_E = -\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \\ \delta V_E^* &= -\delta W_E^* = -\sum_{i=1}^n q_i \delta Q_i \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

かつ内力もまた保存力でありそのポテンシャル関数およびコンプリメンタリポテンシャル関数として  $U$  および  $\Omega$  が定義できるとき<sup>\*5</sup>、式(2.4)は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \delta U - \delta W_E &= \delta(U + V_E) = \delta \Pi = 0 \\ \delta \Omega - \delta W_E^* &= \delta(\Omega + V_E^*) = \delta \Pi^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

ここで、 $\Pi$  および  $\Pi^*$  はそれぞれ構造系の全ポテンシャルエネルギーおよび全コンプリメンタリエネルギーと呼ばれるものであり

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= U + V_E \\ \Pi^* &= \Omega + V_E^* \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

である。式(2.7)第1式は最小ポテンシャルエネルギーの原理、式(2.7)第2式は最小コンプリメンタリエネルギーの原理と呼ばれ、「与えられた境界条件における構造物の状態は  $\Pi$  あるいは  $\Pi^*$  の停留原理(第1変分がゼロとなる)によって与えられる」ことを意味している。

ここで、式(2.4)が任意の荷重を受ける弾性構造および非弾性構造の微小変形に対して成立するのに対し、式(2.7)はポテンシャル関数から導かれる力の作用を受ける線形弾性体および非線形弾性体の微小変形にのみ適用できるという相違に注意しなければならない。

(3) カスティリアーノの第1定理と第2定理 式(2.7)に示されたひずみエネルギーおよびコンプリメンタリエネルギーが、それぞれ互いに独立な  $n$  個の一般変位  $q_i$  および  $n$  個の外荷重  $Q_i$  で表すことができる場合を考える<sup>\*6</sup>。このとき、これらの第1変分は

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \\ \delta \Omega &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} \delta Q_i \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

<sup>\*4</sup> たとえば、表面力や体積力が位置だけの関数であるような場合、すなわち構造の変形とは無関係であるような場合に、これらは保存力 (conservative force) と呼ばれる。

<sup>\*5</sup> この仮定は、材料が線形あるいは非線形弾性体であるときに自動的に満足される。

<sup>\*6</sup> 外荷重が独立でない場合に対してもカスティリアーノの第2定理を拡張することは容易である。詳細は例えば文献<sup>(3)</sup>の153ページあるいは文献<sup>(4)</sup>の94ページおよび122ページなどで論ぜられているので参考にされたい。

と書けるから、式(2.6)と式(2.9)を式(2.7)に代入することにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} - q_i \right) \delta Q_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

上式において、仮定より変分  $\delta q_i$  あるいは  $\delta Q_i$  は任意にとることができるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_i} &= Q_i \quad (i=1 \sim n) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} &= q_i \quad (i=1 \sim n) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

が導かれる。式(2.11)はそれぞれカスティリアーノの第1定理および第2定理と呼ばれるものであり、いずれも独立な一般変位および外荷重が作用する線形弾性体および非線形弾性体からなる構造の微小変形に対して成立する。

以上で、構造力学の基本となるエネルギー停留原理をひととおり紹介した。このうち本論文で用いるのは式(2.7)および式(2.11)であり、これらはその都度注意深く明記してきた成立の前提条件からもわかるように、仮想仕事の原理に基づいて定式化される有限要素法などに比べればもちろん適用範囲は限定される。ところが、「外力がポテンシャルを持ちまたそれらは互いに独立である」あるいは「構造が弾性体である」という限定条件が本原理の適用範囲をそれほど狭くするものではないことは、材料力学あるいはエネルギー原理に基づく梁の構造力学が実用上重要な多くの問題を取り扱ってきたことから理解できよう。一方、線形破壊力学の範囲では言うまでもないが、非線形破壊力学においても  $J$  積分の定義がそもそも微小変形非線形弾性理論に基づいていることから、式(2.7)および式(2.11)の成立条件はこれまでの破壊力学における前提条件と何ら異なる所はないことがわかる<sup>\*7</sup>。すなわち、ここで示した各種エネルギー原理あるいは定理の前提は、これらをき裂問題に拡張した際の応用の妨げになることはなく、むしろ

「ポテンシャルエネルギー - (荷重による偏微分)  $\rightarrow$  不静定構造物の解析」

「ポテンシャルエネルギー - (き裂面積による偏微分)  $\rightarrow$  エネルギー解放率としての  $J$  積分」

という関連が明確になり、両者の適用限界を統一的に整理するのに役立つものとなるといえよう。

なお、以上の諸原理においては熱ひずみを考慮していないが、この場合には熱弾性ひずみエネルギーを導入することでほぼ同様な取り扱いが可能である。詳細は文献<sup>(1)(5)(6)</sup>を参照されたい。

<sup>\*7</sup> 「構造物が弾性体である」という条件は「除荷を伴わない範囲で任意の構成式に対して成立する」とも言い替えることができ、さらに厳密には「構造中のすべての点で比例荷重が成立する範囲で・・・」となる。すなわち、き裂先端近傍における除荷および非比例荷重はこの条件に抵触することとなるが、これはいわゆる  $J$  積分の有効条件として処理すべき問題であり、その詳細は本章2.5節を参照されたい。



## 2.2.2 コンプライアンスの導入 (その利点と限界)

前項では構造解析において極めて重要な原理および定理を紹介したが、これらは双対的なものであり、構造解析においてはそのどちらか一方を用いれば良い。このうち、仮想仕事の原理から展開される諸関係式を用いた構造解析は一般に変位法と呼ばれ、現在の有限要素法の主流となっているものである。これに対し、補仮想仕事の原理から展開される諸関係式を用いるものは応力法と呼ばれ、トラスやラーメンの解析に代表される古典構造力学において主として用いられていたものである\*8。

ところで、式(2.11)からもわかるように、両者の大きな違いはその具体的計算のために必要となるエネルギー( $U$ もしくは $\Omega$ )が、変位(あるいはひずみ)の関数として与えられているか、荷重(あるいは応力)の関数として与えられているかにある。そして、材料力学あるいは弾性論の手法で求めたりまた公式的にも整理されているもののほとんどは、梁などの部材に外荷重が作用する場合の変形あるいはエネルギーであって、この変形およびエネルギーは当然荷重の関数として与えられている。すなわち、これらの良く知られた解をうまく利用して複雑な骨組み構造の応答を調べることが古典構造力学の主要なテーマであり、荷重による偏微分で式が展開される応力法が主流となっていた理由である。

本論文では、この補仮想仕事の原理に基礎をおく応力法をき裂問題に拡張するわけであるが、これは

(1) 材料力学あるいは弾性論の手法で求まる解を有効に利用できる。  
という利点を引き継ぐことの他に

- (2) 非線形問題への拡張が容易である。
- (3) き裂問題への拡張が容易である。

という決定的な理由がある。(2)については、非線形問題と呼ばれるものが通常はある荷重に対する材料あるいは構造の非線形変形として認識され、変形が荷重の関数として与えられる場合の方が自然であることから容易に理解できるであろう。また(3)についても同様に、き裂部材の変形およびエネルギーが荷重の関数として整理された応力拡大係数等から導かれることによっている(本論文第3章参照)。

ところで、線形弾性範囲においては、上記(2)を除いた全く同じ思想の下、岡村ら<sup>(4)</sup>によりコンプライアンス概念(クラックコンプライアンス)に基づいて材料力学と破壊力学を結び付ける理論が展開されている。その理論の展開において現れる諸式の物理的意味は明確であり、かつその最終形は実用に便利な形として提示されているが、これは古典構造力学と同様コンプライアンスが荷重によらない定数となっていたことによるものである。ところが、非線形弾性体に対してはコンプライアンス<sup>\*9</sup>が荷重の関数となるという決定的な相違があるため、単なるコンプライアンス概念の拡張としてのアプローチには明らかに限界がある。かといって、コンプライアンス概念に基づく方法論は、その理論的蓄積はもとより、荷重及び変位という実測可能な物理量をベースとしているため実験との比較が容易であるなどの利点があり、これらを全く放棄してしまうこともまた現実的ではなからう。

そこで、本論文ではエネルギー原理に基づくアプローチをコンプライアンス概念に基づく方法論に帰着させることを前提とし、その過程で得られる知見をもとに両者の利点が活用できる形での新たな方法論の体系化を考える。その具体的考え方と手順は次節以降に示すこととし、ここではまず非線形弾性体と線形弾性体におけるコンプライアンスを仲介としたエネルギー原理の表記の相違を示して、解決すべき問題点を明確にしておく。

\*8 応力法と変位法のさらに詳しい比較検討は例えば文献<sup>(7)</sup>の299ページを参照されたい。

\*9 厳密にはタンジェンシャルコンプライアンスと呼ぶべきものであり、セカントコンプライアンスとの相違に注意しなければならない。なお、線形弾性体に対しては両者は一致する。

以下では、カステリアーノの第2定理を導いたときと同じ仮定をおく。すなわち、独立な $n$ 個の外荷重 $Q_i$  ( $i=1\sim n$ ) が作用する線形および非線形弾性体からなる構造物の微小変形を前提とする。このとき、コンプリメンタリエネルギー $\Omega$ と同様に $Q_i$ に対応する一般変位 $q_i$ <sup>\*10</sup>もまた $n$ 個の外荷重で表すことができるから、これらの第1変分はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \delta\Omega &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Omega}{\partial Q_i} \delta Q_i = \sum_{i=1}^n q_i \delta Q_i \\ \delta q_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta Q_j = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \delta Q_j \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

とかける。ここで、 $\lambda_{ij}$ はコンプライアンスであり、荷重 $Q_j$ の微小変化による $Q_i$ の作用点変位の $Q_i$ 方向の変化分を表している。また、カステリアーノの第2定理(式(2.11)第2式)とあわせれば、コンプライアンスは次式のように定義できる。

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad (2.13)$$

まず、式(2.12)をそのままマトリクス表記すれば次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta\Omega &= \{q\}^T \{\delta Q\} \\ \{\delta q\} &= [\lambda] \{\delta Q\} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

ここで、 $\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$ ,  $\{\delta q\} = \{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n\}^T$  および  $\{\delta Q\} = \{\delta Q_1, \delta Q_2, \dots, \delta Q_n\}^T$  は列マトリクスであり、 $[\lambda]$ は上記の $\lambda_{ij}$ を要素とするコンプライアンスマトリクスと呼ばれる正方マトリクス( $[\lambda] = [\lambda]^T$ ,  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ )である。このように、非線形弾性体に対するマトリクス表記は一般に増分形で表示せざるを得ず、また $\lambda_{ij}$ が荷重 $Q_i$ の関数となっている点でコンプライアンスの導入にはあまり利点が見い出せない。

一方、線形弾性体の場合には変形が荷重に比例することからも理解できるように、式(2.13)から $\lambda_{ij}$ は定数であることがわかる。このとき、式(2.12)をそれぞれ負荷経路に沿って積分すればコンプリメンタリエネルギーおよび変位が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} Q_i Q_j \\ q_i &= \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} Q_j \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

これらをマトリクス表記すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \{q\}^T \{Q\} = \frac{1}{2} \{Q\}^T [\lambda] \{Q\} \\ \{q\} &= [\lambda] \{Q\} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

式(2.14)と式(2.16)の最大の相違点は、線形弾性体の場合には $\Omega$ が $[\lambda]$ を用いて表せる点にある。これまでのコンプライアンス概念に基づく諸論をそのままの形で非線形弾性問題に拡張することが困難であったのは、まさにこのことに起因するものである。なぜならば、マトリクス法は後述するように結果的には変形のみで方程式が記述されるが、その導出にエネルギー平衡条件を用いるからである。次節に

\*10 この具体的な定義は次節で行なう。



においては、この問題点を巧みに解消し、非線形弾性体にも適用可能となるマトリクス解法の新たな手順を示す。

### 2.2.3 不静定構造物の解析原理

構造物の応力分布(内力)が静力学的な平衡条件だけで決定できるときにはその構造物は静定(statically determinate)であるといい、片持ち梁や両端単純支持梁などがその例である。ところが、実際の構造物では静力学的な平衡条件のみでは内力が定まらない場合の方が普通であり、このような構造を不静定(statically indeterminate)構造という。両端が固定された梁などがその代表例であるが、内力が定まらなければ当然エネルギーも計算できず、式(2.11)などを用いて変形を議論することもできない。つまり、この場合には特別な取り扱いが必要となるわけである。

本項では、不静定構造物の解析原理およびエネルギー原理の応用としてのその解析手順を説明する。

不静定構造では、平衡条件の他に構造全体の変形を考慮しなければその応答を知ることができない。すなわち、不静定構造の解析手順としては、まず構造物を適当な断面で切断していくつかの静定構造物に分け(静定化)、切断面の変形が切断前と同じになるように適当な力(不静定力)を作用させる<sup>\*11</sup>という方法が一般にとられる。この不静定力が定まればすべての内力が定まるわけだが、不静定力を切断面の変形の連続条件から導く際に構造全体の変形を議論する必要が生じるわけである。

上記の手順は、部材の個数が多くなると大規模な連立方程式を計算機により解くことになり、これは応力法と呼ばれる有限要素法の一形態に他ならない<sup>\*12</sup>。ところが逆に、構造力学的に妥当な仮定に基づいた単純な静定化が可能な場合<sup>\*13</sup>には、解析手順が非常に簡潔に示されるばかりか、その解析過程が陽に示されることから構造強度の本質的議論に極めて有効な手段となる。以下では、最も簡単な例をあげて不静定構造物の解析原理と解析における仮定を具体的に説明する。さらに複雑なものについては、マトリクス法を用いた一般的取り扱いを次節で説明する。

図2.2(a)に示されるように  $I$  個の互いに独立な外荷重  $Q_i$  ( $i=1 \sim I$ ) を受ける両端固定梁を考える。まず、図2.2(b)に示されるように静定化のためにこの右端を切断し、その切断面に  $J$  個の不静定力  $R_j$  ( $j=1 \sim J$ ) を作用させる<sup>\*14</sup>。このとき、梁のコンプリメンタリエネルギー  $\Omega$  は外荷重と不静定力の関数と

<sup>\*11</sup> 不静定力は構造中のどこに作用させても良いが、切断面に作用させる場合が普通である。

<sup>\*12</sup> 有限要素法の多くは前述のとおり変位法の拡張である。このことは、応力法ではコンプライアンスマトリクスが用いられるのに対して、変位法では剛性マトリクスが用いられることから理解できよう。

<sup>\*13</sup> 図2.2にも示されるように、集中荷重を不静定力とする単純化がこの種の解析には不可欠であり、この単純化が近似的に成立しない場合の解析は有限要素法等によらざるを得ないことになる。本論文では、もちろんこの単純化が妥当となるようなものを対象とする。

<sup>\*14</sup> 作用させるべき不静定力は各切断面に対して三次元問題では一般に3個の集中力と3個の偶力(モーメント)の計6個であり、二次元問題では図2.2(b)に示されるように2個の集中荷重と1個のモーメントの3個である。ただし、二次元問題で不静定力の作用点がトラスの接合部のような摩擦なしのヒンジである場合の不静定力はモーメントを除いた2個であり、またローラーによる単純支持の場合にはさらに軸力が除かれて1個となる。

なり、また外部コンプリメンタリエネルギーは  $V_E^*$  式(2.6)第2式と同じであるから、最小コンプリメンタリエネルギーの原理(式(2.7)第2式)により

$$\begin{aligned}\delta \Pi^* &= \delta \Omega + \delta V_E^* \\ &= \sum_{i=1}^I \frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} \delta Q_i + \sum_{j=1}^J \frac{\partial \Omega}{\partial R_j} \delta R_j - \sum_{i=1}^I q_i \delta Q_i \\ &= \sum_{i=1}^I \left( \frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} - q_i \right) \delta Q_i + \sum_{j=1}^J \frac{\partial \Omega}{\partial R_j} \delta R_j = 0\end{aligned}\quad (2.17)$$

が導かれる。上式において、仮定により変分  $\delta Q_i$ ,  $\delta R_j$  は任意にとることができるから

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} = q_i \quad (i=1 \sim I) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial R_j} = 0 \quad (j=1 \sim J) \quad (2.19)$$

を得る。式(2.18)は静定構造に対して導かれたカスティリアーノの第2定理(式(2.11)第2式)と同じ表記であるが、 $\Omega$  の引数として  $Q_i$  の他に  $R_j$  が含まれている点に注意しなければならない。一方、式(2.19)はカスティリアーノの最小仕事の定理と呼ばれるものであり、この  $J$  個の連立方程式を解くことによって不静定力  $R_j$  が求まる<sup>\*15</sup>ことから、同式は「不静定力は構造全体のコンプリメンタリエネルギーが最小になるようなものでなければならない」ことを意味していることがわかる。こうして、式(2.19)から求めた  $R_j$  と式(2.18)を用いることにより  $q_i$  が求まり、また静力学的な力のつりあいからすべての内力が定まることになる。

### 2.2.4 構造物の弾性安定理論

これまでに紹介してきたエネルギー原理は、与えられた外荷重に対して構造全体のポテンシャルエネルギー(あるいはコンプリメンタリエネルギー)が停留する条件から内力あるいは荷重点変位といった構造物の状態を求めるものであった。ところが、こうして求められたつり合い状態が安定な状態であるか否かはこれとは別問題である。ここでは、この種の不安定現象とき裂問題との関連について簡単に触れたあと、エネルギー原理の別の応用として構造物の安定性を議論する考え方を紹介する。

不安定現象の分類方法は種々多様である<sup>(8)(9)</sup>が、大別すれば弾性不安定現象と塑性不安定現象に分けることができ、前者の代表として分岐座屈(bifurcation buckling)、飛び移り座屈(snap-through buckling)および屈服(flattening instability, collapse)があげられ<sup>\*16</sup>、後者の代表としては丸棒の引張り時に観察されるくびれ(necking)があげられる。これらの判定条件はいずれも本項に示すエネルギー原

<sup>\*15</sup> 非線形弾性体であっても、通常は  $\Omega$  が個々の荷重に対して単調増加関数となることから、解が一意に定まることが保証される。

<sup>\*16</sup> 外力が保存力を有する場合(保存力系, conservative system)とそうでない場合(非保存力系, nonconservative system)という分類も良く見かけられる。



理から導かれるが、実構造物を考えた場合の現実問題としては一般には有限要素法等の数値解析手法によらざるをえないのは前述の内力の解析と同様である<sup>\*17</sup>。

さらに、詳細は後述するが、同様な不安定現象としてき裂(一般に損傷と考えても良い)を有する構造物の安定・不安定破壊現象(あるいはき裂の安定・不安定進展)がある。この判定基準もまた、エネルギーの観点から導かれるものである(2.4節参照)が、通常は他の不安定現象とは別に取り扱われているようである。2.4節では、き裂問題へのエネルギー原理の拡張の一つとして、本問題が屈服やくびれと全く同様に系の剛性の低下に起因するエネルギーの不安定現象として荷重変位線図上で議論できることが示される<sup>\*18</sup>。

**安定の判定基準** まず最初に構造が安定であるとはどういう意味であるかを定義しておく。2.2.1項(2)で考えたように外力系が保存力であり<sup>\*19</sup>構造の全ポテンシャルエネルギー( $\Pi$ )あるいは全コンプリメンタリエネルギー( $\Pi^*$ )の第一変分が停留する解の近傍において、すべての境界条件を満足する仮想的な微小変位あるいは外荷重(それぞれ式(2.6)の $\delta q_i$ および $\delta Q_i$ に対応する)が作用する場合を考える。この仮想状態から構造系を解放したとき、系がもとの状態に戻るならばそのつり合い状態は安定(stable)であるといい、そうでないときに不安定(unstable)であるという。このことを数学的に表現すれば、「 $q_i$ あるいは $Q_i$ の微小な変化に対して $\Pi$ あるいは $\Pi^*$ が増加するとき系は安定であり、減少するとき系は不安定である」となる。

次に、この安定の判定基準を数式で表現する。簡単化のため $\Pi$ および $\Pi^*$ がそれぞれ独立な2個の一般変位( $q_1, q_2$ )あるいは一般化力( $Q_1, Q_2$ )で表されているとすると、それぞれの $q_i$ および $Q_i$ のまわりのテイラー展開が次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Pi(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2) &= \Pi(q_1, q_2) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} (\delta q_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} (\delta q_2)^2 \right] + \cdots \\ \Pi^*(Q_1 + \delta Q_1, Q_2 + \delta Q_2) &= \Pi^*(Q_1, Q_2) + \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_2} \delta Q_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial Q_1^2} (\delta Q_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial Q_1 \partial Q_2} \delta Q_1 \delta Q_2 + \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial Q_2^2} (\delta Q_2)^2 \right] + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

<sup>\*17</sup> この種の不安定現象を基本経路からの解の分岐という観点からとらえて分岐解析によって不安定点を求め、さらには分岐後の変形の局所化現象を有限要素法によって追跡するといった研究も近年盛んに行なわれている(10)~(14)。

<sup>\*18</sup> 弾性体における屈服では、例えば薄肉円筒が曲げ荷重を受ける場合に断面が疑似楕円状に変形することによって曲げ剛性が低下することから幾何学的(要因による)不安定と呼ばれ、一方くびれでは降伏点を越えた材料の接線剛性の低下に起因することから材料的(要因による)不安定と呼ばれているが、一般の不安定現象では両者が互いに影響し合っている場合の方が普通である。き裂問題はき裂の進展によって局部的剛性が低下することから材料的不安定に属するが、応力ひずみ関係式が与えられれば不安定点が求まるくびれと異なり、き裂問題では荷重とき裂長さの関係式であるき裂進展則(これが $J_R$ 曲線に他ならないことは2.4節で明らかにされる)が与えられたときに不安定点が求まることになる。

<sup>\*19</sup> 一般には外力がポテンシャルを持つ必要はないが、以下の議論ではこの前提から出発しても十分に一般性のある結果が導かれる。

これより、 $\Pi$  および  $\Pi^*$  の変分は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Pi &= \Pi(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2) - \Pi(q_1, q_2) = \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \cdots \\ \Delta \Pi^* &= \Pi^*(Q_1 + \delta Q_1, Q_2 + \delta Q_2) - \Pi^*(Q_1, Q_2) = \delta \Pi^* + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi^* + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \delta \Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 \\ \delta^2 \Pi &= \delta(\delta \Pi) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} (\delta q_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} (\delta q_2)^2 \\ \delta \Pi^* &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_2} \delta Q_2 \\ \delta^2 \Pi^* &= \delta(\delta \Pi^*) = \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial Q_1^2} (\delta Q_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial Q_1 \partial Q_2} \delta Q_1 \delta Q_2 + \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial Q_2^2} (\delta Q_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

である。ここで、 $\Delta \Pi$  および  $\Delta \Pi^*$  の符号はテイラー展開の最初のゼロでない項の符号に一致し、また仮定より最小ポテンシャルエネルギーの定理および最小コンプリメンタリエネルギーの定理によって恒等的に  $\delta \Pi = \delta \Pi^* = 0$  であるから、 $\Delta \Pi$  および  $\Delta \Pi^*$  の符号はそれぞれ  $\delta^2 \Pi$  および  $\delta^2 \Pi^*$  の符号に一致することがわかる。すなわち、

$$\delta^2 \Pi > 0 \quad \text{あるいは} \quad \delta^2 \Pi^* > 0 \quad (2.23)$$

であるとき、 $\Pi$  あるいは  $\Pi^*$  が極小値をとり、系は安定なつり合い状態にあるといえ、逆に

$$\delta^2 \Pi < 0 \quad \text{あるいは} \quad \delta^2 \Pi^* < 0 \quad (2.24)$$

のときは、 $\Pi$  あるいは  $\Pi^*$  は極大値となつて、系の状態は不安定であるといえる。

一般には第2変分もまたゼロとなり第3、第4変分の符号により安定を判定する場合も出てくるが、考え方は全く同様である。また、第2変分以降のすべての高次変分がすべてゼロであるような場合は中立平衡状態と呼ばれ、その系は与えられた仮想変形をしたままの状態を保持することになる。なお、き裂問題では第2変分の正負の判定までで問題が解決できる。



## 2.3 マトリクス法による不静定構造物の解析とその非線形弾性体への拡張

マトリクス法が構造解析において極めて有効な手段として広く認められている理由は、ここでその背景を詳しく紹介するまでもなく次の2点に集約できよう。

(1) 構造解析理論の表現および式の展開に便利である。

(2) 理論を表す方程式を計算機に組み込み易いマトリクス演算によって解くことができる。

ただし、古典構造力学<sup>(7)(15)</sup>では主として(1)に関心がおかれていたのに対して、有限要素法では(1)は既成事実のごとく扱われ、(2)に関する技法の研究に重点がおかれているように思われる。

本節では、古典構造力学と同様(1)に主眼をおき、複雑な不静定構造物をマトリクス表記を用いて見直し良く解析する手順を検討する。具体的には、まず始めに前節に示した基本原理により不静定構造物を解析する手順をマトリクス表記を用いて表現する基本的な考え方を示した後に、コンプライアンスマトリクスを導入した線形弾性体に対する具体的解析手順を紹介する。一方、非線形弾性体に対しては、再三述べてきたようにコンプライアンスマトリクスが導入できないため、マトリクス法の適用は困難であるとされていた。そこでここでは次に、線形弾性体に対して展開された諸式の物理的意味を考え、そこから発想した統一的な解析手順を新たに導く。

## 2.3.1 基本的考え方

以下では、 $I$  個の互いに独立な外荷重  $Q_i$  ( $i=1\sim I$ ) を受ける図 2.3(a) に示されるような不静定構造物を考える<sup>\*20</sup>。まず、これを適当な断面(図中では右端)で切断して静定な構造とし、その切断面に  $J$  個の不静定力  $R_j$  ( $j=1\sim J$ ) を作用させる<sup>\*21</sup>。ここまでの手順は 2.2.2 節に示したものと全く同じであり、マトリクス表記を導入する利点はさほど大きくはない。ところが、実際の計算には構造全体の变形あるいはエネルギーの具体形が必要となるため、任意の構造形状に対してこれを準備しておくのは現実的ではない。そこで通常は、構造全体を複数の部材(member)に分割し、個々の部材に蓄えられるエネルギーの合計として構造全体のエネルギーを算出するという方法がとられることになる。このとき、マトリクス表記およびマトリクス演算が非常に有用な役割を果たすわけである。もちろん部材の分割の際には、個々の部材の变形あるいはエネルギーが梁のように材料力学あるいは弾性論の手法によって容易に計算できるように工夫する必要があり、この部材の選び方によって精度や計算効率がかなり左右される点にも注意しなければならない。

そこで次に、構造物を  $K$  個の部材に分け、その  $k$  番目の部材に作用する部材力を  $P_{ki}$  ( $k=1\sim K$ ,  $i=1\sim L$ ) とする。ただし、ここでいう部材力とは図 2.3(b) に示される個々の無拘束状態の部材に作用するすべての荷重を意味しており、切断面に作用する内力(局所的な不静定力とも考えられる)の他に外力および不静定力が含まれている<sup>\*22</sup>。

<sup>\*20</sup> 図 2.3 には後の展開に便利となるようき裂部材を示してあるが、本節では当面他の部材と同等に扱うこととする。

<sup>\*21</sup> 不静定力の個数については、前節 2.2.3 項の脚注参照。

<sup>\*22</sup> ただし、本論文第4章で展開する具体的解析においては、き裂問題との関連上部材力を内力、外力、不静定力に分解して諸関係式を導いているため、多少の表記上の相違がある点に注意されたい。

まず、各部材のコンプリメンタリエネルギーを  $\Omega_k$  ( $k=1\sim K$ ) とすると、これは各部材に作用する部材力  $P_{ki}$  のみの関数として表すことができるから次のように書ける。

$$\Omega_k = \Omega_k(P_{k1}, P_{k2}, \dots, P_{kL}) \quad (2.25)$$

また、静力学的な力の釣合を考えれば、部材力を表す列マトリクス  $\{P_k\} = \{P_{k1}, P_{k2}, \dots, P_{kL}\}^T$  は不静定力および外力を表す列マトリクス  $\{R\} = \{R_1, R_2, \dots, R_J\}^T$ ,  $\{Q\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_I\}^T$  によって

$$\{P_k\} = [D_k]\{R\} + [G_k]\{Q\} \quad (2.26)$$

と表せるから、式(2.25)は

$$\Omega_k = \Omega_k(R_1, R_2, \dots, R_J, Q_1, Q_2, \dots, Q_I) \quad (2.27)$$

とも書ける。ここで、 $[D_k]$ ,  $[G_k]$  はそれぞれ  $L$  行  $J$  列および  $L$  行  $I$  列のマトリクスであり、式(2.26)は静力学的釣合方程式のマトリクス表記であるともいえる。

一方、こうして求められる  $\Omega_k$  を用いて、構造全体のコンプリメンタリエネルギー  $\Omega^{total}$  は

$$\Omega^{total} = \sum_{k=1}^K \Omega_k \quad (2.28)$$

と書けるから、「不静定力は仕事をしない」ことを意味するカスティリアーノの最小仕事の定理(式(2.19))により、次式が導かれる。

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\partial \Omega_k}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (2.29)$$

ただし、 $\{\partial \Omega / \partial R\}$  は  $\{R\}$  の各成分による偏微分からなる列マトリクスを表すものである。ここで、コンプリメンタリエネルギーの荷重による偏微分がその荷重作用点における荷重方向の变形量を意味するものであることを思い出せば、上式は「切断面(不静定力作用面)の变形の連続条件」とも解釈できるものであることが理解できよう。

以上が、線形弾性体および非線形弾性体に共通して一般に成立する関係式である。式(2.29)は  $J$  個(不静定力の個数)の連立方程式を表しており、また式(2.27)に示されるように  $\Omega_k$  は  $\{R\}$  の各成分の関数であるから、理論的にはこれを解くことによって  $\{R\}$  が求まることになる。 $\{R\}$  さえ求まれば、式(2.26)を用いてすべての内力が求まり、また式(2.25)あるいは式(2.27)にカスティリアーノの第2定理を適用すれば各荷重点変形も求まることになる。

## 2.3.2 線形弾性体に対する一般の定式化

線形弾性体に対しては、2.2.2 項でも述べたように、コンプライアンスを導入することにより式(2.29)に示した不静定力を求めるための連立方程式を陽な形で解くことができる。

すなわち、式(2.16)にも示したように、線形弾性体の場合の各部材のコンプリメンタリエネルギー  $\Omega_k$  ( $k=1\sim K$ ) は、対応する部材力を表す列マトリクス  $\{P_k\}$  ( $L$  行  $L$  列) およびコンプライアンスマトリクス  $[\lambda_k]$  ( $L$  行  $L$  列) を用いて次式のように表すことができる。

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \{P_k\}^T [\lambda_k] \{P_k\} \quad (2.30)$$



次に、式(2.26)を用いて式(2.30)の部材力を消去すれば、各部材のコンプリメンタリエネルギーが次式のように陽に書き表せる。

$$\begin{aligned}\Omega_k &= \frac{1}{2} \{P_k\}^T [\lambda_k] \{P_k\} \\ &= \frac{1}{2} ( \{R\}^T [D_k]^T + \{Q\}^T [G_k]^T ) [\lambda_k] ( [D_k] \{R\} + [G_k] \{Q\} ) \\ &= \frac{1}{2} [ \{R\}^T [D_k]^T [\lambda_k] [D_k] \{R\} + \{Q\}^T [G_k]^T [\lambda_k] [G_k] \{Q\} \\ &\quad + \{R\}^T [D_k]^T [\lambda_k] [G_k] \{Q\} + \{Q\}^T [G_k]^T [\lambda_k] [D_k] \{R\} ]\end{aligned}\quad (2.31)$$

またここで、式(2.31)の各項はスカラー量であるから、コンプライアンスマトリクスの対称性  $[\lambda_k]^T = [\lambda_k]$  を用いると次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned}\{Q\}^T [G_k]^T [\lambda_k] [D_k] \{R\} &= ( \{Q\}^T [G_k]^T [\lambda_k] [D_k] \{R\} )^T \\ &= \{R\}^T [D_k]^T [\lambda_k] [G_k] \{Q\} = \{R\}^T [D_k]^T [\lambda_k] [G_k] \{Q\}\end{aligned}\quad (2.32)$$

このとき、式(2.30)および式(2.31)がそれぞれ前項に示した式(2.25)および式(2.27)に対応することは言うまでもあるまい。

こうして、式(2.31)および式(2.32)を用いることにより、構造全体のコンプリメンタリエネルギー  $\Omega^{total}$  が式(2.28)から次式のように得られる<sup>†</sup>。

$$\left. \begin{aligned}\Omega^{total} &= \frac{1}{2} [ \{R\}^T [A] \{R\} + 2 \{R\}^T [B] \{Q\} + \{Q\}^T [C] \{Q\} ] \\ [A] &= \sum_{k=1}^K [D_k]^T [\lambda_k] [D_k] \\ [B] &= \sum_{k=1}^K [D_k]^T [\lambda_k] [G_k] \\ [C] &= \sum_{k=1}^K [G_k]^T [\lambda_k] [G_k]\end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

上式においては、構造全体のコンプリメンタリエネルギーが不静定力  $\{R\}$  と外荷重  $\{Q\}$  のみで陽に表現されていることに注目されたい。すなわち、カステイリアーノの最小仕事の定理を表す式(2.29)は簡単に計算でき、

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = [A] \{R\} + [B] \{Q\} = \{0\} \quad (2.34)$$

となる。これを  $\{R\}$  について解けば、

$$\{R\} = -[A]^{-1} [B] \{Q\} \quad (2.35)$$

のように不静定力が陽に得られる。

<sup>†</sup> ここで、式(2.33)第2式は有限要素法で見慣れた形となっていることに気付くであろう。すなわち、ここでは  $[\lambda_k]$  がいわゆる要素コンプライアンスマトリクスであり、その寄与分の和として与えられる  $[A]$  が系のコンプライアンスマトリクスを表していると対応させると理解に便利かと思われる。

こうして  $\{R\}$  が求まれば、前述のとおり式(2.26)から

$$\{P_k\} = ( [G_k] - [D_k][A]^{-1}[B] ) \{Q\} \quad (2.36)$$

のように部材力が得られる。さらに、カステイリアーノの第2定理を用いれば外荷重を含めてすべての部材力作用点における部材力方向の変形  $\{p_k\}$ <sup>\*23</sup> を導くことができる。すなわち、まず構造全体について考えれば、静定化された構造全体には外荷重  $\{Q\}$  と不静定力  $\{R\}$  が計  $(I+J)$  個の独立な外力として作用しているわけであるから、カステイリアーノの第2定理をこれに適用することができ、このとき式(2.33)から外荷重  $\{Q\}$  の作用点変位  $\{q\}$  が次のように導かれる。

$$\{q\} = \left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial Q} \right\} = [B] \{R\} + [C] \{Q\} = ( [C] - [B][A]^{-1}[B] ) \{Q\} \quad (2.37)$$

一方個々の部材について考えれば、これには部材力  $\{P_k\}$  が  $L$  個の独立な外力として作用しているわけであるから、同様にカステイリアーノの第2定理が適用でき、このとき式(2.30)から部材力の作用点変位  $\{p_k\}$  が次のように導かれる。

$$\{p_k\} = \left\{ \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_k} \right\} = [\lambda_k] \{P_k\} = [\lambda_k] ( [G_k] - [D_k][A]^{-1}[B] ) \{Q\} \quad (2.38)$$

### 2.3.3 非線形弾性体へのマトリクス法の拡張

以上のように、線形弾性体の場合には式(2.30)を導入することによって諸関係式をすべて陽な形で導くことができた。ところが、2.2.2節で詳しく説明したように、非線形弾性体の場合には一般に式(2.30)は成立しないため式(2.29)を別の考え方で解く必要が生じる。以下では、線形弾性体に対して得られた諸式の物理的意味を考えることによって、非線形弾性体にも適用できるマトリクス解法を新たに提案する。

まず、線形弾性体に対して導いた式(2.34)の意味を考えてみる。式(2.33)に示される  $[A]$ 、 $[B]$  を用いて式(2.34)を具体的に書き下せば、

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} &= \sum_{k=1}^K ( [D_k]^T [\lambda_k] [D_k] \{R\} + [D_k]^T [\lambda_k] [G_k] \{Q\} ) \\ &= \sum_{k=1}^K [D_k]^T [\lambda_k] ( [D_k] \{R\} + [G_k] \{Q\} ) \\ &= \sum_{k=1}^K [D_k]^T [\lambda_k] \{P_k\} \quad (\because \text{式(2.26)}) \\ &= \sum_{k=1}^K [D_k]^T \{p_k\} \quad (\because \text{式(2.38)}) \\ &= \sum_{k=1}^K [D_k]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_k} \right\} = \{0\} \quad (\because \text{式(2.38)})\end{aligned} \quad (2.39)$$

<sup>\*23</sup>  $P_{kl}$  が集中力の場合には  $p_{kl}$  は  $P_{kl}$  の作用点における作用点方向の直線変位を表し、 $P_{kl}$  がモーメントの場合には  $p_{kl}$  はそのモーメント軸まわりの回転変位を表す。一方、 $P_{kl}$  が分布力である場合の  $p_{kl}$  については、これらによる仕事は線形弾性体の場合に  $\frac{1}{2} p_{kl} P_{kl}$  であることを考えれば、 $p_{kl}$  は  $P_{kl}$  の作用部分全体の平均変位を表していると考えられる。



となる。上式において、 $\{p_k\}$  および  $\{\partial\Omega_k/\partial P_k\}$  が各部材の部材力作用点の変形であることを考えれば、カスティーリャーノの最小仕事の定理が「不静定力作用点における変形は各部材の変形の寄与分の合計として表され、不静定力はこの合計がゼロになる（すなわち切断前と同じ変形状態となる）ように定まる」ことを意味するものであることがわかる。ここで、力学量の変換マトリクスとして計算される  $[D_k]$  の転置である  $[D_k]^T$  が変形量の変換マトリクスとして機能している点に注目されたい。

以下では、このような式(2.39)の解釈に基づき、具体的には式(2.39)の4行目と5行目は非線形弾性体に対しても成立する<sup>\*24</sup>ことに着目して、線形および非線形弾性体に共通して成立する一般的関係式を導く。

式(2.39)では次の関係式を逆に導いたことになる。

$$\left\{ \frac{\partial\Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial R} \right\} = \sum_{k=1}^K [D_k]^T \left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_k} \right\} \quad (2.40)$$

ここでは、まず始めに式(2.40)が弾性体に対して一般に成立するものであることを証明する。

まず、 $k$  番目の部材に着目したとき、式(2.25)より  $\Omega_k$  の全微分は次のように表される。

$$d\Omega_k = \sum_{l=1}^L \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_{kl}} dP_{kl} \quad (2.41)$$

よって、上式の両辺を不静定力  $R_j$  で偏微分すれば次式を得る。

$$\frac{\partial\Omega_k}{\partial R_j} = \sum_{l=1}^L \frac{\partial P_{kl}}{\partial R_j} \cdot \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_{kl}} = \left\{ \frac{\partial P_{k1}}{\partial R_j} \quad \frac{\partial P_{k2}}{\partial R_j} \quad \dots \quad \frac{\partial P_{kL}}{\partial R_j} \right\} \left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_k} \right\} \quad (2.42)$$

次に、式(2.26)において  $[D_k]$  の  $l$  行  $j$  列の要素を  $D_k(l, j)$  と書くことにすれば、同式から

$$\frac{\partial P_{kl}}{\partial R_j} = D_k(l, j) \quad (2.43)$$

であることがわかるから、これを式(2.42)に代入すると

$$\frac{\partial\Omega_k}{\partial R_j} = \{ D_k(1, j) \quad D_k(2, j) \quad \dots \quad D_k(L, j) \} \left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_k} \right\} \quad (2.44)$$

となる。すべての  $R_j$  ( $j=1 \sim J$ ) に対して同様の計算を行ない、結果をマトリクスで表すと

$$\left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial R} \right\} = [D_k]^T \left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_k} \right\} \quad (2.45)$$

となる。これは、任意の  $k$  ( $k=1 \sim K$ ) に対して成立するから、以上で式(2.40)が証明されたことになる。

こうして、線形弾性体の解析手順を参考にすれば、非線形弾性体に対する不静定構造物の一般的解析手順は以下になる。すなわち、まず基礎的な関係式として以下のものが与えられる。

$$\sum_{k=1}^K [D_k]^T \left\{ \frac{\partial\Omega_k}{\partial P_k} \right\} \left( = \sum_{k=1}^K [D_k]^T \{p_k\} \right) = \{0\} \quad (2.46)$$

$$\{P_k\} = [D_k]\{R\} + [G_k]\{Q\} \quad (2.47)$$

<sup>\*24</sup> 4行目から3行目への式の展開が非線形弾性体に対しては成立しないことは  $\{\delta p_k\} = [\lambda_k]\{\delta P_k\}$  である(式(2.14)参照)ことから明らかであろう。このことから端的にわかるように、非線形弾性体におけるこの種の議論にコンプライアンスの概念を導入することは理論的に困難なのである。

ここで、式(2.46)はカスティーリャーノの最小仕事の原理を表している。以下、

(1) 式(2.47)を用いて  $\{P_k\}$  さらには  $\{p_k\} (= \{\partial\Omega_k/\partial P_k\})$  を  $\{R\}$  に対して求める。

(2) 式(2.46)の連立方程式(これは不静定力の個数  $= J$  元となる)を解いて  $\{R\}$  を決定する。

(3)  $\{R\}$  が求めれば、式(2.36)～式(2.38)と同様にしてすべての内力と変形が決定できる。

という手順を踏めば良い。

ここで念のために再記すると、一般には  $\{\delta p_k\} = [\lambda_k]\{\delta P_k\}$  であるものが線形弾性体の場合にのみ  $\{p_k\} = [\lambda_k]\{P_k\}$  と書け、このときに限って式(2.46)が  $\{R\}$  の一次方程式となり(式(2.34)参照)、マトリクス演算により  $\{R\}$  を陽に解くことができる(式(2.35)参照)わけである。すなわち、非線形弾性体に対して式(2.46)の連立方程式を解く際には多変数の Newton 法などによることになるが、このとき  $\{p_k\}$  が一般に  $\{R\}$  の増加関数となることから  $\{R\}$  が一意に求まることは保証されている。



## 2.4 エネルギー諸原理のき裂問題への拡張

本節では、弾性構造物中にき裂がある場合の構造全体のエネルギーおよび変形量を取り扱う方法について議論する。すなわち、構造物中でき裂が発生・成長する時にはその構造物は明らかに変形し易くなるが、以下ではまずこれをき裂の存在による変形あるいはコンプリメンタリエネルギーの増加と考へ、荷重変位線図を用いてその数学的・物理的意味を明らかにする(2.4.1項)。またここでは、エネルギー原理をき裂問題と関連させて考える際に重要な概念となるエネルギー解放率(Energy Release Ratio;  $G$ )を紹介し、上記の諸量との相互関係を導いておく。そうした上で、前節までで明らかにされたエネルギー諸原理の物理的意味を考へ、新たに導入された上記の物理量をこれらの中に組み込むことによって、き裂を有する不静定構造物の内力を求める手順(2.4.2項)さらには安定・不安定破壊を議論する考え方(2.4.3項)がエネルギー原理から直接導かれるものであることを示したい。

もちろん、ここでの結果は結果的には従来から知られているそれぞれの評価規準のエネルギー論的な妥当性を示すことになるが、その力学的根拠の確かさと含まれる情報量の豊富さから従来行なわれていなかった複数の外力およびき裂先端が独立に変化するようより一般の現象に対してもこの種の議論が自然な形で拡張される点に注目していただきたい。

ところで、本節で取り扱うエネルギー解放率は Griffith による脆性破壊理論の拡張であり、破壊力学の出発点ともなった重要な概念である。これは、「弾性構造物中にき裂が進展する場合に全力学系が失う(解放する)単位き裂面積増加( $dA$ )あたりのポテンシャルエネルギー」として2.2.1項で定義された諸量を用いて次式のように定義できる。

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = -\left(\frac{dU}{dA} + \frac{dV_E}{dA}\right) = \frac{dW_E}{dA} - \frac{dU}{dA} \quad (2.48)$$

本節においては、前節までの諸論をき裂問題に拡張するための有用な概念という観点から荷重変位線図を用いて式(2.48)の物理的意味の説明を行なうにとどめ、エネルギー解放率に関する一般の説明あるいはその拡張に関する議論は文献<sup>(16)~(28)</sup>などに譲ることとする。そして、本論文では当面その経路独立性の有用性に加えて実験的蓄積の大きい Rice の  $J$  積分を用いることを考へ、次章以降の具体的解析を通してその適用限界(次節参照)が問題となるような場合においてのみ拡張されたエネルギー解放率の考え方を取り入れるという立場をとることとする。なお、結果的には従来の破壊力学における解析的・実験的研究成果<sup>(25)</sup>のみを用いても実用上十分な範囲で実構造物の強度評価が可能となることが示されることになるが、もちろんこのときエネルギー解放率の拡張として提案されている諸概念から得られた知見を用いることによってその妥当性が示されたものもいくつかあることを付記しておきたい。

<sup>(25)</sup> 解析的研究成果の活用とは、本節に示される関係式に基づけばき裂の存在による構造全体の変形あるいはエネルギーの変化が試験片レベルで蓄積されてきた従来の破壊力学の解析解から容易に計算できる(本論文第3章参照)という意味のものである。ただしこのとき、この種のエネルギー的な議論は破壊現象の議論においては必要条件にすぎないことには十分に注意しなければならない。そしてこの十分条件に相当する部分を次節において詳細に検討するわけであるが、これを簡単にいえば、本節で導入されるき裂部材に関する力学量がある条件下においてき裂先端近傍の応力・ひずみ場を特徴づけるパラメータとしての応力拡大係数や  $J$  積分値などと一対一の対応関係にあることである。この条件が満たされた時にはじめて、試験片レベルで蓄積されてきた実験的研究成果が実構造物の強度評価に活用できるわけである。

## 2.4.1 き裂がある場合の変形およびエネルギーとエネルギー解放率の関係

ここでは、図2.4に示されるような不静定弾性構造物において、き裂がない場合(図2.4(a))とき裂がある場合(図2.4(b))の相違を考へ、荷重変位線図を仲介として両状態における変形とエネルギーの関係を説明すると同時に、エネルギー解放率との関連を明らかにする。

ただし、図中においてはき裂を有する長さ0の仮想的な構造部材(以下これを単にき裂部材(Cracked Member)と呼ぶことにする)とき裂のない部分を分けて描いており、後者のみバネで表している。また、この構造物には外力として強制変位( $q^i$ )があらかじめ作用し、その後は仕事をしないように支持されているものとするが、これは外力の結果としての構造全体が $q^i$ だけ変形していると考えても良い。このとき、注目する断面において作用する内力(不静定力)を $Q$ 、荷重点における変位の荷重方向成分を $q$ とし<sup>(26)</sup>、変形およびエネルギーのうちき裂部材のものとき裂を含まない部分のものをそれぞれ上付き添字 $c$ および $nc$ を付して区別することにする<sup>(27)</sup>。

荷重変位線図上での変形とコンプリメンタリエネルギー まず、図2.5は(a)き裂のない部分、(b)き裂部材、および(c)構造全体に対してそれぞれ荷重と変形の間を関係を示したものである<sup>(28)</sup>。弾性体はその定義により、荷重と変位の関係が一価の増加関数として一対一対応するから、ここではこの関係式をそれぞれ

$$q^{nc} = q^{nc}(Q) \quad (2.49)$$

$$q^c = q^c(Q, A) \quad (2.50)$$

と書くことにし、これらは当面き裂の有無によらず材料特性として与えられるものとする。ここで、 $A$ はき裂面積である。なお、 $q^{nc}(Q)$ は通常は材料力学あるいは弾性論の手法により得られるものであり(Appendix 参照)、また $q^c(Q, A)$ の求め方は次章で詳しく説明する。

このとき、弾性体に蓄えられるひずみエネルギーおよびコンプリメンタリ(ひずみ)エネルギーも同様にき裂の有無によらずそれぞれ荷重変位曲線の下側(図2.5(a)の $O'ab$ および図2.5(b)の $Oab$ に囲まれる部分)および上側(図2.5(a)の $O'ac'$ および図2.5(b)の $Oac$ に囲まれる部分)の面積に等しいから、例えばコンプリメンタリエネルギーと変位の関係は次式のように書ける。

$$\Omega^{nc}(Q) = \int_0^Q q^{nc}(Q) dQ, \quad \frac{\partial \Omega^{nc}(Q)}{\partial Q} = q^{nc}(Q) \quad (2.51)$$

$$\Omega^c(Q, A) = \int_0^Q q^c(Q, A) dQ, \quad \frac{\partial \Omega^c(Q, A)}{\partial Q} = q^c(Q, A) \quad (2.52)$$

<sup>(26)</sup>  $Q$ によって生じる荷重点の変形は一般には荷重方向に平行ではないが、ここでは変形の $Q$ 方向成分である $q$ のみを考えることにする。これは、荷重変位線図を用いた議論は諸量の相互関係の説明においては極めて効果的であるが、一方でこれは複数荷重の場合の表記が困難であるという難点があるためである。なお、荷重及びき裂が複数の場合の一般論は本論文第4章で展開される。

<sup>(27)</sup>  $q^c$ および $\Omega^c$ はそれぞれ本来は「き裂の存在による変形およびコンプリメンタリエネルギーの増加分」と呼ぶべき量であるが、以下では簡単のため「き裂部材の $\times \times$ 」と呼ぶことにする。

<sup>(28)</sup> 応力法の議論をする場合には、変形およびエネルギーを荷重の関数として表すため、横軸に荷重、縦軸に変形をとったグラフの方が直観的には理解し易いが、ここでは荷重変位曲線の慣例に従いこの逆の表記をしている。



ここで、式(2.51)は最小コンプリメンタリエネルギーの原理(式(2.7)第2式)から導かれるカステリアーノの第2定理(式(2.11)第2式)に他ならず、 $\Omega^{nc}$ は外力の作用系全体のコンプリメンタリポテンシャルエネルギーを代表するものと解釈できる。このことは、図2.4(b)に示したものと全く同じモデルが Tearing Instability の説明で用いられ、本項で「き裂のない部分」と呼んでいるものを「外力の作用系」と呼んでいることに相当するものであり、両者は等価なモデルでありかつ力学的境界条件としての一般性を失わないものであることが理解できよう。

荷重変位線図上でのエネルギー解放率 き裂部材においては、き裂面積が大きいほど変形し易くなることに対応して、き裂面積が  $A$  の場合とそこから  $\delta A$  だけ大きくなった場合の荷重と変形の関係がそれぞれ図2.5(b)のようになる。そして、図2.5(c)のようにして構造全体の変形状態を考えると、強制変位 ( $q^c = q^{nc} + q^e$ ) が与えられたときのき裂のない部分の状態は曲線  $a_0aO'$  上でのみ動き得るから、これと連結されているき裂部材の変形状態もまたこの曲線上で拘束される。すなわち、き裂面積が  $A$  および  $A + \delta A$  の構造全体の状態は図2.5(c)の  $a$  点および  $a'$  点のようになり、このとき力学系全体のポテンシャルエネルギー  $\Pi$  はそれぞれ図2.5(c)の  $OaO'$  および  $Oa'O'$  で囲まれる面積となる。よって、「単位き裂面積増加あたりの  $\Pi$  の減少分」であるというエネルギー解放率の定義に基づけば、

$$\begin{aligned} G &= - \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Pi(Q, A + \delta A) - \Pi(Q, A)}{\delta A} = - \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oa'O') - \Delta(OaO')}{\delta A} \\ &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oaa')}{\delta A} > 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

となることがわかる。

ここで、図2.5より明らかなように、き裂が進展する場合には任意の境界条件下においてその力学系全体のポテンシャルエネルギーは必ず減少するが、この解放されたエネルギーがき裂の進展その他に使われることになる<sup>29)</sup>。また、本節の冒頭にも述べたように、このエネルギー解放率はある条件下においてき裂先端近傍の応力ひずみ場を代表するパラメータとしての応力拡大係数や  $J$  積分と一対一対応することから、これが破壊現象を支配するパラメータとなり得るわけである(詳細は次節参照)。

き裂部材の変形・エネルギーとエネルギー解放率の関係 エネルギー解放率はその荷重変位線図との対応が明らかであることから、実験的・数値解析的<sup>30)</sup>に求めることができることは良く知られた事実であ

<sup>29)</sup> 数学的には、後の  $J$  積分の定義の際にも示されるように、この解放されるポテンシャルエネルギーはき裂先端という特異点に流入するエネルギーという意味を持つことから、新たにき裂面を作成するためのエネルギーとして消費されるとも解釈できよう。なお余談ではあるが、経路独立性を利用して  $J$  積分値を求めることは、「孤立特異点まわりの閉曲線に沿った積分結果(留数)は、積分経路によらず一定である」という工学部学生の複素積分計算における最強兵器として知られる留数定理の応用に他ならない。すなわち、ポイドなどの他の特異点が存在する場合には経路積分の値が経路独立でなくなることはもちろん、逆に力学系が解放するエネルギーが同じでもき裂先端に流入するエネルギーはそれよりも少なくなることもなどがわかる。

<sup>30)</sup> 有限要素法によりエネルギー解放率を求める場合には、その経路独立性を利用した方法が一般に用いられているが、一方で例えば仮想き裂進展法(Virtual Crack Extension Method)などのように荷重-荷重点変位線図の面積からエネルギー解放率を求める方法も良く使用されている。なお、この種の評価方法の具体的手順については、例えば文献<sup>(29)</sup>などで詳細な解説がなされている。

う。ここでは、以上で示したき裂部材の変形およびエネルギーとエネルギー解放率との間の数学的・物理的な関係を荷重変位線図を仲介として明らかにする。

まず式(2.53)に示される三角形  $Oaa'$  の面積は主としてき裂部材のエネルギー変化であることが図2.5より読みとれるが、 $\delta A \rightarrow 0$  の極限においてはこれが三角形  $Oad$  あるいは三角形  $Oae$  の面積に等しくなることから、エネルギー解放率がき裂部材に蓄えられるエネルギーを用いてそれぞれ次のように計算できることになる。

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oaa')}{\delta A} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oad)}{\delta A} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oab) - \Delta(Odb)}{\delta A} \\ &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{U^e(q = q_b, A) - U^e(q = q_b, A + \delta A)}{\delta A} = - \frac{\partial U^e(q = q_b, A)}{\partial A} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oaa')}{\delta A} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oae)}{\delta A} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta(Oec) - \Delta(Oac)}{\delta A} \\ &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Omega^c(Q = Q_c, A + \delta A) - \Omega^c(Q = Q_c, A)}{\delta A} = \frac{\partial \Omega^c(Q = Q_c, A)}{\partial A} \end{aligned} \quad (2.55)$$

ただし、 $q_b$  および  $Q_c$  はそれぞれ図2.5(c)における  $b$  点の変位および  $c$  点の荷重を意味するものであり、式(2.54)および式(2.55)の結果はそれぞれ変位あるいは荷重一定のもとでの偏微分を意味している。ここで、 $\delta A$  が有限の値をとるときには、図2.5(c)からも明らかなように三角形  $Oaa'$  と三角形  $Oad$  および  $Oae$  の面積に差が生じる。これは、き裂のない部分(すなわち外力の作用系)に剛性があるため、き裂進展の際に荷重(内力)が低下することに起因するものであるが、 $\delta A \rightarrow 0$  の極限においてはこの差が2次の微小量として無視できることになる。なお、き裂のない部分(あるいは外力の作用系)の剛性が無限大( $q^{nc} = 0$ ; これは外力に対してエネルギーが蓄えられない状態である)およびゼロ( $q^{nc} = \infty$ )のときに、曲線  $aa'$  はそれぞれ直線  $ad$  および  $ae$  に一致し、これらの状態はそれぞれ変位制御型荷重および荷重制御型荷重と呼ばれる。一般には、曲線  $aa'$  のようにこれらの中間の状態となるが、その状態はコンプライアンス付き変位制御型荷重と呼ばれる。

一方、式(2.54)および式(2.55)に式(2.52)第1式などを用いれば次式を得る。

$$G = - \frac{\partial U^e(q = q_b, A)}{\partial A} = - \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{q_b} Q(q, A) dq = \int_0^{q_b} \left( - \frac{\partial Q(q, A)}{\partial A} \right) dq \quad (2.56)$$

$$G = \frac{\partial \Omega^c(Q = Q_c, A)}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{Q_c} q^c(Q, A) dQ = \int_0^{Q_c} \frac{\partial q^c(Q, A)}{\partial A} dQ \quad (2.57)$$

これらは、 $G$  あるいは  $J$  積分の簡便評価式の基礎となっていることで良く知られた関係式である。

き裂問題の特殊性 以上では、き裂部材の変形( $q^e$ )およびエネルギー( $U^e, \Omega^c$ )とエネルギー解放率( $G$ )の関係を明らかにした。導かれた諸式のうち、本論文で用いるのは式(2.52)、式(2.55)および式(2.57)である。ここでの重要な結論は、 $G, q^e, \Omega^c$  のいずれか一つが  $Q$  と  $A$  の関数として与えられれば、他の量がすべて計算できる点にある。

ところで、構造物中にポイドなどの一般の損傷がある場合を考えると、その構造物は変形し易くなることから、損傷の存在による変形あるいはエネルギーの増加分を考えることで本項の議論をそのまま適用できることが理解できよう。ところが、一般の損傷の場合にはその分布や干渉さらにはその成長と材料特性との関連などの数学的取り扱いがき裂問題に比べてはるかに複雑なものとなるだけでなく、き裂進展則に相当する損傷の発展式がまだ実用に耐えるものでないという決定的な違いがある。具体的には、き裂問題では試験片レベルにおいて  $G$  の評価式が整備され(本論文第3章参照)、またき裂の安



定・不安定進展および疲労による進展を記述する実験式も広く検討されている(次節参照)。言うまでもなく、これらが本節の冒頭で述べた「従来の破壊力学における解析的・実験的蓄積」であり、またこれらを効果的に活用する所に本論文で主張する方法論の妙味がある。なお逆に、一般の損傷についても今後試験片レベルにおいて解析的・実験的研究が重ねられれば、本論文に示される方法論の拡張適用も十分に考えられるであろう。

#### 2.4.2 き裂を有する不静定構造物へのエネルギー原理の拡張

次に、き裂を有する不静定構造物<sup>\*31</sup>を例にとり、エネルギー原理をき裂問題に拡張する考え方を示す。すなわち、ここではまず前節までに示されたエネルギー原理による構造解析理論の物理的意味に基づいてき裂を有する不静定構造物中の内力を求める手順を荷重変位線図を仲介として説明したうえで、この手順がエネルギー論的にも妥当なものであることを示しておく。

ところで、2.2.2項の結びでも説明した具体的には本論文第4章で示されるように、本論文で導く関係式はエネルギー停留原理に基づくまでもなくもちろん変形のみを用いた議論からも導かれるものである。しかしながらこれはあくまで結果論であって、例えば2.3.2項に示したような非線形弾性体への拡張を見てもわかるとおり、本理論における諸関係式の展開などは変形をベースとするものよりもはるかに見通しが良く、また解析対象が複雑なものとなってもその物理的意味や力学的妥当性はなおも明確であって、さらにそこから得られる情報量ははるかに豊富かつ有用なものである点に注目されたい。

き裂を有する不静定構造物中の内力の評価 不静定構造物中の内力を求める考え方は、2.2.3項および2.3.3項において明らかにしたように「切断面の変形が切断前と同じになるように不静定力は定まる」というものである。そこでここでは、図2.4(b)に示されるモデルにおいてき裂部材とき裂のない部分の境界を切断し、図中に示される $Q$ を不静定力(すなわちここで求めたい内力)と考える。このとき、上記の変形の連続条件は次のように書ける。

$$q^t = q^{nc}(Q) + q^c(Q, A) = \frac{\partial \Omega^{nc}(Q)}{\partial Q} + \frac{\partial \Omega^c(Q, A)}{\partial Q} \quad (2.58)$$

この方程式を解くことは、図2.5(c)上において曲線 $a_0aO'$ ( $q=q^t-q^{nc}$ )と曲線 $Oa$ ( $q=q^c$ )の交点における $Q$ を求めることに相当する。すなわち、同図中における点 $a$ がこの構造物の状態を表す点であり、これはき裂面積( $A$ )が与えられた時に一意に定まるものであることが理解できるであろう。さらに、安定な状態を保ったままき裂面積を $\delta A$ だけ増加させる場合を考えれば、このとき系の状態は点 $a$ から点 $a'$ に移動して(この状態ももちろん式(2.58)を満足する)三角形 $Oaa'$ の面積に相当するエネルギー( $=G\delta A$ )が力学系から解放される(系に蓄えられているエネルギーが減少する)と同時に内力( $Q$ )が低下する様子が直観的に理解できよう。

さて、式(2.58)は $Q$ に対する非線形方程式であり Newton 法などを用いて解く必要があるが、図2.5(c)からも明らかなように $q^{nc}$ ,  $q^c$ はいずれも $Q$ の単調増加関数であるから、その解が一意に定ま

<sup>\*31</sup> 前項にも示したように、モデルとして一般的なものであるという意味で「不静定」という言葉を意図的に用いている。

ることはもちろんその取束も良好なものであることが期待できよう。一方、線形弾性体の場合には荷重と変形が比例するから、コンプライアンスを考えることで瞬に内力が定まる。すなわち、

$$q^{nc}(Q) = \lambda^{nc} Q \quad (2.59)$$

$$q^c(Q, A) = \lambda^c(A) Q \quad (2.60)$$

とおくとき、 $\lambda^{nc}$ は定数であり、またき裂部材のコンプライアンス(き裂の存在による系全体のコンプライアンスの増加分)である $\lambda^c$ はき裂面積( $A$ )のみの関数となる。また、き裂がない場合の内力を $Q_0$ とすれば $q^t = \lambda^{nc} Q_0$ であるから、これと式(2.59)、式(2.60)を式(2.58)に代入すれば次式のように内力が瞬に得られ、これが $Q_0$ よりも小さくなるのが具体的に理解できよう<sup>\*32</sup>。

$$\lambda^{nc} Q_0 = \lambda^{nc} Q + \lambda^c Q \quad (2.61)$$

$$\therefore Q = \frac{\lambda^{nc}}{\lambda^{nc} + \lambda^c} Q_0 = \frac{1}{1 + \lambda^c / \lambda^{nc}} Q_0 \quad (2.62)$$

このように、 $\lambda^c(A)$ (式(2.60))あるいは $\Omega^c(Q, A)$ (式(2.58))を考えることによってき裂がある場合の構造物中の内力を求める方程式(式(2.58))は簡単に記述でき、またその物理的意味はエネルギー解放率と合わせて荷重変位線図(図2.5(c))上で考えることによりいっそう明確になったことと思う。

き裂を有する不静定構造物中の内力の評価式のエネルギー論的妥当性 「変形の連続条件」に基づく式(2.58)はその物理的意味から考えても明らかに正しい。次に、同式がエネルギー停留原理からも導けることを示して、これがエネルギー論的にも妥当であることを明らかにしておく。このことが、次章以降の解析理論の展開の明確なバックグラウンドとなり、同理論を構造形状や荷重が複雑なものに対しても自然形で拡張できることになる。

すなわち、図2.4(b)に示される構造系が外力(強制変位)を受けていない状態から引き伸ばされ、全体としての変形が $q^t$ となっている安定なつり合い状態を考える。このとき、力学系全体のコンプリメンタリエネルギーは式(2.8)より

$$\Pi^*(Q, A) = \Omega^{nc}(Q) + \Omega^c(Q, A) + V_E^*(Q) \quad (2.63)$$

となるから、この場合の最小コンプリメンタリエネルギーの原理(式(2.7)第2式)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi^*(Q, A) &= \frac{\partial \Pi^*(Q, A)}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \Pi^*(Q, A)}{\partial A} \delta A \\ &= \left( \frac{\partial \Omega^{nc}(Q)}{\partial Q} + \frac{\partial \Omega^c(Q, A)}{\partial Q} + \frac{\partial V_E^*(Q)}{\partial Q} \right) \delta Q + \frac{\partial \Omega^c(Q, A)}{\partial A} \delta A \\ &= \left( \frac{\partial \Omega^{nc}(Q)}{\partial Q} + \frac{\partial \Omega^c(Q, A)}{\partial Q} - q^t \right) \delta Q + G \delta A = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

そして安定なつり合い状態においては $\delta A=0$ であるから<sup>\*33</sup>、結局式(2.11)第2式に示されるカステリリアーノの第2定理と同様にして式(2.58)が導かれることになる。

<sup>\*32</sup> ここで示した $Q_0$ は「き裂がない場合の不静定力」であって、これは通常材料力学などで取扱っているものである。以下本論文ではこの「き裂がない場合の $\times \times$ 」という考え方を積極的に用いるが、これはそもそも構造健全性評価というものがき裂がないとして設計された構造物に対してき裂を想定し種々の実働荷重下(き裂がない場合に $Q_0$ )における内力( $Q$ )からき裂の挙動を論じるものであることを考えれば、この「 $Q_0 \rightarrow Q$ 」という視点から現象の理解に有効なものとなるためであることが理解頂けよう。

<sup>\*33</sup> 状態が安定であるかどうかについての議論は次項で行なわれる。



複雑な対象への式(2.58)の拡張 すなわち、式(2.58)もまたエネルギー停留原理(式(2.7)第2式)から直接導かれるものであるから、式(2.11)第2式と同様に考えれば式(2.58)は複重荷重の場合に対しては

$$q_j^t = \frac{\partial \Omega^{nc}(Q_i)}{\partial Q_j} + \frac{\partial \Omega^c(Q_i, A)}{\partial Q_j} \quad (i, j = 1 \sim n) \quad (2.65)$$

と書けることは明らかであろう(逆にこれは式(2.11)第2式をき裂がある場合に拡張したものでもあるから、き裂がある場合のカスティリアーノの第2定理であるといえる)。

さらに、2.2.3項および2.3節に示した不静定構造の解析原理もまた式(2.7)第2式から導かれたものであるから、これらも同様にそのままき裂問題に拡張することができ、例えばカスティリアーノの最小仕事の定理を表す式(2.19)および式(2.29)はそれぞれ次式のように書ける。

$$\frac{\partial \Omega^{nc}(Q_i, R_j)}{\partial R_j} + \frac{\partial \Omega^c(Q_i, R_j, A)}{\partial R_j} = 0 \quad (j = 1 \sim J) \quad (2.66)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \sum_{k=1}^{K-K'} \left\{ \frac{\partial \Omega^{nc}}{\partial R} \right\} + \sum_{k'=1}^{K'} \left\{ \frac{\partial \Omega^c}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (2.67)$$

ここで、式(2.67)における  $K'$  はき裂部材の個数を表すものである。

このとき、式(2.66)および式(2.67)はそれぞれ「き裂を有する不静定構造に複数の外力が作用する場合の不静定力を求める連立方程式」および「複数のき裂を有する不静定構造に複数の外力が作用する場合の不静定力を求める連立方程式のマトリクス表記」を意味しており、従来の構造解析理論が極めて自然な形でき裂問題に拡張できていることがわかるであろう。なお、本論文においてはこのような式(2.67)が用いられることになる。

### 2.4.3 エネルギー原理に基づく不安定破壊規準の統一的導出

前項においては、き裂を有する構造物の状態が安定であるという前提のもとでその内力を求める手順についての議論を行なった。もちろんこのことは2.3節などに示した通常の構造解析においても暗黙の前提とされているものであって、特別なことではない。ところがき裂問題においては、実はこのことがその理論的發展を妨げる根本的原因となっているのである。以下では、まず従来の不安定破壊評価の問題点を指摘した後に、前項と同様荷重変位線図を用いて不安定き裂進展現象とその評価規準の物理的意味を明らかにし、さらにこれらの評価規準が構造物の弾性安定規準と全く同じエネルギー原理から統一的に導けるものであることを示す。

従来の不安定破壊評価の問題点 構造物の状態が安定であるか不安定であるかの議論は、2.2.4項でも説明したように前項に示したような内力(すなわち釣合状態)の決定とは全く別の規準を用いて行う必要がある。ところが、き裂問題においては

[内力を求める] → [破壊力学パラメータを求める] → [(安定・不安定) 破壊の判定を行なう]

という解析過程からも明らかなように、特に線形破壊力学においては脆性破壊が安定破壊(すなわち安定き裂進展)の過程を経ずに直接不安定化するものであったために、内力(すなわち破壊力学パラメータ)の解析が不安定破壊の評価( $K_I > K_{IC}$ )に直結するものであった。すなわち、破壊力学解析においては従来の構造解析でいう「内力(および変形)の評価」と「安定・不安定の議論」が暗黙のうちに同時に

行なわれていたわけである。ここで指摘したい問題点は、「これらの評価規準は本来全く別のものである」という明確な認識がなかった点であって、安定き裂成長を考慮すべき非線形破壊力学の領域における議論が明確かつ発展性を欠くものであるにもかかわらずその抜本的な対策もないままに放置されている現状はすべてこの点に起因しているである。

すなわち、現在の非線形破壊力学におけるき裂の安定・不安定進展理論としては、荷重変位線図上での勾配から判定するものと  $G$ - $a$  線図上( $a$  はき裂長さ)での  $G$ - $R$  曲線の勾配から判定するもの(Tearing Instability 理論)の二つが知られている<sup>(30)・(34)</sup>。そして、前者と後者の等価性の検討<sup>(34)</sup>あるいは後者の物理的意味の解釈<sup>(35)</sup>などの理論的研究の試みも見られるが、筆者の立場からは従来からあるものを表現を変えて説明してあるに過ぎず、やはりこの種のき裂を有する構造物の安定性に関する議論は不明確なままであることには変わりはなく、さらなる発展を可能とするまでの明確な物理的意味の解釈とその数学的表現は未だ与えられていないと言わざるを得ない。

ところで、非線形破壊力学におけるき裂の安定・不安定進展の判定などは荷重変位線図上で行なわれている議論からしてまさに構造物の安定性の議論であることに疑問の余地はないにもかかわらず、これまで従来の構造安定性理論との関連が指摘されなかったのは、非線形破壊力学が線形破壊力学の蓄積に拘りあくまでその拡張としての立場をとろうとしたためと考えられる。このことは、その物理的意味の解釈が論文になるほど不明瞭であった Tearing Instability 理論が本項における諸論に基づくことにより極めて自然に理解でき、かつ数学的・物理的意味が明確なまま一般的な理論にまで拡張できることから理解できるであろう。

不安定破壊(不安定き裂進展)現象の物理的意味 ここでは、まず始めにエネルギー解放率の説明に用いた図2.5(c)を用いてき裂を有する不静定構造物の不安定破壊(すなわち不安定き裂進展)現象の物理的意味を明らかにする。またここでは、以下に示す荷重変位線図上でのエネルギー論的な不安定破壊の解釈に基づいて従来より知られている二つの不安定破壊評価規準が同時に説明できることも示しておく。

まず、変位制御型試験により得られる材料特性としてのき裂部材の荷重変位曲線として  $q=q_{mat}^c(A)$  を考える<sup>(35)</sup>、これを図2.5(c)上に重ねて描いたものを図2.6(a)および(b)に示す。このとき、

<sup>(34)</sup> 前者は2.2.4項で紹介した多くの不安定破壊現象との関連で古くから知られているものであり、荷重および変位といった実測可能な物理量を用いた議論により現象の直観的把握が可能となるという利点がある反面、き裂問題において重要となるき裂長さに関する情報が陽に現われてこないという難点があり、今日のき裂問題の研究においては後者の Tearing Instability 理論が多く用いられている。なお、この種の延性不安定破壊規準の長短の比較およびその等価性の理論的検討などは筆者の修士論文<sup>(31)</sup>において詳細に議論されており、さらにここではそれらをふまえて上述のような前者の難点を克服した新たな評価手法が提案されているので参照されたい。

ところで、この提案した評価手法は本論文においても必要に応じて参照するのでここで簡単に説明を加えておく。すなわち、これは荷重変位線図上にき裂長さ  $J$  積分が一定の曲線群を重ね書きしたものであるが、これによって実測された荷重変位曲線の個々の状態でのき裂長さおよび  $J$  積分値を知ることができ、さらには  $J_R$  曲線および  $J$  積分の有効条件との対応を容易に知ることができるようにになっている。なお、本評価手法の理論的検討および压力容器の延性不安定破壊への応用の一部が投稿論文<sup>(32)・(33)</sup>にも記されているので、同時に参照されたい。

<sup>(35)</sup> 材料特性として得られる荷重変位曲線は、ここでは初期き裂面積( $A_0$ )が与えられた場合にき裂面積の増加分にのみ依存するものであると考える。また、この  $q_{mat}^c(A)$  (初期き裂面積依存性を考慮する場合



$\Delta(Oaa')$  の面積  $= G\delta A$  = き裂面積が  $\delta A$  だけ増加する際に構造系が解放するエネルギー  
 $\Delta(Oaf)$  の面積  $= G_{mat}\delta A$  = き裂面積を  $\delta A$  だけ増加させるために必要となるエネルギー

であり、ここで  $G_{mat}(A)$  は  $R$ -カーブ (Material Resistance Curve) と呼ばれる材料特性である。すなわち、釣合状態 (図中点  $a$ ) からのき裂面積の仮想的な微小増加 ( $\delta A > 0$ ) に対する構造全体としてのエネルギー収支を考えれば、き裂を有する構造系の安定・不安定の議論は上記の面積の比較によって次のように記述できることになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta(Oaa') \text{ の面積} < \Delta(Oaf) \text{ の面積} & \quad [\text{系は安定; 図 2.6(a)}] \\ \Delta(Oaa') \text{ の面積} > \Delta(Oaf) \text{ の面積} & \quad [\text{系は不安定; 図 2.6(b)}] \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

つまり、 $\Delta(aa'f)$  の面積 ( $= \Delta(Oaa') \text{ の面積} - \Delta(Oaf) \text{ の面積}$ ) が正となることは、ポテンシャルエネルギーの解放量が破面形成に必要なエネルギーを上回ることを意味しており、この余分なエネルギーがき裂進展の運動エネルギー等となって不安定破壊という現象につながることになるわけである。

これがき裂を有する構造物の安定・不安定の議論の荷重変位線図上における物理的意味である。なお、以上の議論はき裂の表面エネルギー (あるいは破面形成に必要なエネルギー) を導入した Griffith-Irwin-Orowan 流のエネルギー論的な破壊の議論<sup>(36)</sup> を荷重変位線図上での議論へ自然な形で拡張したものといえ、その理論的根拠が明確であると同時に荷重および変位といった実測可能な物理量と対応させることによりこのエネルギー論的な不安定現象がエネルギー解放率との関連までも含めて直観的に理解できるようになっている点に注目されたい。

さて、次に式 (2.68) に示される条件を評価可能な物理量を用いて数学的に表現することを考える。すなわち、まずこの判定条件が「釣合状態 (図中点  $a$ ) からのき裂面積の仮想的な微小増加 ( $\delta A > 0$ ) 時の点  $a'$  と点  $f$  の位置関係」を考えても表現できることに着目すれば、点  $a$  における  $q = q^t - q^{nc}$  と  $q = q_{mat}^c$  の勾配 (微係数) を考えれば良いことは直観的にも最も自然な発想であろう。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta(q^t - q^{nc})}{\delta Q^{nc}} &= -\frac{dq^{nc}}{dQ} \\ \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta q_{mat}^c}{\delta Q^c} &= \frac{dq_{mat}^c}{dQ} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

であり、また  $\delta A > 0$  に対しては必ず  $-dq^{nc}/dQ < 0$  であることに注意すれば<sup>36)</sup>、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dq^{nc}}{dQ} < \frac{dq_{mat}^c}{dQ} & \quad (\text{at 点 } a) \quad [\text{系は安定; 図 2.6(a)}] \\ -\frac{dq^{nc}}{dQ} > \frac{dq_{mat}^c}{dQ} & \quad (\text{at 点 } a) \quad [\text{系は不安定; 図 2.6(b)}] \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

合には  $q_{mat}^c(A_0, A)$  となるが、同じく変位制御型の (静的な) 試験により得られる材料特性としての  $G_{mat}(A)$  と一対一対応するものであることは、前頁の脚注にも示した荷重変位線図上における延性不安定破壊の理論的検討とあわせて筆者の修士論文<sup>(31)</sup> において詳細に議論されているので参照されたい。

<sup>36)</sup> 図 2.6 からわかるとおり  $\delta A > 0$  に対しては必ず  $\delta Q^{nc} < 0$  であるから、その単調増加関数である  $q^{nc}$  の変化分は  $\delta q^{nc} < 0$  となって結局  $-dq^{nc}/dQ < 0$  となる。一方、き裂の成長 ( $\delta A > 0$ ) 時には図 2.6 上の点  $a$  に示される系の状態が必ず右方向に移動することからもわかるとおり  $\delta q_{mat}^c > 0$  であるが、 $\delta Q^c$  の符号はその釣合状態の位置によって両方の場合がある。すなわち、最大荷重よりも手前 ( $q = q_{mat}^c$  のピークよりも左側) に釣合状態がある場合には  $\delta Q^c > 0$  となるが、このとき  $dq_{mat}^c/dQ > 0$  となって必ず式 (2.70) 第 1 式が成立することになり、「この場合のき裂進展は安定である」という直観との一致が確認できるであろう。もちろん、不安定破壊が問題となるのは  $q = q_{mat}^c$  のピークよりも右側 (最大荷重を越えてから) の領域 ( $\delta Q^c < 0$ ) においてである。

なる判定規準が導かれる。式 (2.70) が式 (2.68) と等価なものであることは明らかであろうが、同時にこれは良く知られた荷重変位線図上における不安定破壊の判定規準<sup>37)</sup> に他ならない。

一方、 $\delta A \rightarrow 0$  の極限を考えたときに曲線  $Oa$  の長さがエネルギー解放率の次元を持つ量となることに着目すれば、「曲線  $Oa'$  の長さ  $= G(A + \delta A)$ 」と「曲線  $Of$  の長さ  $= G_{mat}(A + \delta A)$ 」の比較によって式 (2.68) と等価な判定条件を記述することができることになる。すなわちここで、この判定規準は釣合状態である点  $a$  (このとき曲線  $Oa$  の長さ  $= G(A) = G_{mat}(A)$  である) からのき裂面積の仮想的な微小増加 ( $\delta A > 0$ ) 時の変化分をである次式を比較しなければならないことに注意すれば、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\text{曲線 } Oa' \text{ の長さ} - \text{曲線 } Oa \text{ の長さ}}{\delta A} &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{G(A + \delta A) - G(A)}{\delta A} = \frac{dG}{dA} \\ \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\text{曲線 } Of \text{ の長さ} - \text{曲線 } Oa \text{ の長さ}}{\delta A} &= \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{G_{mat}(A + \delta A) - G_{mat}(A)}{\delta A} = \frac{dG_{mat}}{dA} \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

安定・不安定の判定条件は次式のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dA} < \frac{dG_{mat}}{dA} & \quad (\text{at } G = G_{mat}) \quad [\text{系は安定; 図 2.6(a)}] \\ \frac{dG}{dA} > \frac{dG_{mat}}{dA} & \quad (\text{at } G = G_{mat}) \quad [\text{系は不安定; 図 2.6(b)}] \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

これは、いわゆる Tearing Instability と呼ばれる規準に他ならず、通常は  $G-A$  線図上において  $G_{mat}$  のき裂成長に伴う増加を表す  $R$  曲線の勾配と  $G$  (Crack Driving Force) の  $A$  に対する変化を表す曲線の勾配との比較によってやはりエネルギー論的に安定・不安定破壊破壊が議論されているものである。

エネルギー原理に基づくき裂を有する不静定構造物の不安定破壊規準 以上で、従来から知られている二つの不安定破壊規準 (式 (2.70)、式 (2.72)) が荷重変位線図上におけるその判定の物理的意味 (式 (2.68)) と同時に導かれた。そこで次に、前項と同様にエネルギー原理を出発点としてこれらの規準の数学的表記を導いておく。もちろんここで導かれる結果は式 (2.70) および式 (2.72) と一致するが、これによってエネルギー論の根拠を背景とした前項式 (2.65)~式 (2.67) に示したような拡張が可能となることは式 (2.58) よりもはるかに実用的価値がある。なぜならば、この種の不安定破壊の判定は式 (2.70) および式 (2.72) に示されるそのクライテリオンからもわかるように通常は評価線図上で視覚的に判断できる単純な問題 (単一荷重あるいは単一き裂問題) に対してのみ行なわれており<sup>38)</sup>、線図上での判定ができないような一般の問題に対応するための拡張された数学的表記が得られてないからである。

<sup>37)</sup> 通常は外力系は線形弾性体であると見なし、 $dq^{nc}/dQ = \lambda^{nc}$  ( $\lambda^{nc}$  はシステムのコンプライアンスで正の定数) とした議論が行なわれている。またこのとき、不安定化の条件は次式のように表記される場合が多い。

$$\frac{dQ}{dq_{mat}^c} < -\frac{1}{\lambda^{nc}}$$

これは  $dQ/dq_{mat}^c$  が材料特性としての荷重変位曲線の勾配に相当するため直観的に理解し易いためと考えられるが、上式が式 (2.70) 第 2 式と等価であることは容易に確認できるであろう。

<sup>38)</sup> 式 (2.72) を用いた  $G-A$  線図上での評価は Implicit な形では複数荷重に対応できるが、その数学的表記は単一荷重下に対してのみ与えられている<sup>(37)</sup>。すなわち、そこでは

$$\frac{dG}{dA} = \left( \frac{\partial G}{\partial A} \right)_Q + \left( \frac{\partial G}{\partial Q} \right)_A \cdot \frac{dQ}{dA}$$

なる変形を行なって、右辺の  $dQ/dA$  (き裂成長に伴う内力の低下) を複雑な偏微分で表現して上式に



まず、この場合の構造全体のコンプリメンタリ (ポテンシャル) エネルギーは次式ようになる。

$$\Pi^*(Q, A) = \Omega^{nc}(Q) + \Omega_{mat}^c(Q, A) + V_E^*(Q) \quad (2.73)$$

ここで、上式におけるき裂部材の項が式 (2.63) の場合と異なり  $\Omega_{mat}^c(Q, A)$  となっている点に注意されたい<sup>39)</sup>。このとき、上式の第一変分は次のようになる (式 (2.64) との対応を確認されたい)。

$$\left. \begin{aligned} \delta \Pi^*(Q, A) &= \left( \frac{\partial \Omega^{nc}(Q)}{\partial Q} - q^t \right) \delta Q + \left( \frac{\partial \Omega_{mat}^c(Q, A)}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \Omega_{mat}^c(Q, A)}{\partial A} \delta A \right) \\ &= \left( \frac{d\Omega^{nc}}{dQ} + \frac{d\Omega_{mat}^c}{dQ} - q^t \right) \delta Q \\ &= (q^{nc} + q_{mat}^c - q^t) \delta Q \\ q_{mat}^c &= \frac{d\Omega_{mat}^c}{dQ} = \frac{\partial \Omega_{mat}^c}{\partial Q} + \frac{\partial \Omega_{mat}^c}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dQ} \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

すなわち、この場合にも構造物の状態を決定するための方程式は  $\Pi^*$  をゼロとする最小コンプリメンタリエネルギーの原理 (式 (2.7) 第2式) から導かれ、

$$q^{nc} + q_{mat}^c - q^t = 0 \quad (2.75)$$

と書ける。この条件式が図 2.6 上において曲線  $q=q^t-q^{nc}$  と  $q=q_{mat}^c$  の交点を求めることを意味していることは容易に確認できるであろう。

次に、式 (2.74) を利用して  $\Pi^*$  の第2変分を計算すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 \Pi^*(Q, A) &= \delta (q^{nc} + q_{mat}^c - q^t) \delta Q + (q^{nc} + q_{mat}^c - q^t) \delta^2 Q \\ &= \left( \frac{\partial q^{nc}(Q)}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial q_{mat}^c(Q, A)}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial q_{mat}^c(Q, A)}{\partial A} \delta A \right) \delta Q \\ &= \left( \frac{dq^{nc}}{dQ} + \frac{dq_{mat}^c}{dQ} \right) (\delta Q)^2 \\ \frac{dq_{mat}^c}{dQ} &= \frac{\partial q_{mat}^c}{\partial Q} + \frac{\partial q_{mat}^c}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dQ} \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

ここで、上式の第1等式から第2等式への式の展開においては、式 (2.75) および  $\delta q^t=0$  を用いた。よって、これを式 (2.23) および式 (2.24) に示した弾性構造物の安定・不安定規準に照らせば具体的に以組み込むという方法がとられている。本論文で「複雑な偏微分を用いた式でその概念が示され... 得られる評価線図から現象の本質に対する洞察を働かせることはもはや不可能である」と表現したものが、まさにこれである。ちなみに、荷重制御型の場合には上式において  $dQ/dA=0$  となる。

<sup>39)</sup> つまり、式 (2.63) では停留き裂を対象としているため

$$\delta \Omega^c = \left( \frac{\partial \Omega^c}{\partial Q} \right)_A \delta Q + \left( \frac{\partial \Omega^c}{\partial A} \right)_Q \delta A = q^c \delta Q + \mathcal{G} \delta A = q^c \delta Q \quad (\because \delta A = 0)$$

であったが、式 (2.73) では次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Omega_{mat}^c &= \left( \frac{\partial \Omega_{mat}^c}{\partial Q} \right)_A \delta Q + \left( \frac{\partial \Omega_{mat}^c}{\partial A} \right)_Q \delta A = q^c \delta Q + \mathcal{G} \delta A = q_{mat}^c \delta Q = \left( q^c + \mathcal{G} \cdot \frac{dA}{dQ} \right) \delta Q \\ &= \mathcal{G}_{mat} \delta A = \left( q^c \cdot \frac{dQ}{dA} + \mathcal{G} \right) \delta A \end{aligned}$$

下のような評価規準が導かれ、式 (2.70) との一致が確認できるであろう。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_{mat}^c}{dQ} + \frac{dq^{nc}}{dQ} &> 0 \quad (\text{at 点} a) \quad \left[ \text{系は安定; 図 2.6(a)} \right] \\ \frac{dq_{mat}^c}{dQ} + \frac{dq^{nc}}{dQ} &< 0 \quad (\text{at 点} a) \quad \left[ \text{系は不安定; 図 2.6(b)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

一方、式 (2.72) に示される Tearing Instability 規準もまた同様に各項の意味を考えながら導くことができるが、ここでは以上で示してきた関係式を参考にして弾性構造物の安定理論から式 (2.70) と式 (2.72) を統一的に導く考え方を示しておく。すなわち、 $\Pi^*$  の変分を考える場合の変数は  $Q$  と  $A$  であるから、微分演算子の間には次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\partial}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial}{\partial A} \delta A = \left( \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dQ} \right) \delta Q = \frac{d}{dQ} \delta Q \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial Q} \cdot \frac{dQ}{dA} + \frac{\partial}{\partial A} \right) \delta A = \frac{d}{dA} \delta A \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

さらに、これを用いれば同様に次式が導ける。

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 &= \delta \left( \frac{d}{dQ} \right) \delta Q + \frac{d}{dQ} \delta^2 Q = \frac{d^2}{dQ^2} (\delta Q)^2 + \frac{d}{dQ} \delta^2 Q \\ &= \delta \left( \frac{d}{dA} \right) \delta A + \frac{d}{dA} \delta^2 A = \frac{d^2}{dA^2} (\delta A)^2 + \frac{d}{dA} \delta^2 A \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

よって、式 (2.79) を用いて式 (2.73) の第2変分をとれば、それぞれ以下になる<sup>40)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 \Pi^* &= \frac{d^2 \Pi^*}{dQ^2} (\delta Q)^2 + \frac{d \Pi^*}{dQ} \delta^2 Q = \frac{d^2 \Pi^*}{dQ^2} (\delta Q)^2 \\ \delta^2 \Pi^* &= \frac{d^2 \Pi^*}{dA^2} (\delta A)^2 + \frac{d \Pi^*}{dA} \delta^2 A = \frac{d^2 \Pi^*}{dA^2} (\delta A)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

すなわち、式 (2.23) および式 (2.24) に示される規準は次のようにも書けることになる。

$$\frac{d^2 \Pi^*}{dQ^2} > 0 \quad [\text{安定}], \quad \frac{d^2 \Pi^*}{dQ^2} < 0 \quad [\text{不安定}] \quad (2.81)$$

$$\frac{d^2 \Pi^*}{dA^2} > 0 \quad [\text{安定}], \quad \frac{d^2 \Pi^*}{dA^2} < 0 \quad [\text{不安定}] \quad (2.82)$$

よって、まず式 (2.81) における不等式の左辺に式 (2.73) を代入すると

$$\frac{d^2 \Pi^*}{dQ^2} = \frac{d}{dQ} \frac{d \Pi^*}{dQ} = \frac{d}{dQ} (q^{nc} + q_{mat}^c - q^t) = \frac{d(q^{nc} + q_{mat}^c)}{dQ} \quad (2.83)$$

となるから、式 (2.70) が導かれる。

<sup>40)</sup> ここで、 $\Pi^*$  の第1変分が恒等的にゼロとなることは最小コンプリメンタリエネルギーの原理からも保証されているが、念のために式で証明しておく次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \Pi^*}{dQ} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dQ} = (q^{nc} + q^c - q^t) + \mathcal{G} \cdot \frac{dA}{dQ} = q^{nc} + q_{mat}^c - q^t = 0 \\ \frac{d \Pi^*}{dA} &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q} \cdot \frac{dQ}{dA} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial A} = (q^{nc} + q^c - q^t) \cdot \frac{dQ}{dA} + \mathcal{G} = (q^{nc} + q_{mat}^c - q^t) \cdot \frac{dQ}{dA} = 0 \end{aligned} \right\}$$



一方、き裂部材の荷重変位曲線 ( $q_{mat}^c$ ) とき裂進展抵抗 ( $G_{mat}$ ) がコンプリメンタリエネルギーを仲介として次式のように表せるごとく (本章の脚注 \*39 参照)。

$$\delta \Omega_{mat}^c = q_{mat}^c \delta Q = G_{mat} \delta A \quad (2.84)$$

き裂がない部分 (あるいは外力系) のコンプリメンタリエネルギーと荷重変位曲線 ( $q^t - q^{nc}$ ) およびエネルギー解放率 ( $G$ ) は次の関係にある\*41。

$$\delta(\Omega^{nc} + V_E^s) = -(q^t - q^{nc}) \delta Q = -G \delta A \quad (2.85)$$

すなわち、式 (2.84) および式 (2.85) を用いれば、式 (2.82) における不等式の左辺は

$$\frac{d^2 \Pi^*}{dA^2} = \frac{d}{dA} \frac{d\Pi^*}{dA} = \frac{d}{dA} \left( (q^{nc} + q_{mat}^c - q^t) \frac{dQ}{dA} \right) = \frac{d}{dA} (G_{mat} - G) \quad (2.86)$$

となるから、式 (2.72) が導かれる。

\*41 このことは、釣合状態において次式が成立していることと等価である。

$$\delta \Pi^* = \delta \Omega_{mat}^c + \delta(\Omega^{nc} + V_E^s) = (q_{mat}^c + q^{nc} - q^t) \delta Q = (G_{mat} - G) \delta A = 0$$

そして、このことは図 2.5 の説明において示したとおり釣合状態において

$$q_{mat}^c + q^{nc} - q^t = G_{mat} - G = 0$$

が成立しているという事実からも簡単に確認できよう。

## 2.5 き裂を有する構造物の安全性評価

き裂を有する構造物の破壊現象の予測は、まずそのき裂先端近傍の応力・ひずみ場を支配している破壊力学パラメータを選定し、その解析的な値とそれに対応する破壊靱性値との比較によってなされる。ところが、この破壊靱性は試験片寸法や負荷様式に依存するため、一般には構造物材と同一の条件 (寸法・荷重・環境) 下で破壊靱性試験を行なうことが要求される。現に航空機などではそのような破壊靱性試験が実際に行なわれているが、現実の構造物すべてに対してこのような試験を行なうのは実用的ではなく、また試験自体困難な場合が多い。

そこで、この破壊靱性が平面ひずみ条件下において、寸法および荷重条件によらない材料固有の最小の破壊抵抗となる (IC 概念<sup>(38)(39)</sup>) ことを利用し、保守的 (すなわち安全側の評価) ではあるがこれを部材の破壊力学パラメータと比較して破壊を議論するという方法がとられる。これによって、CT 試験片などの標準試験片を用いて得られた破壊靱性値を用いて全く異なる寸法・荷重条件の構造物の破壊を議論することが可能となり、破壊力学の工学的な適用が現実的なものになったといえる。ここで、一般の構造物におけるき裂部分は多くの場合に平面ひずみ状態を満足しているため、平面ひずみ破壊靱性を用いることによりかなり精度良く破壊の評価 (すなわちき裂進展の予測) が可能となるが、一方で上述の航空機のように薄肉部材では保守的评价とはなるが精度良い破壊現象のシミュレーションにはならない点に注意しなければならない。

また、非線形 (弾塑性) 領域におけるき裂進展抵抗 ( $R$  カーブ) に関する研究も蓄積され、その荷重依存性が顕著である点などが明らかとなり、材料試験においては反映されている。ところが、この場合には構造物中のき裂部分の負荷様式をも正確に把握することが重要となる点で線形破壊力学における IC 概念よりもさらに注意深い適用が必要となるにもかかわらず、現状ではこのことはほとんど認識されていないように見受けられる\*42。

このように、実用される多くの構造物に対する破壊力学的评价においては、き裂先端近傍を支配する破壊力学パラメータの解析的评价とそれに対応する材料固有の最小の破壊抵抗の試験方法の決定が最も重要な問題となる。以下では、まずこのうちの「き裂先端を支配する」という概念を  $K$  値および  $J$  積分値を中心として説明し、本論文におけるエネルギー論の手順で得られる解析的な  $K$  値および  $J$  積分値を用いて破壊を議論する際の必要十分条件を明らかにする。さらにここでは、線形破壊力学と非線形破壊力学の類似点と相違点を明らかにするという立場からの整理を試み、特に非線形破壊力学の工学的適用に際して残された問題点を指摘する。

### 2.5.1 線形破壊力学および非線形破壊力学の守備範囲

本項では、まず非線形破壊力学の実用が望まれるようになった背景を説明することを通して、線形および非線形破壊靱性値についてそれぞれの特徴を明らかにする。次に、 $K$  値および  $J$  積分値が破壊力学パラメータとしての意味を持つための必要十分条件について概念的に説明した後に、その具体的な決

\*42 例えば、応力拡大係数のハンドブックには  $K$  値の解析結果のみ記されてあれば十分であるが、 $J$  積分値についてはリガメント断面の荷重様式も同時に記されていなければ正しいき裂進展解析はできないはずである。



定方法を示してこれらの物理的な意味を明確にする。また、破壊靱性に関して残されたいくつかの問題点についてもふれておくことにする。

非線形破壊力学による構造物の安全性評価の必要性和問題点 歴史的に見れば、 $J_{IC}$  概念は小型試験片を用いて有効な  $K_{IC}$  を得るために発展してきたものであり、また  $J_R$  カーブは鈍化直線との交点から  $J_{IC}$  を決定するためのみに用いられるものであった。すなわち、これらはすべて材料の  $K_{IC}$  を実験的に評価するための手段としての概念であり、最終的に評価の対象となっていた破壊現象は構造物中のき裂先端近傍が小規模降伏条件を満たす場合のもの (脆性破壊) であった。

ところが、高延性・高靱性材料が構造材料として多用されるようになり、実際にき裂先端に顕著な塑性変形を伴う (すなわち小規模降伏条件を満たさない) ような構造物中のき裂に対して、その破壊 (ここではき裂進展の開始を意味する) の有無を評価する必要が生じてきた。このような場合には、構造物中のき裂先端近傍の応力・ひずみ場はもはや  $K$  によっては記述できないが、 $J_{IC}$  試験に課せられる条件と同じ条件下においては  $J$  積分によって記述できる。すなわち、原理的には構造物中のき裂に対して  $J$  積分値を評価し、これを  $J_{IC}$  と比較することによって、小規模降伏条件を逸脱した後にき裂の進展開始の予測が可能である。しかしながら、実構造物中のき裂に対して  $J$  積分値を精度良く評価し、かつそれが破壊力学パラメータとして有効であることを保証することは一般には容易ではないなどの実用上の問題点が指摘できる。特に後者については、多くの人がその認識もなく  $J$  積分を用いようとしていること自体にも問題があるといえる。

さらに、中高靱性材料においては、数ミリのき裂進展によって  $J_{IC}$  の数倍にまでき裂進展抵抗が上昇する。このような材料に対してき裂の進展開始をもって不安定破壊が生じるとする判定はあまりに安全側すぎるという点が指摘されるようになり、き裂の安定進展をも考慮したき裂の進展挙動の予測にも  $J$  積分を拡張適用するという考え方 (Tearing Instability Criterion) が出てきた。このとき、上記の  $J_R$  カーブが材料のき裂進展抵抗として用いられるわけであるが、これはき裂先端前方のかなり広い範囲の塑性変形の履歴の影響を受けるために、本質的に材料の寸法、荷重様式および負荷履歴に依存するものである。このような物理量を寸法効果のない材料特性とみなして設計や保守点検に用いるためには  $K_{IC}$ 、 $J_{IC}$  の場合よりもさらに慎重な理論的・実験的検討が必要となろう。

このように、いまだ数多くの問題点が残されている非線形破壊力学ではあるが、正しい認識に基づいてこれを利用する場合には現段階で明らかになっている範囲のものであっても実用上十分に有用なものとなる。また、いくつかの基本的問題点を解消することによって、さらに有用な工学的ツールとなり得ることが期待できる。

破壊力学パラメータがき裂先端を支配することの意義 微小変形を前提とする線形弾性体および非線形弾性体に対して数学的に定義される  $J$  積分は、ひずみエネルギー解放率あるいはき裂先端に流入するエネルギー量というエネルギー平衡に基づく物理量 ( $G$ ) であると同時に、き裂先端の特異応力場の強さを表すという2通りの意味を持っている。同様に、 $K$  は線形弾性体に対するエネルギー解放率 ( $G$ ) と一義的な対応があり、同時に特異応力場の強さとしても定義される。

しかしながら、破壊靱性である  $K_{IC}$ 、 $J_{IC}$ 、 $J_R$  等は荷重・荷重点変位曲線から求められることからわかるとおり、エネルギー平衡に基づく物理量である。また、荷重パラメータとしての  $K$ 、 $J$  などは有限要素法等によって計算されるが、これもまた経路積分法や仮想き裂進展法などの定義からもわかるとおりエネルギー平衡に基づいて導かれる物理量である<sup>43)</sup>。すなわち、破壊の評価においてはエネルギー平衡論

<sup>43)</sup> ただし、 $K$  値の評価では特異応力場の定義から導かれる関係式を用いる場合があるが、あまり精度が良くないため現在では混合モードの場合の  $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  の分離の際に用いられる程度である。

に基づく物理量同志の比較が行なわれているわけである。ところが、局部的に有限な塑性変形を起こし得る実際の金属材料に対しては、このエネルギー平衡条件に基づく破壊条件はき裂進展に対する必要条件であるに過ぎず、必ずしも必要十分条件とはならない点に注意しなければならない。

この十分条件に関する詳細は文献<sup>(40)(41)</sup>に譲るが、要するに実際の金属材料のき裂先端近傍が  $K$  あるいは  $J$  によって単一パラメータ表示される特異応力場に支配されていることがその条件となる。また、これが満足される時に初めて2通りの定義による破壊力学パラメータの値が一致する。ところが、現実の材料において完全な「支配」はあり得ないので、この「支配される」程度を工学的な許容範囲で定量化して妥当な十分条件として示すことが重要となる。また、こうして定められた工学的な十分条件が後述する  $K$  に対する小規模降伏条件であり、 $J$  に対する  $J$  支配条件である。

ところで、より一般の弾塑性材料に対しても、単位き裂進展あたりのポテンシャルエネルギーの解放率でありかつき裂先端の特異応力場の強さを表す物理量として  $\hat{G}^{(19)(20)}$ 、 $J_{ext}^{(21)}$ 、 $\hat{J}^{(22)(24)}$  等が提案されているが、これらは対応する破壊靱性値の実験的決定の部分に問題があるため、現段階では破壊機構の解明に用いられたい経路独立積分として特殊な条件下での有限要素法によるき裂先端の  $J$  積分値の評価に利用されている。個人的には、破壊力学の工学的応用を考える場合には、後述する  $J$  支配条件の定量化とそれを逸脱した際の安全側の外挿方法を考えることが重要であり、上記のようなパラメータなどによってその妥当性をフォローするという立場をとるべきではないかと考えている。

小規模降伏条件と  $J$  支配条件 前述した「き裂先端を支配する」条件として、 $K$  については小規模降伏 (Small Scale Yielding) 条件が、 $J$  については  $J$  支配 ( $J$ -dominance) 条件がそれぞれ実験的に次のように与えられている<sup>44)</sup>。

$$a, b \geq 2.5 \left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2.87)$$

$$b \geq 25 \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.88)$$

ここで、 $a, b$  はそれぞれき裂長さおよび  $r$  ガメント長さであり、 $\sigma_0$  は降伏応力である。また、式 (2.88) においては  $\sigma_0$  の代わりに  $\sigma_f = (\sigma_0 + \sigma_B)/2$  ( $\sigma_B$  は引張り強さ) がおかれる場合もある。以下では、上式の表す意味を考えてみる。

まず、線形弾性体に対してはき裂先端近傍の応力、ひずみおよび変位場が良く知られた次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \epsilon_{ij} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \\ u_i &= \frac{K}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tilde{u}_i(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

<sup>44)</sup>

$$\left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{E' J}{\sigma_0^2} = \frac{1}{(1-\nu^2) \epsilon_0} \frac{J}{\sigma_0} \simeq 500 \frac{J}{\sigma_0}$$

であることを考えれば、式 (2.87) は式 (2.88) に比べて寸法にして約 50 倍の制約があることが理解できよう。



ここで、 $G$  はせん断弾性係数であり、 $r$  はき裂先端からの距離である。上式によって精度良く近似できる応力・ひずみ場が  $K$  支配域 (以下その大きさを  $R_K$  とする) であり、塑性変形領域の大きさ ( $R_P$  とする) が  $R_K$  よりも小さい条件 ( $R_K > R_P$ ) が小規模降伏条件 ( $K$  によってき裂先端近傍の応力・ひずみすなわち破壊現象が支配される条件) であると理解できる。

ところで、式 (2.89) は本来き裂先端近傍のみで成立する<sup>\*45</sup>ものであるから、き裂先端から離れるに従って特異性を持たない項の寄与が大きくなり、もはや  $K$  によって単一パラメータ表示できなくなる。その寄与の程度 (すなわち式 (2.89) の近似精度) は部材の形状と負荷様式に依存するため、これを定量的に定めるのは一般に困難であるが、無限板中のき裂についての厳密解との比較から  $r/a=0.15$  で約 10%、 $r/a=0.07$  で約 5% という値が知られているので一応の目安として参考になる。これより、誤差 5% 以内の精度で式 (2.89) によって近似できる応力・ひずみ場の大きさが例えば次式のように書ける。

$$R_K(\pm 5\%) = \text{Min}\{0.07a, 0.07b\} \quad (2.90)$$

一方、塑性域の大きさ ( $R_P$ ) は等価き裂寸法の考え方から平面ひずみの時には

$$R_P = \frac{2}{5.6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2.91)$$

と得られるから、これと式 (2.87) から次式が導かれる。

$$a, b \geq 22R_P \implies R_P \leq R_K (\approx 0.05a, 0.05b) \quad (2.92)$$

小規模降伏という言葉はこれまで、塑性域寸法がき裂長さやリガメント長さに比べて十分に小さい条件としてあいまいに与えられてきたが、式 (2.90) および式 (2.92) の第2式を通してその意味が明確に理解できよう。

次に、非線形弾性体について考える。ここでは、線形弾性体との類似点に着目した簡単な説明にとどめ、詳細な説明は次項に譲ることとする。非線形弾性体の構成式を  $\epsilon/\epsilon_0 = \alpha(\sigma/\sigma_0)^n$  とするとき、そのき裂先端近傍の応力、ひずみおよび変位場は次式で与えられる (3.3.2 項参照)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n) \\ \epsilon_{ij} &= \alpha \epsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \bar{\epsilon}_{ij}(\theta, n) \\ u_i &= \frac{J}{I_n \sigma_0} \left( \frac{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 I_n r}{J} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{u}_i(\theta, n) \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

ここで、 $\epsilon_0 = \sigma_0/E$  である。そして、 $J$  支配条件は  $K$  の場合と同様に  $J$  支配域の大きさ (すなわち式 (2.93) で表される HRR 解によって精度良く近似できる応力・ひずみ場の大きさ;  $R_{HRR}$ ) が破壊進行領域 (あるいは顕著な非比例負荷域;  $R_F$ ) よりも大きい条件として次式で与えられる。

$$R_{HRR} > R_F \quad (2.94)$$

ところが、この  $R_{HRR}$  は線形弾性体の場合と違って荷重様式に非常に強く依存し、曲げ支配型の負荷様式の場合に

$$R_{HRR} \approx 0.07b \quad (2.95)$$

<sup>\*45</sup> この条件はよく  $r/a \ll 1$  と表現されているが、 $a < b$  の場合には  $r/b \ll 1$  となる

と与えられている。また、破壊進行領域の大きさはき裂先端の鈍化による強変形域に対応すると考えれば、有限要素解析などから

$$R_F \approx 3\delta_l \approx 1.8 \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.96)$$

と与えられており ( $\delta_l$  はき裂先端開口変位)、式 (2.94)~式 (2.96) から式 (2.88) が導かれる<sup>\*46</sup>。

ここで、式 (2.95) と式 (2.92) の第2式を比べると、その係数の類似 ( $\approx 0.07$ ) は興味深いところであるが、 $R_{HRR}$  の方は塑性変形の特性を反映するものであるためリガメント長さのみに比例する量となっている点で大きく異なっている<sup>\*47</sup>。なお、負荷様式が可張り支配型の場合には  $R_{HRR}$  が式 (2.95) よりも小さな値となるため、式 (2.88) の使用には十分に注意しなければならない<sup>\*48</sup>。

ところで、き裂進展に対する材料の示す最小の破壊抵抗である平面ひずみ破壊靱性 ( $K_{IC}$  および  $J_{IC}$ ) を実験的に得るための条件としては、式 (2.87) および式 (2.88) の他に平面ひずみ条件が加わり、それぞれ次式のように表される。

$$a, b, B \geq 2.5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2.97)$$

$$b, B \geq 25 \frac{J_{IC}}{\sigma_0} \quad (2.98)$$

ここで、 $B$  は試験片の板厚である。本項で示した  $K$  支配域および  $J$  支配域の考え方に基けば、上式の条件を満足する領域において測定された破壊靱性値が寸法に (さらに式 (2.97) については荷重様式にも) 依存しない材料特性となることは容易に理解できよう。

なお、 $J_R$  カーブもまた平面ひずみ状態において材料固有の破壊抵抗となり、これを実験的に得るための条件が同様に与えられている。これが、 $J$  支配き裂進展 ( $J$ -controlled crack growth) 条件であり、その詳細は後述する。

破壊靱性におよぼす破壊機構および応力状態の影響 以上の諸論により、き裂先端を支配することと支配パラメータによる破壊の評価との関連が明らかになった。ところが、破壊靱性値に関してはごく基本的な部分においても未解決の問題がいくつか残されている。ここでは、本項の締めくくりとして破壊力学を構造物のき裂進展の予測に正しく適用するために重要となるものとして、破壊機構および降伏規模が破壊靱性値に及ぼす影響に関連する事項を簡単に説明しておく。

金属材料の破壊機構はへき開、延性引き裂き (微小空洞の合体・成長) およびすべり面分離に大別される。このうち、すべり面分離は巨視的には純金属の延性破壊や塑性崩壊時のすべり線に沿った変形の説明に必要であるが、微視的には延性引き裂きと同じ機構であるから、破壊靱性との関連を考える場合にはへき開 (Cleavage) と延性引き裂き (Ductile Tearing) のふたつに注目すれば良い。両者はそれぞれ下部棚 (低温側) および上部棚破壊靱性 (高温側) を支配する破壊様式であり、各領域においてはいずれも材料特性と見なすことができる。ところが、脆性-延性遷移温度域においては本質的に破壊機構の

<sup>\*46</sup> 式 (2.96) の説明は従来のものの踏襲であり説明が不明確であるが、この点については以降で明らかにされる。

<sup>\*47</sup> ここで、き裂が非常に小さい場合に対しては式 (2.95) に対応するものが得られていないが、この点もまた残された解決すべき問題点であるといえる。

<sup>\*48</sup> つまり式 (2.88) は CT 試験片や 3 点曲げには使用できるが、CCT 試験片には使用できない。



異なる両者が混合した状態となっており、実験的に得られる破壊靱性値が大きくばらつくという問題がある。具体的には、小型試験片を用いて(すなわち  $J_{IC}$  から)この領域における  $K_{IC}$  を推定することができないという問題である。現象としては、延性引き裂きを伴うべき間の  $K_{IC}$  がばらつきの上限値を与え、一方べき間のみの  $K_{IC}$  が下限値を与えていると説明できるが、それらの混合度合(あるいはべき間破壊の発生確率)の寸法依存性などが未だ明らかにされておらず、平面ひずみ状態におけるこの下限線を  $K_{IC}$  として実用に供しているのが現状である。

すなわち、弾塑性破壊靱性(すなわち延性引き裂き状態で実験的に求められる破壊靱性)である  $J_C$  さらには弾塑性破壊抵抗である  $R$  カープを用いた議論は、上部靱破壊靱性の成立する温度域における延性引き裂き型の破壊現象に限られるものである点に注意しなければならない。

また、上記の問題点を除けば前節で示した通り  $K_{IC}$  および  $J_{IC}$  は試験片寸法および荷重様式に依存しない材料定数となるが、 $R$  カープについてはそれらの影響があまり明らかにされていない。 $R$  カープの荷重様式依存性については定性的な説明がなされるようになってきているが、寸法効果すなわち降伏規模による相違は今後実験的に明らかにすべきテーマであろう。個人的には、 $R$  カープには寸法効果があり、構造物が大きい(塑性域が相対的に小さい)ほどその勾配は小さくとなると考えている。例えばこのとき、CT 試験片で求めた  $R$  カープを用いて圧力容器のき裂進展を評価すると危険側の評価となってしまうなどの問題点が生じる。

### 2.5.2 非線形破壊力学の適用限界

金属材料(弾塑性材料)におけるき裂の安定および不安定進展条件を  $J$  積分で記述するにあたっては、 $J$  積分が微小変形全ひずみ塑性理論(Small Strain J2-deformation Theory)に基づいて定式化されていることに起因して適用限界が存在する<sup>(42)</sup>。すなわち、一つはき裂先端近傍における幾何学的な強変形域および金属学的な破壊進行領域が HRR 解の支配的な領域の中に十分に含まれるための条件(前述の  $J$  支配条件)である。一方、上記の HRR 支配域を取り囲む領域においても同様に、これらが HRR 場の境界条件を与えることから、ここでの材料の挙動もまた全ひずみ塑性理論によって精度良く記述できるための条件が必要になる。特に後者の問題は、線形弾性破壊力学の領域では自然に成立するために意識されていなかったものであり、非線形破壊力学特有の問題である。以下では、まず後者から順にその具体的な問題点と関連する研究成果を説明し、非線形破壊力学の適用限界として知られているものの現状と今後必要となると考えられる研究を整理する。

**グローバルな非比例荷重** 実際の金属材料の弾塑性挙動は、増分塑性理論(J2-flow Theory)によって精度良く記述できることが知られている。ところが、 $J$  積分の前提となっている全ひずみ塑性理論が増分塑性理論と完全に一致するのは、除荷がなくかつ比例荷重(物体内のあらゆる点において主応力方向が回転しない状態、すなわち各応力成分が互いに一定の比率で変化する状態)の成立する場合に限られる。そして、線形弾性体の場合と同様にき裂先端近傍の特異応力場(HRR 場)自体はこの条件を満たしているが、HRR 場以外の部分では一般には比例荷重は成立しない。具体的には、き裂が進展する場合や外荷重(モード I の場合には軸力と曲げモーメントの2つである)の比が一定でない場合はもちろん、き裂が進展せずかつ外荷重の比が一定であっても Ramberg-Osgood 型のような構成方程式の場合の構造全体の挙動は一般に比例荷重条件を厳密には満たさない。

このことに関する研究は、停留き裂・単一荷重単調荷重の場合(例えば、片割き裂材の一樣引張りあるいは純曲げなど)に限られ、この場合には HRR 場の周囲での非比例荷重がき裂先端の  $J$  積分値に

およぼ影響が極めて小さいことが有限要素解析によって明らかにされている。一方、き裂が進展する場合や外荷重の比が一定でない場合についてはあまり系統的な研究はなされていないが、 $J$  積分の適用の幅を広げるためにも今後の重要な検討課題となるのではないかと考えられる。ちなみに、この場合には最初に出来たすべり線によって後の塑性変形挙動が拘束されると考えられ、全ひずみ理論による予測とはかなり違った結果になるのではないかと(結果的には  $J$  積分の適用可能範囲が小さくなるであろう)と考えられる。

**$J$  支配条件(ローカルな非比例荷重)** き裂先端近傍はき裂先端の鈍化が観察されることからわかるとおり顕著な有限変形があり、またき裂先端近傍ではボイドの発生・成長・合体等の微視的な破壊過程の生じている領域が存在する。そして、これらの内部および周辺においては、主応力方向の回転が起こっていると考えられる。すなわち、微小変形全ひずみ塑性理論から導かれる HRR 解(式(2.93))に支配される領域の中にこれらが十分に含まれていることが  $J$  積分を破壊力学パラメータとして使用できる条件となる。

具体的には、次のようになる。まず、上記の有限変形域(Finite Strain Region)の大きさはおおそき裂先端開口変位(Crack Tip Opening Displacement;  $\delta_t$ )の大きさと同程度のものと考えられ、McMeeking ら<sup>(43)</sup>の有限変形有限要素法の結果によれば、微小変形理論とのずれが顕著になる領域(すなわち強変形域)はき裂先端から  $2\sim 3\delta_t$  以内の領域である。また、き裂先端開口変位は  $J$  積分値との間に次のような関係があることが知られている。

$$\delta_t = d(\alpha \epsilon_0, n) \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.99)$$

ここで、 $d$  は主として硬化指数  $n$  に依存する関数であり、Shih<sup>(44)</sup>によれば高硬化材( $n=3$ )で 0.3、低硬化材( $n=10$ )で 0.8 程度であるが、通常は  $d=0.6$  が用いられる。すなわち、以上のことから鈍化による非比例荷重域が HRR 場の内部に含まれる条件(すなわち鈍化が起こっても HRR 解が成立する領域が存在する条件)が次のように導かれる。

$$R_{HRR} > 3\delta_t \approx 1.8 \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.100)$$

一方、ボイドの発生・成長・合体といった微視的な破壊進行の起こっている領域(Fracture Process Zone)の大きさ( $R_F$ )は、き裂先端での破壊様式がべき間である場合には( $R_F \ll 3\delta_t$ )であるが、せん断分離型(延性引き裂き型)の時には( $R_F > 3\delta_t$ )となるのが普通である。ところが、青木ら<sup>(45)</sup>および宮本ら<sup>(46)</sup>の最近の研究によって HRR 場は主としてき裂の鈍化によって乱され、ボイドの存在による乱れは比較的小さいことが示されている。すなわち、破壊進行領域の大小にかかわらずやはり式(2.100)が  $J$  支配条件となるわけである。

さて次に、HRR 場の支配的な領域(すなわち微小変形全ひずみ理論から導かれる応力・ひずみ場(式(2.93))によって精度良く近似できる領域)の大きさを表す  $R_{HRR}$  は、荷重様式と硬化指数に依存することが知られているが、従来はおおざっぱに次のように与えられていた<sup>(47)</sup>。

$$R_{HRR} = \begin{cases} 0.01b & (\text{引張支配型}) \\ 0.07b & (\text{曲げ支配型}) \end{cases} \quad (2.101)$$

これと式(2.100)から、具体的な  $J$  支配条件として次式が得られる。

$$b > \begin{cases} 180 \frac{J}{\sigma_0} & (\text{引張支配型}) \\ 25 \frac{J}{\sigma_0} & (\text{曲げ支配型}) \end{cases} \quad (2.102)$$



なお、最近の研究によって  $R_{HRR}$  の大きさはかなり定量的に求められており<sup>(48)(49)</sup>、軸力と曲げの比を様々に変化させた場合のもの<sup>(50)</sup>や表面き裂に対するもの<sup>(51)(52)</sup>さらには進展き裂に対するもの<sup>(53)(54)</sup>まで調べられている。また、混合モード下に対する研究も見られるようになり<sup>(55)~(57)</sup>、前述の研究も含めてこれらの研究は後述する「変形の局所化」と関連させて説明されるようになってきている点が注目される<sup>(58)(59)</sup>。ところで、以上の研究は限られたケースに対するものであるが、進展き裂や三次元き裂など現実的なき裂問題では  $R_{HRR}$  が式(2.101)よりも小さくなることが示唆されており、このことは  $J$  積分の有効範囲が式(2.102)よりも小さくなることにつながるから、今後さらに細かい体系的な研究が望まれる分野であるといえよう<sup>(49)</sup>。

本論文においては、従来から良く知られた式(2.101)、式(2.102)および後述する式(2.103)に Shih<sup>(50)</sup>による荷重様式の境界の定量化に関する知見を加味したものをを用いて評価を行なうこととし、具体的には5.6節および6.3節における実際の評価の際に説明を行なうことにする。

き裂進展解析時の  $J$  積分の有効性 き裂進展解析時の  $J$  積分の有効条件 ( $J$ -controlled Crack Growth Condition) の導出過程は、上述のものとはほぼ同じである。すなわちこの条件は、前述の強変形域および破壊進行領域に加えてき裂進展に伴う除荷域およびその周辺の非比例負荷域の大きさが  $HRR$  支配域よりも小さい条件として一般に次式で与えられる<sup>(42)</sup>。

$$R_{HRR} > \text{Max} \left\{ 3\delta_I, \Delta a, J_R / \left( \frac{dJ_R}{da} \right) \right\} \quad (2.103)$$

上式の右辺第3項は、材料特性としての非比例負荷域の大きさを表すおおよその値とされており、一般に右辺の3つの中では最も大きい。すなわち、式(2.101)と合わせると

$$\omega = \frac{b}{J_R} \frac{dJ_R}{da} > \begin{cases} 100 & (\text{引張支配型}) \\ 14 & (\text{曲げ支配型}) \end{cases} \quad (2.104)$$

を得る。

しかしながら、上式で示される有効範囲は非常に小さいので、実用的にはこの5倍程度ゆい条件である次式で評価されている場合も多い。

$$\frac{b}{J_R} \cdot \frac{dJ_R}{da} > \begin{cases} 20 & (\text{引張支配型}) \\ 2.5 & (\text{曲げ支配型}) \end{cases} \quad (2.105)$$

<sup>49</sup>  $R_{HRR}$  の大きさあるいはき裂先端近傍の応力解析に関する多くの研究から、すべり線 (あるいは Shear Band) の形状がこれと強く関係していることは明らかである。このことを基にさらにそのメカニズムを考えれば、まず塑性ヒンジを形成するような場合の方が  $R_{HRR}$  が大きいのであるから、「回転中心がき裂先端から近い」・「塑性拘束度が大きい」<sup>(60)</sup>・「三軸性が大きい」・「平面ひずみ度が大きい」などの時に  $R_{HRR}$  が大きくなることは自然に理解できる。また、巨視的には CCP 試験片に代表されるようにすべり線がリガメント断面を直接貫通するような場合には、すべり線に沿った巨視的変形がき裂先端のひずみを大きくし、結果として三軸性を失わせることになることと説明できよう。さらに、このような観点から考える時、最初にできたすべり線によってその後の状態も拘束されるのであるから、 $R_{HRR}$  の進展き裂および特に荷重履歴に対する依存性は比較的小さいもののように思われる。一方、三次元き裂の最深点で  $R_{HRR}$  が小さいのは、き裂前縁の拘束により見かけよりも引張り支配型に近くなっているためであると考えられよう。

このように、き裂進展解析時の  $J$  積分の有効条件は解析の合否に敏感に影響するにもかかわらず、いまだあいまいな点が残されており、今後の研究が期待される。具体的には、き裂進展時の  $R_{HRR}$  の変化とその負荷様式依存性および式(2.103)右辺第3項に示される進展き裂先端の非比例負荷域の定量化が重要であると考えられる。

き裂先端近傍の延性破壊に関する力学的取り扱い 以上の説明は、 $J$  積分がき裂先端近傍を支配するか否かという観点から大雑把に (良くいえば工学的センスで)  $HRR$  場の成立に及ぼす各種因子の影響度を明らかにするという立場からのものである。ところが、近年の計算機能力の向上を背景として、き裂先端の破壊進行領域内の挙動をより詳細に調べる研究もまたさかに行なわれている。これらの研究成果は  $J$  積分の使用限界およびその精度を明らかにし、さらには適用限界を越えた場合の安全側の外挿方法あるいは修正方法に関する有益な情報となり得ると考えられる。

この種の研究に関する詳しい展望は青木<sup>(61)</sup>によってなされており、特にボイドの合体・成長に関する力学的な取り扱いについては小倉・大路<sup>(62)</sup>、村上・大南<sup>(63)</sup>、宮本<sup>(64)</sup>らによって、また構成式によるき裂先端近傍の変形の局所化現象の違いについては北川<sup>(10)</sup>、後藤<sup>(11)</sup>、北川・富田<sup>(12)</sup>、富田<sup>(13)</sup>らによってそれぞれ詳細な解説がなされている。これらの精力的な研究によって、これまでに例えば第二相粒子の間隔・大きさおよびボイドの体積率等が  $\delta_{IC}$ 、 $K_{IC}$ 、 $J_{IC}$  に与える影響、き裂先端前方に生成されるディンプルの形状と方向性の予測、さらには古典的な局所破壊条件の修正など興味深い研究が次々と発表されており、今後の研究がますます期待される分野である。



## 2.6 結 言

本章では、第1章で提起した問題点の解決を目的として新たな破壊力学解析概念の構築のための基礎的検討を行なった。すなわちここでは、構造解析の対象が複雑な構造物となりさらにその非線形性を考慮すべき場合には、変形をベースとした材料力学的な解析よりもエネルギー原理に基づく解析の方が「理論が見通し良く展開できる」「導かれた式の物理的意味や力学的妥当性が明確である」「導出過程から得られる情報量ははるかに豊富かつ有用である」など多くの利点があることに着目して、エネルギー原理に基づく古典的構造解析理論をき裂問題に拡張する考え方を議論してある。ここでの主要な成果を要約すれば以下になる。

- (1) き裂の存在による変形の増加分がコンプリメンタリエネルギーを仲介として破壊力学パラメータから容易に計算できることに着目して、すべての構造解析の基本原理解であるエネルギー停留原理からき裂を有する構造物の内力を求める方程式が直接導かれることを示した(2.4.2項)。
- (2) 通常の構造解析理論では内力を求める場合と安定性の議論においてはそれぞれエネルギー停留原理および弾性安定理論という全く別の評価規程が用いられるが、き裂問題ではその明確な使い分けがなされていなかった。本論文第1章で指摘した破壊力学の理論的発展の停滞という問題点はまさにこのことに起因するものであった。ここでは、従来からある二つの不安定き裂進展の判定規程が良く知られた弾性安定理論から統一的に導かれることを新たに示した(2.4.3項)。

これらの結果として導かれる諸式はもちろん従来から知られているものに一致するが、そのエネルギー論的根拠が明確であることから、例えば本論文第4章で展開されるき裂先端および外力が複数の場合への自然な拡張が始めて可能となったといえる。また特に、不安定き裂進展規程の一般形への拡張はその数学的表記が始めて得られたという意味でも大きな成果であろう。

さらに、ここでは第4章における理論展開および第5章以降の具体的解析のための基礎的検討として以下のようなことも行なった。

- (3) エネルギー原理に基づく古典構造解析理論では理論の展開と計算機を用いた数値演算に有利なマトリクス表記が用いられるが、この利点はコンプライアンスの導入可能な線形弾性体においてのものであった。そこでここでは、不静定構造物の内力を求める連立方程式の物理的意味に対する考察をもとに新たに非線形弾性体に対するマトリクス演算の手順と上記の連立方程式の陽な定式化の手順を示した(2.3.3項)。
- (4) 以上の諸論より得られる破壊力学パラメータはエネルギー解放率としての意味を持つが、これを破壊力学試験片から得られる材料データと比較してき裂の進展を議論するためには満たすべき十分条件が存在する。特に、非線形領域においてはこれを無視した議論が多く見られるが、ここではその基本概念を明確にすると同時に本論文で提唱する評価手順の中でこれが容易に検討できる形に整理した(2.5節)。
- (5) また、従来の破壊力学理論との対応を明確にして膨大な実験データの蓄積を活用すべく別報で提案した荷重変位線図上における破壊を議論する手順もまた、エネルギー原理の拡張として統一的に議論できるものであることも同時に示してある。

以上の諸論によって非線形問題や複雑な構造物に対しても破壊力学を無理なく拡張でき、き裂を有する構造物の安定および不安定破壊を良く知られたエネルギー原理に対応させて明確に理解できる方法論の基礎ができてきたといえる。

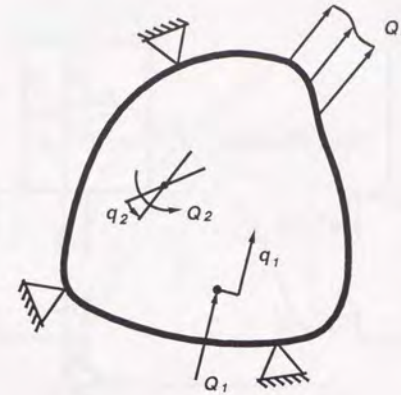
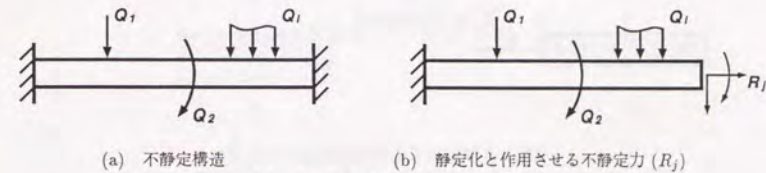
図 2.1 一般化力  $Q_i$  ( $i=1 \sim n$ ) を受ける物体

図 2.2 不静定構造物の解析の概念図

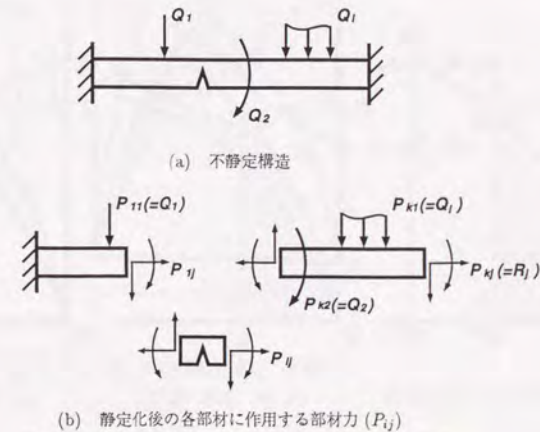


図 2.3 複雑な不静定構造物の静定化による解析の概念図



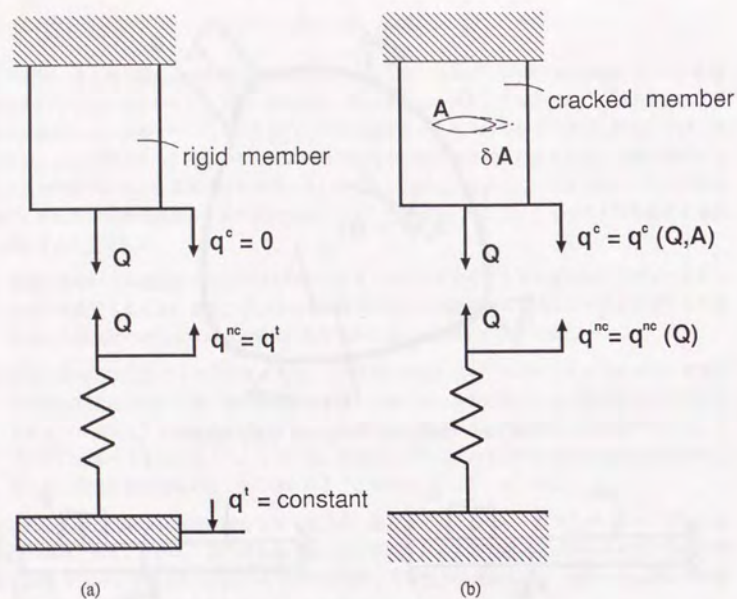


図2.4 き裂を有する不静定構造物のモデル

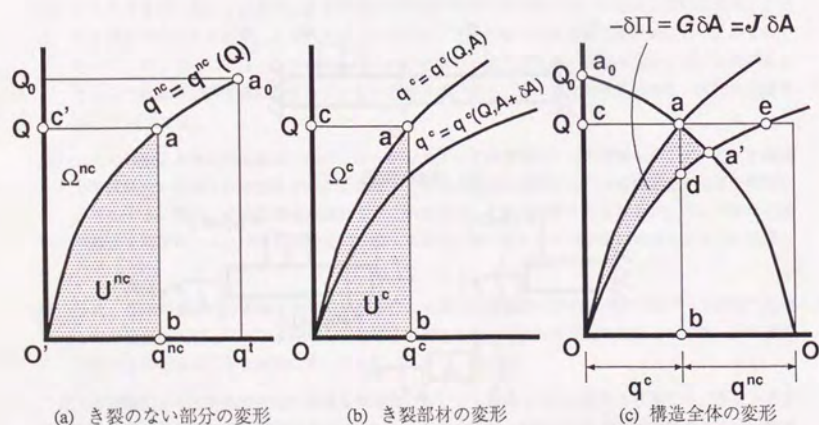
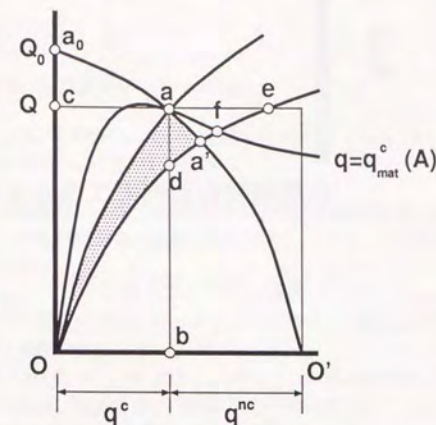
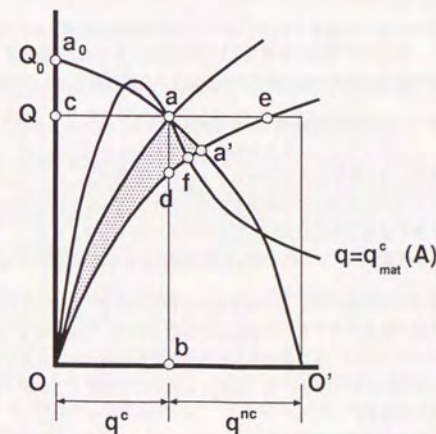


図2.5 き裂の存在および進展による内力と弾性構造に蓄えられるエネルギーの変化



(a) 不安定破壊を起こさない場合



(b) 不安定破壊を起こす場合

図2.6 荷重変位曲線上での不安定破壊現象の解釈



## 3

## き裂部材の変形とエネルギー

## 3.1 緒言

き裂部材の変形とエネルギーを論じるための基礎となる関係式は前章2.4.1項において導かれたとおりである。本章では、これらの関係式を前章2.3節で示したマトリクス表記による不静定構造物の解析理論に組み込み、き裂を有する現実の構造物の解析を行なうために必要となる作業を行なう。

すなわち以下、まず3.2「線形弾性体に対する諸量」では、応力拡大係数の有限補正係数からき裂部材の変形およびコンプリメンタリエネルギーを計算する関係式を示した後に、任意の応力分布に対するこれらの一般形を導き、さらにこれらをマトリクス表記で整理する。次に、次章以降の解析に役立つよう欠陥部材の代表として知られる片側き裂材を取り上げて、導かれた諸式により評価される諸量の具体的特性および精度を解析的漸近特性に基づいて検討する手順を示す。さらにここでは、実際の数値解析において有用となる各種変形に対する高精度な簡易評価式を解析的漸近特性に基づいて導く。

以上で展開される線形弾性体に対する諸論は重ね合わせの原理に基づいているため、複合荷重下における諸量の評価が容易であるだけでなく、各荷重の影響を分離して検討することが可能であった。ところが、非線形弾性体に対しては、重ね合わせの原理が成立しないことに起因して複合荷重下における諸量の評価が著しく困難となるばかりか、単一荷重下においても現在までに得られている解析解は極めて限られているのが現状である。

そこで、3.3「非線形弾性体に対する諸量」においては、全ひずみ塑性理論に基づくことにより引張り・曲げおよびせん断荷重が複合する場合のき裂部材の変形およびJ積分値をパラメトリックに評価する手順を新たに提唱すると同時に、既存の解を活用してこれらを実際の評価する考え方を示す。また、ここでも線形弾性体の場合と同様に任意の応力分布に対するき裂部材の変形の一般形を導き、マトリクス表記で整理するとともに、片側き裂材に対する複合荷重下における諸量を広範囲にわたって求めておく。

## 3.2 線形弾性体に対する諸量

## 3.2.1 一般的関係式と諸量のマトリクス表記

以下ではまずき裂形状および荷重様式によらない諸量の相互関係式を整理した後に、実用的な荷重条件下での諸量のマトリクス表記による一般形を導いておく。

二次元問題における一般的関係式 線形弾性体に対する二次元き裂問題を考える時、エネルギー解放率およびJ積分と応力拡大係数の間には次の関係が成立する<sup>(1)</sup>。

$$G = J = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G}K_{III}^2 \quad (3.1)$$

ただし、ここでは平面ひずみ状態のみを考えることとし、このとき  $E' = E/(1-\nu^2)$  ( $E$  は縦弾性係数、 $\nu$  はポアソン比)、 $G$  はせん断弾性係数である<sup>\*1</sup>。

また、二次元問題を考える便宜上式(2.55)における  $\Omega^c$  を「き裂の存在による単位厚さあたりのコンプリメンタリエネルギーの増加分」と定義し直し、以降これを「き裂部材のコンプリメンタリエネルギー」と呼ぶことにすれば、式(2.55)および式(3.1)より次式が導かれる。

$$\Omega^c = \int_0^a G da = \int_0^a J da = \int_0^a \left[ \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G}K_{III}^2 \right] da \quad (3.2)$$

ここで、 $a$  はき裂長さである。さらにこのとき、式(2.52)において  $Q$  を「単位厚さあたりの荷重」と再定義することにより同式はそのまま成立するから、式(3.2)と合わせれば次式を得る。

$$q^c = \frac{\partial \Omega^c}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q} \int_0^a \left[ \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G}K_{III}^2 \right] da \quad (3.3)$$

なお、 $q^c$  は正しくは「荷重点における荷重方向変位のき裂の存在による増加分」と呼ぶべき量であるが、以降では前章と同様に「き裂部材の荷重方向変位」と呼ぶことにする。

以上の諸式により、応力拡大係数が荷重( $Q$ )およびき裂長さ( $a$ )の関数として与えられれば、 $J$ 、 $\Omega^c$  および  $q^c$  が評価できることになる。そして今日では、種々のき裂形状および荷重様式に対して精度良い応力拡大係数の簡易評価式が得られており<sup>(2)</sup>、これを利用することによって必要な諸量を簡単な数値計算で求めることができるわけである。

二次元き裂付き平板の混合モード応力拡大係数 次に、き裂部材として二次元き裂付き平板を考え、これに図4.1(b)に示されるせん断力( $F$ )・引張り( $P$ )・曲げモーメント( $M$ )・自己平衡力( $\sigma_L$ )およびき裂面作用圧力( $p_s$ )が負荷される場合を考える。ただし、 $F$ 、 $P$ 、 $M$  はいずれも単位板幅あたりの荷重であるが、図示の点における集中荷重ではなく、き裂面に平行なき裂線(図中一点鎖線)上においてき裂がない場合に生じる  $\sigma_y$  (き裂面に垂直方向の応力) および  $\tau_{xy}$  (せん断応力) により、次式のように定義される量であるとする。

$$F = \int_{-W/2}^{W/2} \tau_{xy} dx, \quad P = \int_{-W/2}^{W/2} \sigma_y dx, \quad M = \int_{-W/2}^{W/2} \sigma_y x dx \quad (3.4)$$

\*1 平面応力状態では式(3.1)において  $E' = E$  とすれば良い。



ここで、 $W$  は板幅であり、 $x$  は板幅中央から右向きにとった距離である。またこのとき、自己平衡力は次式のように定義できる。

$$\sigma_L = \sigma_y - \frac{P}{W} - \frac{6M}{W^2} \cdot \frac{2x}{W} \quad (3.5)$$

なお、図 4.1(b) ではき裂が左側外面にある片側き裂材となっているが、以下の議論ではき裂は図中一点鎖線上であればどこにあっても良いものである。

以上で考えた5つの荷重によって実用上重要な荷重のほとんどのものと等価なき裂断面の応力分布が表現できることになる。なぜなら、構造物に作用する集中力・分布荷重・熱ひずみ・体積力などの荷重が結果的にき裂断面に及ぼす応力分布のうち破壊に支配的なモード I (き裂開口型) の応力拡大係数に寄与するもの ( $\sigma_y$ ) はすべて上記の  $P$ ,  $M$  および  $\sigma_L$  によって表現でき、モード II (面内せん断型) の応力拡大係数に寄与するもの ( $\tau_{xy}$ ) はほとんどの場合が放物線分布となるから (Appendix 参照)  $F$  のみによって十分な精度で代用できるからである。またここではモード III (面外せん断) 方向のものに対応する荷重は取扱わないが、これは実用上ほとんど問題とならないであろう。なお以上の仮定の具体的な妥当性は、本論文第5章以降に示す実際の解析によって明らかにされる。

さて、上述の荷重を同時に受けるき裂部材 (板幅  $W$ , き裂長さ  $a$ ) に対する混合モード応力拡大係数はそれぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) f_P + \frac{6M}{W^2} f_M + F_L \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{|F|}{W} f_F \\ \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi a}} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ここで、 $f_F$ ,  $f_P$ ,  $f_M$  はそれぞれの荷重様式に対応する応力拡大係数の有有限補正係数<sup>(2)</sup> と呼ばれるき裂長さ比 ( $\xi=a/W$ ) のみに依存する無次元関数であり、 $F_L$  は自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) の影響項である。これらの具体形は後述する。

諸量のマトリクス表記 式 (3.6) を式 (3.1)~式 (3.3) に代入すれば諸量が具体的に計算できることになるが、ここでは次章で提案するマトリクス表記を用いた構造解析手順に使用するための準備として、 $\Omega^e$  および  $q^e$  のマトリクス表記を導いておく。

まず、き裂部材のコンプライアンスマトリクス ( $\Omega^e$ ) は式 (3.6) を式 (3.2) に代入して得られ、これを具体的に計算してマトリクス表記で整理すると

$$\Omega^e = \frac{1}{2} \left[ \{R\}^T [\lambda] \{R\} + 2\{R\}^T \{H\} p_s + 2\{R\}^T \{L\} + f^e(p_s, \sigma_L) \right] \quad (3.7)$$

となる<sup>\*2</sup>。ここで、 $\{R\}$  は集中荷重を表す列マトリクス ( $= \{F \ P \ \frac{6M}{W}\}^T$ ) を表すものであり、 $[\lambda]$  はき裂部材のコンプライアンスマトリクス、 $\{H\}$ ,  $\{L\}$ ,  $f^e$  はいずれもき裂表面作用力 ( $p_s$ ) および自己

<sup>\*2</sup> 参考までに計算の要領を書いておく。すなわち、簡単のため式 (3.6) において  $K_I=0$  とし、これを式 (3.2) に代入すれば

$$\begin{aligned} \Omega^e &= \int_0^a \frac{\pi a}{E'} \frac{F^2}{W^2} f_F^2(\xi) d\xi = F^2 \frac{\pi}{E'} \int_0^\xi f_F^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \lambda_F \cdot F^2 \\ \frac{\partial \Omega^e}{\partial F} &= \lambda_F \cdot F \end{aligned}$$

となる。このように、 $\xi(=a/W)$  を導入した無次元化を行なうことによって見通しの良い整理が可能となり、次元解析的考察や構造規模による現象の変化に対する考察が容易となるわけである。

平衡力 ( $\sigma_L$ ) の影響項である。これらの具体形は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} [\lambda] &= \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P & \lambda_{PM} \\ 0 & \lambda_{PM} & \lambda_M \end{bmatrix}, \quad \{H\} = W \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_P \\ \lambda_{PM} \end{bmatrix}, \quad \{L\} = W \begin{bmatrix} 0 \\ L_P \\ L_M \end{bmatrix}, \\ f^e &= W^2 (\lambda_F p_s^2 + 2L_P p_s + L_L), \\ \lambda_F &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_F^2 d\xi, \\ \lambda_P &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P^2 d\xi, \quad \lambda_{PM} = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P f_M d\xi, \quad \lambda_M = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_M^2 d\xi, \\ L_P &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P F_L d\xi, \quad L_M = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_M F_L d\xi, \quad L_L = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi F_L^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ここで、 $\xi=a/W$  である。

一方、き裂部材の各荷重方向変位をそれぞれ  $u^e$ ,  $v^e$ ,  $\phi^e$  とするとき、これらは式 (3.3) より

$$u^e = \frac{\partial \Omega^e}{\partial F}, \quad v^e = \frac{\partial \Omega^e}{\partial P}, \quad \phi^e = \frac{\partial \Omega^e}{\partial M} \quad (3.9)$$

と書けるから、 $\{U^e\} (= \{u^e \ v^e \ \frac{W\phi^e}{6}\}^T)$  なる列マトリクスを考えればマトリクス演算には便利である。すなわち、式 (3.7) を直接  $\{R\}$  の各成分で偏微分すれば

$$\left. \begin{aligned} \{U^e\} &= \left\{ \frac{\partial \Omega^e}{\partial R} \right\} = [\lambda] \{R\} + \{H\} p_s + \{L\} \\ \begin{Bmatrix} u^e \\ v^e \\ \frac{W\phi^e}{6} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P & \lambda_{PM} \\ 0 & \lambda_{PM} & \lambda_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ P \\ \frac{6M}{W} \end{Bmatrix} + W \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_P \\ \lambda_{PM} \end{bmatrix} p_s + W \begin{bmatrix} 0 \\ L_P \\ L_M \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

となる。もちろん、式 (3.6) を式 (3.3) に直接代入しても同じ結果が得られる。

以上で二次元き裂付き平板に関する具体的解析に必要な諸量がすべて導かれたわけである (三次元き裂においても基本的考え方は同じである)。すなわち、式 (3.6) および式 (3.1) はそれぞれ応力拡大係数および  $J$  積分の評価に用いられ、式 (3.7) および式 (3.10) は不静定構造物中のき裂問題を考える際に用いられるわけであるが、これらはすべて  $f_F$ ,  $f_P$ ,  $f_M$ ,  $F_L$  の4つから計算できるものであることが理解できよう。また、式 (3.7) から式 (3.10) へのマトリクス演算や式 (3.10) の具体形にも端的に現われているように、「マトリクス表記は構造解析理論の展開に有利なだけでなく、各種パラメータ (ここでは荷重) の影響度の理解にも有用なものである」といえよう。

ここで、式 (3.10) を書き下して若干整理すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^e}{W} &= \frac{F}{W} \lambda_F \\ \frac{v^e}{W} &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \lambda_P + \frac{6M}{W^2} \lambda_{PM} + L_P \\ \frac{\phi^e}{6} &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \lambda_{PM} + \frac{6M}{W^2} \lambda_M + L_M \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

となり、せん断力 ( $F$ ) はその荷重方向変形 ( $u^e$ ) にのみ寄与するが、軸力 ( $P$ ) と曲げモーメント ( $M$ ) については相互コンプライアンス ( $\lambda_{PM}$ )<sup>(3)</sup> が存在して互いにその荷重方向変形 ( $v^e$ ,  $\phi^e$ ) に寄与していることがわかる。ところで、式 (3.11) を式 (3.6) と比較すれば明らかに、 $u^e$  と  $K_I$  および  $v^e$ ,  $\phi^e$  と  $K_I$  の形は相似なものとなる。例えば、 $u^e$ ,  $\phi^e$  および  $K_I$  はそれぞれき裂表面作用力 ( $p_s$ ) および自己



平衡力 ( $\sigma_L$ ) による成分を持ち、特に  $p_s$  の寄与分は軸力にこれが加算される形となっていることがわかる。このことは、各荷重の影響度の類似性を検討する場合などに便利である。

### 3.2.2 片側き裂材に対する応力拡大係数

前項で導いた諸関係式は二次元き裂付き平板に対して一般に成立するものであるが、諸量の評価には各き裂形状および荷重様式に対する有限幅補正係数の具体形が必要となる。そこでここでは、構造欠陥の代表形状として本論文第5章以降の具体的解析で用いる片側き裂付き平板 (以降「片側き裂材」と呼ぶ) に対して、各荷重に対する応力拡大係数の有限幅補正係数の簡易評価式を示し、その適用限界などを考察しておく。

すなわち、片側き裂材に対してはそれぞれ以下の簡易評価式が知られている<sup>\*3</sup>。

$$\left. \begin{aligned} f_F(\xi) &= 4.886\xi - 11.383\xi^2 + 28.198\xi^3 - 38.563\xi^4 + 20.555\xi^5 \\ f_P(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \tan \frac{\pi\xi}{2} \frac{0.752 + 2.02\xi + 0.37\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^3}{\cos(\pi\xi/2)} \\ f_M(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \tan \frac{\pi\xi}{2} \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^4}{\cos(\pi\xi/2)} \\ F_L(\xi, \sigma_L) &= \frac{2}{\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{\sigma_L \cdot G(\zeta, \xi)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta \\ G(\zeta, \xi) &= g_1(\xi) + g_2(\xi)\zeta + g_3(\xi)\zeta^2 + g_4(\xi)\zeta^3 \\ g_1 &= 0.46 + 3.06\xi + 0.84(1-\xi)^5 + 0.66\xi^2(1-\xi)^2 \\ g_2 &= -3.52\xi^2 \\ g_3 &= 6.17 - 28.22\xi + 34.54\xi^2 - 14.39\xi^3 - (1-\xi)^{3/2} - 5.88(1-\xi)^5 - 2.64\xi^2(1-\xi)^2 \\ g_4 &= -6.63 + 25.16\xi - 31.04\xi^2 + 14.41\xi^3 + 2(1-\xi)^{3/2} + 5.04(1-\xi)^5 + 1.98\xi^2(1-\xi)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ここで、 $\xi = a/W$ ,  $\zeta = c/a$  である ( $c$  の定義は後述する)。

このうち、まず  $f_F$  は市川ら<sup>(4)</sup> によるものであり、8 ケース ( $\xi = 0.1 \times i$ ,  $i=2 \sim 9$ ) の有限要素法解析結果を曲線補間したものであるが、本式は次項で示すとおり  $\xi \rightarrow 1$  における漸近特性を反映していないため、 $f_F$  およびこれを用いて計算される  $\lambda_F$  (式(3.8)参照) の適用範囲は  $0 \leq \xi \leq 0.9$  と考えた方がよいであろう。また、 $f_F$  に関する解析は筆者の知る限りでは上記の市川らの研究の他に Cheng ら<sup>(5)</sup> によるものしかないので、本式の精度は現段階では不明である (ただし、市川らと Cheng らの解析結果とはお互いに良く一致している)。

次に、 $f_P$  および  $f_M$  は Tada ら<sup>(2)</sup> による簡易評価式であり、き裂の全長にわたって非常に精度の良いことで知られていたものであるが、最近の詳細な解析結果<sup>(6)</sup> によれば  $f_P$ ,  $f_M$  はそれぞれ最大誤差 0.6% ( $\xi \approx 0.1$ ) および 2.4% ( $\xi \approx 0.3$ ) であることも報告されている。しかしながら、簡易評価式としてこ

<sup>\*3</sup> ただし、これらを式(3.6)に代入して図4.1(b)の状態の  $K$  値を評価する際には、き裂が右側にある場合はこのままで使用できるがき裂が左側にある場合 (図4.1(b)の状態) には  $f_M = -f_M$  としてやる必要がある。

れに優るものは現段階では得られていないため本論文においては一貫して同式を用い、またこれを用いて  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{PM}$ ,  $\lambda_M$  等の計算を行なうこととする。

一方、自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) による  $K$  値である  $F_L$  に対しては与えられた非線形な応力分布に対してその都度積分計算を行なう必要がある。つまり実用的には、他の補正係数が使用に便利な簡易評価式となっているのに対して、この計算はコンピュータ上での数値解析によらざるを得ない。具体的には、Kaya の式<sup>(2)</sup> と呼ばれるき裂面に作用する集中荷重に対する補正係数を利用することになり、以下にその適用手順を示す。

**Kaya の式とその分布荷重への適用手順** ここで Kaya の式と呼んでいるものは、正しくは Kaya-Erdogan(1980) によってその解析手法が示された問題に対して、Tada ら (1985) がより詳細な解析を行ない多項式を作成したものであることを最初に断っておく。さて、Tada らのハンドブック<sup>(2)</sup> に示されているオリジナルの式は、図3.1に示されるように板幅  $W$ 、き裂長さ  $a$  なる片側き裂材の表面から  $c$  なる位置のき裂面に集中力  $P^*$  が作用する場合に対して次式で与えられている。

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{2P^*}{\pi a} \cdot \frac{G(\zeta, \xi)}{(1-\xi)^{3/2} \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.13)$$

これを、き裂面に垂直な分布荷重  $\sigma(z)$  ( $z$  は板の中央から  $c$  と同じ方向にとった距離を表す) に対して書き直すと  $P^* = \sigma(z)dc$  であるから、式(3.13)をき裂全長に対して積分すれば

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \int_0^a \frac{2\sigma(z) \cdot G(\zeta, \xi)}{\pi a(1-\xi)^{3/2} \sqrt{1-\zeta^2}} dc = \frac{2}{\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{\sigma(z) \cdot G(\zeta, \xi)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta \quad (3.14)$$

となり、式(3.12)第4式が導かれる。

さらに、数値積分の際の特異項を消去するために  $\zeta = \sin \theta$  なる変数変換を行なうと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{2}{\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(z) \cdot G(\theta, \xi) d\theta \\ G(\theta, \xi) &= g_1(\xi) + g_2(\xi) \sin \theta + g_3(\xi) \sin^2 \theta + g_4(\xi) \sin^3 \theta \\ \sigma(z) &= \sigma(W(\xi \sin \theta - 1/2)) \\ [z &= (c - W/2) = W(\xi \sin \theta - 1/2)] \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

となる。式(3.15)はコンピュータを用いた数値積分 (例えばシンプソンの公式などによる) の際に、式(3.14)に比べてその収束が非常に早くなる利点があるだけでなく、 $\sigma(z)$  の形が単純引張りや純曲げなどのように簡単な場合には次の公式を用いて手計算で簡単に  $K_I$  を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 \theta d\theta &= \frac{\pi}{2}, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta &= \frac{\pi}{4}, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta &= \frac{3\pi}{16}, & \dots \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 \theta d\theta &= 1, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta &= \frac{2}{3}, & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta &= \frac{8}{15}, & \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$



## 3.2.3 応力拡大係数の漸近特性と簡易評価式の精度

き裂を有する平板を考える時、き裂深さの両極限 ( $\xi \rightarrow 0, \xi \rightarrow 1$ ) においてはそのき裂形状が無限板あるいは半無限板中のき裂と同等になるから、応力拡大係数もまたこれらの解 (理論値) に漸近する。この種の漸近特性は、これを  $K$  値の近似式に反映させることによってき裂の全域にわたって精度の良い近似式が作成できることで知られている<sup>(7)</sup> (Asymptotic Approximations, 文献<sup>(3)</sup>のp.46参照)。

以下では、前項に示した片側き裂材の有限幅補正係数に対してその漸近特性を示すとともに、式(3.12)に示されるこれらの簡易評価式の  $\xi \rightarrow 0$  および  $\xi \rightarrow 1$  における精度を検討する。また特にここでは、Kayaの式の漸近特性を利用することにより、自己平衡力による応力拡大係数 ( $F_L$ ) に関する興味深い漸近特性が導かれる。

(1) 外面にき裂を有する半無限板の解 ( $\xi \rightarrow 0$  における理論的漸近特性)  $\xi \rightarrow 0$  の場合の片側き裂材に関する諸量は、外面にき裂を有する半無限板のものに漸近する。その外面き裂付き半無限板の面内に集中荷重 (き裂面の垂直方向に  $P^*$ , 水平方向に  $F^*$ ) を受ける場合の解は次式で与えられる<sup>(2)\*4</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{2P^*}{\pi a} \cdot \frac{F(c/a)}{\sqrt{1-(c/a)^2}} \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{2F^*}{\pi a} \cdot \frac{F(c/a)}{\sqrt{1-(c/a)^2}} \\ F(c/a) &\simeq 1.3 - 0.3(c/a)^{5/4} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

ここで、 $c$  は外面からとった集中荷重までの距離である (図3.1参照)。

片側き裂材に対して定義される引張り、曲げおよびせん断荷重に対しては、それぞれ式(3.17)における  $P^*$ ,  $F^*$  としてき裂のある側の表面での応力値を用いれば良いから、 $F$  が表面でゼロとなる放物線分布のせん断応力を代表するものであることに注意すればそれぞれ

$$P^* = \frac{P}{W} dc, \quad P^* = \frac{6M}{W^2} dc, \quad F^* = 0 \quad (3.18)$$

となる。これを式(3.17)に代入し  $c$  に対する0から  $a$  までの積分をとると

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{P}{W} \cdot \frac{2}{\pi a} \int_0^a \frac{F(c/a)}{\sqrt{1-(c/a)^2}} dc \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{6M}{W^2} \cdot \frac{2}{\pi a} \int_0^a \frac{F(c/a)}{\sqrt{1-(c/a)^2}} dc \\ \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi a}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

を得る。ここで、 $c = a \sin \theta$  とおけば

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi a} \int_0^a \frac{F(c/a)}{\sqrt{1-(c/a)^2}} dc &\simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1.3 - 0.3 \sin^{5/4} \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ 1.3 \frac{\pi}{2} - 0.3 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5/4+1}{2})}{\Gamma(\frac{5/4+2}{2})} \right] \simeq 1.1222 \end{aligned} \quad (3.20)$$

\*4 式(3.17)第1式と式(3.13)を比較すれば、式(3.13)は式(3.17)第1式に示される  $\xi \rightarrow 0$  の漸近特性と後述する  $\xi \rightarrow 1$  の漸近特性を同時に考慮して作成されていることが理解できよう。

となり、良く知られた外側き裂に対する補正係数  $\beta (\simeq 1.1215)$  に一致することが確認できる (微妙な差異は  $F(c/a)$  の関数形に依存するものであるが、実用上問題とはなるまい)。またここで、 $\Gamma$  はガンマ関数であり  $\Gamma(1.125) = 0.9417426997$ ,  $\Gamma(1.625) = 0.8965742800$  なる関数表の値を用いた。以上より、 $f_F$ ,  $f_P$ ,  $f_M$  の  $\xi \rightarrow 0$  における漸近特性として次式が導かれる。

$$f_F(0) = 0, \quad f_P(0) = f_M(0) = \beta \quad (3.21)$$

一方、Kayaの式の補正項である  $G(\zeta, \xi)$  の理論的漸近特性は、式(3.13)において  $\xi \rightarrow 0$  としたものを式(3.17)第1式と比べることにより次式のように得られる。

$$G(\zeta, 0) = F(\zeta) \simeq 1.3 - 0.3\zeta^{5/4} \quad (3.22)$$

(2) 半無限板の内面き裂の解 ( $\xi \rightarrow 1$  における理論的漸近特性)  $\xi \rightarrow 1$  なる極限における片側き裂材に関する諸量もまた同様に半無限板の内面き裂に対するものに漸近し、この場合の  $K$  値は次式で与えられる<sup>(2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{2/\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \cdot \frac{P'}{W} + \frac{\beta/3}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \cdot \frac{6M'}{W^2} \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{2/\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \cdot \frac{F'}{W} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

ここで、 $F'$ ,  $M'$  は遠方で作用するせん断力および曲げモーメントであり、 $P'$  は回転変形を生じない位置 (背面から距離  $\frac{2W(1-\xi)}{\beta\sqrt{\pi^2-4}}$  の線上) に作用する集中力である。

片側き裂材にせん断力 ( $F$ ) が作用する場合には上式の第2式において  $F'=F$  とすれば良く、また軸力 ( $P$ ) あるいは曲げモーメント ( $M$ ) のみが作用する場合には上式第1式においてそれぞれ  $P'=P$ ,  $M'=\left[\frac{W}{2} - \frac{2W(1-\xi)}{\beta\sqrt{\pi^2-4}}\right]P$  あるいは  $P'=0$ ,  $M'=M$  とすればよいから、これらより  $\xi \rightarrow 1$  における  $f_F$ ,  $f_P$ ,  $f_M$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} f_F(1) &= \frac{2/\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \\ f_P(1) &= \frac{\beta}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \left( \frac{\beta}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} - \frac{2/\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \right) \\ f_M(1) &= \frac{\beta/3}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

と得られる。

一方、Kayaの式に対応する解としては面内に集中荷重を受ける半無限板の内面き裂に対する解<sup>(2)</sup> が使え、これを Kayaの式と同じ記号を使って書くと

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{2P^*}{\pi W} \cdot \frac{3.52(1-\zeta)}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \quad (3.25)$$

となるから、 $a \rightarrow W$ ,  $\xi \rightarrow 1$  に注意して式(3.13)と係数を比較すれば  $G(\zeta, \xi)$  の理論的漸近特性として次式を得る<sup>\*5</sup>。

$$G(\zeta, 1) = 3.52(1-\zeta)\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.26)$$

\*5 式(3.23)からわかるように、回転変形を伴わない荷重 ( $P'$ ,  $F'$ ) に対する  $K$  値の特異性が  $(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}$  であるのに対し、回転変形を伴う場合の特異性は  $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$  とこれよりも強いものとなる。そして、式



(3) 簡易評価式の漸近特性とその精度 式(3.12)に示される簡易評価式において

$$\left(\sin \frac{\pi \xi}{2}\right)_{\xi \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2} \xi, \quad \left(\cos \frac{\pi \xi}{2}\right)_{\xi \rightarrow 1} = \frac{\pi}{2} (1 - \xi)$$

などを用いると、 $f_F, f_P, f_M$  および  $G$  の  $\xi \rightarrow 0, 1$  における漸近値はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_F(0) &= 0, & f_F(1) &= \text{finite} \\ f_P(0) &= 1.122, & f_P(1) &\simeq \frac{1.123}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \\ f_M(0) &= 1.122, & f_M(1) &\simeq \frac{1.122/3}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \\ G(\zeta, 0) &= 1.3 - 0.71\zeta^2 + 0.41\zeta^3, & G(\zeta, 1) &= 3.52(1-\zeta)(1 - \frac{1.9}{3.52}\zeta^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

まず  $f_F, f_P, f_M$  について見てみると、 $f_F(1)$  以外は式(3.21)および式(3.24)に示される理論的な漸近特性と特異性まで含めて精度良く一致していることがわかる。すなわち、 $f_P, f_M$  はき裂の両極限においても十分な精度を有しているが、 $f_F$  は  $\xi \rightarrow 1$  において精度が極端に低下するといえる。なお、式(3.24)からは理論的には  $f_P(1) \equiv 3f_M(1)$  となり、この理論的漸近特性の関係によって後述する円筒の破壊強度に関する極めて重要な特性が導かれるが、簡易評価式はこの理論特性を満たしていない ( $f_P(1) \neq 3f_M(1)$ ) ために、円筒の数値解析の際に理論値と解析値に重大な食い違いが生じるという問題点もある(4.3.3項参照)。

一方、 $G(\zeta, \xi)$  についてはいずれも式の形が理論的漸近特性である式(3.22)および式(3.26)と異なっているが、これは簡易評価式では式(3.12)に示したような多項式で整理する必要上やむを得ないことであろう。そこでここでは、この簡易評価式の精度の検討のため、単純引張りと単純曲げに対する Kaya の式による計算結果 ( $K(\text{Kaya})$ ) を式(3.12)第2、第3式を用いた計算結果 ( $K(\text{Tada})$ ) と比較する。すなわち、図3.2は  $K(\text{Kaya})$  と  $K(\text{Tada})$  の比を  $\xi$  の全範囲で示したものであるが、同図よりまず式(3.27)に示される  $G(\zeta, 0)$  は非常に精度が良いが、 $G(\zeta, 1)$  は数%の誤差を生じるものであることがわかる。また同図から、全般に曲げに対する  $K$  値の評価誤差の方が大きくなる様子も読みとれるが、いずれにせよ Kaya の式を用いた解析解の信頼度は3%程度であると結論できる。

(4) 自己平衡力による応力拡大係数の漸近特性 前節までの諸論により、 $f_F, f_P, f_M$  および Kaya の式に対して理論的漸近特性および簡易評価式の漸近特性がそれぞれ導かれた。ここでは、最後に残された  $F_L$  に対してその理論的漸近特性を導き、その Kaya の式を用いた評価式(式(3.12)第4式)の精度を検討する。

まず  $\xi \rightarrow 0$  においては、式(3.17)に式(3.18)を用いて式(3.21)を導いたのと全く同じ手順によって

$$F_L = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \beta \times [\text{き裂のある側の表面での応力値}] \quad (3.28)$$

(3.24)および式(3.25)はモードI型の負荷の場合にはいずれも  $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$  なる強い特異性を持つことを表しているが、これは片側き裂材ではモードI型の負荷に対して  $\xi \rightarrow 1$  において必ずき裂を開く方向の曲げ変形を伴うことから理解できよう。逆に、引張りを受ける中央き裂付き平板あるいは両側き裂付き平板などでは回転変形が拘束されるため、その  $K_I$  の特異性が  $(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}$  となっている。

が導かれる。これが理論的漸近値である。一方、Kaya の式の積分により得られる  $F_L$  は式(3.15)において  $\xi \rightarrow 0$  と考えれば

$$F_L = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1.3 - 0.71 \sin^2 \theta + 0.41 \sin^3 \theta) d\theta \times [\text{き裂のある側の表面での応力値}] \\ \simeq 1.119 \times [\text{き裂のある側の表面での応力値}] \quad (3.29)$$

となる。ここで、上式の計算には式(3.16)を用いた。以上、式(3.28)と式(3.29)の比較から明らかにように、 $F_L$  の  $\xi \rightarrow 0$  における精度は非常に良く、このことは図3.2の  $\xi \rightarrow 0$  において見られる良好な一致とも対応するものである。

次に、任意の応力分布に対する  $F_L$  の  $\xi \rightarrow 1$  における理論的漸近特性を考えるために、ここではまず自己平衡力の一般形を考える。すなわち、板幅  $W$  なる断面の任意の応力分布  $\sigma_y(x)$  を考える時、この応力分布は式(3.4)および式(3.5)に定義された引張り ( $P$ )、曲げ ( $M$ ) および自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) に分離できるから、 $\sigma_y(x)$  の一般形として次式を考えた時

$$\sigma_y = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i t^i \quad \left[ t = \frac{2x}{W} \right] \quad (3.30)$$

式(3.4)および式(3.5)から、 $P, M, \sigma_L$  はそれぞれ以下のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{W} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \int_{-1}^1 t^i dt = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{i+1}}{i+1} \sigma_i \\ \frac{6M}{W^2} &= \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \int_{-1}^1 t^{i+1} dt = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{i+2}}{i+2} \sigma_i \\ \sigma_L &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ t^i - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{i+1}}{i+1} - \frac{3t}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{i+2}}{i+2} \right] \sigma_i \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

次に、こうして得られた  $\sigma_L$  の一般形と式(3.26)に示される  $G(\zeta, 1)$  の理論解を式(3.14)に代入すれば

$$F_L = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{2 \times 3.52}{\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (1-\zeta) \sigma_L d\zeta \quad (3.32)$$

を得る。ここで、「 $t = \frac{2x}{W} = \frac{2}{W}(c - \frac{W}{2}) = 2\xi\zeta - 1 \rightarrow 2\zeta - 1$ 」ゆえに  $\zeta = \frac{1+t}{2}$  なる変数変換を行なって式(3.32)を実際に計算すると

$$\begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{3.52}{2\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (1-t) \sigma_L dt \\ &= \frac{3.52}{2\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 \left\{ (1-t) \left( t^i - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{i+1}}{i+1} - \frac{3t}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{i+2}}{i+2} \right) \right\} dt \right] \sigma_i \\ &= \frac{3.52}{2\pi} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} [0 \times \sigma_i] \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。この結果は、「自己平衡力の分布形によらず、これによる応力拡大係数は  $\xi \rightarrow 1$  で0に漸近する(正確には  $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$  なる特異項が相殺することにより  $F_L$  が0となる)」ことを表しており、引張りや曲げ荷重に対する応力拡大係数が式(3.24)に示されるような有限の特異性をもつのと大きく異なっている。



いる。このことは、前述した半無限板の内側き裂に対する  $K$  値の理論解である式 (3.23) 第1式を考えれば  $\sigma_L$  によつては  $P'$  も  $M'$  も生じないわけであるから、 $K$  値が 0 となるのも当然の結果であろう。

一方、実際の計算では任意の  $\xi$  に対する  $G$  の関数形が必要となるため式 (3.12) に示される  $G$  を使うを得ないわけだが、 $0 \leq \xi < 1$  の場合には前述のとおり図 3.2 で示した程度の誤差を生じることになるであろう。ところが、図 3.2 に示した引張りと曲げの場合の  $\xi \rightarrow 1$  における Tada の簡易評価式の値 (理論値と考えて良い) と Kaya の式による値の比較は  $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$  なる特異性の強さの比較であったためその誤差も大したものではなかったが、ここで示した自己平衡力の場合には理論的には特異性が消えるものに対し実際の評価式では  $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$  なる特異性が残るわけであるからこの誤差は無視し得ないものとなると考えられる。またこのことは、 $f_P$  と  $f_M$  の簡易評価式において  $f_P(1) \neq 3f_M(1)$  であることに起因する数値解析上の誤差の場合と同様に円筒の解析の際に理論解と数値解析結果の食い違いとして無視し得ない誤差の原因となるものである (この詳細は次章 4.3.3 項を参照されたい)。

#### (5) 結果の整理 以上の結果を整理すれば以下のようになる。

	$f_F(\xi)$	$f_P(\xi)$	$f_M(\xi)$	$G(\zeta, \xi)$	$F_L(\xi, \sigma_L)$
理論的漸近特性 ( $\xi \rightarrow 0$ )	式 (3.21)	式 (3.21)	式 (3.21)	式 (3.22)	式 (3.28)
理論的漸近特性 ( $\xi \rightarrow 1$ )	式 (3.24)	式 (3.24)	式 (3.24)	式 (3.26)	式 (3.33)
簡易評価式の精度 ( $\xi \rightarrow 0$ )	正確	正確	正確	正確	正確
簡易評価式の精度 ( $0 < \xi < 1$ )	不明	良好	良好	数 % 以内	数 % 以内
簡易評価式の精度 ( $\xi \rightarrow 1$ )	悪い	正確	正確	数 % 以内	悪い

#### 3.2.4 漸近特性に基づくコンプライアンスの簡易評価式の作成

静定な部材あるいは構造物の破壊を議論する場合には式 (3.6) から  $K$  値を計算することで足りる。しかしながら、き裂を有する不静定構造物の破壊を議論する場合には式 (3.10) で表されるき裂材の変形を同時に考慮する必要がある。このときに、式 (3.8) に示されるコンプライアンスの値が具体的に必要となる。ところが、式 (3.12) のごとく精度良い近似式が整備されている応力拡大係数に対してき裂部材のコンプライアンスの簡易評価式は整備されていないため、一般には式 (3.8) に示される積分を数値計算によって行なわざるを得ないわけだが、種々の具体的計算に際してその都度この種の数値積分を行なうのは収束計算における精度と計算時間の問題から考えてもあまり実用的ではない<sup>\*6</sup>。例えば、式 (3.11) の  $v^c$  および  $\phi^c$  に相当する単一荷重下の解として Tada ら<sup>(2)</sup> によって次式が与えられており、

$$\left. \begin{aligned} v^c &= \frac{4P}{E'} \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} \{0.99 - \xi(1-\xi)(1.3 - 1.2\xi + 0.7\xi^2)\} \\ \phi^c &= \frac{6M}{W^2} \frac{4}{E'} \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} (5.93 - 19.69\xi + 37.14\xi^2 - 35.84\xi^3 + 13.12\xi^4) \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

これによって  $\lambda_P$  と  $\lambda_M$  の評価式は得られるが、これらと同等に重要な  $\lambda_{PM}$  についてはやはり式 (3.8) の数値積分によらざるを得ない。

<sup>\*6</sup> ただし、式 (3.15) に示した手法と同様にして  $\xi \rightarrow 1$  における特異性を消す形で数値積分を定式化し、シンプソン則などのプログラムを書けば精度と時間が飛躍的に改善される。

そこで以下では、前項で導いた有限幅補正係数の漸近特性を利用して式 (3.8) の中でも特に重要となる  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{PM}$ ,  $\lambda_M$  の簡易評価式を求める手順を示し、得られた評価式の精度を検討する。

コンプライアンスの漸近特性<sup>(3)</sup> まず  $\xi \rightarrow 0$  においては、式 (3.21) に示される漸近値を式 (3.8) の諸式に代入することにより

$$\lambda_P = \lambda_{PM} = \lambda_M = \frac{2\pi\beta^2}{E'} \int_0^\xi \xi d\xi = \frac{\pi\beta^2}{E'} \xi^2 \quad (3.35)$$

を得る。これが  $\xi \rightarrow 0$  におけるコンプライアンスの漸近値である。同様に、式 (3.24) を式 (3.8) の諸式に代入すると  $\xi \rightarrow 1$  におけるコンプライアンスの漸近値として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_P &= \frac{2\pi\beta^2}{E'} \int_0^\xi (1-\xi)^{-3} d\xi = \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^2} \\ \lambda_{PM} &= \frac{2\pi\beta^2}{3E'} \int_0^\xi (1-\xi)^{-3} d\xi = \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{1/3}{(1-\xi)^2} \\ \lambda_M &= \frac{2\pi\beta^2}{9E'} \int_0^\xi (1-\xi)^{-3} d\xi = \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{1/9}{(1-\xi)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

簡易評価式の作成手順 式 (3.35) および式 (3.36) から、 $\xi \rightarrow 0$  および  $\xi \rightarrow 1$  の両漸近特性を満足するコンプライアンスの評価式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_P &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} \{1 + \xi(1-\xi) \cdot G_{PP}(\xi)\} \\ \lambda_{PM} &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)} \{1 + \xi(1-\xi) \cdot G_{PM}(\xi)\} \\ \lambda_M &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2} \{1 + \xi(1-\xi) \cdot G_{MM}(\xi)\} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

ここで、 $G_{PP}$ ,  $G_{PM}$ ,  $G_{MM}$  は  $\xi$  のみの関数であるが、これらの関数形によらず  $\xi \rightarrow 0$  および  $\xi \rightarrow 1$  において式 (3.37) はそれぞれ式 (3.35) および式 (3.36) に一致することが確認できよう。なお、 $\lambda_{PM}$  および  $\lambda_M$  における  $(1+2\xi)$  の項は岡村 (文献<sup>(3)</sup>) の p.102 に做ったものである。

次に、 $G_{PP}$  等の関数形を求めるべく式 (3.37) を式 (3.8) の諸式と等値し、 $\lambda_P$  等を消去して変形すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G_{PP}(\xi) &= \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left\{ \frac{2}{\beta^2} \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2} \int_0^\xi \xi f_P^2 d\xi - 1 \right\} \\ G_{PM}(\xi) &= \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left\{ \frac{2}{\beta^2} \frac{(1-\xi)^2(1+2\xi)}{\xi^2} \int_0^\xi \xi f_P f_M d\xi - 1 \right\} \\ G_{MM}(\xi) &= \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left\{ \frac{2}{\beta^2} \frac{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2}{\xi^2} \int_0^\xi \xi f_M^2 d\xi - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

こうして、式 (3.12) に示した  $f_P$ ,  $f_M$  を用いて式 (3.38) 右辺を計算した結果<sup>\*7</sup> をグラフ上にプロットしたところ、図 3.3 のようになった。また、同図中には Tada らによる式 (3.34) から計算される  $G_{PP}$  および  $G_{MM}$  も同時に示してあるが、特に  $G_{MM}$  の精度が悪くなっていることが読みとれる。

<sup>\*7</sup> 数値積分は前述のごとく  $\xi \rightarrow 1$  における特異性を消した形で Simpson の 3/8 公式を用い、倍精度実数型で有効数値 6 桁まで計算している。以下、本論文における数値積分はすべてこれと同じである。



そこで次に、 $G_{PP}$  を  $\xi$  の2次関数、 $G_{PM}$ ,  $G_{MM}$  を  $\xi$  の1次関数で表し、式(3.37)を用いて  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{PM}$ ,  $\lambda_M$  の誤差が最小となるように ( $G_{PP}$  等自身の誤差ではない点に注意) 最小二乗法によってそれぞれの係数を求めたところ、結局次のような関数形を得た。

$$\left. \begin{aligned} G_{PP}(\xi) &= -1.606 + 1.942\xi - 1.128\xi^2 \\ G_{PM}(\xi) &= -0.55 + 0.50\xi \\ G_{MM}(\xi) &= 0.44 + 0.25\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

これを式(3.37)に代入すれば、 $\lambda_P$ ,  $\lambda_{PM}$ ,  $\lambda_M$  の簡易評価式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_P &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} \{ 1 - \xi(1-\xi)(1.606 - 1.942\xi + 1.128\xi^2) \} \\ \lambda_{PM} &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)} \{ 1 - \xi(1-\xi)(0.55 - 0.50\xi) \} \\ \lambda_M &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2} \{ 1 + \xi(1-\xi)(0.44 + 0.25\xi) \} \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

**評価式の精度** 上式による計算値を式(3.8)の定義に基づき式(3.12)に示される  $f_P$ ,  $f_M$  を用いて直接数値計算した値と比較したところ、図3.4に示されるように  $\xi$  の全範囲 ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) において誤差0.5%以内の精度でコンプライアンスが評価されることが確認された。

一方、本項の冒頭で紹介した式(3.34)は  $(1-\xi)^{-2}$  なる特異性は表現しているものの、図3.5に示されるようにその精度はいずれも最大4%程度の誤差があることが明らかとなった。これより、式(3.40)の第2、第3式における  $(1+2\xi)$  の項が、表記の簡潔さと精度の向上に非常に効果的に働いていることがわかる。このように、式(3.40)に示される簡易評価式は解の漸近特性を反映し  $\xi$  の全範囲で極めて精度が良いばかりでなく、その表記が簡潔なものとなっており実用上極めて有用であると考えられる。

また、図3.6は式(3.40)における右辺の  $\{ \}$  内を表示したものであるが、これは文献<sup>(3)</sup>のp.102に示される図6.3で示そうとしていたものに他ならない。

### 3.3 非線形弾性体に対する諸量

線形弾性体に対しては前節で述べたような重ね合わせの原理が成立するので、種々の外力に対するき裂部材の応答が比較的簡潔に整理でき、また既存の解を用いて必要な諸量を評価することが容易であった。ところが、非線形弾性体に対しては重ね合わせの原理が成立しないため、複数の外力に対するき裂部材の応答を線形弾性体の場合のようにパラメトリックに整理することは一般には非常に困難である。また、計算機能力の向上を背景として多くの非線形解析が行なわれるようになってはきたものの、線形弾性体で見られたような体系的研究は少ない。特に複合荷重作用下における諸量についてはその解析自体極めて少なく、前項に示したような解の精度についての統一見解を得るには程遠い状態である。

そこで以下では、まず複合荷重作用下における非線形量の解析的研究を概観した後に、それらを踏まえた新たな評価手法を提案し、これによって本論文で必要となる複合荷重下の非線形量がパラメトリックに評価できることを示したい。

#### 3.3.1 複合荷重下の非線形量に関する従来の研究

再三述べてきたように、この種の研究はその多くが構造欠陥の代表である片側き裂材を対象として行なわれている。ただし、研究の流れとしてはCT試験片の  $J$  積分値を実験的に(一本の試験片から)求めるための簡易評価式<sup>(8)</sup>の修正に関連する初期のものと、ラインスプリング法(以下LSMと略記する)に組み込んで実構造物の  $J$  積分値を評価するための研究に大別されよう。

なお、初期の解析的研究の多くが非硬化材に対するものであり、数値的には本章で提案する評価手法のチェックに用いることはできないが、その中で詳細に論じられてきた塑性拘束や回転中心の考え方などは硬化材の  $J$  積分値とその有効性の議論において重要な知見を与えるものとなっていることは本論文2.5.2項にも示したとおりである。

**非硬化材に対する複合荷重下の  $J$  積分値に関する解析的研究** まず、複合荷重を受ける非線形弾性体に関する初期の研究としては、材料を剛塑性体として取り扱い<sup>(9)</sup> 塑性論の上解・下解の考え方からCT試験片あるいは軸力と曲げを同時に受ける片側き裂材に対してその塑性拘束係数・崩壊荷重および  $J$  積分値の評価が行なわれてきた。その代表的なものとしては、Merkle-Corten<sup>(10)</sup> によるCT試験片の  $J$  積分値の簡易評価式<sup>(8)</sup>を始めとし、その修正という立場からの白鳥ら<sup>(11)~(13)</sup>、岡村ら<sup>(14)~(15)</sup>、Ernst<sup>(16)</sup>、McMeeking<sup>(17)</sup>、Kaiser<sup>(18)</sup> などによる多くの研究がある。

ところが、材料の高品質化に伴ってその加工硬化を無視した従来の剛塑性あるいは弾完全塑性体としての取り扱いが現実の材料の非線形挙動の精度良い評価としては不適切であることが指摘されるようになり、非線形破壊力学理論の成熟<sup>(19)~(22)</sup>とそれをサポートする計算機能力の向上を背景として、今日  $n$  乗硬化材に対する非線形解析が盛んに行なわれるようになってきている。

<sup>(8)</sup> Riceら<sup>(8)</sup>による曲げ材(例えば純曲げを受ける片側き裂材)に対する  $J$  積分値の簡便式の考え方を浅いき裂を持つ片側き裂材やCT試験片など軸力が無視し得ない場合に適用した時に、 $J$  積分値が過小評価されてしまう点に着目した研究であり、 $J$  積分値の簡易評価式に軸力の影響を加味した最初のものであろう。



$n$  乗硬化材に対する複合荷重下の  $J$  積分値に関する解析的研究 この種の研究はそもそも最終的には LSM<sup>(23)</sup> に組み込むことによって圧力容器の表面き裂の解析を目的とするものであったため、解析対象は軸力と曲げが重畳して負荷される場合の片側き裂材に限られている<sup>9</sup>。そして、この種の実用的な解析において重要となるのは解の再現性であろう。すなわち、ここでは  $J$  積分値等の非線形量に及ぼす負荷履歴（ひずみ履歴）の影響はさておき、解の再現性が保証される全ひずみ塑性理論に基づく全面塑性解（次項参照）の考え方を複合荷重下に拡張するという方法がとられており、Kumar ら<sup>(24)</sup> および Parks ら<sup>(25)</sup> による整理方法が知られている。

すなわち、Kumar ら<sup>(24)</sup> は軸力と曲げの比として  $\lambda (= M/PW)$  なるパラメータを導入して各種全面塑性解を計算しており、一方 Parks ら<sup>(25)</sup> は降伏曲面を楕円で近似することによってより簡便に任意の比の軸力と曲げを受ける場合の諸量を評価する考え方としてコンプリメンタリエネルギー法（以下  $\Omega^e$  法と略記する）を提案している（本章 3.3.3 項参照）。さらに、三好ら<sup>(26)</sup> は  $\Omega^e$  法を実際に LSM に組み込んで表面き裂の  $J$  積分値の解析およびき裂進展解析を行なっている。

その他の関連研究 以上の研究は  $J$  積分値等の非線形量を解析すること自体を目的とする研究であるが、以下ではこれらを実際の破壊力学解析と結び付けるために重要となる研究とその主要な結果を紹介し、若干の考察を加える。

まず、Shih<sup>(27)</sup> は半無限板の内面き裂（片側き裂では十分に深いき裂に対応する）のリガメント断面に任意の比率で軸力と曲げモーメントが作用する場合の  $J$  支配域の大きさを詳細に調べており（本論文 2.5.2 項参照）、また Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> はこれと同じ条件下において種々の非線形量を詳細に調べている。特に後者においては、降伏曲面は加工硬化指数 ( $n$ ) が大きくなる（非硬化材に近づく）ほど尖り点が目立つ傾向があるものの、通常は円ないし楕円で十分に近似できるものであることが示されており、これは前述の  $\Omega^e$  法における仮定を支持するものとなっている。なお、同文献の結果を用いれば対象は深いき裂に限られるものの  $\Omega^e$  法と同様のパラメトリックな評価が可能となることから、Nakamura ら<sup>(29)(30)</sup> によって LSM に組み込んだ解析が試みられている。

一方、Kaiser らは圧力容器の加圧熱衝撃の解析を目的とし、その基礎研究として次のような一連の研究を行っている。まず、弾完全塑性体について比例負荷<sup>(18)</sup> 及び非比例負荷<sup>(31)</sup> 下の  $J$  積分値を  $\eta$  ファクターで整理し、実験的にこれらの差が小さいことを確認している。これは、 $J$  積分の負荷履歴依存性を調べた貴重な研究であり、同論文の中ではその結果に対し「回転中心がき裂先端から離れているためき裂先端ではほぼ比例負荷が成立していると考えられ、 $J$  積分の使用が（工学的には）許されるであろう」と考察している。また、片側き裂材を用いて軸力と曲げの負荷経路を変えて  $J_R$  カーブを求める実験を行ってその負荷様式及び負荷経路依存性が十分に小さいことを確認し、「任意の軸力・曲げ下の  $J$  積分値を同一の  $J_R$  カーブと比較して議論することに問題はない」とも結論している<sup>(32)</sup>。ただし、同文献中のグラフを見る限り、CT, CCP (Center Cracked Plate), TPB (Three Point Bending) 試験片の間で見られる  $J_R$  カーブの大きな差異に比べれば負荷経路依存性は小さいという程度であり、この件についてはさらなる実験的検討が必要と思われる。

せん断力・自己平衡力およびき裂表面作用圧力に関する研究 ところで、以上の議論はいずれも軸力と曲げモーメントのみに対するものであるが、本論文においては前項に示したようにこの他にせん断力・自己平衡力およびき裂表面作用圧力も考えている。もちろん、破壊現象を考える上ではこのうち

<sup>9</sup> ただし、計算機能力の向上とともに今日では三次元表面き裂問題は有限要素法で解く方が普通となってきた。

の軸力と曲げモーメントが支配的となることは直観的にも理解でき、また本論文第5章においては線形弾性体に対する詳細な解析からこのことが定量的にも明らかにされることになる。ところが、非線形領域におけるさらなる定量的検討のためにも、その他の荷重の影響度の検討も今後その必要性を増してくるものと考えられる。そこで以下では、この種の荷重に対してこれまでに行なわれてきた研究をあげ、これらの知見を本節で提案する解析手法に取り入れるべく検討を加えたい。

まず自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) は、これが原子炉構造物の設計規準（その代表として ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III があげられる）においてピーク応力と呼ばれ塑性変形等に影響しないものとして知られているように、全面塑性状態においては再配分により消失し、 $J$  積分等の非線形量には事実上寄与しないものであると考えられる。Kumar ら<sup>(24)</sup> はこのことを実証すべく、熱衝撃によって生じる応力分布を等価な軸力と曲げモーメントおよび自己平衡力に分離し（式 (3.4) および式 (3.5) 参照）、全面塑性状態においてはこの軸力と曲げモーメントによる  $J$  積分値が特殊な経路独立積分によって計算した熱衝撃荷重に対する  $J$  積分値と等しくなることを確認している。本項においてもこれと同様に考え、自己平衡力は線形弾性成分にのみ寄与するものとする。

次に、せん断力が作用する場合については Shih<sup>(33)</sup> による  $n$  乗硬化材の混合モード下における特異応力場に関する研究を始めとして、き裂先端の鈍化形状・き裂先端近傍の応力ひずみ場・空孔の成長挙動および  $J$  積分の適用限界等に関して青木ら<sup>(34)(37)</sup>、坂ら<sup>(38)</sup>、東郷ら<sup>(39)(40)</sup> による一連の研究が見られ、モード I の場合と同様モード II あるいはモード I とモード II の混合下においても  $J$  積分に基づく破壊の議論が可能となることが明らかにされつつある。ところが、この場合にはモード I の場合と異なり比較の対象となる破壊靱性値の蓄積がないため、全面塑性解のような非線形量の評価のための研究は見当たらず、パラメトリックな評価には程遠い状態である（ただしモード III に対しては Shih<sup>(41)</sup> によって全面塑性解が求められている）。そこで本項では、Shih<sup>(33)</sup> によって示された混合モード条件下における特異応力場の概念に基づいて軸力と曲げモーメントが作用する場合のモード I の全面塑性解をさらにモード II との混合状態のものに拡張することを考える。

一方、き裂表面作用圧力 ( $p_s$ ) については、理論的にはこれがある場合の  $J$  積分値の評価方法が示され<sup>(42)</sup>、またこれに基づいて実際に全面塑性解が計算されている<sup>(43)</sup> もの、その有無による解の相違などは検討されておらず、未だ十分にはその効果が解明されているとはいえない。本節で示す手法においても、このき裂表面作用圧力の効果だけは考慮できるようになっておらず、今後の課題として残されている。

### 3.3.2 き裂先端近傍の漸近解析と全面塑性解

線形破壊力学と非線形破壊力学を比較した場合に、前者が重ね合わせの原理に基づいて応力拡大係数を中心としたパラメトリックな形式にまとめられているのに対して、後者はその大部分を増分形有限要素法などの複雑な数値解析によらざるを得ず、設計における個々の問題を解決することはできても、現象全般を見渡すようなパラメトリックな検討は困難である。このような非線形破壊力学の難点を克服すべく開発された手法が解の再現性に有利な全ひずみ塑性理論に基づく全面塑性解を用いる方法である。

この手法は、「微小変形全ひずみ塑性理論 (Small Strain J2 Deformation Theory) に基づく  $n$  乗硬化材に対しては、そのき裂先端近傍の特異場が Rice<sup>(44)</sup> の  $J$  積分によって一意に記述できる」という Hutchinson<sup>(45)(46)</sup> および Rice-Rosengren<sup>(47)</sup> による HRR 特異場の考え方を基礎とするものであり、Hilton-Hutchinson<sup>(48)</sup>、Shih<sup>(33)(41)</sup>、Goldman-Hutchinson<sup>(49)</sup> および Shih-Hutchinson<sup>(50)</sup> などの研



究によって  $J$  積分等の非線形量がパラメトリックに整理・評価できることが明らかにされたことをふまえて、Kumar ら<sup>(51)(52)(24)</sup>により Engineering Approach なるき裂進展予測の工学的的方法論として体系化されたものである。

以下では、まず Hutchinson ら<sup>(45)(49)</sup>の論文に従って諸量の漸近解を求め、さらに全面塑性解として定式化する手順を示す。なお、この件についてはその後の研究成果を反映させた解説がいくつか見られる<sup>(53)~(56)</sup>が、ここでは次項で提案する新たな評価手順の基礎となる関係式の導出を念頭においており、例えばせん断応力の影響項を含めた形でのコンプリメンタリエネルギーの漸近解などを同時に導いている点に注目されたい。

き裂先端の特異場における諸量の漸近解 き裂先端を原点とする  $r$ - $\theta$  座標系を考え、Airy の応力関数  $\Phi(r, \theta)$  を  $r$  のべき乗に展開した場合のき裂先端で支配的となる項を次式のように考える。

$$\Phi(r, \theta) = K_{\sigma} r^m \bar{\Phi}(\theta) \quad (3.41)$$

ここで、 $K_{\sigma}$  は荷重の大きさに変わる無次元係数であり、 $\sim$  は  $\theta$  のみの関数であることを表すものである。このとき、各応力成分は

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (3.42)$$

で与えられるから、式(3.41)を式(3.42)に代入すれば各応力成分が

$$\sigma_{ij} = K_{\sigma} r^{m-2} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (3.43)$$

という形式で表されることがわかる。

次に、材料の単軸の構成関係として次式の Ramberg-Osgood 型を仮定する。

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (3.44)$$

ただし、 $\sigma_0$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\alpha$  および  $n$  はそれぞれ参照応力、参照ひずみ ( $=\sigma_0/E$ )、加工硬化係数および加工硬化指数である。このとき、き裂先端近傍におけるミーゼスの相当応力 ( $\sigma_e$ ) および相当ひずみ ( $\epsilon_e$ ) を考えれば、ひずみの非線形成分が支配的となり線形成分は無視できるから、

$$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_0} = \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^n \quad (3.45)$$

と書ける。ここで、 $\sigma_e$  および  $\epsilon_e$  はそれぞれ次のように定義できる。

$$\sigma_e = \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.46)$$

$$\epsilon_e = \left( \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} \quad (3.47)$$

ただし、 $s_{ij}$  および  $e_{ij}$  はそれぞれ偏差応力および偏差ひずみを、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタを表しており、また式(3.47)第2式は塑性ひずみ成分の非圧縮条件 ( $\epsilon_{kk}=0$ ) から導かれるものである。こうして、式(3.45)に全ひずみ塑性理論の比例関係条件を適用して多軸化すれば次式を得る。

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\alpha \epsilon_0}{\sigma_0} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} s_{ij} \quad (3.48)$$

このとき、式(3.46)に示される相当応力は平面応力状態 ( $\sigma_z = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$ ) および平面ひずみ状態 ( $\epsilon_z = \epsilon_{rz} = \epsilon_{\theta z} = 0$ ) においてそれぞれ

$$\sigma_e = \left\{ \frac{3}{4} (\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_e = (\sigma_r^2 + \sigma_{\theta}^2 - \sigma_r \sigma_{\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

と書けることからわかるように、式(3.43)と合わせれば  $\sigma_e$  および  $s_{ij}$  もまた式(3.43)と同様に次式のような形式で表されることがわかる。

$$\sigma_e = K_{\sigma} r^{m-2} \bar{\sigma}_e(\theta) \quad (3.50)$$

さらに、これらを式(3.48)に代入することにより  $\epsilon_{ij}$  が次式のように表されることがわかる。

$$\epsilon_{ij} = K_{\epsilon} r^{n(m-2)} \bar{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad (3.51)$$

ただし、

$$\frac{K_{\epsilon}}{\epsilon_0} = \alpha \left( \frac{K_{\sigma}}{\sigma_0} \right)^n \quad (3.52)$$

であり、 $K_{\sigma}$  および  $K_{\epsilon}$  はそれぞれ塑性応力拡大係数および塑性ひずみ拡大係数と呼ばれる量である。

同様に、各方向の変位 ( $u_r, u_{\theta}$ ) とひずみの関係は次式で表されるから、

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) \quad (3.53)$$

各変位成分は次のように書ける。

$$u_i = K_{\epsilon} r^{n(m-2)+1} \bar{u}_i(\theta) \quad (3.54)$$

さらに、ひずみエネルギー密度 ( $U_d$ ) およびコンプリメンタリエネルギー密度 ( $\Omega_d$ ) は

$$U_d = \int_0^{\epsilon_e} \sigma_e d\epsilon_e = \frac{n}{n+1} \alpha \epsilon_0 \sigma_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} = K_{\epsilon} K_{\sigma} r^{(n+1)(m-2)} \bar{U}_d(\theta) \quad (3.55)$$

$$\Omega_d = \int_0^{\sigma_e} \epsilon_e d\sigma_e = \frac{1}{n+1} \alpha \epsilon_0 \sigma_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} = K_{\epsilon} K_{\sigma} r^{(n+1)(m-2)} \bar{\Omega}_d(\theta) \quad (3.56)$$

と書け、このとき

$$\bar{U}_d(\theta) = \frac{n}{n+1} \bar{\sigma}_e^{n+1}(\theta), \quad \bar{\Omega}_d(\theta) = \frac{1}{n+1} \bar{\sigma}_e^{n+1}(\theta) \quad (3.57)$$

である。

$J$  積分との関係 次に、き裂先端を中心とする半径  $R$  の円状の積分経路を考えると、極座標表示での  $J$  積分の定義は次式で表される。

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ U_d R \cos \theta - \left( \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_{r\theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right) R \cos \theta + \left( \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \sigma_{r\theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right] d\theta \quad (3.58)$$

よって、上式に式(3.43)、式(3.54)および式(3.55)を代入すれば、

$$J = K_{\epsilon} K_{\sigma} R^{(n+1)(m-2)+1} I_n \quad (3.59)$$

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{n}{n+1} \bar{\sigma}_e^{n+1} \cos \theta - \{n(m-2)+1\} (\bar{\sigma}_r \bar{u}_r + \bar{\sigma}_{r\theta} \bar{u}_{\theta}) \cos \theta + \left( \bar{\sigma}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \bar{\sigma}_{r\theta} \frac{\partial \bar{u}_{\theta}}{\partial \theta} \right) \sin \theta \right] d\theta \quad (3.60)$$



を得る。ここで、 $J$  積分の経路独立性が成立する、すなわち式 (3.59) が  $R$  によらない有限値をとるには、同式における  $R$  の指数が 0 とおれば良いことから

$$m = \frac{2n+1}{n+1} \quad \left( m-2 = -\frac{1}{n+1} \right) \quad (3.61)$$

が導かれる。またこのとき、式 (3.59) および式 (3.52) から

$$J = K_e K_\sigma I_n = \alpha \epsilon_0 \sigma_0 \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^{n+1} I_n = \alpha \epsilon_0 \sigma_0 \left( \frac{K_e}{\alpha \epsilon_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} I_n \quad (3.62)$$

となるから、次の関係式を得る。

$$K_\sigma = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad K_e = \alpha \epsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.63)$$

よって、式 (3.43)、式 (3.50)、式 (3.51)、式 (3.54)、式 (3.55) および式 (3.56) から以下の関係式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= K_\sigma r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \sigma_e &= K_\sigma r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\sigma}_e(\theta) = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\sigma}_e(\theta) \\ \epsilon_{ij} &= K_e r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) = \alpha \epsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \\ u_i &= K_e r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta) = \alpha \epsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta) \\ U_d &= K_e K_\sigma r^{-1} \tilde{U}_d(\theta) = \frac{J}{I_n r} \tilde{U}_d(\theta) = \frac{J}{I_n r} \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{n+1}(\theta) \\ \Omega_d &= K_e K_\sigma r^{-1} \tilde{\Omega}_d(\theta) = \frac{J}{I_n r} \tilde{\Omega}_d(\theta) = \frac{J}{I_n r} \frac{1}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{n+1}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

これらは、全ひずみ塑性理論を仮定する場合には  $J$  積分がき裂先端近傍の特異場における諸量の拡大率となることを意味しており、この特異場は HRR Field あるいは One-Parameter Singularity Field と呼ばれる。

全面塑性解 さて、式 (3.64) 第 1 式の第 1 等式からわかるように、 $K_\sigma$  は [ 応力  $\times$  長さ <sup>$\frac{1}{n+1}$</sup>  ] の次元を持つものであるから、応力拡大係数の場合 (式 (3.6) 参照) と同様に一般に次式のようにおくことができる。

$$\frac{K_\sigma}{\sigma_0} = \frac{Q}{Q_0} l^{\frac{1}{n+1}} f_\sigma(n, L.G.) \quad (3.65)$$

ここで、 $Q$  は一般化力 (引張り等の集中力・曲げモーメント・分布荷重・強制変位など)、 $Q_0$  は  $Q$  と同じ次元を持つ参照一般化力 (通常は崩壊荷重などがとられる)、 $l$  は代表長さ (板幅・き裂長さ・リガメント長さなど) を表すものである。また、 $f_\sigma$  は応力拡大係数の有限幅補正係数と同様の無次元係数であるが、ここでは荷重様式 (Loading Type) およびき裂部材の形状 (Geometry of Cracked Member) の他に加工硬化指数  $n$  にも依存するものとなり、これは式 (3.60) に示される  $I_n$  と同じ性質のものである。

このとき、式 (3.52) および式 (3.62) より  $K_e$  および  $J$  積分は次のように書ける。

$$K_e = \alpha \epsilon_0 l^{\frac{n}{n+1}} \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^n f_\sigma^n \quad (3.66)$$

$$J = \alpha \epsilon_0 \sigma_0 l \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^{n+1} f_\sigma^{n+1} I_n = \alpha \epsilon_0 \sigma_0 l \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^{n+1} \bar{J}(n, L.G.) \quad (3.67)$$

また、き裂開口変位 ( $\delta_{COD}$ ) はき裂を開く方向の変位 ( $u_y$ ) を用いて式 (3.64) 第 4 式および式 (3.66) から次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta_{COD} &= u_y(r=l_0, \theta=\pi) - u_y(r=l_0, \theta=-\pi) \\ &= K_e l_0^{\frac{n}{n+1}} [ \tilde{u}_y(\theta=\pi) - \tilde{u}_y(\theta=-\pi) ] \\ &= \alpha \epsilon_0 l \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^n f_\sigma^n \left( \frac{l_0}{l} \right)^{\frac{n}{n+1}} [ \tilde{u}_y(\theta=\pi) - \tilde{u}_y(\theta=-\pi) ] \\ &= \alpha \epsilon_0 l \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^n \bar{\delta}_{COD}(n, L.G.) \end{aligned} \quad (3.68)$$

ここで、 $l_0$  は片側き裂材ならばき裂長さ、中央き裂付き平板ならばき裂半長を選べば良い。さらに同様にしてき裂の存在による変形の増加分 ( $q^c$ ) なども導け、次のようになる。

$$q^c = \alpha \epsilon_0 l \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^n \bar{q}^c(n, L.G.) \quad (3.69)$$

以上で導出された  $\bar{J}$ ,  $\bar{\delta}_{COD}$ ,  $\bar{q}^c$  などの無次元量が全面塑性解 (Fully Plastic Solutions) と呼ばれるものであり、その導出の過程からもわかるように応力拡大係数の有限幅補正係数と同様の性質を持つものである。すなわち、例えば片側き裂材の純曲げなどき裂形状と荷重様式が同一のものに対して有限要素法を用いていくつかの  $n$  およびき裂深さについて全面塑性解を計算しておけば、その  $n$  およびき裂深さに対する内挿によって広い範囲での非線形破壊力学解析が可能となるわけである。

弾性成分との結合<sup>(41)(50)</sup> 以上で導かれた全面塑性解は式 (3.45) の形式の構成式を持つ非線形弾性体の諸量は正確に再現でき、また式 (3.44) の構成式のものに対しても荷重の大きな (非線形成分の支配的な) ところでは精度良い近似解を与えるであろう。ところが、線形弾性成分が支配的な領域においてはこのままでは全く使えないという難点があり、これを克服すべく Shih<sup>(41)</sup> は次のような簡易手法を提案している。

すなわち、Shih<sup>(41)</sup> は式 (3.44) の構成式を持つ材料の諸量が線形弾性成分と非線形弾性成分の和として次式のように与えられるとした。

$$J = J^e(a_{eff}, n=1) + J^p(a, n) \quad (3.70)$$

ここで、 $J^e(a_{eff}, n=1)$  は式 (3.1) から計算される  $J$  積分の線形弾性成分であり、 $J^p(a, n)$  は前述の全面塑性解から評価できる非線形弾性成分である。また、 $a_{eff}$  は有効き裂長さであり、通常は Irwin による塑性域補正の考え方に多少手を加えたものが用いられているが、その形式は対象により様々である。これは、要するに Bucci<sup>(9)</sup> の考え方と同様、線形成分が支配的な領域と非線形成分が支配的な領域の中間部分での精度の向上を図ったものである。

この方法により、線形弾性範囲から非線形弾性範囲までの幅広い荷重範囲において精度良く諸量が評価できることはその後多くの研究者によって確認されている。ただし、この方法は材料の構成方程式が式 (3.44) で表される場合に限られるため原子炉圧力容器鋼や配管用ステンレス鋼などでは問題ないが、



上降伏点やリューダース帯が明瞭に現われる炭素鋼などでは精度が落ちる恐れがある点には注意しなければならない。

**関連研究** 主要な関連研究としては、非圧縮性条件の処理など解の精度改善のための研究が多く<sup>(57)(58)</sup>、また三次元き裂問題への拡張に関する研究<sup>(59)(24)(60)</sup>も行なわれているが、ここでは特に本論文に関連するものとして解の整合性 (Consistency Relation) に関する研究<sup>(61)~(63)</sup>を紹介しておく。

き裂部材の変形と  $J$  積分はそれぞれ式 (3.69) および式 (3.67) のように個別に整備された全面塑性解を用いて評価されるが、本来これらの間には式 (3.2) と式 (3.3) から導かれる次の関係が成立しているべきである。

$$\frac{\partial q^c}{\partial a} = \frac{\partial^2 \Omega^c}{\partial a \partial Q} = \frac{\partial J}{\partial Q} \quad (3.71)$$

これに、式 (3.69) および式 (3.67) を代入して整理すれば例えば次式のようになる<sup>\*10</sup>。

$$\bar{J}(n, L.G.) = \frac{Q_0}{(n+1)\sigma_0} \frac{\partial \bar{q}^c(n, L.G.)}{\partial a} \quad (3.72)$$

すなわち、全面塑性解  $\bar{J}(n, L.G.)$  および  $\bar{q}^c(n, L.G.)$  は式 (3.72) の関係を満足すべきであるが、初期の解析結果 (文献<sup>(52)</sup> (1981 年) を含めてこれよりも古いもの) はことごとくこの整合性が満足されていないことが明らかにされている<sup>(61)(62)</sup>。また、Shih-Needleman<sup>(62)</sup> は自らの解析結果<sup>(57)</sup> (いずれも 1984 年) はこの整合性を良く満足することを示している。ただし、この整合性に関する検討はそもそも非線形有限要素法解析結果が解析者によって大きく異なり、応力拡大係数の有限幅補正係数のように (本章 3.2 節参照) 精度に関する統一見解を得ることが困難であったため、あくまで粗悪な解をこれである落とそうという観点からの研究である。つまりこれを満足することは必要条件であって、これを満足した解析結果が必ずしも精度が良いものではないことには注意しなければならない。

ところで、このように見てみると Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> (1986 年) による全面塑性状態におけるコンプリメンタリエネルギーの計算は、コンプリメンタリエネルギーを整理して式 (3.2) および式 (3.3) から諸量を直接計算すればこの種の不具合が生じなくなることを念頭において行なわれたもののようにも思える<sup>\*11</sup>。また、Parks らがその LSM を用いた解析の中で、自らの提案する  $\Omega^c$  法<sup>(25)</sup> (1981 年) を用いずにこの Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> の解を利用しようとしている<sup>(29)(30)</sup> のは、文献<sup>(25)</sup> で利用した Kumar による複合荷重下の全面塑性解<sup>\*12</sup> が解の整合性を満足しない<sup>(63)</sup> という精度上の問題からであると考えられる。

<sup>\*10</sup> もちろん、 $l$  および  $Q_0$  が  $a$  の関数である場合にはこのように単純にはならない<sup>(61)(62)</sup> が、ここでは簡単のため全面塑性解 ( $\bar{J}, \bar{q}^c$ ) のみ  $a$  の関数であるとした。また、式 (3.67) および式 (3.69) における  $l$  も一般には別のものが用いられるが、ここでは同一のものと考えている。

<sup>\*11</sup> ただし、前述のとおりこれは深いき裂にしか使えない解析結果である。

<sup>\*12</sup> これは、Parks らと Kumar の私信であるため文献としては未入手であるが、Kumar による後の文献<sup>(24)</sup> に掲載されているデータと同じものであると考えられる。

### 3.3.3 コンプリメンタリエネルギー法の拡張

前述のとおり、き裂部材の諸量の非線形弾性成分は、全ひずみ塑性理論に基づく全面塑性解を用いて除荷を伴わない範囲でパラメトリックな評価が可能となる。ところが、その複合荷重作用下に対する解析的研究は現状では非常に限られており、ラインスプリング法での使用などを目的として軸力と曲げモーメントを同時に受ける片側き裂材に対する解析<sup>(24)~(26)</sup> がいくつか行なわれてはいるものの、その評価精度に対する統一見解はまだ十分に得られていない。

一方ここでは、軸力 ( $P$ ) と曲げモーメント ( $M$ ) の他にせん断力 ( $F$ ) が作用する場合の  $J$  積分値およびき裂部材の変形量をパラメトリックに評価すべく、Parks ら<sup>(25)</sup> によるコンプリメンタリエネルギー法 ( $\Omega^c$  法) を拡張する。その理由としては以下のことがあげられる。

- (1) 軸力と曲げモーメントの比 ( $\lambda=M/PW$ ) を一定にした解析結果から任意の荷重状態を推定するという Kumar ら<sup>(24)</sup> の方法では、せん断力を考慮した場合のパラメータが多くなり過ぎ、実用範囲においても解析に必要な全面塑性解を準備することが事実上不可能である。
- (2)  $\Omega^c$  法では降伏曲面を楕円で近似することにより、準備すべき全面塑性解が少なくなるばかりか、後述するようにせん断力が作用する場合への拡張が容易でありかつその物理的意味が明確である。なお、3.3.1 項でも考察したように、この仮定の妥当性は Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> の解析結果からも保証されるものである。
- (3)  $\Omega^c$  法ではき裂部材のコンプリメンタリエネルギーの全面塑性解から  $J$  積分値およびき裂部材の変形が計算できるため、従来の全面塑性解 (式 (3.67)~式 (3.69) 参照) に比べて準備すべき無次元量が極めて少なく済むばかりでなく、従来問題となっていた解の整合性 (前項参照) が暗黙のうちに解決されているという利点がある。
- (4) コンプリメンタリエネルギーをベースとする本論文第 2 章および第 4 章における方法論への接続がスムーズである。

以下では、前項で導かれた関係式を用い、次元解析的な考察に基づいてき裂部材のコンプリメンタリエネルギーを導き、さらにこれを本論文の解析手順に組み込むべくマトリクス表記で整理する考え方を示しておく。

**Parks ら<sup>(25)</sup> および Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> の考え方** 図 4.1(b) に示される負荷を考える時、前述のとおり全断面降伏状態においては自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) は再配分によって消失すると考えて良い<sup>(24)</sup> から、き裂表面作用圧力 ( $p_s$ ) を無視すれば結局単位厚さあたりの集束力  $\{R\} = \{F \ P \ 6M/W\}$  のみが作用する場合を考えれば良いことになる。ここでは、まずこのうちの軸力 ( $P$ ) と曲げモーメント ( $M$ ) が作用する場合の Parks ら<sup>(25)</sup> および Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> によるコンプリメンタリエネルギー ( $\Omega^c$ ) の表記を見てみる。また以下では、材料はその単軸の構成式が式 (3.44) に示される Ramberg-Osgood 型で表される非線形弾性体であると仮定し、全面塑性解の場合と同様に諸量を線形成分と非線形成分に分けて考えることとする。

このとき、コンプリメンタリエネルギー密度の非線形成分  $\Omega_d$  がミーゼスの相当応力  $\sigma_e$  を用いて式 (3.56) のように表されるが、同式における  $\Omega_d$  および  $\sigma_e$  は式 (3.64) 第 2, 第 6 式に示されるようにき裂先端近傍に分布する量であるから、このままではもちろん式 (3.67) のような整理ができない。一方、単位厚さあたりのき裂の存在によるコンプリメンタリエネルギーの増加分の非線形成分 (ここでは単に  $\Omega^c$  あるいは「き裂部材のコンプリメンタリエネルギー」と略記する) は、き裂がある場合とない場合について



$\Omega_d$  を構造全体で積分しその差をとった量として定義されるものである<sup>\*13</sup>から、式(3.2)と式(3.67)あるいは式(3.3)と式(3.69)を用いて簡単な次元解析を行なってもわかるように次式の形式で表すことができる。

$$\Omega^c = \alpha \epsilon_0 \sigma_0 l^2 \left( \frac{Q}{Q_0} \right)^{n+1} h(n, L.G.) \quad (3.73)$$

ここで、 $h(n, L.G.)$  は全面塑性解である。

さて、このとき  $Q$  は作用する荷重の同次関数であるから Shih-Hutchinson<sup>(28)</sup> は軸力( $P$ )と曲げモーメント( $M$ )<sup>\*14</sup>が作用する半無限板中の内面き裂に対する解析結果をもとに次式のような関数形を提案している。

$$\Omega^c = \frac{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 b^2}{n+1} \left[ c_1(n) \left( \frac{P}{\mu_1 \sigma_0 b} \right)^2 + c_2(n) \left( \frac{M}{\mu_2 \sigma_0 b^2} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} \quad (3.74)$$

ここで、 $b(=W-a)$  はリガメント長さ、 $c_1(n)$ 、 $c_2(n)$  は加工硬化指数のみに依存する無次元定数、 $\mu_1(=2/\sqrt{3})$ 、 $\mu_2(=0.364)$  は崩壊荷重 (Limit Load) を決めるための係数である。

一方、Parks ら<sup>(25)</sup> は同様に  $P$  と  $M$  が作用する片側き裂材に対して次の関数形を提案している。

$$\Omega^c = \frac{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W^2}{n+1} \left[ \frac{AP^2 + 2BP(\frac{M}{W}) + C(\frac{M}{W})^2}{Q_0^2} \right]^{\frac{n+1}{2}} \quad (3.75)$$

$$Q_0 = 1.455 \sigma_0 (W-a) \eta, \quad \eta = \sqrt{1 + \left( \frac{a}{W-a} \right)^2} - \frac{a}{W-a}$$

ここで、 $A, B, C$  はき裂形状と加工硬化指数に依存するものであり、全面塑性解と同様の性質をもつ無次元係数である。

以上の諸式を比較すれば、複合荷重下における式(3.74)および式(3.75)は式(3.73)の  $h(n, L.G.)$  の項を荷重の項の中に吸収した形となっていることがわかるであろう。次に、式(3.56)との類似性に着目して「き裂の存在による相当応力の増加分」として  $\widehat{\sigma}_e$  なる量を考え

$$\Omega^c = \frac{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W^2}{n+1} \left( \frac{\widehat{\sigma}_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (3.76)$$

なる表記で表す時、式(3.74)および式(3.75)から  $\widehat{\sigma}_e$  は作用する  $P$  と  $M$  を用いてそれぞれ次のように表せることがわかる。

$$\left( \frac{\widehat{\sigma}_e}{\sigma_0} \right)^2 = \left( \frac{b}{W} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left[ c_1(n) \left( \frac{P}{\mu_1 \sigma_0 b} \right)^2 + c_2(n) \left( \frac{M}{\mu_2 \sigma_0 b^2} \right)^2 \right] \quad (3.77)$$

$$\left( \frac{\widehat{\sigma}_e}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{AP^2 + 2BP(\frac{M}{W}) + C(\frac{M}{W})^2}{Q_0^2}$$

<sup>\*13</sup> これはき裂部材の変形量 ( $q^c$ ) の導出と全く同じ考え方であり、 $q^c$  の導出過程については Shih<sup>(41)</sup> の論文などに詳細な記述が見られるので参照されたい。

<sup>\*14</sup> 式(3.74)における  $M$  はリガメントの回転中心を軸にとって定義されたものであり本論文で用いているものとは違うが、以下の議論には本質的な影響はないためここではその修正を行っていない。もちろん、式(3.74)におけるモーメントを修正すれば、これが式(3.75)と同じ表記となる (すなわち  $P \times M$  の項が生じる) ことは明らかであろう。

ここで、二次元問題においては相当応力 ( $\sigma_e$ ) が式(3.49)の形で表されることを思い出し、式(3.77)との対応に注目したい。つまり、 $\widehat{\sigma}_e$  は  $q^c$  および  $\Omega^c$  と同様な考え方に基づき  $\sigma_e$  の積分結果として得られる量であることを考えれば、 $P$  と  $M$  は構造物の各点において式(3.49)の  $\sigma_x$  と  $\sigma_\theta$  に影響するため式(3.77)は  $P$  と  $M$  の二次の同次関数となり、またその積分結果としてのそれぞれの影響度が式(3.77)第2式の  $A, B, C$  等に現われていると解釈できよう。

混合モード状態への  $\Omega^c$  法の拡張 次に、以上で導いた諸式とその考察に基づいて混合モード状態における  $\Omega^c$  を評価する方法を考える。すなわち、ここでは Parks ら<sup>(25)</sup> による式(3.75)をさらにせん断力 ( $F$ ) が作用する場合に対して拡張する<sup>\*15</sup>。

さて、この場合にもやはり  $\widehat{\sigma}_e$  は定義でき、これが式(3.77)と同様に  $F, P, M$  の同次関数となることは明らかであろう。そこで再び式(3.49)を見れば、3.2.1項で定義した  $F$  は  $\sigma_{r\theta}$  に寄与すると考えられるから、式(3.77)の場合と同様に考えれば同式は次のように書き直せる。

$$\left( \frac{\widehat{\sigma}_e}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{\Lambda_F F^2 + \Lambda_P P^2 + 2\Lambda_{PM} P M' + \Lambda_M M'^2}{Q_0^2} \quad (3.78)$$

ここで、 $M' = \frac{6M}{W}$  であり、 $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  はいずれも加工硬化指数 ( $n$ ) およびき裂形状に依存する無次元係数である。また、 $Q_0$  は参照荷重でありここでは  $Q_0 = \sigma_0 (W-a)$  とおくことにする<sup>\*16</sup>。

このとき、式(3.76)は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Omega^c}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W^2} &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{f^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \\ f &= \frac{\Lambda_F F^2 + \Lambda_P P^2 + 2\Lambda_{PM} P M' + \Lambda_M M'^2}{\sigma_0^2 W^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

となるから、 $J$  積分およびき裂部材の各荷重方向の変形量は式(3.2)および式(3.3)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \frac{f^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \left( \frac{1}{1-\xi} + \frac{\partial f / \partial \xi}{2f} \right) \\ \frac{\partial \Omega^c}{\partial F} &= \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \Lambda_F F \\ \frac{\partial \Omega^c}{\partial P} &= \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} (\Lambda_P P + \Lambda_{PM} M') \\ \frac{\partial \Omega^c}{\partial M'} &= \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} (\Lambda_{PM} P + \Lambda_M M') \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

<sup>\*15</sup> Shih-Hutchinson による式(3.74)は式(3.75)に比べて簡潔な形で整理されているが、これは深いき裂の特性を巧みに利用したものであるから、片側き裂材のき裂全長にわたる評価は式(3.75)の形式をとらざるを得ない。

<sup>\*16</sup> 式(3.75)に示される  $Q_0$  は良く知られた引張りに対する塑性拘束を考慮した崩壊荷重であり、これで荷重を無次元化することにより全面塑性解の値が安定することが期待される。ところが、三好ら<sup>(26)</sup> は Parks らと同様の定式化 (式(3.75)第1式) において  $Q_0 = \sigma_0 (W-a)$  としており、この場合の全面塑性解  $A, B, C$  をグラフに示しているが、その値は十分に安定しておりその内挿による解の信頼性は十分であると考えられる。さらに、本論文ではせん断力を考慮することから適切な  $Q_0$  の関数形が得られないなどの問題もあるため、 $Q_0$  としては表記の簡潔な  $Q_0 = \sigma_0 (W-a)$  を用いることとした。



これより、き裂部材の変形量の非線形弾性成分は形式的に次式のようにマトリクス表記できることになる<sup>\*17</sup>。

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^c}{\partial R} \right\} = \begin{bmatrix} \lambda_F^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P^p & \lambda_{PM}^p \\ 0 & \lambda_{PM}^p & \lambda_M^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ P \\ \frac{6M}{W} \end{Bmatrix} = [\lambda^p] \{R\} \quad (3.81)$$

ただし、

$$[\lambda^p] = \begin{bmatrix} \lambda_F^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P^p & \lambda_{PM}^p \\ 0 & \lambda_{PM}^p & \lambda_M^p \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \begin{bmatrix} \Lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_P & \Lambda_{PM} \\ 0 & \Lambda_{PM} & \Lambda_M \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

である。

ここで、式(3.45)において  $n=\alpha=1$  とおけば構成式が線形弾性体のものと等しくなるが、式(3.82)において同様に  $n=\alpha=1$  とおけば  $[\lambda^p]$  の各成分が荷重の関数でなくなり、式(3.8)に示される  $[\lambda]$  と本質的に同じものとなることが理解できよう。

### 3.3.4 片側き裂材に対する諸量の評価

式(3.79)および式(3.80)より、無次元係数  $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  (コンプリメンタリエネルギーの全面塑性解と呼んで良からう)を  $n$  としき裂形状の関数として求めておけば、任意の荷重状態に対して必要な非線形量が評価できることがわかる。ところで、軸力と曲げモーメントを受ける片側き裂材に対しては、Parksら<sup>(25)</sup>はKumarら<sup>(24)</sup>の複合荷重条件下の全面塑性解 ( $\lambda=M/PW$ 一定,  $n=1, 2, 3, 5, 7, 10$ )から、三好ら<sup>(26)</sup>はKumarらと同様の有限要素解析 ( $n=9$ )によりそれぞれ  $\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  に相当する量を求めている。ところが、前者では用いた全面塑性解自体の精度に問題があること、後者では解析のケースが限られていることなどの実用的な問題点が指摘できる。そこでここでは、単一荷重下の変形量のみから  $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  の値を求める手法を示し、本論文で用いる片側き裂材に関する実用的解析に役立つよう広範囲にわたってこれらを実用評価しておく。

無次元係数  $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  の評価手法 まず、式(3.80)において  $P=M'=0$  とした場合を考えれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \left[ \frac{F}{\sigma_0 W(1-\xi)} \right]^{n+1} \cdot \Lambda_F^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{1}{1-\xi} + \frac{\partial \Lambda_F / \partial \xi}{2 \Lambda_F} \right) \\ \frac{u^c}{\alpha \epsilon_0 W} &= \left[ \frac{F}{\sigma_0 W(1-\xi)} \right]^n \cdot \frac{\Lambda_F^{\frac{n+1}{2}}}{1-\xi} \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

\*17 通常コンプライアンスと呼ばれる物理量はタンジエンシャル (接線) コンプライアンスであり、非線形弾性体の場合の変形量は荷重の増分形でなければ式(3.81)の形式で表現することはできない(2.2.2項参照)。すなわち、式(3.81)は形式的には式(3.10)と同じであるが、式(3.10)における  $[\lambda]$  の各成分が一般に言われる (タンジエンシャル) コンプライアンスであるのに対し  $[\lambda^p]$  の成分はセカントコンプライアンスと呼ぶべきものであって、両者の物理的意味は全く異なるものであることに注意しなければならない。

また同様に、式(3.80)において  $F=M'=0$  あるいは  $F=P=0$  とすればそれぞれ次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \left[ \frac{P}{\sigma_0 W(1-\xi)} \right]^{n+1} \cdot \Lambda_P^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{1}{1-\xi} + \frac{\partial \Lambda_P / \partial \xi}{2 \Lambda_P} \right) \\ \frac{v^c}{\alpha \epsilon_0 W} &= \left[ \frac{P}{\sigma_0 W(1-\xi)} \right]^n \cdot \frac{\Lambda_P^{\frac{n+1}{2}}}{1-\xi} \\ \frac{\phi^c}{6 \alpha \epsilon_0} &= \left[ \frac{P}{\sigma_0 W(1-\xi)} \right]^n \cdot \frac{\Lambda_P^{\frac{n+1}{2}} \Lambda_{PM}}{1-\xi} \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \left[ \frac{6M}{\sigma_0 W^2(1-\xi)} \right]^{n+1} \cdot \Lambda_M^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{1}{1-\xi} + \frac{\partial \Lambda_M / \partial \xi}{2 \Lambda_M} \right) \\ \frac{v^c}{\alpha \epsilon_0 W} &= \left[ \frac{6M}{\sigma_0 W^2(1-\xi)} \right]^n \cdot \frac{\Lambda_M^{\frac{n+1}{2}} \Lambda_{PM}}{1-\xi} \\ \frac{\phi^c}{6 \alpha \epsilon_0} &= \left[ \frac{6M}{\sigma_0 W^2(1-\xi)} \right]^n \cdot \frac{\Lambda_M^{\frac{n+1}{2}}}{1-\xi} \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

以上の諸量はそれぞれ単一荷重下の諸量と一致するはずであるから、比較の容易な変形量の項を用いることにより  $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  が評価できることになる。

なおここでは、単一荷重下における解析的研究が多いことを考えてその結果を有効に活用すべく以上のような手順を示したが、もちろん複合荷重下の解析結果からも同様な評価が可能である<sup>(26)</sup>。

片側き裂材の  $\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  の評価 次に、本論文第5章以降の具体的解析のためにコンプリメンタリエネルギーの全面塑性解を実際に求めておく。すなわち、ここでは Shih-Needleman<sup>(57)</sup>による片側き裂材の一樣引張りおよび純曲げの全面塑性解を用いて  $\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  を評価するが、 $\Lambda_F$  については対応する解析結果がないためここでは評価していない。もちろんこのとき可能となるのはモード I 型の負荷に対する解析に限られることになるが、混合モード下の解析を行なうまでもなく健全性評価に必要となる多くの知見が導かれることも本論文第5章に示す線形弾性体に対する詳細解析を通して示されており、ここで求める  $\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$  によって非線形弾性範囲においても多くの問題を解決できることが期待できよう。

さて、Shih-Needleman<sup>(57)</sup>による片側き裂材の一樣引張りおよび純曲げの全面塑性解はそれぞれ以下のように整理されている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \left( \frac{P}{P_0} \right)^{n+1} \xi(1-\xi) h_P^J(n, \xi) \\ \frac{v^c}{\alpha \epsilon_0 W} &= \left( \frac{P}{P_0} \right)^n \xi h_P^v(n, \xi) \\ \frac{\phi^c}{\alpha \epsilon_0} &= \left( \frac{P}{P_0} \right)^n h_P^\phi(n, \xi) \\ \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \left( \frac{M}{M_0} \right)^{n+1} (1-\xi) h_M^J(n, \xi) \\ \frac{\phi^c}{\alpha \epsilon_0} &= \left( \frac{M}{M_0} \right)^n h_M^\phi(n, \xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

ここで、 $P_0$  は式(3.75)に示した  $Q_0$  に等しく、 $M_0$  は式(3.74)に示した  $\mu_2 \sigma_0 b^2$  に等しい。これらは、式(3.84)および式(3.85)に示した諸式に一致するはずであるから、式(3.84)の第2、第3式および



表3.1 コンプリメンタリエネルギーの全面塑性解の値

		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=10$	$n=13$	$n=16$	$n=20$
$\xi=1/8$	$\Lambda_P$	0.0393	0.161	0.287	0.466	0.566	0.642	0.677	0.696	0.702
	$\Lambda_{PM}$	0.0355	0.131	0.214	0.292	0.298	0.257	0.204	0.165	0.136
	$\Lambda_M$	0.0318	0.0914	0.147	0.220	0.259	0.290	0.305	0.313	0.319
$\xi=2/8$	$\Lambda_P$	0.146	0.372	0.521	0.659	0.709	0.737	0.748	0.753	0.757
	$\Lambda_{PM}$	0.117	0.237	0.264	0.238	0.208	0.178	0.159	0.148	0.140
	$\Lambda_M$	0.0939	0.176	0.231	0.285	0.309	0.326	0.334	0.339	0.344
$\xi=3/8$	$\Lambda_P$	0.322	0.592	0.721	0.818	0.851	0.878	0.901	0.918	0.935
	$\Lambda_{PM}$	0.225	0.297	0.302	0.293	0.290	0.293	0.296	0.298	0.301
	$\Lambda_M$	0.160	0.251	0.304	0.356	0.383	0.409	0.426	0.439	0.452
$\xi=4/8$	$\Lambda_P$	0.577	0.871	1.01	1.16	1.26	1.36	1.43	1.48	1.53
	$\Lambda_{PM}$	0.353	0.423	0.462	0.530	0.579	0.635	0.673	0.700	0.724
	$\Lambda_M$	0.221	0.323	0.389	0.470	0.526	0.583	0.622	0.650	0.677
$\xi=5/8$	$\Lambda_P$	0.936	1.38	1.70	2.19	2.54	2.89	3.14	3.31	3.48
	$\Lambda_{PM}$	0.496	0.666	0.825	1.08	1.27	1.47	1.60	1.67	1.79
	$\Lambda_M$	0.269	0.409	0.520	0.689	0.810	0.934	1.02	1.08	1.14
$\xi=6/8$	$\Lambda_P$	1.42	2.49	3.54	5.32	6.66	8.09	9.09	9.83	10.6
	$\Lambda_{PM}$	0.651	1.11	1.60	2.41	3.03	3.69	4.16	4.50	4.85
	$\Lambda_M$	0.305	0.545	0.782	1.18	1.49	1.81	2.04	2.21	2.37
$\xi=7/8$	$\Lambda_P$	2.08	5.61	10.1	19.3	27.2	36.4	43.2	48.4	53.7
	$\Lambda_{PM}$	0.818	2.20	3.96	7.56	10.6	14.3	17.0	19.0	21.1
	$\Lambda_M$	0.324	0.867	1.56	2.98	4.20	5.62	6.69	7.49	8.30

式(3.85)の第3式をそれぞれ式(3.86)の第2, 第3, 第5式と等置して係数を比較することにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_P &= \left[ \frac{\xi(1-\xi)h_P^\phi}{(1.455\eta)^n} \right]^{\frac{2}{n+1}} \\ \Lambda_{PM} &= \frac{(1-\xi)h_P^\phi}{6(1.455\eta)^n} \cdot \Lambda_P^{\frac{1-n}{n+1}} \\ \Lambda_M &= \left[ \frac{h_M^\phi}{6(2.184)^n(1-\xi)^{n-1}} \right]^{\frac{2}{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

上式を用いて計算した各全面塑性解の値を表3.1に示す。

**全面塑性解の補間手法** こうして求まる全面塑性解は表3.1に示されるように離散的な値であるため、 $n$ と $\xi$ に関してそれぞれ補間する必要がある。まず、 $n$ についてはその逆数を横軸にとって全面塑性解を表示すると滑らかな曲線を描くことが知られており<sup>(37)</sup>、表3.1に示されるものについてもこのことが確認されたので本論文においても次式のような多項式で全面塑性解を補間することにする。

$$\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M = \sum_{i=1}^9 c_i \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{i-1} \quad (3.88)$$

一方、 $\xi$ に対する補間手法としてはこれまでにスプライン関数と多項式を用いた例が見られ、両者を比べると一般に前者の方がデータを滑らかに補間する。ところが、本ケースのようにデータの区間が一定のものに対しては両者の差は小さいと考えられることから、本論文では計算が比較的容易な多項式補

間によりデータの補間を行うこととする。さて、この種の多項式を作成する場合には $\xi=0, 1$ 付近の漸近特性を反映させることにより評価式の精度が向上することは3.2.4項でも示した通りであるが、これを決めるには $\xi=0, 1$ 付近の詳細なデータが必要となる。ところが、非線形領域でのデータは非常に限られているため、ここでは線形弾性成分の漸近特性を参考にすることにする。

すなわち、式(3.82)において $n=\alpha=1$ としたものを式(3.40)と比較すれば、 $\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M$ はいずれも $\xi \rightarrow 0$ で $\xi^2$ 、 $\xi \rightarrow 1$ で $(1-\xi)^2$ の漸近特性をもつことがわかる。そして、次式のようにおけばこの両者を満足することから、本論文ではこの形で全面塑性解を補間することにする。

$$\Lambda_P, \Lambda_{PM}, \Lambda_M = \sum_{i=1}^7 c_i \cdot \xi^{i+1} \quad (3.89)$$



## 3.4 結 言

本章では、次章における実構造物の破壊力学解析手法の構築に必要なき裂部材の変形およびコンプリメンタリエネルギーの一般形を導き、これをマトリクス表記を用いて整理した。すなわち、線形弾性体に対しては式(3.7)、式(3.8)および式(3.10)が、非線形弾性体に対しては式(3.79)～式(3.82)がそれぞれである。また、ここでは同時に本論文第5章以降での実構造物の具体的解析のために必要となる諸量として、欠陥部材の代表として知られる片側き裂材に対するものを示した。すなわち、線形弾性体に対しては式(3.12)に示される簡易評価式が、非線形弾性体に対しては表3.1に示されるコンプリメンタリエネルギーの全面塑性解がそれぞれである。

その他の本章における成果としては、まず線形弾性体に対しては片側き裂材に対して以下の検討を行った。

- (1) 各荷重(せん断力・軸力・曲げモーメント・自己平衡力)に対する応力拡大係数の解析的漸近特性を示した(3.2.3項)。特にここでは自己平衡力に対するもの( $F_L(\xi \rightarrow 1) = 0$ )が始めて導かれ、これ自体興味深い結果と考えられるが、さらにこのことから次章4.3.3項に示される軸方向き裂付き円筒に関する重要な破壊強度特性が導かれる点に注目されたい。
- (2) 上記(1)の漸近特性を用いて、式(3.12)に示される各荷重に対する応力拡大係数の有限幅補正係数の精度を検討した(3.2.3項)。
- (3) 上記(1)の漸近特性を反映させることにより、具体的解析に有用となる各種コンプライアンスの高精度な簡易評価式が新たに導かれた(3.2.4項)。

一方、非線形弾性体に対しては複合荷重下における諸量の評価手法が確立していないために、ここでは新たに全ひずみ塑性理論に基づいて複合荷重作用下でのコンプリメンタリエネルギーの全面塑性解を考えることにより(3.3.2項)、引張り・曲げおよびせん断荷重が複合する場合のき裂部材の変形および $J$ 積分値をパラメトリックに評価する手順を提唱した(3.3.3項)。またここでは同時に、コンプリメンタリエネルギーの全面塑性解を単一荷重あるいは複合荷重下における簡単な解析から評価する手順を示し、軸力と曲げモーメントを同時に受ける片側き裂材に対する諸量を極めて広範囲わたって求めて数表化した(3.3.4項)。

なお、線形弾性体の場合と異なりこの種の研究では精度が保証された体系的な研究が皆無であるため、ここでは得られた全面塑性解の複合荷重下における精度の検討はできなかったが、これは本論文第5章における軸方向き裂付き円筒の非線形弾性解析結果(国際ラウンドロビン解析)によってある程度達成されるものと考えられる。もちろん、本手法の精度の体系的な検討はせん断力およびき裂表面作用圧力が同時に作用する場合の全面塑性解の整備およびこれらの負荷履歴依存性の検討と合わせて今後の課題としたい。

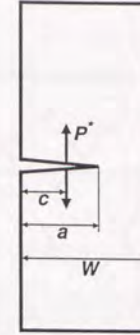
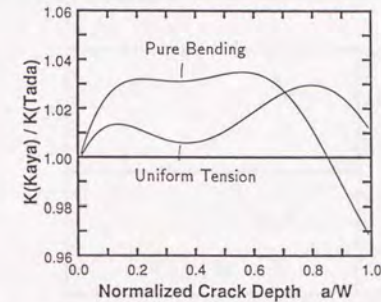
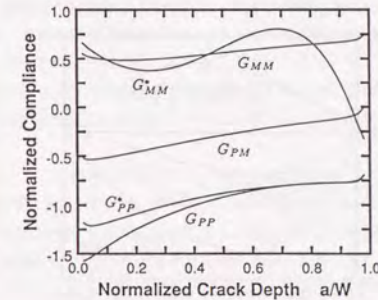


図3.1 き裂面に集中荷重を受ける片側き裂材

図3.2 片側き裂材の単純引張りおよび純曲げにおける $K_I$ の比較  
( $K(Kaya)$ : Kayaの式による $K_I$ ,  $K(Tada)$ : Tadaの式による $K_I$ )図3.3 コンプライアンスに関する計算結果  
( $G_{PP}, G_{PM}, G_{MM}$ : 式(3.38)右辺の計算結果,  $G_{PP}^*, G_{MM}^*$ : 式(3.34)から換算されるもの)



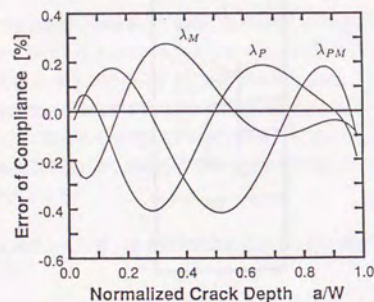


図 3.4 本論文で導かれたコンプライアンスの簡易評価式 (式 (3.40)) の誤差

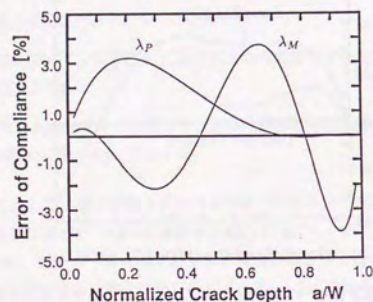


図 3.5 Tada によるコンプライアンスの簡易評価式 (式 (3.34)) の誤差

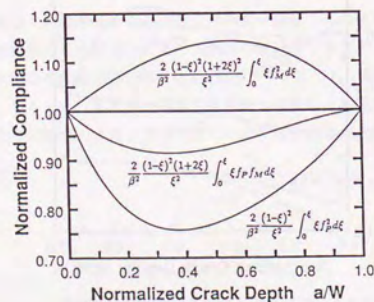


図 3.6 無次元コンプライアンスのき裂深さに対する変化

## 4

### マトリクス法による 実構造物の破壊力学パラメータ評価

#### 4.1 緒言

今日、原子炉・航空機・船舶等の大型重要構造物の設計あるいは保守管理において損傷許容設計あるいは破壊管理制御設計という考え方が広く普及している。すなわちこれらは、近年その有用性が広く認められてきた破壊力学の手法を用いて実構造物の安全性を評価するものであり、具体的には事故解析あるいは非破壊検査から想定される位置および形状のき裂を各種構造物に付して構造全体に対する詳細な有限要素解析を行ない、その結果を試験片レベルで検証された破壊基準に照らして構造中のき裂の安定・不安定進展あるいは疲労寿命を評価するという手順がとられている。ところが、有限要素法の併用によるこの種の健全性評価は必然的に解析のケースが限られるため、負荷条件やき裂形状の変更による破壊強度特性の変化あるいは現象の全体像を大局的に把握するなどの現象の本質を洞察するに足る議論が困難であった。

本論文第2章ではこのような現状を打開すべく、従来の破壊力学および構造物力学の知識を効果的に活用し詳細な応力解析を行なうことなく構造物中のき裂の挙動を簡易かつ高精度に評価する方法論として、構造物力学の基礎であるエネルギー原理をき裂を有する構造物に拡張適用する考え方を提唱し、その基礎的検討を行なった。本章では、この方法論を実際の構造物に適用するためマトリクス表記による具体的な定式化を行なうとともに、いくつかの代表的構造物への適用例を示したい。



以下 4.2 「エネルギー原理に基づく不静定構造物の破壊力学パラメータ解析」では、まず本論文第2章で導いた諸関係式に基づき、複数のき裂を有する実構造物の破壊力学パラメータを評価する手順をマトリクス表記を用いて最も一般的な形で定式化すると同時に、後の解析に役立つよう導かれた諸式の物理的意味を明らかにする。特にここでは、コンプライアンスマトリクスを用いた線形弾性体に対する陽な式の展開とは対照的な非線形弾性体に特有のマトリクス演算の手順を新たに示し、さらに本理論の実用を考慮して Ramberg-Osgood 型の構成式に対する定式化も同時に示す。

次に、この具体的な適用例として配管・圧力容器など各種プラントの中心に用いられている円筒型構造物を取りあげ、本論文第3章および Appendix において別途求められた各種マトリクスの具体形を用いて複数の軸方向き裂を有する円筒の破壊力学パラメータを統一的に評価する手順を示すと同時に、ここでは具体的にマトリクス表記の利点を活用して種々の力学特性を議論する考え方を示したい。なお、ここでの諸論により導かれた関係式に基づく実際の数値解析およびそれに基づく実用的な考察は次章以降で別途詳細に論じることとする。

すなわちまず 4.3 「軸方向き裂付き円筒の応力拡大係数評価への適用」においては、複数の任意形状の軸方向き裂を有する円筒に対して個々のき裂の混合モード応力拡大係数 ( $K_I$  および  $K_{II}$ ) を求める手順を一般的な形で定式化する。特にここでは、後述する非線形弾性体の場合に比べて Explicit なマトリクス演算の手順を紹介するが、同時に各マトリクスの具体形から軸対称き裂問題に対する解 (内力および応力拡大係数) が導かれることが示され、導かれた関係式からは軸方向き裂付き円筒の破壊強度を考察する上で興味深いいくつかの力学特性が新たに導かれる。

また 4.4 「軸方向き裂付き円筒の  $J$  積分評価への適用」では、4.3 項と同じ複数の軸方向き裂を有する円筒に対し Ramberg-Osgood 型の構成式を仮定して、個々のき裂の混合モード  $J$  積分値を評価する手順を示す。特にここでは、導かれた諸式をもとに線形-非線形領域のみならず二次元-三次元領域にわたる統一的な議論を行ない、実構造物の破壊強度特性を論じる上での多くの興味深い事実が導かれる。

以上に示された具体的定式化と考察の方法論に倣えば、その他の具体的構造物に対する適用は容易であると考えられる。そこで 4.5 「その他の具体的問題への適用に関する考察」においては、以上の定式化から得られる知見をもとに本手法の適用性などからめてき裂を有する不静定構造物の力学挙動に関する一般的な考察を行ないたい。

## 4.2 エネルギー原理に基づく不静定構造物の破壊力学パラメータ解析

ここでは、本論文第2章 2.3 節に示したマトリクス法による不静定構造物の解析手順を、き裂を有する不静定構造物の破壊力学パラメータ解析が具体的に可能となるように拡張し、一般的な形で定式化しておく。まず、ここでのマトリクス表記はその手計算と直観的洞察が可能となる形に工夫してある点に注目されたい。すなわち、2.3 節での定式化においてはき裂部材もき裂を含まない部材と同様にとり扱ったが、実際にはき裂部材の変形では考慮すべき自己平衡力やき裂表面力はき裂のない部材の変形には直接影響せず、逆にき裂のない部材の変形では考慮すべき熱ひずみや体積力はき裂部材の変形においては陽には現れずに自己平衡力の一部として処理されている。その結果、2.3 節で導いた表記を踏襲する限りコンプライアンスマトリクスが多くのゼロ成分を含む膨大なものとなって、コンプライアンスマトリクスを具体的に書き下して理論を展開したり、またその解析手順をプログラムして計算機上で解くことを考えた場合にはこのままでは不便であるばかりか、導かれた表記から個々のパラメータの影響度を直観的に考察する等の作業が困難となるなどの不具合が生じるのである。

以下では、まず始めに線形弾性体に対してコンプライアンスマトリクスを利用してき裂を有する不静定構造物の  $K$  値を求める手順を示し、得られた諸関係式の物理的意味を考察する。次に、非線形弾性体に対しても同様に  $J$  積分値を求める手順を示し、さらに実用性を考慮して Ramberg-Osgood 型の構成式を仮定した一般的な定式化を行なう。

### 4.2.1 線形弾性体に対するマトリクス法破壊力学の定式化

ここでは、 $M$  個の互いに独立な外荷重  $Q_m$  ( $m=1\sim M$ ) が作用している  $N$  個のき裂を有する不静定構造物を考える (図 2.3 参照)。まず、静定化のための切断面をき裂を含む断面にとり、構造全体を長さ 0 の  $N$  個のき裂部材とき裂を含まない ( $N+1$ ) 個の部材に分割する。さらに以下では、各部材に対して作用する部材力を切断面に作用する不静定力と同次元の荷重とそれ以外の荷重に分けてマトリクス表記することとする。

(1) 連立方程式の導出 このとき、まず  $i$  番目 ( $i=1\sim N$ ) のき裂部材のコンプリメンタリエネルギー<sup>\*1</sup>は次式のように表すことができる<sup>\*2</sup> (式 (3.7) 参照)。

$$\Omega_i^c = \frac{1}{2} (\{R_i\}^T [A_i^c] \{R_i\} + 2\{R_i\}^T [B_i^c] \{S_i\} + \{S_i\}^T [C_i^c] \{S_i\}) \quad (4.1)$$

\*1 上付きの添字  $c$  はき裂部材に関する量 (荷重は除く) であることを意味する。

\*2 このことは簡単に証明できる。すなわち、 $i$  番目のき裂部材に作用するすべての部材力を表す列マトリクスを  $\{P_i\} = \{R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{iK}, S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iL}\}^T$  とすれば、このき裂部材のコンプリメンタリエネルギーは一般に

$$\Omega_i^c = \frac{1}{2} \{P_i\}^T [\lambda_i^c] \{P_i\}$$

と表すことができる (2.2.2 項参照)。ここで、コンプライアンスマトリクス  $[\lambda_i^c]$  の部分マトリクスとして  $[A_i^c]$ ,  $[B_i^c]$ ,  $[C_i^c]$  を導入すればコンプライアンスマトリクスの対称性を用いて、

$$\begin{aligned} \Omega_i^c &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{R_i\} \\ \{S_i\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A_i^c] & [B_i^c] \\ [B_i^c]^T & [C_i^c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{R_i\} \\ \{S_i\} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \{R_i\}^T \{S_i\}^T \begin{Bmatrix} [A_i^c] \{R_i\} + [B_i^c] \{S_i\} \\ [B_i^c]^T \{R_i\} + [C_i^c] \{S_i\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



ここで、 $\{R_i\}$  (1行  $K$  列) は切断面に作用する不静定力と同次元の荷重を、 $\{S_i\}$  (1行  $L$  列) はそれ以外の荷重 (自己平衡力およびき裂面作用力などがこれに相当する) を表し、 $[A_i^*]$ ,  $[B_i^*]$ ,  $[C_i^*]$  は本論文第3章に示した手順で求まるき裂形状によって定まるコンプライアンスマトリクスである (式 (3.8) 参照)。同様に、 $j$  番目 ( $j=1 \sim N+1$ ) のき裂を含まない部材のコンプライメンタリエネルギーは次式のように表すことができる。

$$\Omega_j = \frac{1}{2} ( \{R_j\}^T [A_j] \{R_j\} + 2 \{R_j\}^T [B_j] \{Q\} + \{Q\}^T [C_j] \{Q\} ) \quad (4.2)$$

ここで、 $\{R_j\}$  (1行  $K$  列) は切断面に作用する不静定力と同次元の荷重を、 $\{Q\}$  (1行  $M$  列) は外荷重を表し、 $[A_j]$ ,  $[B_j]$ ,  $[C_j]$  は材料力学あるいは弾性論の手法で求まるコンプライアンスマトリクスである (Appendix 参照)。また、各部材力は静的な力のつり合い条件から外力  $\{Q\}$  と不静定力  $\{R\}$  を用いて次のように表される<sup>\*3</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \{R_i\} &= [D_i] \{R\} + [G_i] \{Q\} \\ \{S_i\} &= [L_i] \{Q\} \\ \{R_j\} &= [D_j] \{R\} + [G_j] \{Q\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

このとき、カステイリアーノの最小仕事の定理 (式 (2.29)) は次式で表される。

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \Omega_i^*}{\partial R} \right\} + \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (4.4)$$

式 (4.4) を解くべく、式 (4.3) を用いて式 (4.1) および式 (4.2) から  $\{R_i\}$ ,  $\{S_i\}$ ,  $\{R_j\}$  を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i^* &= \frac{1}{2} ( \{R\}^T [D_i]^T [A_i^*] [D_i] \{R\} + 2 \{R\}^T [D_i]^T [A_i^*] [G_i] \{Q\} + \{Q\}^T [G_i]^T [A_i^*] [G_i] \{Q\} \\ &\quad + 2 \{R\}^T [D_i]^T [B_i^*] [L_i] \{Q\} + 2 \{Q\}^T [G_i]^T [B_i^*] [L_i] \{Q\} + \{Q\}^T [L_i]^T [C_i^*] [L_i] \{Q\} ) \\ \Omega_j &= \frac{1}{2} ( \{R\}^T [D_j]^T [A_j] [D_j] \{R\} + 2 \{R\}^T [D_j]^T [A_j] [G_j] \{Q\} + \{Q\}^T [G_j]^T [A_j] [G_j] \{Q\} \\ &\quad + 2 \{R\}^T [D_j]^T [B_j] \{Q\} + 2 \{Q\}^T [G_j]^T [B_j] \{Q\} + \{Q\}^T [C_j] \{Q\} ) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となる。これを式 (4.4) に代入して計算すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} &= \sum_{i=1}^N ( [D_i]^T [A_i^*] [D_i] \{R\} + [D_i]^T [A_i^*] [G_i] \{Q\} + [D_i]^T [B_i^*] [L_i] \{Q\} ) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N+1} ( [D_j]^T [A_j] [D_j] \{R\} + [D_j]^T [A_j] [G_j] \{Q\} + [D_j]^T [B_j] \{Q\} ) = \{0\} \quad (4.6) \\ &= \frac{1}{2} ( \{R_i\}^T [A_i^*] \{R_i\} + \{R_i\}^T [B_i^*] \{S_i\} + \{S_i\}^T [B_i^*]^T \{R_i\} + \{S_i\}^T [C_i^*] \{S_i\} ) \\ &= \frac{1}{2} ( \{R_i\}^T [A_i^*] \{R_i\} + 2 \{R_i\}^T [B_i^*] \{S_i\} + \{S_i\}^T [C_i^*] \{S_i\} ) \end{aligned}$$

が導かれる。ここで、上式の展開にはその各項がスカラー量であるから次式が成立することを用いた。

$$\{S_i\}^T [B_i^*]^T \{R_i\} = (\{S_i\}^T [B_i^*]^T \{R_i\})^T = \{R_i\}^T [B_i^*] \{S_i\}$$

<sup>\*3</sup> き裂部材に作用する部材力において、不静定力  $\{R\}$  の影響はすべて  $\{R_i\}$  に受け持たせるので、 $\{S_i\}$  は外力  $\{Q\}$  のみの関数となるわけである。ただし、 $\{S_i\}$  は前述のとおり外力  $\{Q\}$  そのものではなく、外力の結果として生じる自己平衡力あるいはき裂面作用力の効果を表すものであるため、式 (4.3) 第2式ではこのような表記を用いている。

すなわち、上式が不静定力  $\{R\}$  を求めるための ( $K$  元 1 次) の連立方程式であって、このことを強調するためにも次式のように整理しておくことと便利である。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} &= ( [A] + [A^*] ) \{R\} + ( [B] + [B^*] ) \{Q\} = \{0\} \\ [A] &= \sum_{j=1}^{N+1} [D_j]^T [A_j] [D_j] \\ [B] &= \sum_{j=1}^{N+1} ( [D_j]^T [A_j] [G_j] + [D_j]^T [B_j] ) \\ [A^*] &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T [A_i^*] [D_i] \\ [B^*] &= \sum_{i=1}^N ( [D_i]^T [A_i^*] [G_i] + [D_i]^T [B_i^*] [L_i] ) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

これを解いて  $\{R\}$  が求まれば、式 (4.3) から  $\{R_i\}$  が得られ、各き裂部材に作用するすべての荷重が決定するから、前章 3.2 節に示した手順で各き裂の  $K$  値が求まることになる。

(2) き裂がない場合の解の利用 以上で導かれた諸関係式を用いれば理論的には極めて広範囲のき裂問題を解くことが可能となるが、実用的観点からは式が多少複雑でありまた解析の物理的意味を把握しづらいという難点がある。そこで以下では、実際の解析はもとより解析過程さらには現象の考察においても極めて有効となる別の解法を示しておく。すなわち、現実の破壊力学解析がそもそもき裂がないものとして設計された構造物に対してき裂を想定した場合に種々の荷重条件下でき裂が不安定に進展するかどうかを評価するものであることを考えれば、本解法の中にもき裂がないとした場合の解との比較が容易となるような見方を取り入れることが望ましいと言えよう。そこで、ここでは以上で導かれた関係式に対してき裂がない場合の解を考え、これを本手法に取り入れるを試みる。

き裂がない場合にも、カステイリアーノの最小仕事の定理から導かれる式 (4.7) はもちろん成立し、このとき同式において  $[A_i^*] = [B_i^*] = [0]$  であるから、同式は

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = [A] \{R_0\} + [B] \{Q\} = \{0\} \quad (4.8)$$

と書ける。ここで、 $\{R_0\}$  はき裂がない場合の不静定力を表すものであり、

$$\{R_0\} = -[A]^{-1} [B] \{Q\} \quad (4.9)$$

を解いても得られるが、この求め方については後述する。さて、式 (4.8) を用いて式 (4.7) から  $[B] \{Q\}$  の項を消去すれば

$$[A] ( \{R_0\} - \{R\} ) = [A^*] \{R\} + [B^*] \{Q\} \quad (4.10)$$

あるいは

$$( [A] + [A^*] ) ( \{R_0\} - \{R\} ) = [A^*] \{R_0\} + [B^*] \{Q\} \quad (4.11)$$



が得られる<sup>\*4</sup>。

式(4.10)あるいは式(4.11)を用いれば、具体的解析に必要となるマトリクスが少なくなる<sup>\*5</sup>だけでなく、き裂がない場合の状態からの変化という観点から現象を考えることができる点で優れているといえよう<sup>\*6</sup>。以下では、これらの方程式のもつ物理的意味をさらに詳しく考えてみる。

(3) 導出した連立方程式の物理的意味 最初に式(4.7)について考えると、まずき裂部材に関する項は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} [A^c]\{R\} + [B^c]\{Q\} &= \sum_{i=1}^N ([D_i]^T [A_i^c] [D_i] \{R\} + [D_i]^T [A_i^c] [G_i] \{Q\} + [D_i]^T [B_i^c] [L_i] \{Q\}) \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left\{ [A_i^c] ([D_i] \{R\} + [G_i] \{Q\}) + [B_i^c] [L_i] \{Q\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T ([A_i^c] \{R_i\} + [B_i^c] \{S_i\}) \quad (\because \text{式(4.3)}) \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_i} \right\} \quad (\because \text{式(4.1)}) \quad (4.12) \end{aligned}$$

上式において、 $([A_i^c] \{R_i\} + [B_i^c] \{S_i\})$  および  $\{\partial \Omega_i^c / \partial R_i\}$  は個々のき裂部材の変形を表していることから、 $[D_i]^T$  がここでは変形量の幾何学的変換マトリクスとして作用し、上式全体として「各き裂部材の変形が不静定力作用点の変形に及ぼす寄与分の合計」という数学的な意味を持ち、また物理的意味としては「き裂の存在による不静定力作用点の変形の変化(増加)分」と解釈できるものであることがわかる。また、同式が静力学的条件式(式(4.3))と各き裂部材のコンプライアンスマトリクスさえ与えられれば計算できることを上記の解釈と合わせて考えれば、実は同式の計算において部材を切断すること自

<sup>\*4</sup> 物理的意味を考える場合には式(4.10)のままで良いが、実際の数値計算の際には変数である  $\{R\}$  が左辺のみにある式(4.11)の方が便利である。

ところで、本論文ではき裂がない部分の変形あるいはエネルギーの計算においては、従来の構造解析理論にならって自己平衡力の影響は十分に小さいとして無視してあり、一方例えば熱衝撃時の自己平衡力は浅いき裂の破壊力学パラメータに大きく関与すると考えられることからき裂部材の諸量の評価においてはこれを考慮することとしている。しかしながら、厳密にはき裂がない部分においても自己平衡力の影響項は存在するはずであり、この影響項を考えた時に式(4.7)第1式および式(4.8)はそれぞれ

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega^{\text{total}}}{\partial R} \right\} &= ([A] + [A^c]) \{R\} + ([B] + [B^c]) \{Q\} + \{C_L\} = \{0\} \\ \left\{ \frac{\partial \Omega^{\text{total}}}{\partial R} \right\} &= [A] \{R_0\} + [B] \{Q\} + \{C_L\} = \{0\} \end{aligned}$$

のように書ける。ところが、この場合にも式(4.10)は全く同様に成立するものであるから、 $\{R_0\}$  を導入したここでの定式化が精度の向上にも役立っていることが理解できよう。

<sup>\*5</sup> このことが具体的解析においてかなり重要な要素となることが、次節以降で示されるであろう。

<sup>\*6</sup> 特に、破壊力学解析においては現象の考察において非常に有効な手段となる。例えば、実構造物に対するJ積分の有効範囲などは本手法を用いて簡単に知ることができる。

体にはあまり意味がなく、 $[D_i]$  等の計算のために切断面の位置の情報のみが必要であることが理解できるであろう<sup>\*7</sup>。

一方、式(4.7)におけるき裂を含まない部材に関する項  $([A]\{R\} + [B]\{Q\})$  についても全く同様な式変形ができ、これが「き裂を含まない部材の変形が不静定力作用点の変形に及ぼす寄与分の合計」という数学的意味を持ち、つまりは「き裂がないとした場合の構造全体の不静定力作用点における変形」を表すものに他ならないことがわかる。すなわち、「き裂がないとした場合の構造全体のコンプリメンタリエネルギー」<sup>\*8</sup>として新たに  $\Omega^{nc}$  を考えれば、同項は次のようにも表すことができる。

$$[A]\{R\} + [B]\{Q\} = \sum_{j=1}^{N+1} [D_j]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R_j} \right\} = \left\{ \frac{\partial \Omega^{nc}}{\partial R} \right\} \quad (4.13)$$

上式から、 $[A]$  は「き裂がないとした場合の構造全体の不静定力に対するコンプライアンスマトリクス」を、 $[B]$  は「き裂がないとした場合の構造全体の外力に対するコンプライアンスマトリクス」を表すものであることがわかる。ここで、式(4.8)とあわせれば、式(4.13)の値は不静定力  $\{R\}$  および外力  $\{Q\}$  を独立に変化させても一意に定まるべきものであることがわかるが、このことから  $[A]$ 、 $[B]$ 、 $\{R_0\}$  および式(4.13)の計算においては分割数  $(N)$  はもとより部材を切断すること自体にも意味はなく、むしろこれらはき裂などにこだわらず最も計算し易い手法で求めれば良いものであることが理解できよう<sup>\*9</sup>。

次に、以上の考察に基づいて式(4.10)の表す意味を考えてみる。まず、その左辺は式(4.12)の説明に示したとおり「き裂の存在による不静定力作用点の変形の変化量」であり、一方右辺は式(4.13)の説明から「き裂がないとした場合の構造全体の不静定力の変化による不静定力作用点の変形の変化量」を意味していることがわかる。ここで、き裂がないときには式(4.10)の左辺はゼロとなるから当然  $\{R\} = \{R_0\}$  となるが、き裂が存在する場合には左辺は正值をとるわけであるから同式を

$$[A]\{R\} + [A^c]\{R\} + [B^c]\{Q\} = [A]\{R_0\} \quad (4.14)$$

と変形すれば、き裂の存在によって系全体のコンプライアンスが増加しその結果不静定力が低下することがわかる<sup>\*10</sup>。すなわち、式(4.10)は「き裂を含む構造全体が不静定力作用点において変形しない(つまり切断(静定化)前と同じ状態になる)ように不静定力  $\{R\}$  が定まる」ことを意味する連立方程式であって、き裂部材のコンプリメンタリエネルギーの導入によって従来の構造力学の手順を無理なくき裂問題に拡張できるものであることが具体的に理解できよう。

<sup>\*7</sup> さらに後述されるように、最終的に導かれる結果が同じであることから切断を意識しない定式化の方が簡潔さの面で実用的であるといえる。ただし、本手法の出発点であった静定化自体が有限要素法と言う要素分割に相当することから、本解法が「き裂要素」を導入した有限要素法(応力法)の一種であるという観点も本手法の理解に役立つであろう。

<sup>\*8</sup> 以降、上付き添字の  $nc$  (no crack) はき裂がないとした場合の構造全体の物理量を表すものに対して用いることとする。

<sup>\*9</sup> 以上の結果は、もちろんカステリアーノの定理の前提条件でもある構造全体の微小変形が成立する範囲でのものである。

<sup>\*10</sup> その結果としてすべての内力が低下し、結果的に  $K$  値が静定な構造として計算するものよりも低下する点が重要である。



(4) 結果の整理 以上で、線形弾性体からなる不静定構造物中に複数のき裂がある場合に対して、個々のき裂の  $K$  値を求める最も一般的な手順が導かれた。結果を簡単に整理すれば以下のようになる。

まず、不静定力  $\{R\}$  を求めるために解くべき連立方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [A](\{R_0\} - \{R\}) &= [A^c]\{R\} + [B^c]\{Q\} \\ [A^c] &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T [A_i^c] [D_i] \\ [B^c] &= \sum_{i=1}^N ([D_i]^T [A_i^c] [G_i] + [D_i]^T [B_i^c] [L_i]) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

式(4.15)第1式右辺は「き裂の存在による不静定力作用点の変形の増加分」を表しており、 $\{R\}$ 、 $\{Q\}$  は不静定力および外荷重、 $[A^c]$ 、 $[B^c]$  はそれぞれに対応するコンプライアンスマトリクスである。一方、同式左辺は「き裂の存在による」不静定力の変化によるき裂を含まない構造全体の変形」を表しており、 $\{R_0\}$ 、 $[A]$  はそれぞれき裂がない場合の不静定力およびき裂を含まない構造全体の不静定力に対するコンプライアンスマトリクスである。なお、 $[A^c]$ 、 $[B^c]$  はそれぞれ式(4.15)第2、第3式から計算する必要があるが、 $[A]$  と  $\{R_0\}$  は最も計算し易い方法で求めれば良いものである。

これを解いて得られた  $\{R\}$  を用いれば式(4.3)によりすべてのき裂断面において作用する内力が求まるから、個々のき裂に対して  $K$  値が計算できることになるわけである。

#### 4.2.2 非線形弾性体へのマトリクス法破壊力学の拡張

本項では、前項と同じモデルに対して非線形弾性体にも適用可能となるようにマトリクス法破壊力学を拡張して定式化する。非線形弾性体と線形弾性体の決定的な相違点は、非線形弾性体の解析にはコンプライアンスマトリクスの導入が困難であるという点である。このため、非線形弾性体に対しては前項に示したようなマトリクス法の陽な展開は一般には困難であるが、ここでは2.3.3項に示した考え方に基いてき裂部材を含む場合に対する一般的定式化を行なう。なお、非線形破壊力学のためのさらに実用的な定式化は次項で行なうこととする。

まず、 $i$  番目のき裂部材には独立な  $(K+L)$  個の荷重として  $\{R_i\} (= \{R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{iK}\}^T)$  および  $\{S_i\} (= \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iL}\}^T)$  が作用し、一方  $j$  番目のき裂を含まない部材には独立な  $(K+M)$  個の荷重  $\{R_j\} (= \{R_{j1}, R_{j2}, \dots, R_{jK}\}^T)$  および  $\{Q\} (= \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}^T)$  が作用しているわけであるから、それぞれのコンプリメンタリエネルギー  $\Omega_i^c$  および  $\Omega_j$  の全微分は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\Omega_i^c &= \sum_{k=1}^K \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_{ik}} dR_{ik} + \sum_{l=1}^L \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial S_{il}} dS_{il} \\ d\Omega_j &= \sum_{k=1}^K \frac{\partial \Omega_j}{\partial R_{jk}} dR_{jk} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Omega_j}{\partial Q_m} dQ_m \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

ここで、 $\{R_i\}$ 、 $\{S_i\}$ 、 $\{R_j\}$  が静的な力のつり合い条件から外力  $\{Q\}$  および不静定力  $\{R\}$  を用いて式(4.3)のように表されるのは線形弾性体の場合と同様である。すなわち、部材力  $S_{il}$  および外

力  $Q_m$  は個々の不静定力  $R_k$  とは独立であるから、式(4.16)の両辺を不静定力を表す列マトリクス  $\{R\} (= \{R_1, R_2, \dots, R_K\}^T)$  で偏微分すると

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R} \right\} &= \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{\partial R_{ik}}{\partial R} \cdot \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_{ik}} \right\} = [D_i]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_i} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R} \right\} &= \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{\partial R_{jk}}{\partial R} \cdot \frac{\partial \Omega_j}{\partial R_{jk}} \right\} = [D_j]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R_j} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

が導かれる<sup>\*11</sup>。これより、カステリアーノの最小仕事の定理は

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R} \right\} + \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_i} \right\} + \sum_{j=1}^{N+1} [D_j]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R_j} \right\} = \{0\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

と書けることがわかる。

ここで、 $\{\partial \Omega_i^c / \partial R_i\}$  なる項が各き裂部材の変形を表していることを考えれば(式(4.12)参照)、式(4.18)は線形弾性体の場合の式(4.7)と同様に不静定力作用点における「各き裂部材の変形の寄与分の合計」と「き裂を含まない部材の変形の寄与分の合計」がつり合うように不静定力が定まることを表す方程式であると解釈できる。さらに、き裂を含まない部材に関する項は式(4.13)の解釈と同様に「き裂がない場合の構造全体の変形」と考えて良く、き裂がないとした場合の構造全体のコンプリメンタリエネルギー  $\Omega^{nc}(R_1, R_2, \dots, R_K, Q_1, Q_2, \dots, Q_M)$  を用いて

$$\sum_{j=1}^{N+1} [D_j]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_j}{\partial R_j} \right\} = \left\{ \frac{\partial \Omega^{nc}}{\partial R} \right\} \quad (4.19)$$

と書き直すことができる。ただし、非線形弾性体の場合には式(4.13)の右辺のように  $\{R\}$  と  $\{Q\}$  の影響項が陽に分離できないため、式(4.8)に示したようにき裂のない場合の解を考えても  $\{Q\}$  の項を消去することはできない。

すなわち、非線形弾性体に対するマトリクス法破壊力学の基礎方程式は次式のようになる。

$$\sum_{i=1}^N [D_i]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega^{nc}}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (4.20)$$

これを解いて  $\{R\}$  を求める手順は線形弾性体の場合と違って繰り返し計算が必要であり、具体的には次のような手順になる。

- (1) 適当な不静定力  $\{R\}$ <sup>\*12</sup> に対して、式(4.3)から各き裂部材に対する  $\{R_i\}$ 、 $\{S_i\}$  を求める。
- (2)  $\{R_i\}$ 、 $\{S_i\}$  を用いて各き裂部材の変形  $\{\partial \Omega_i^c / \partial R_i\}$  を求める。

<sup>\*11</sup> 式(4.17)の変形は、2.3.3節において式(2.41)～式(2.45)に示したものと同様であるから、詳細はそちらを参照されたい。

<sup>\*12</sup>  $\{R\}$  の初期値としては、式(4.10)などを参考にすればき裂のない場合の解  $\{R_0\}$  を用いればよいといえよう。



- (3) 式(4.20)の計算を行ない、収束するまで(1)~(3)を繰り返して $\{R\}$ を求める<sup>\*13</sup>。  
 (4)  $\{R\}$ を用いて式(4.3)から目的とするき裂部材の $\{R_i\}$ ,  $\{S_i\}$ を求めて $J$ 積分値を計算する。

#### 4.2.3 Ramberg-Osgood 型へのマトリクス法破壊力学の拡張

ところで、従来の構造解析の主流が線形弾性体を対象とするものであったのに対して、今日非線形弾性解析あるいは非弾性解析の必要性が騒がれており、計算機能力の飛躍的向上を背景として実に様々な非線形領域における数値解析が行なわれている。ところが、高温機器にみられる構造全体のクリープ変形や構造全体が均一であることを前提とした塑性不安定の解析などを除けば、通常の構造物においては非線形な変形が顕著に見られるのは構造のごく一部分でありその他の大部分は線形弾性挙動に近いという場合の方が普通であろう。中でもき裂問題などはその最たるものであって、式(4.15)と式(4.20)の比較からも明らかとなり、構造全体を非線形弾性体として取り扱うこと<sup>\*14</sup>はマトリクス法においては非常に不利である<sup>\*15</sup>。そこでここでは、この種の難点を解消すべく Ramberg-Osgood 型の構成式をマトリクス法破壊力学に取り入れることを考え、この構成式の導入が実構造物の非線形破壊力学解析に極めて有効となることを具体的に示したい。

現実的考察に基づく式(4.20)の改善 3.3.2項でも述べたとおり、応力ひずみ関係を式(3.44)のように線形成分と非線形成分に分けたときに、その部材のコンプリメンタリエネルギーおよび変形さらには $J$ 積分値などが形式的に線形弾性成分の寄与分と非線形弾性成分の寄与分の和として与えられる<sup>(1)</sup>。すなわち、このときカスティリアーノの最小仕事の定理は式(4.20)から

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left( \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{ce}}{\partial R_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{cp}}{\partial R_i} \right\} \right) + \left\{ \frac{\partial \Omega^{nce}}{\partial R} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega^{ncp}}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (4.21)$$

と書ける。ここで、上付き添字の $e$ は線形弾性成分を $p$ は非線形弾性成分を表している。式(4.21)は一応このままで不静定力 $\{R\}$ を求める基礎方程式であって、式(4.20)と同様にして解くことができるが、やはり線形弾性体の場合のような見通しの良い解析と比べれば sophisticated であることは否めない。

<sup>\*13</sup> 収束の条件としては、結果的に $\{R\}$ 自身の精度が問題となることから、多変数のNewton法などにおいて $\{R\}$ の変動 $\{\delta R\}$ が $\{R_0\}$ よりも十分に小さくなったときに計算を打ち切るように設定すれば良く、例えば次式のような条件式が考えられる。

$$\sum_{k=1}^K \left( \frac{R_k^{(i+1)} - R_k^{(i)}}{R_{0k}} \right)^2 \leq 10^{-6}$$

ここで、 $R_k^{(i)}$ は $i$ 回目の計算の際の値を意味するものである。

<sup>\*14</sup> 不静定構造物では、塑性変形、き裂、損傷等の発生・成長に伴って系全体の剛性(あるいはコンプライアンス)が変化するため、構造のごく一部分の挙動を知るためにも構造全体を対象とした解析を行なわざるを得ないという宿命にある。

<sup>\*15</sup> 有限要素法では損傷部も健全部も同じ構成式で取り扱う方が普通であり、何も考えなくて済むという点では有限要素法の方が優れているといえようが、境界条件の入力から結果の出力までの過程がブラックボックスとなっているために現象の理解が困難であるという点では式(4.20)に通じるところがある。

い。ところが、以下に示すような現実的考察に基づくことによって、線形弾性体に対する定式化の際に得られた知見を十分に反映させた実用的な解法を導くことができる。

すなわち、現実のき裂問題を考えた場合、き裂の発生・進展が問題となるのは常に応力集中部分であるから、材料が非線形な挙動(塑性変形)を起こし始めるのはまずき裂部材からと考えるのが自然であろう。さらに、き裂部材の塑性変形(ここでは非線形弾性変形)が進めば、き裂を含まない部分でも次第に非線形性が無視し得なくなる状況は考えられる。ところが、き裂を含まない部分が無視し得ない塑性変形を起こすような場合に対して本理論を適用すること、つまりは式(4.21)をそのまま解くことは次にあげる2つの理由からあまり意味がないことがわかる。

- (1) 圧力容器などの大きな構造物を考える場合には、き裂を含まない部分が塑性変形を起こす以前に $K \geq K_{IC}$  ( $J \geq J_{IC}$ ) さらには $dJ/da \geq dJ_R/da$ なる条件が満足されて不安定破壊が生じる。このことは筆者らが文献<sup>(2)</sup>などで具体的に論じてあり、また本論文第6章においても示されるので参照されたい。
- (2) 一方、配管などでは逆にき裂を含まない部分が大きく塑性変形してもき裂は不安定に進展することはなく、通常は塑性崩壊によって破損する<sup>\*16</sup>。そしてこのような場合にも、第3章で求めたような諸量を用いて変形の議論をすることは可能であるが、求めた内力から計算される $K$ 値あるいは $J$ 積分値は本論文2.5節で議論したとおりもはや破壊力学パラメータとしての意味はなく、破壊の有無の議論はできない。

以上の考察に基づけば、き裂のない部分は非線形な変形をしないと限定してマトリクス法を拡張しても、実用的な議論を行なううえでの支障にはならないことが理解できよう<sup>\*17</sup>。また、このような仮定をおくことによって非線形破壊力学の諸論を明解に展開することが可能となるのである。

Ramberg-Osgood 型に対する定式化 以下では、き裂部材のみ式(3.44)の Ramberg-Osgood 型の構成式に従う非線形弾性体として取り扱うこととし、き裂のない部分は近似的に線形弾性挙動をするものとする。すなわちまず

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{nce}}{\partial R} \right\} \gg \left\{ \frac{\partial \Omega^{ncp}}{\partial R} \right\} \quad (4.22)$$

と考えるわけであるから、式(4.21)は式(4.13)を用いて

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left( \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{ce}}{\partial R_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{cp}}{\partial R_i} \right\} \right) + \left\{ \frac{\partial \Omega^{nce}}{\partial R} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left( \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{ce}}{\partial R_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{cp}}{\partial R_i} \right\} \right) + [A]\{R\} + [B]\{Q\} = \{0\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

<sup>\*16</sup> このとき、塑性拘束係数を加味する場合もあるが基本的にはき裂は単なる断面の減少としてとり扱われる。

<sup>\*17</sup> ただし、実際の解析においてはき裂のない部分で降伏応力を越えないなどのチェックが常に必要となるが、本手法では式(4.3)などから構造物の各断面における内力を容易に知ることができる。また、本論文5.6節および第6章においては実際にこの考え方が妥当であることを示してあるので参照されたい。



と書き直せる。このとき、式(4.23)において4.2.1項の諸論と同様にき裂がない場合を考えれば式(4.8)と同じものが導かれるから、これを用いて同様に  $[B]\{Q\}$  の項を消去すれば

$$[A](\{R_0\} - \{R\}) = \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left( \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{ce}}{\partial R_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{cp}}{\partial R_i} \right\} \right) \quad (4.24)$$

が得られる。ここで、 $\{R_0\}$  がき裂がない場合の不静定力を表し、 $[A]$  がき裂がないとした場合の構造全体の不静定力に対するコンプライアンスマトリクスであることは線形弾性体の場合と同じである。さらに、き裂部材のコンプリメンタリエネルギーの線形弾性成分をコンプライアンスを用いて具体的に書けば次式のようになる<sup>\*18</sup>。

$$[A](\{R_0\} - \{R\}) = \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left( [A_i^{ce}]\{R_i\} + [B_i^{ce}]\{S_i\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{cp}}{\partial R_i} \right\} \right) \quad (4.25)$$

上式は4.2.2項に示した式(4.20)と同様にして解かれるが、上式の繰り返し計算の場合には  $\{R\}$  が  $\{R_0\}$  から出発して小さくなってゆく過程でき裂の存在による不静定力作用点の変形を表す右辺は小さくなり、一方き裂のない部分の変形を表す左辺は大きくなって、その一致する点として不静定力  $\{R\}$  が定まる様子がわかり、数値解析過程の物理的意味の理解に役立っている。

以上で導かれた式(4.25)が、Ramberg-Osgood型の構成式をもつ弾性構造物に対する  $\{R\}$  を求めるための連立方程式である。同式において、 $[A]$  は構造物の剛性(あるいはコンプライアンス)を、 $\{R_0\}$  は外荷重の性質を、さらに  $\{\partial \Omega_i^{ce}/\partial R_i\}$  は個々のき裂の形状と大きさを反映する項であることから、個々の因子の影響度の直観的考察が可能となるなどむしろ式(4.15)を用いる場合よりも見通しの良い解析が期待できよう。また、マトリクス表記の利点として計算機の利用が容易である点も挙げられるが、上記のことと合わせれば、数値解析過程の途中経過の出力から解析の妥当性のチェックや現象の推移のメカニズムの考察なども可能となるなど、数値計算においても非常に有利な定式化であると言えよう。

\*18 式(4.25)においてき裂部材の変形の塑性成分  $(\{\partial \Omega_i^{cp}/\partial R_i\})$  をゼロとすれば、式(4.15)と一致することが確認できよう(式(4.12)参照)。

### 4.3 軸方向き裂付き円筒の応力拡大係数評価への適用

前節では、き裂を有する不静定構造物の実用的解析手法としてマトリクス法破壊力学を提唱し、最も一般的な形での定式化を行なった。本手法の具体的な適用対象としては様々なものが考えられるが、ここでは軸方向き裂付き円筒<sup>\*19</sup>をとりあげてその応力拡大係数評価への具体的な適用手順を示す。なお、その他の構造物への適用手順も本節に示されるものとはほぼ同様であるが、各解析対象に固有の問題もいくつかあるので、これらについては後節でまとめて検討することとする。

ところで、与えられた解析対象にマトリクス法破壊力学を適用して所要の解を得ることだけが目的であればその手順は非常に簡単であって、前節で導いた式(4.15)あるいは式(4.25)にき裂部材のコンプライアンスあるいはコンプリメンタリエネルギーなどの具体形を直接あてはめてやるだけで良い。ところが、マトリクス法破壊力学の利点としては前述のような適用性・拡張性の良さに加えて、解析理論およびその結果を陽に表示できることがあげられ、特にき裂問題においては後者に未知の可能性が秘められている。そこで以下では、他の対象への応用にも役立つよう多少の重複は厭わずに前節の諸論との対比を明確にしながら軸方向き裂付き円筒に対するマトリクス法破壊力学の定式化の手順を示すと同時に、マトリクス表記の利点を活用した破壊強度特性の考察を試みる。

具体的には、まず線形弾性体に対してコンプライアンスマトリクスを用いた混合モード応力拡大係数の統一解析手順を示した後に、軸対称き裂問題における特別な解および軸方向き裂付き円筒に特有の漸近特性などを導いて線形弾性問題における破壊強度の総合的な考察を行なう。もちろんこれらは、次節で導かれる非線形弾性体に対する諸式の特別な形としても導かれるものであるが、ここでは線形弾性体に特有の鮮やかなマトリクス演算の手順に注目されたい。

#### 4.3.1 線形弾性体に対する統一評価手法の定式化

以下では、平均半径  $r_m$ 、肉厚  $W$  の軸方向き裂付き円筒を図4.1(a)のようにモデル化して考える。すなわち、円筒の一面を切断してその上側の面 ( $\phi=0$ ) を固定し、下側の面 ( $\phi=2\pi$ ) に不静定力  $\{R\}$  ( $=\{F \ P \ M/r_m\}^T$ ) を作用させる。また、き裂はそれぞれ  $\phi=\phi_i$  の位置に合計  $N$  個あるものとし、外力として内外圧および回転による遠心力を考え、また熱ひずみの影響も考慮する。

このとき、図4.1(a)の円筒全体のコンプリメンタリエネルギー ( $\Omega^{total}$ ) は、 $i$  番目のき裂部材のコンプリメンタリエネルギーを  $\Omega_i^c$  ( $i=1 \sim N$ ) とし、各き裂間の曲がり梁のコンプリメンタリエネルギーを  $\Omega_j^s$  ( $j=1 \sim N+1$ ) とすると

$$\Omega^{total} = \sum_{i=1}^N \Omega_i^c + \sum_{j=1}^{N+1} \Omega_j^s \quad (4.26)$$

と表わせる。これより、カスティリアーノの最小仕事の定理は次式のように書き表せる。

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R} \right\} + \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \frac{\partial \Omega_j^s}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (4.27)$$

\*19 もちろんき裂が半径方向に進展する問題を取り扱うが、慣習として「半径方向き裂 (Radial Crack)」よりも「軸方向き裂 (Axial Crack)」の方が良く用いられているようなので、ここでもこの慣例に準ずることとする。



本定理はそもそもエネルギー論的に導かれるものであり、「不静定力はその系全体になす仕事量が最小になるように定まる」ことを意味するものであるが、4.2.1項で示した各項の物理的意味を考えれば「不静定力作用点における変形の連続条件を満足するように不静定力が定まる」とも解釈できるものであることは容易に理解できよう。以下で議論するような具体的問題に対しては、式の展開はエネルギーをベースとし結果の解釈は上述の後者のように変形をベースにして考えて行く方が理解が容易となるであろう。

(1) き裂部材のコンプライメンタリエネルギーと応力拡大係数 まず、 $\phi = \phi_i$  なる断面に作用する内力を  $\{R_i\} (= \{F_i, P_i, M_i/r_m\}^T)$  とするとき、 $i$  番目のき裂部材のコンプライメンタリエネルギー ( $\Omega_i^c$ ) は図 4.1(b) に示されるように  $\{R_i\}$ 、き裂面に作用する圧力 ( $p_s$ ) および自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) の関数として表わされる。よって、3.2.1 項で導いたとおり  $\Omega_i^c$  は次のようにマトリクス表記できる<sup>\*20</sup>。

$$\Omega_i^c = \frac{1}{2} \left[ \{R_i\}^T [\lambda_i^*] \{R_i\} + 2\{R_i\}^T \{H_i^*\} p_s + 2\{R_i\}^T \{L_i^*\} f_i^c + f_i^c (\sigma_L, p_s) \right] \quad (4.28)$$

ここで、 $[\lambda_i^*]$  は  $i$  番目のき裂部材のコンプライアンスマトリクス、 $\{H_i^*\}$ 、 $\{L_i^*\}$ 、 $f_i^c$  はいずれもき裂表面作用圧力および自己平衡力の影響項である。ただし、式 (3.7) とは  $\{R\}$  の形が異なるため、これらの具体形はここでは以下のようになる<sup>\*21</sup> (ただし、添字の  $i$  は省略している)。

$$\left. \begin{aligned} [\lambda^*] &= \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ 0 & \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix}, & \{H^*\} &= W \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{bmatrix}, & \{L^*\} &= W \begin{bmatrix} 0 \\ L_P \\ L_M^* \end{bmatrix}, \\ f^c &= W^2 (\lambda_P p_s^2 + 2L_P p_s + L_L), \\ \lambda_F &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_F^2 d\xi, \\ \lambda_P &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P^2 d\xi, & \lambda_{PM}^* &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P f_M^* d\xi, & \lambda_M^* &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_M^{*2} d\xi, \\ L_P &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P F_L d\xi, & L_M^* &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_M^* F_L d\xi, & L_L &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi F_L^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

そして、円筒の内外面き裂を考える場合にはそれぞれ以下の諸式を使うことができる (式 (3.12) 参照)。

$$\left. \begin{aligned} f_F(\xi) &= 4.886\xi - 11.383\xi^2 + 28.198\xi^3 - 38.563\xi^4 + 20.555\xi^5 \\ f_P(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2}} \frac{0.752 + 2.02\xi + 0.37\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^3}{\cos(\pi\xi/2)} \\ f_M^*(\xi) &= \pm \left( \frac{6r_m}{W} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2}} \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^4}{\cos(\pi\xi/2)} \\ F_L(\xi, \sigma_L) &= \frac{2}{\pi} (1 - \xi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{G\sigma_L}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

<sup>\*20</sup> 式 (4.1) と比較すれば、それぞれ以下のような対応があることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} [A_i^*] &= [\lambda_i^*] \\ [B_i^*] \{S_i\} &= \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\} \\ \{S_i\}^T [C_i^*] \{S_i\} &= f_i^c(\sigma_L, p_s) \end{aligned} \right\}$$

また、上式の第 2、第 3 式から式 (4.3) 第 2 式に示した変換の意図が理解できるであろう。

<sup>\*21</sup> 以下、第 3 章の表記と異なるものにのみ上付き添字 \* を付けて区別する。

ただし、 $f_M^*$  はその符号が内面き裂の場合に負、外面き裂の場合に正となる。すなわち、3.2.1 項で導いたものとは  $f_M$  の形状が違っただけであって、後は全く同じである。また、このとき  $i$  番目のき裂部材のモード I およびモード II の応力拡大係数は、同様に次式のように修正される (式 (3.6) 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) f_P + \frac{M}{r_m W} f_M^* + F_L \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{|F|}{W} f_F \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

こうして、 $\Omega_i^c$  が  $\{R_i\}$  の関数として得られたが、式 (4.27) に見られるように  $\Omega_i^c$  は  $\{R\}$  によって偏微分する必要がある。そこで次に、 $\Omega_i^c$  を  $\{R\}$  の関数として表しておく<sup>\*22</sup>。すなわち、静力学的な力のつり合いを考えれば、内力  $\{R_i\}$  は不静定力と外力の関数として表され、次式のようになる<sup>\*23</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \{R_i\} &= [D_i] \{R\} + \{G_i\} Q \\ \begin{Bmatrix} F_i \\ P_i \\ M_i/r_m \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & 1 - \cos \phi_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ P \\ M/r_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sin \phi_i \\ 1 - \cos \phi_i \\ \cos \phi_i - 1 \end{Bmatrix} Q \\ Q &= p_i r_i - p_o r_o + \frac{\rho \omega^2}{3} (r_o^3 - r_i^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

ここで、 $r_i$ 、 $r_o$ 、 $\rho$ 、 $\omega$  はそれぞれ円筒の内外径、密度および角速度である。次に、式 (4.32) を用いて式 (4.28) の  $\{R_i\}$  を消去すると次式を得る。

$$\Omega_i^c = \frac{1}{2} \left[ \{R\}^T [D_i]^T [\lambda_i^*] [D_i] \{R\} + 2\{R\}^T [D_i]^T [\lambda_i^*] \{G_i\} Q + \{G_i\}^T [\lambda_i^*] \{G_i\} Q^2 + 2\{R\}^T [D_i]^T (\{L_i^*\} + \{H_i^*\} p_s) + 2\{G_i\}^T (\{L_i^*\} + \{H_i^*\} p_s) Q + f_i^c \right] \quad (4.33)$$

ここで、上式の展開には次の関係式を用いた。

$$\{R_i\}^T = \{R\}^T [D_i]^T + \{G_i\}^T Q \quad (4.34)$$

(2) 曲がり梁のコンプライアンス 一方、各き裂間の曲がり梁についても、それぞれのコンプライメンタリエネルギーが  $\Omega_i^c$  の場合と同様に不静定力 ( $\{R\}$ )、外力 ( $Q$ ) および熱ひずみ ( $S$ ) の関数として求められる。ところが、この場合にはそれらの合計が長さ  $2\pi r_m$  の曲がり梁のコンプライメンタリエ

<sup>\*22</sup> ここで示す手順はコンプライアンスマトリクスが定義できる線形弾性体の場合にのみ可能な方法であり、非線形弾性体の場合には 4.2.2 項に示したような方法をとらざるを得ない。もちろん、ここで導かれる結果は次節に示す非線形弾性体に対する結果からも導かれるものであり、むしろその方が統一的解析という観点からはすっきりとした議論になるが、ここでは次項以降のマトリクス演算と合わせてコンプライアンスマトリクスを用いる際の簡便式の展開を見て頂きたい。

<sup>\*23</sup> 言うまでもなくこれは式 (4.3) 第 1 式に対応するものであるが、ここでは外力の効果がすべて相似な関係となっているため  $[G_i]$  の次数が一次下がって  $\{G_i\}$  となっている。また、熱ひずみの影響は  $\{R\}$  と  $\sigma_L$  の中に含まれ、 $Q$  には現われていない点にも注意されたい (式 (4.43) 参照)。



ルギ  $\Omega^*$  と等しくなり、次式で表される<sup>\*24</sup>。

$$\sum_{j=1}^{N+1} \Omega_j^* = \Omega^* = \frac{1}{2} \left[ \{R\}^T [A] \{R\} + 2\{R\}^T \{B\} Q + 2\{R\}^T \{C\} S + f(Q, S) \right] \quad (4.35)$$

ここで、 $[A]$ 、 $\{B\}$  はそれぞれ不静定力および外力に対するコンプライアンスマトリクス、 $\{C\}S$  は熱ひずみの影響項であり、 $f(Q, S)$  は外力と温度のみの関数である。これらはいずれも材料力学あるいは二次元弾性論の手法から導かれるものであるが、具体的解析において必要となるのは後述するとおりこのうちの  $[A]$  のみである。これを二次元弾性論の手法を用いて計算すると

$$\left. \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} H_2/2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 + H_2/2 & H_1 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} \\ H_1 &= \frac{24\pi r_m^3}{E'W^3} h_1, & h_1 &= \frac{4\gamma^2}{3} \left\{ 1 - \left( \frac{1-\gamma^2}{2\gamma} \log \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)^2 \right\}^{-1} \\ H_2 &= \frac{24\pi r_m^3}{E'W^3} h_2, & h_2 &= \frac{4\gamma^2(1+\gamma^2)}{3} \left( \frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \log \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - 1 \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

となる(導出の詳細は Appendix を参照されたい)。ここで、 $\gamma (=W/2r_m)$  は円筒の厚肉度を表すパラメータであり、薄肉 ( $\gamma \ll 1$ ) の時に  $h_1=h_2=1$  となって、 $[A]$  が初等材料力学の手法による解と一致することが確認できる。

(3) 連立方程式の導出 式(4.33) および式(4.35)を式(4.27)に代入すれば、式(4.7)に対応するものとして

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} &= [A] \{R\} + \{B\} Q + \{C\} S + \{\Delta^c\} = \{0\} \\ \{\Delta^c\} &= [A^c] \{R\} + \{B^c\} Q + \{C^c\} \\ [A^c] &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T [\lambda_i^*] [D_i] \\ \{B^c\} &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T [\lambda_i^*] \{G_i\} \\ \{C^c\} &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T (\{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\}) \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

が得られる。式(4.37)は三元一次の連立方程式であり、これを解くことによって不静定力  $\{R\}$  が得られ、また式(4.32)から任意の断面における内力  $\{R_i\}$  を知ることができ<sup>\*25</sup>。さらに、き裂のある断面

<sup>\*24</sup> これは式(4.13)に示した結果に相当するものであるが、曲がり梁の場合には多少計算が複雑になるものの

$$\Omega^*(\phi_2 - \phi_1) + \Omega^*(\phi_3 - \phi_2) = \Omega^*(\phi_3 - \phi_1)$$

が成立するので、式(4.35)が実際に証明できる。

<sup>\*25</sup> この場合、式(4.32)が式(4.3)に示したように個々のき裂部材に対して与えられるのではなく、位置  $(\phi)$  のみの関数として統一的に与えられているので、任意の断面  $(\phi)$  の内力をも同時に知ることができるようになっている。

の  $\{R_i\}$  を用いれば、き裂面作用圧力  $(p_s)$  および自己平衡力  $(\sigma_L)$  と合わせて式(4.31)から個々のき裂の  $K$  値が計算できることになるわけである。

ところで、 $\{\Delta^c\}$  を具体的に書き下せば次式のようなになる(式(4.12)参照)。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta^c\} &= \sum_{i=1}^N \left\{ [D_i]^T [\lambda_i^*] [D_i] \{R\} + [D_i]^T [\lambda_i^*] \{G_i\} Q + [D_i]^T (\{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left\{ [\lambda_i^*] (\{D_i\} \{R\} + \{G_i\} Q) + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T (\{[\lambda_i^*] \{R\} + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\}) \quad (\because \text{式(4.32)}) \\ &= \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left\{ \frac{\partial \Omega_i^c}{\partial R_i} \right\} \quad (\because \text{式(4.28)}) \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

上式において、 $\{\partial \Omega_i^c / \partial R_i\}$  は各き裂部材の  $\{R_i\}$  方向の変位であるから、上式より  $\{\Delta^c\}$  が数学的には「各き裂部材の変形が不静定力作用点の  $\{R\}$  方向変位に及ぼす寄与分の合計」<sup>\*26</sup>を表すものであることがわかり、物理的には「き裂の存在による不静定力作用点の  $\{R\}$  方向変位の増加分」と解釈できる量であることが理解できよう(式(4.12)の説明参照)。

(4) き裂がない場合の解の利用 前節において、き裂がないとした場合に計算される不静定力  $\{R_0\}$  を利用することにより非常に見通しの良い解析が可能となることが示された。そこで、ここでも以上で導かれた連立方程式をこの  $\{R_0\}$  を用いて解く具体的な手順を導いておく。

すなわち、き裂がないときには式(4.37)において  $\{\Delta^c\} = \{0\}$  とすれば良いから、同式は

$$[A] \{R_0\} + \{B\} Q + \{C\} S = \{0\} \quad (4.39)$$

となる。これを用いれば、式(4.37)から  $\{B\}$  および  $\{C\}$  が消去でき、次式が得られる<sup>\*27</sup>(式(4.10)参

<sup>\*26</sup> 式(4.12)の説明でも述べたように、ここでは  $[D_i]$  の転置行列である  $[D_i]^T$  が変形量の座標変換マトリクスとして作用しているわけであるが、このことは幾何学的考察からも容易に導くことができる。

<sup>\*27</sup> 前節式(4.11)にも示したように、実際の計算では次の2通りの表記が便利である。まず一つは、式(4.40)左辺の  $\{R\}$  の項を移項して

$$\left. \begin{aligned} ([A] + [A^c]) \{R\} + \{B^c\} Q + \{C^c\} &= [A] \{R_0\} \\ \therefore \{R\} &= ([A] + [A^c])^{-1} ([A] \{R_0\} - \{B^c\} Q - \{C^c\}) \end{aligned} \right\}$$

とするのであり、もう一つは

$$\{\Delta_0^c\} = [A^c] \{R_0\} + \{B^c\} Q + \{C^c\}$$

なる仮想的な量を導入することにより、

$$\left. \begin{aligned} ([A] + [A^c]) (\{R_0\} - \{R\}) &= \{\Delta_0^c\} \\ \therefore \{R\} &= \{R_0\} - ([A] + [A^c])^{-1} \{\Delta_0^c\} \end{aligned} \right\} \quad (4.40')$$

とするものである。数値計算用のプログラムにおいてはいずれの表記法でも良いが、内力の変化と言う観点からは解析過程をチェックして現象の推移のメカニズムを考察するためには式(4.40')の方がその本質をついた式変形であるといえよう。



照)。

$$[A](\{R_0\} - \{R\}) = \{\Delta^c\} \quad (4.40)$$

ここで、 $[A]$  が不静定力に対する (き裂のない場合の) 円筒壁のコンプライアンスマトリクスであることを考えれば、上式が「(き裂の存在による) 不静定力の変化 (低下) による不静定力作用点の変形分 (左辺) がき裂の存在による不静定力作用点の変形の増加分 (右辺) とつり合うように不静定力が定まる」ことを表していることが具体的に理解できよう。

このように、式 (4.40) はその表記が簡潔かつ陽であるばかりでなく、き裂が複数であってもなお式の持つ物理的意味が明白でありまた内力の変化 ( $\{R_0\} \rightarrow \{R\}$ ) という観点から現象をとらえることができる点で優れている。また、本手法ではその計算過程において当然のようにき裂断面の内力  $\{R_i\}$  が出力されるわけであるが、これを利用して実用上重要な多くの新たな情報が得られることになる。すなわち、まず本章 4.3.2 項および 4.4.2 項においては、軸対称問題において陽な形で導かれる内力から破壊力学パラメータに及ぼす各種因子の影響度が論じられ、また 5.3.2 項ではき裂長さの変化に対する内力の変化を具体的に調べることで円筒型構造物の破壊強度に関する重要な知見が導かれる。さらに、このき裂断面の内力  $\{R_i\}$  は実は弾塑性領域における  $J$  積分の有効条件 (本論文 2.5 節参照) の考察において有用な情報ともなる。すなわち、有限要素法等による解析ではこれを換算すること自体に多大な労力を要するためか、これまで実構造物に対して  $J$  積分の有効条件を検討しようという試みが見られなかったが、本論文 5.6 節および第 6 章においてはこれが初めて詳細に議論されている。このこともまた、本手法の大きな利点の一つとしてあげられよう。

(5)  $\{R_0\}$  の具体例 き裂のない場合の不静定力  $\{R_0\} = (\{F_0 \ P_0 \ M_0/r_m\})^T$  は最も計算し易い方法で求めればよいことを前節で示したが、円筒体における  $\{R_0\}$  は円筒壁のせん断応力 ( $\tau_{r\theta}$ ) および円周方向応力 ( $\sigma_\theta$ ) を用いて次式から容易に計算でき、またこの時に式 (4.29) の  $\{L\}$  の計算に必要な自己平衡力 ( $\sigma_L$ ) も同時に得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \int_{r_i}^{r_o} \tau_{r\theta} dr, & P_0 &= \int_{r_i}^{r_o} \sigma_\theta dr, & M_0 &= \int_{r_i}^{r_o} \sigma_\theta (r - r_m) dr \\ \sigma_L &= \sigma_\theta - \frac{P_0}{W} - \frac{6M_0}{W^2} \cdot \frac{2(r - r_m)}{W} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

ここで、 $r_i, r_o$  は円筒の内外径である。以下では、主要な外荷重に対して  $\{R_0\}$  を整理しておく。

外力として図 4.1(a) に示される内外圧、回転による遠心力および熱応力を考えれば、いずれの場合にも  $\tau_{r\theta} \equiv 0$  であり、また  $\sigma_\theta$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{[内外圧]} & \quad \sigma_\theta = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right) - \frac{p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) \\ \text{[回転]} & \quad \sigma_\theta = \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \left(r_o^2 + r_i^2 + \frac{r_o^2 r_i^2}{r^2} - 3r^2\right) + \rho \omega^2 r^2 \\ \text{[熱応力 (円筒)]} & \quad \sigma_\theta = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left\{ \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} T r dr + \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr - T \right\} \\ \text{[熱応力 (平板)]} & \quad \sigma_\theta = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left( \frac{1}{W} \int_{r_i}^{r_o} T dr - T \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

ここで、 $\alpha_T, T(r)$  はそれぞれ線膨張係数および半径方向の温度分布である。これらを式 (4.41) に代入して、 $F_0, P_0, M_0$  を実際に計算すると

$$\left. \begin{aligned} F_0 &\equiv 0 \\ P_0 &= p_i r_i - p_o r_o + \frac{\rho \omega^2}{3} (r_o^3 - r_i^3) \\ M_0 &= (p_o - p_i) r_o r_i \left( \frac{1}{2} - \frac{r_o r_i}{r_o^2 - r_i^2} \log \frac{r_o}{r_i} \right) \\ &\quad + \frac{\rho \omega^2}{8} \left\{ \frac{3 - 2\nu}{1 - \nu} \left( r_o^2 r_i^2 \log \frac{r_o}{r_i} - \frac{r_o^4 - r_i^4}{4} \right) + \frac{4}{3} r_m W^3 \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \int_{r_i}^{r_o} T(r - r_m) dr \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

となる<sup>28</sup>。ただし、熱応力に対しては平板の解を用いた結果である<sup>29</sup>。ここで、 $P_0$  には熱応力が影響しておらず、これが式 (4.32) に示した  $Q$  と一致している点に注目されたい。また、 $F_0$  は恒等的にゼロとなっているが、 $F_0 \neq 0$  となるのは例えば局所的に集中荷重を受けるような場合である。この種の集中荷重問題は本論文第 7 章でまとめて議論されるが、基本的には本節に示した手順で全く同様に取り扱え、式 (4.32) の  $\{G_i\}$  を修正する必要があるだけである。

ところで、このとき式 (4.32) の右辺を具体的に計算すれば

$$\begin{aligned} [D_i]\{R_0\} + \{G_i\}Q &= \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & 1 - \cos \phi_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ M_0/r_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sin \phi_i \\ 1 - \cos \phi_i \\ \cos \phi_i - 1 \end{Bmatrix} Q \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ M_0/r_m \end{Bmatrix} = \{R_0\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

となることがわかる。この関係式は  $\phi_i$  によらず成立するので、き裂のない場合にはすべての断面で等しい内力 ( $\{R_0\}$ ) が作用することを意味していることがわかる。この結果はもちろん当然のことであるが、式 (4.32) の表す意味の理解に役立つであろう。

<sup>28</sup> 参考までに数値計算に便利なように肉厚比  $\gamma (=W/2r_m)$  を用いて無次元化すれば、例えば内外圧と回転による体積力が作用する場合の  $P_0, M_0$  が次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_0}{W} &= \frac{1 - \gamma}{2\gamma} p_i - \frac{1 + \gamma}{2\gamma} p_o + \rho \omega^2 r_m^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{3}\right) \\ \frac{M_0}{r_m W} &= (p_o - p_i) \frac{1 - \gamma^2}{4\gamma} \left(1 - \frac{1 - \gamma^2}{2\gamma} \log \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}\right) \\ &\quad + \rho \omega^2 r_m^2 \left\{ \frac{2\gamma^2}{3} + \frac{3 - 2\nu}{8(1 - \nu)} \left[ \frac{(1 - \gamma^2)^2}{2\gamma} \log \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - (1 + \gamma^2) \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

<sup>29</sup> 熱応力解析に関する詳細は本論文第 6 章を参照されたい。



## 4.3.2 軸対称き裂問題における特別な解

提案法の大きな特徴はマトリクス表記にある。その利点としては、まず解くべき方程式が式(4.37)および式(4.40)のように計算機を用いた数値解析に適した形で整理されている点があげられる。すなわち、これによって前節で述べた汎用性と拡張性を強力にサポートする汎用プログラムの作成が容易となるばかりでなく、有限要素法等では困難であった種々のパラメータの感度解析などを繊細に行なうことが可能となる。

さらに、もう一つの利点として解析過程を陽な形で示すことができる点があげられる。これは、種々のパラメータが相互に作用しつつ結果に影響を及ぼす過程を知り、現象のメカニズムを明らかにするうえで非常に有用である。以下ではこの顕著な例として、円筒の軸を中心として複数( $N \geq 2$ )の同一形状のき裂が等間隔に配置される場合(以下これを単に軸対称き裂問題と呼ぶ)の内力および $K$ 値の陽な表記を導き、これに基づいて各種パラメータの影響度の定性的考察を行なう。なお、実際の数値解析に基づく定量的検討は次章において詳細に行なわれる。また、ここでは参考のため軸対称問題と同様モードIのみの単一モード問題となるき裂が一個の場合についても、その連立方程式の具体形を導いておく。

(1) き裂が一個の場合の連立方程式 き裂が一個の場合( $\phi = \phi_i$ )を考えると、解くべき連立方程式は式(4.40)および式(4.37)から

$$[A](\{R_0\} - \{R\}) = [D_i]^T [\lambda_i^*] [D_i] \{R\} + [D_i]^T [\lambda_i^*] \{G_i\} Q + [D_i]^T (\{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\}) \quad (4.45)$$

と得られるが、最終的に求めたいものは $\{R_i\}$ であるから、まず上式から $\{R\}$ を消去してやる。すなわち、上式右辺は式(4.38)と同様にし、また左辺は式(4.32)および式(4.44)から得られる次式

$$\left. \begin{aligned} \{R\} &= [D_i]^{-1} \{R_i\} - [D_i]^{-1} \{G_i\} Q \\ \{R_0\} &= [D_i]^{-1} \{R_0\} - [D_i]^{-1} \{G_i\} Q \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

を用いれば以下のように変形できる。

$$\left. \begin{aligned} [A][D_i]^{-1}(\{R_0\} - \{R_i\}) &= [D_i]^T (\{\lambda_i^*\} \{R_i\} + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\}) \\ \therefore [D_i]^T [A][D_i]^{-1}(\{R_0\} - \{R_i\}) &= [\lambda_i^*] \{R_i\} + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\} \\ \therefore [A](\{R_0\} - \{R_i\}) &= [\lambda_i^*] \{R_i\} + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\} \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

こうして導かれた式(4.47)第3式は任意の $\phi_i$ に対して成立するものであり、これによってき裂断面に作用する内力 $\{R_i\}$ が不静定力 $\{R\}$ を介さずに直接計算することができることになる。

一方、き裂が不静定力作用点( $\phi=0$  or  $2\pi$ )にある場合を考えると、式(4.45)において $[D_i]$ は単位行列となりまた $\{G_i\}=\{0\}$ であるから、同式は

$$[A](\{R_0\} - \{R\}) = [\lambda_i^*] \{R\} + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\} \quad (4.48)$$

となって、式(4.47)第3式と一致することが確認できる。このことは、「切断面の位置のとり方によらず式(4.48)によって内力 $\{R_i\}$ が計算できる」ことを表しており、本理論の妥当性のチェックとなっている。

以上の考察により、き裂一個の場合には添字 $i$ には意味はないといえるから、以下では式(4.48)の表記から添字をとったものについて考える。

まず、式(4.48)を具体的に書けば、式(4.29)および式(4.36)から

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{H_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} F_0 \\ P_0 \\ \frac{M_0}{r_m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F \\ P \\ \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ 0 & \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ P \\ \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} + W \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{Bmatrix} p_s + W \begin{Bmatrix} 0 \\ L_P \\ L_M^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる。よって、式(4.49)の第1行から

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{H_2}{2} (F_0 - F) &= \lambda_F F \\ F &= 0 \quad (\because F_0 = 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

が得られ、また第2, 第3行からは

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{Bmatrix} p_s + \begin{Bmatrix} L_P \\ L_M^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

が導かれる。これより、き裂が一個の場合にはせん断力( $F$ )は常にゼロとなって解くべき連立方程式は次数が一元落ちることがわかる。すなわち、この場合には混合モードとはならず( $K_{II} \equiv 0$ )、 $K_I$ のみを求めるという単純な問題となる。また、このときの $P$ と $M$ を求める方程式である式(4.51)は松原ら<sup>(3)</sup>による表記との一致が確認できる<sup>\*30</sup>。

蛇足ながら式(4.51)の解法を以下に示しておく。まず、式(4.40)に対する脚注にも示したように変数である $\{R\}$ を右辺に集めると

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} \right\} \\ &= \left( \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{Bmatrix} \right\} + \begin{Bmatrix} \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{Bmatrix} p_s + \begin{Bmatrix} L_P \\ L_M^* \end{Bmatrix} \\ \therefore \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{Bmatrix} \right\} &= \left( \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left( \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} \right\} - \begin{Bmatrix} \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{Bmatrix} p_s - \begin{Bmatrix} L_P \\ L_M^* \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

\*30 この種の問題に関するコンプライアンス概念をベースとした一般論は岡村<sup>(4)</sup>によって展開されており、例えばここで示されるような $F=0$ の場合については式(4.51)および式(4.52)において $p_s=L_P=L_M^*=0$ とした場合に対応するものが文献<sup>(4)</sup>の115ページに記されている。松原による研究<sup>(3)</sup>は岡村による一般論の実構造物への適用例であり、文献<sup>(4)</sup>に示される手順の拡張として式(4.51)から式(4.52)への展開が踏襲されている。ところが、後述されるとおり、き裂が複数ある場合や非線形問題への拡張を考えた場合には式(4.53)への展開の方が自然でありかつ本質的な議論においては有効なものとなる。

また、文献<sup>(3)</sup>では曲がり梁のコンプライアンスとして材料力学の解を用いているため、本論文で示した式(4.36)とは表記が異なっている。これらの差異による精度の検討はAppendixを参照されたい。



が得られ、同様に  $\{R\}$  を左辺に集めると

$$\left. \begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right) \left( \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{Bmatrix} \right) \\ & = \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{bmatrix} p_s + \begin{Bmatrix} L_P \\ L_M^* \end{Bmatrix} \\ \therefore \quad \begin{Bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{Bmatrix} & = \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ & \quad \times \left( \begin{bmatrix} \lambda_P & \lambda_{PM}^* \\ \lambda_{PM}^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{P_0}{r_m W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_P \\ \lambda_{PM}^* \end{bmatrix} p_s + \begin{Bmatrix} L_P \\ L_M^* \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

が得られる。それぞれ、式(4.40)に対する脚注に示したものと対応を確認されたい。

(2) 同一形状の複数のき裂 ( $N \geq 2$ ) が軸対称に配置される場合の内力 同一形状の  $N$  個のき裂が軸対称に配置されるような場合には、内力  $\{R_i\}$  が例外的に簡単な形になることが知られている<sup>(5)</sup>。ところが、文献<sup>(5)</sup>ではこの事実を仮定したうえでの解析結果が他者の詳細解析と一致したという論旨の議論を行なっているため、現象の考察等の目的でこの事実を用いるには根拠が不十分である。そこでここではこのことを陽に導き、き裂形状および荷重条件によらない一般解を示しておく。

まず、すべてのき裂が同一形状であるという仮定から、式(4.37)においてコンプライアンスマトリクスはすべての  $i$  に対して等しく  $[\lambda_i^*] = [\lambda^*]$ ,  $\{H_i^*\} = \{H^*\}$ ,  $\{L_i^*\} = \{L^*\}$  とおけ、またき裂の配置が等間隔であることから  $[D_i]$ ,  $\{G_i\}$  は式(4.32)の表記において  $\phi_i = 2\pi i/N$  としたものをを用いれば良い。よって、式(4.37)は具体的に

$$\left. \begin{aligned} [A^c] &= \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} l_i^2 \lambda_F + m_i^2 \beta_1 & l_i m_i (\beta_1 - \lambda_F) + m_i \beta_2 & m_i \beta_2 \\ l_i m_i (\beta_1 - \lambda_F) + m_i \beta_2 & m_i^2 \lambda_F + l_i^2 \beta_1 + 2l_i \beta_2 + \lambda_M^* & l_i \beta_2 + \lambda_M^* \\ m_i \beta_2 & l_i \beta_2 + \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \\ \{B^c\} &= \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} l_i m_i \lambda_F + m_i (1 - l_i) \beta_1 \\ -m_i^2 \lambda_F + (1 - l_i) (l_i \beta_1 + \beta_2) \\ (1 - l_i) \beta_2 \end{Bmatrix} \\ \{C^c\} &= \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} m_i (\beta_3 - \beta_4) \\ l_i (\beta_3 - \beta_4) + \beta_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

と書き下すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} l_i &= \cos(2\pi i/N), \quad m_i = \sin(2\pi i/N), \\ \beta_1 &= \lambda_P - 2\lambda_{PM}^* + \lambda_M^*, \quad \beta_2 = \lambda_{PM}^* - \lambda_M^*, \\ \beta_3 &= (L_P + \lambda_P p_s)W, \quad \beta_4 = (L_M^* + \lambda_{PM}^* p_s)W \end{aligned}$$

である。次に、式(4.54)中に見られる三角関数の総和を考えると、これは  $N=2$  および  $N \geq 3$  の場合に対してそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 l_i &= \sum_{i=1}^2 m_i = \sum_{i=1}^2 l_i m_i = 0, & \sum_{i=1}^2 l_i^2 &= 2, & \sum_{i=1}^2 m_i^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^N l_i &= \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N l_i m_i = 0, & \sum_{i=1}^N l_i^2 &= \sum_{i=1}^N m_i^2 = \frac{N}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

これより、式(4.54)はそれぞれの場合に対して次式のように簡単に書くことができる。

$$[A^c] = 2 \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 + \lambda_M^* & \lambda_M^* \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix}, \quad \{B^c\} = 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_2 - \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}, \quad \{C^c\} = 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

$$[A^c] = N \begin{bmatrix} \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} + \lambda_M^* & \lambda_M^* \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix}, \quad \{B^c\} = N \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_2 - \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} \\ \beta_2 \end{Bmatrix}, \quad \{C^c\} = N \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

次に、不静定力を求めるために前項で導いた次式を利用する。

$$([A] + [A^c])(\{R_0\} - \{R\}) = [A^c]\{R_0\} + \{B^c\}Q + \{C^c\} \quad (4.58)$$

上式を具体的に書けば、式(4.56)および式(4.57)から、それぞれ  $N=2$  および  $N \geq 3$  の場合に対して

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} \frac{H_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 + \lambda_M^* & \lambda_M^* \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} F_0 - F \\ P_0 - P \\ \frac{M_0}{r_m} - \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} \\ & = 2 \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 + \lambda_M^* & \lambda_M^* \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ P_0 \\ \frac{M_0}{r_m} \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_2 - \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} Q + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} \frac{H_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} + \lambda_M^* & \lambda_M^* \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} F_0 - F \\ P_0 - P \\ \frac{M_0}{r_m} - \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} \\ & = N \begin{bmatrix} \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} + \lambda_M^* & \lambda_M^* \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ P_0 \\ \frac{M_0}{r_m} \end{Bmatrix} + N \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_2 - \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} \\ \beta_2 \end{Bmatrix} Q + N \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

となる。ここで、マトリクス演算により第2行から第3行を差し引いたものを第2行としても連立方程式としては等価であるから、式(4.59)および式(4.60)はそれぞれ次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} \frac{H_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_2}{2} & 0 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} F_0 - F \\ P_0 - P \\ \frac{M_0}{r_m} - \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} \\ & = 2 \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ P_0 \\ \frac{M_0}{r_m} \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} Q + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} \frac{H_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_2}{2} & 0 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} F_0 - F \\ P_0 - P \\ \frac{M_0}{r_m} - \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} \\ & = N \begin{bmatrix} \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda_M^* & \lambda_M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ P_0 \\ \frac{M_0}{r_m} \end{Bmatrix} + N \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda_F + \beta_1}{2} \\ \beta_2 \end{Bmatrix} Q + N \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.62)$$

さらに、式(4.43)で導いた  $F_0=0$ ,  $P_0=Q$  を用いれば式(4.61)および式(4.62)は簡単に計算でき、結局



両式から得られる結果は等しく次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 = 0 \\ P &= P_0 = Q \\ \frac{M}{r_m W} &= \frac{M_0}{r_m W} - \frac{\phi_0^*}{H_1/N + \lambda_M^*}, \quad \phi_0^* = \left( \frac{P_0}{W} + p_s \right) \lambda_{PM}^* + \frac{M_0}{r_m W} \lambda_M^* + L_M^* \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

(3) 考察 式(4.63)は軸対称き裂問題 ( $N \geq 2$ ) における不静定力の一般解であり、その導出過程からも明らかとなり任意の外力 (すなわち  $\{R_0\}$ ) およびき裂形状 ( $[\lambda]$ ) に対して成立するものである。そして具体的には、式(4.63)からまず軸対称き裂問題においてはせん断力 ( $F$ ) は作用せず軸力 ( $P$ ) は一定となり、また円筒の内外面き裂を考えればいずれの場合にも  $M$  はき裂が閉じる方向に変化することがわかる<sup>\*31</sup>。また、 $F=0, P=Q$  のときには式(4.44)に示した関係が同様に成立するので、このとき円筒の全ての断面において等しい内力が作用することもわかる。

さらに、き裂のない時の不静定力による次のような仮想的な  $K$  値を考えれば、

$$\frac{K_I^0}{\sqrt{\pi a}} = \left( \frac{P_0}{W} + p_s \right) f_P + \frac{M_0}{r_m W} f_M^* + F_L \quad (4.64)$$

この場合の  $K$  値が式(4.31)と式(4.63)および式(4.64)から次式のように書ける。

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{K_I^0}{\sqrt{\pi a}} - \frac{\phi_0^*}{H_1/N + \lambda_M^*} f_M^* \quad (4.65)$$

ここで、

- (a) 外力を表す  $\{R_0\}$  が一定であるとき、 $K_I^0$  はき裂長さのみの関数となる。
- (b)  $K_I^0$  は円筒のコンプライアンスを考慮しない場合の  $K$  値であるとも解釈できる。
- (c) 円筒が厚肉になると  $H_1$  は肉厚比 ( $\gamma=W/2r_m$ ) の3乗に比例して小さくなる (式(4.36)参照)。などを考慮すれば、式(4.65)から軸方向き裂付き円筒の  $K_I$  に関する定性的性質として具体的な数値計算を行なうまでもなく以下のような考察が可能となる。

- (1) き裂個数 ( $N$ ) が増えるときき裂を閉じる方向へのモーメントの増加率が大きくなり、その結果  $K$  値の低下率が大きくなる。
  - (2) 円筒が厚肉になるほど ( $H_1$  は小さくなるから) 同様に  $K$  値の低下率は大きくなる。
  - (3) き裂が深くなるほど ( $H_1/N$  に比べて  $\lambda_M^*$  が大きくなるから) 上記 (1), (2) の傾向は弱くなる。
- その他にも、き裂面に作用する圧力 ( $p_s$ ) の影響なども容易に知ることができるが、この種の定量的考察は次章で詳細に行なわれる。なお、以上のことは再三述べてきた「不静定構造物中にき裂が存在する場合には内力が低下する」ことを具体的に示すものであるが、ここではその結果として式(4.65)にも示されるように「破壊力学パラメータがき裂がない場合の内力から計算されるものよりも必ず小さくなる」ものであることも同時に理解できよう。

<sup>\*31</sup> このことは非線形弾性体に対しても成立するものであり、より詳細な説明は次節4.4.2項でまとめる行なうことにする。なお、式(4.63)においてモーメントの減少分を表す項の分子  $\phi_0^*$  が、き裂がないときの不静定力によるき裂部材の角変位 (式(3.11)参照) となっている点は興味深く、「き裂がない場合の  $\times \times$ 」という考え方が本解析手法全体のキーポイントとなっていることがわかるであろう。

### 4.3.3 諸量の漸近特性

以上の過程で導かれた諸関係式を用いることにより、前章で導いた有限幅補正係数およびコンプライアンスの漸近特性を利用して軸方向き裂付き円筒に関する諸量の漸近特性を調べることができる。これらの漸近特性はもちろん数値解析結果のチェックあるいはこれで無次元化することによる結果の整理や簡便式の作成などに用いることができる有用なものであるが、ここでは特にその  $\xi \rightarrow 1$  における興味深い特性が導かれそのクラックアレストとの関連性が示唆される。

まず、前章で導かれた各漸近特性である式(3.21)、式(3.24)、式(3.28)、式(3.33)、式(3.35)および式(3.36)を本章の諸量に対して書き直すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_F(0) &= 0, & f_F(1) &= \frac{2/\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \\ f_P(0) &= \beta, & f_P(1) &= \frac{\beta}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \\ f_M^*(0) &= k\beta, & f_M^*(1) &= \frac{k\beta/3}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \\ F_L(0) &= \beta\sigma_L^*, & F_L(1) &= 0 \\ \lambda_P(0) &= \frac{\pi\beta^2}{E'}\xi^2, & \lambda_P(1) &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^2} \\ \lambda_{PM}^*(0) &= \frac{k\pi\beta^2}{E'}\xi^2, & \lambda_{PM}^*(1) &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{k/3}{(1-\xi)^2} \\ \lambda_M^*(0) &= \frac{k^2\pi\beta^2}{E'}\xi^2, & \lambda_M^*(1) &= \frac{\pi\beta^2}{E'} \cdot \frac{k^2/9}{(1-\xi)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

ただし、 $k = \pm \frac{6r_m}{W}$  であり、この符号は内面き裂の場合に負、外面き裂の場合に正である。また、 $\sigma_L^*$  はき裂のある側の表面での自己平衡力の値である。

(1)  $\xi \rightarrow 0$  の場合の漸近特性 き裂が非常に短い場合 ( $\xi \rightarrow 0$ ) には、式(4.40)において  $\{\Delta^c\} = \{0\}$  として良いから同式より  $\{R\} = \{R_0\}$  が導かれる。このとき式(4.44)から  $\{R_i\} = \{R\}$  となる (すべての断面で内力が等しくなる) から、式(4.66)の  $f_F(0)$ ,  $f_P(0)$ ,  $f_M^*(0)$ ,  $F_L(0)$  を式(4.31)に代入することにより次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \beta \times \left[ \frac{P_0}{W} + p_s \pm \frac{6M_0}{W^2} + \sigma_L^* \right] = \beta \times [\sigma_{\theta 0}^* + p_s] \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

ここで、 $\sigma_{\theta 0}^*$  はき裂がないときの円周方向応力 (式(4.42)参照) のき裂のある側の表面での値である。

例えば内圧 ( $=p_i$ ) 円筒の内外面き裂の  $K_I$  に対する  $\xi \rightarrow 0$  における漸近値は、式(4.42)第1式を式(4.67)に代入して次のように得られる。

$$\frac{K_I}{p_i \sqrt{\pi a}} = \begin{cases} \frac{2r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \beta & (\text{内面}, p_s = p_i) \\ \frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \beta & (\text{内面}, p_s = 0) \\ \frac{2r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \beta & (\text{外面}, p_s = 0) \end{cases} \quad (4.68)$$

ここで、 $r_i, r_o$  は円筒の内外径であり、 $p_s = p_i$  はき裂表面作用圧力を考慮することを意味している。



(2)  $\xi \rightarrow 1$  の場合の漸近特性 次に、 $\xi \rightarrow 1$  なるき裂が1個ある場合を考える(複数存在する場合にも導かれる結果は同じである)。このとき、式(4.37)において  $\{\Delta^c\}$  の項が他の項に比べて圧倒的に大きくなり、またその中でも  $\xi \rightarrow 1$  なるき裂のコンプライアンスマトリクス  $[\lambda^*]$ ,  $\{H^*\}$ ,  $\{L^*\}$  が他のき裂のものに比べて圧倒的に大きくなる。さらに、 $\xi \rightarrow 1$  なるき裂が  $\phi = 2\pi$  にあると考えると一般性を失わないから(前項(1)の証明参照)、結局式(4.37)は

$$\{0\} = [A]\{R\} + \{B\}Q + \{C\}S + \{\Delta^c\} = \{\Delta^c\} = [\lambda^*]\{R\} + \{H^*\}p_s + \{L^*\} \quad (4.69)$$

となる。これを具体的に書けば次式のようになり、

$$\begin{bmatrix} \lambda_F(1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P(1) & \lambda_{PM}^*(1) \\ 0 & \lambda_{PM}^*(1) & \lambda_M^*(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ P \\ \frac{M}{r_m} \end{Bmatrix} + Wp_s \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda_P(1) \\ \lambda_{PM}^*(1) \end{Bmatrix} + W \begin{Bmatrix} 0 \\ L_P(1) \\ L_M^*(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

これよりまず、

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \lambda_P(1) + \frac{M}{r_m W} \lambda_{PM}^*(1) + L_P(1) &= 0 \\ \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \lambda_{PM}^*(1) + \frac{M}{r_m W} \lambda_M^*(1) + L_M^*(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad F=0 \quad (4.71)$$

が得られる。また、式(4.66)に示されるとおり  $f_P(1)$  および  $f_M^*(1)$  が特異性を持つものであるのに対して  $F_L(1)=0$  であることから、式(4.29)に示される各コンプライアンスの定義式より

$$\lambda_P(1) \gg L_P(1), \quad \lambda_M^*(1) \gg L_M^*(1) \quad (4.72)$$

が導かれる。すなわち、式(4.71)第2、第3式において  $L_P(1)$  および  $L_M^*(1)$  は無視できるから、同式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{W} + p_s &= -\frac{\lambda_{PM}^*(1)}{\lambda_P(1)} \cdot \frac{M}{r_m W} \\ \frac{P}{W} + p_s &= -\frac{\lambda_M^*(1)}{\lambda_{PM}^*(1)} \cdot \frac{M}{r_m W} \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

が得られる。さらに、式(4.66)に示した  $\lambda_P(1)$ ,  $\lambda_{PM}^*(1)$ ,  $\lambda_M^*(1)$  からは

$$\frac{\lambda_{PM}^*(1)}{\lambda_P(1)} = \frac{\lambda_M^*(1)}{\lambda_{PM}^*(1)} = \frac{k}{3} \quad (4.74)$$

が導かれるから、式(4.73)はいずれも

$$\frac{P}{W} + p_s = -\frac{k}{3} \frac{M}{r_m W} = -\frac{1}{3} \frac{6M}{W^2} \quad (4.75)$$

となる。ここで、上式右辺は内面き裂の時に正、外面き裂の時に負である。式(4.71)第1式および式(4.75)がき裂断面に作用する内力  $\{R\}$  の  $\xi \rightarrow 1$  における漸近特性である<sup>\*32</sup>。

<sup>\*32</sup> 同長き裂が軸対称に配置される場合にもこれと同様の結果が導かれる。すなわち、まず式(4.63)第1式の  $F=0$  は式(4.71)第1式と一致しており、また式(4.63)第3式において  $\lambda_M^* \gg H_1/N$  および  $\lambda_M^* \gg L_M^*$  であることから

$$\frac{M}{r_m W} = \frac{M_0}{r_m W} - \left\{ \left( \frac{P_0}{W} + p_s \right) \frac{\lambda_{PM}^*}{\lambda_M^*} + \frac{M_0}{r_m W} \right\} = -\frac{3}{k} \left( \frac{P_0}{W} + p_s \right)$$

となって、このとき式(4.63)第2式の  $P=P_0$  とあわせると式(4.75)と同じ結果が導かれる。

次に、 $K$  値の漸近特性を調べるために、まず式(4.66)に示した  $f_F(1)$ ,  $f_P(1)$ ,  $f_M^*(1)$ ,  $F_L(1)$  を式(4.31)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{\beta}{\sqrt{\xi(1-\xi)^3}} \left\{ \left( \frac{P}{W} + p_s \right) + \frac{k}{3} \frac{M}{r_m W} \right\} \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{2\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \cdot \frac{|F|}{W} \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

となる。よって、式(4.71)第1式および式(4.75)に示されるき裂断面作用力の漸近特性から

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} = 0 \quad (4.77)$$

が得られる<sup>\*33</sup>。すなわち、円筒の軸方向き裂の応力拡大係数は、内面き裂、外面き裂の違いおよびき裂表面力の有無にかかわらず  $\xi \rightarrow 1$  においてゼロに収束すると結論できる。

$K$  値がゼロになるということは、き裂が完全に閉じることを意味している。もちろん、不安定進展するき裂に対しては慣性の効果も考慮しなければならないため定量的なことはいえないが、 $\xi \rightarrow 1$  で  $K \rightarrow 0$  に収束することがき裂が停止し易くなることにつながることは明らかであろう。なお、後章に示す数値計算では線形範囲においては後述する数値誤差のため  $K$  値がゼロに低下する様子が明確には確認できないが、非線形弾性体に対しては  $\xi \approx 0.9$  程度で例外なく  $J=0$  となることが確認され、特に熱衝撃による曲げ荷重に対してはクラックアレストが起こり易いことが示される(本論文第6章参照)。

(3) 実際の数値解析における誤差の検討 ところで、実際の数値解析では計算に用いる有限幅補正係数の数値誤差に起因して理論的漸近特性と数値解析結果との食い違いが当然生じる。3.2.3 項では片側き裂部材に対してこのことを示したが、ここでは軸方向き裂付き円筒におけるこの種の問題点を検討しておく。

まず、 $\xi \rightarrow 0$  の場合には式(4.67)に示したとおり  $f_P$ ,  $f_M^*$ ,  $F_L$  の精度のみが問題となるが、式(3.27)および式(3.29)に示したとおり  $f_P$ ,  $f_M$ ,  $F_L$  の評価式は  $\xi \rightarrow 0$  において精度が非常に良いこと(0.1%以内)から、この場合の評価精度には何の問題もなからう。

一方、 $\xi \rightarrow 1$  の場合には、まず内力  $\{R\}$  の計算に用いられる  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{PM}^*$ ,  $\lambda_M^*$  は、その特異性を厳密に表現できるように作成した式(3.40)を実際の数値解析に用いるので、内力の解析結果は理論的漸近特性である式(4.75)に完全に一致する(例えば図5.16参照)。すなわち、式(4.31)から得られる次式までは数値解析の精度が保証されることになる。

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \left( f_P(1) - \frac{3}{k} \cdot f_M^*(1) \right) + F_L(1) \quad (4.78)$$

ところが、上式の計算に必要となる  $\xi \rightarrow 1$  における  $f_P$ ,  $f_M^*$ ,  $F_L$  の精度に関してはいくつかの問題がある。まず、 $f_P$  と  $f_M^*$  については式(3.27)にも示したように個々の精度は非常に良いが、式(4.30)を直

<sup>\*33</sup> 厳密には式(4.76)が既に特異性を有するので、式(4.71)第1式および式(4.75)に示した漸近特性には収束の早さに関する情報が欠けており、単純に式(4.77)を結論とすることはできない。簡単にフォローしておく、内力  $(F, P, M)$  もまた上記の導出過程から明らかとなりコンプライアンスの特異性の早さで漸近値に収束し、これが式(4.76)に現れる有限幅補正係数の特異性の強さよりも強いので結局式(4.77)が成立することになるのである。



採用して計算すれば

$$\begin{aligned} \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \left( f_P(1) - \frac{3}{k} \cdot f_M(1) \right) &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) f_P(1) \left( 1 - \frac{3}{k} \cdot \frac{f_M(1)}{f_P(1)} \right) \\ &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) f_P(1) \left( 1 - \frac{3}{k} \cdot \frac{0.923k}{2.772} \right) \\ &= \left( \frac{P}{W} + p_s \right) \frac{f_P(1)}{924} \end{aligned} \quad (4.79)$$

となり、理論的にはゼロとなるはずの項が有限の特異項となることがわかる。なお、この項は熱衝撃のみが作用するような場合<sup>34)</sup>を除いて正值をとることになる(図5.16参照)。一方、自己平衡力( $\sigma_L$ )の項については理論的には $\sigma_L$ の分布形によらず $F_L(1)=0$ となるものが、式(4.78)の $F_L$ はKayaの式を用いて数値計算するため $f_P, f_M$ と同じ強さの特異性 $((1-\xi)^{-\frac{3}{2}})$ をもった有限の特異項となることは3.2.3項で示したとおりである。なお具体的な計算の詳細はここでは割愛するが、図3.2にも示されたように熱衝撃のごとき裂のある側での引張りが大きい場合にのみ $F_L$ は負となり、内圧あるいは回転といったその他の負荷で生じる自己平衡力に対しては正值をとることが確認された。

すなわち、ここで得られた重要な結論は理論的にはゼロとなるはずの $K_I$ が数値計算ではゼロとはならないことであり、具体的には熱衝撃荷重の場合にのみ $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$ の早さで $-\infty$ に発散することから結果的に理論とほぼ同様の結果を導くグラフが描かれることになるが、その他の荷重においては $(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}$ の早さで $+\infty$ に発散することから数値計算の結果のグラフからは正しい考察は期待できない。そもそも、この領域における現象が金属材料の線形弾性範囲で起こるとは考えられないことから、次章以降の解析結果では $\xi=1$ の近傍での解析結果は描かないこととする。

#### 4.3.4 結果の整理と考察

導かれた諸式の使用手順とその汎用性 以上で線形弾性体からなる軸方向き裂付き円筒に対する解析に必要な諸式がすべて導かれた。具体的には、まず式(4.40)を解いて不静定力 $\{R\}$ を求め、これと式(4.32)から目的とするき裂断面に作用する内力 $\{R_i\}$ を求めれば、式(4.31)および式(4.30)から個々のき裂の $K_I$ および $K_{II}$ が計算できる。このとき、 $[A]$ および $\{R_0\}$ はそれぞれ式(4.36)および式(4.43)に示されるとおりであり、 $\{\Delta^c\}$ は式(4.37)に示される関係式を式(4.29)、式(4.30)および式(4.32)に示した諸量を用いて計算されるものである。以上の諸関係式を用いることによって極めて広範囲の軸方向き裂問題を同一の方程式を用いて統一に取り扱うことができ、またマトリクス表記の助けもあることから計算機を用いた汎用解析プログラムの作成などにおいても非常に有利な定式化であると言える。すなわち、構造物の破壊強度評価に関する体系的な調査・検討において本手法が極めて有力なツールとなりうるものと考えられる。

さらに、本手法の利点および汎用性を具体的にあげれば以下になる。

- (1) まず式(4.37)は種々のき裂が任意の位置( $\phi$ )に複数個配置された場合に対応できるものであることを示しているが、このような場合にも式(4.40)の物理的意味はなおも明確である。つまり、本手法

<sup>34)</sup> この場合にのみ内面き裂1個の場合に $(\frac{P}{W}+p_s)<0$ 、複数の軸対称き裂の場合に $(\frac{P}{W}+p_s)=M=0$ となっており、式(4.79)が負または0となるため、実際の数値解析においても理論的に予測した $K_I(\xi \rightarrow 1) \rightarrow 0$ なる結果 $(K_I(\xi \rightarrow 1) \rightarrow -\infty)$ でも見かけは同じことである)が得られるわけである。

によって複数のき裂が任意に配置される場合の強度特性の変化などが繊細に議論できることになるが、さらにここで明らかにした式(4.40)の各項の意味を考えることにより汎用プログラムによる解析結果のみならずその解析過程の妥当性のチェックあるいは現象の推移の考察が容易に可能となるなど、この種の解析手法においては例のない特徴があるといえよう。

- (2) また式(4.41)は任意の軸対称な周方向応力に対応できるものであることを示しており、式(4.42)および式(4.43)ではその代表例をあげたが、内圧円筒などで問題となる自緊による残留応力なども本節の手順で全く同様に取扱えることは明らかであろう。なお、集中荷重(すなわち非軸対称な周方向応力)が作用するような場合にも本節に示したものと同様な取扱いが可能となるが、この種の集中荷重問題は本文第7章においてまとめて議論する。
- (3) 一方、き裂形状については式(4.30)では実用上最も重要であることから円筒の内外面き裂に対応する解として片側き裂材の有限幅補正係数を示してあるが、式(4.29)は一般に成立するものである。すなわち、対応するき裂形状についての平板に対する補正係数さえ与えられれば軸方向の内外面き裂はもとより両側あるいは内部に存在する二次元および三次元き裂に対して、またさらにはそれらの干渉がある場合についても任意の内外径比の円筒に対して同様に $K$ 値を計算することができることになる。

ただし上記(3)については、現実問題としては片側き裂材以外のき裂形状では式(4.30)のように有限幅補正係数の簡易評価式が整備されていないため、実際の計算は円筒の内面あるいは外面に存在する二次元き裂に限られることも事実である。ところが、円筒の内面あるいは外面に存在する三次元表面き裂あるいは二次元き裂であってもき裂同士の影響がある場合などを除いては破壊強度の評価においてそれほど興味深いものではないことは従来の多くの研究(5.2.2項参照)を見れば明らかであろう。また、次章に示される二次元き裂に対する具体的な解析結果から、「強度評価においてはき裂同士の干渉を考慮する必要はない」こと、さらに「強度評価においては混合モード状態を考慮する必要がないことから三次元表面き裂に対しても既存(モードI)の解のみを用いて実用上重要な議論が十分に行なえる」ことなどが示されることになる。さらに次節においては、非線形弾性体に対しても同様なことがいえることも示されるが、このように二次元線形弾性き裂に対する解析の知見が非線形弾性体および三次元表面き裂に対する強度評価に反映できることも本手法の大きな利点であろう。

軸対称き裂問題に対する陽な解 以上の特徴は4.2節までの諸論から定性的には伺えるものであったが、本節で新たに示された軸対称き裂問題における解は具体的な解析対象を与えられて始めて示すことができるマトリクス表記の利点である。

すなわち、ここでは形状の等しい $N$ 個( $N \geq 2$ )のき裂が軸対称に配置される場合の内力(式(4.63))および応力拡大係数(式(4.65))が陽な形で導かれた。ここでの重要な結論は、この種の軸対称き裂問題においてはせん断力が作用しない( $F=0$ )だけでなく軸力( $P$ )が変化しないと言う事実である。このことによって三元の連立方程式(式(4.40))が曲げモーメント( $M$ )のみの一元の方程式となり、まず曲げモーメントがき裂の存在あるいは成長によってき裂を閉じる方向に変化しその結果応力拡大係数がき裂がない場合の内力から計算されるものよりも低下するというメカニズムが具体的に明らかとなった。さらに、き裂個数、き裂深さおよび円筒の厚肉度などのパラメータが曲げモーメントの変化量すなわち $K_I$ の低下量に及ぼす影響が具体的な数値解析を行なうまでもなく直感的に理解でき、ここでの考察は現象の理解に大いに役立つものと考えられる。



もちろん、現実には個々のき裂長さは異なりまた配置も等間隔ではあるまい。ところが、本論文第5章の解析によってこの種の軸対称問題に対する各種パラメータの影響度の考察が具体的解析結果のチェックとそれから導かれる破壊現象のメカニズムの考察に有用であることだけでなく、強度評価においては軸対称問題の解(特に  $N=2$  の場合)が重要となることも示され、ここでの考察が現実の強度評価に活かされることになることも付記しておきたい。

**軸方向き裂付き円筒に関する諸量の漸近特性** さらに、本節では前章で導かれた片側き裂材に関する諸量の漸近特性を利用して、内面および外面き裂を有する軸方向き裂付き円筒に関する諸量の漸近特性が導かれた。特に、ここで新たに導かれたき裂が深い場合( $\xi \rightarrow 1$ )の応力拡大係数の漸近特性は、本簡易解析手法による数値解析の限界を明らかにすると同時に、軸方向き裂付き円筒における進展き裂の停止現象(Crack Arrest)を示唆するものとなっており、破壊現象の考察において極めて重要な事実であるといえよう。

**本解析手法の精度** ところで、本手法はそもそも不静定梁の解析に用いられていた考え方を拡張したものであることからわかり、円筒が厚肉になると集中力(不静定力: $\{R\}$ )のみで梁の変形(あるいはエネルギー)を表現するという前提の妥当性に疑問が生じるため、不静定力を求める式(4.40)において精度上の問題が生じると考えられる。具体的には、曲がり梁の端部変形<sup>(6)</sup>がき裂部材の変形に及ぼす影響およびき裂の存在による応力場の乱れが曲がり梁の変形に及ぼす影響がその原因となるものと考えられる。ところが、これらの影響度を定量的に示すことは一般には困難である。そこで、次章においては厚肉円筒に対する信頼度の高い他者の解析結果と提案法による解析結果とを比較することにより、提案法の適用限界を調べることにする。

#### 4.4 軸方向き裂付き円筒のJ積分評価への適用

前節では、線形弾性体からなる軸方向き裂付き円筒に対してマトリクス法破壊力学を一般的な形で定式化し、その具体的適用手順はもちろん本手法の陽な表記から得られる種々の知見を示してきた。ここでは、線形弾性体に対して得られた知見を活用して Ramberg-Osgood 型の構成式をもつ非線形弾性体からなる軸方向き裂付き円筒に対してマトリクス法破壊力学を拡張し、線形弾性体の場合と同様に破壊強度の考察を試みる。

ただし、定式化については4.2節および4.3節においてかなりの紙面を費やして詳細な説明を行ってきたので、ここでは簡単にその実用に必要なる関係式を整理することにとどめ、得られた諸式を用いて初めて可能となる線形-非線形領域における統一的議論に重点をおくことにする。特に、ここで示される軸対称問題に対する特別な関係式はこれが線形弾性体における結果を含むことはもちろん、この関係式と本論文第5章における線形弾性き裂に対する解析結果を合わせることにより非線形領域における多くの興味深い知見が新たに導かれるものである点に注目されたい。

##### 4.4.1 Ramberg-Osgood 型に対する統一的評価手法の定式化

ここでは、前節までに示された諸式を利用して Ramberg-Osgood 型構成式をもつ軸方向き裂付き円筒に対するJ積分値の統一的評価手法を示す。このとき、結果論ではあるが、コンプライアンスを介さないこの定式化の方が前節に示したもののよりも諸式の物理的意味(式(4.12)および式(4.25)の説明参照)も含めてかなりすっきりとしたものとなっていることがわかるであろう。なお、一貫して非線形弾性体として定式化したものを別報<sup>(7)</sup>にまとめてあるので同時に参照していただきたい。

**不静定力を求める方程式** ここでも、解析モデルは前項と同じく図4.1に示される軸方向き裂付き円筒である。このとき、線形弾性体に対する一般形である式(4.10)および式(4.12)が本解析対象に対してはそれぞれ式(4.40)および式(4.38)に対応することから、Ramberg-Osgood 型に対する不静定力を求める方程式の一般形である式(4.25)が本解析対象に対しては次式で表されることは明らかであろう。

$$\{A\}(\{R_0\} - \{R\}) = \sum_{i=1}^N [D_i]^T \left( \{\lambda_i^*\} \{R_i\} + \{H_i^*\} p_s + \{L_i^*\} + \left\{ \frac{\partial \Omega_i^{ep}}{\partial R_i} \right\} \right) \quad (4.80)$$

ここで、 $\{R\} = \{F \ P \ M/r_m\}$ ,  $\{R_i\} = \{F_i \ P_i \ M_i/r_m\}$  はそれぞれ不静定力および各断面( $\phi_i$ )における内力と等価な集中力であり、両者の間には式(4.32)に示される関係が成立するのは線形弾性体の場合と同様である。また、 $\{R_0\}$ ,  $\{A\}$ ,  $\{D_i\}$ ,  $\{\lambda_i^*\}$ ,  $\{H_i^*\}$ ,  $\{L_i^*\}$  も同様に線形弾性体に対する定式化の際に示したものと等しく、それぞれ式(4.41)~式(4.43), 式(4.36), 式(4.32)および式(4.29)に示されるとおりである。

**き裂部材の諸量(非線形弾性成分)** すなわち、式(4.80)の計算に新たに必要となるものはき裂部材の変形量の非線形弾性成分  $\{\partial \Omega_i^{ep} / \partial R_i\}$  のみであることになる。

そして、図4.1(b)に示される負荷のうちき裂表面作用圧力( $p_s$ )のみ無視すれば、全断面降伏状態においては自己平衡力( $\sigma_L$ )は再配分によって消失すると考えて良いから、結局等価な集中力  $\{R_i\}$  のみが作用する場合を考えれば良いことになり、3.3.3項で導いた諸式を使用することができる。すなわち、線形弾性体の場合(式(4.28)~式(4.31))と同様集中力を表す列マトリクス  $\{R_i\}$  の形が3.3.3項での



のと異なることに注意すれば、まず式(3.79)からき裂部材のコンプリメンタリエネルギーが次式のように表せることがわかる(添字の*i*は省略)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Omega^{cp}}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W^2} &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{f^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \\ f &= \frac{\Lambda_F F^2 + \Lambda_P P^2 + 2\Lambda_{PM}^* P M' + \Lambda_M^* M'^2}{\sigma_0^2 W^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

ここで、 $M' = M/r_m$ であり、 $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}^*, \Lambda_M^*$ はいずれも加工硬化指数( $n$ )およびき裂形状に依存する無次元係数(コンプリメンタリエネルギーの全面塑性解)である。このとき、 $J$ 積分値および各荷重方向の変形量はそれぞれ式(3.2)および式(3.3)から次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{JP}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 W} &= \frac{f^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \left( \frac{1}{1-\xi} + \frac{\partial f / \partial \xi}{2f} \right) \\ \frac{\partial \Omega^{cp}}{\partial F} &= \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} \Lambda_F F \\ \frac{\partial \Omega^{cp}}{\partial P} &= \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} (\Lambda_P P + \Lambda_{PM}^* M') \\ \frac{\partial \Omega^{cp}}{\partial M'} &= \frac{\alpha}{E} \frac{f^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi)^{n+1}} (\Lambda_{PM}^* P + \Lambda_M^* M') \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

これより、 $i$ 番目のき裂部材の変形量の非線形弾性成分は形式的に次式のようにマトリクス表記できることになる。

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{cp}}{\partial R_i} \right\} = \begin{bmatrix} \lambda_{Fi}^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Pi}^p & \lambda_{PMi}^{p*} \\ 0 & \lambda_{PMi}^{p*} & \lambda_{Mi}^{p*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i \\ P_i \\ M_i/r_m \end{Bmatrix} = [\lambda_i^{p*}] \{R_i\} \quad (4.83)$$

ただし、

$$[\lambda_i^{p*}] = \begin{bmatrix} \lambda_{Fi}^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Pi}^p & \lambda_{PMi}^{p*} \\ 0 & \lambda_{PMi}^{p*} & \lambda_{Mi}^{p*} \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{E} \frac{f_i^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\xi_i)^{n+1}} \begin{bmatrix} \Lambda_{Fi} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{Pi} & \Lambda_{PMi}^* \\ 0 & \Lambda_{PMi}^* & \Lambda_{Mi}^* \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

である。

以上の諸量の計算に必要な  $\Lambda_F, \Lambda_P, \Lambda_{PM}^*, \Lambda_M^*$  は、いずれも複合荷重下あるいは単一荷重下における有限要素解析により容易に評価できることは本論文3.3.4項に示したとおりである。そして、円筒の内外面き裂を考える場合には、このうちの  $\Lambda_P, \Lambda_{PM}^*, \Lambda_M^*$  が表3.1に示される片側き裂材に対するものと次式の関係にあるから、これをそのまま使うことができる。

$$\Lambda_P = \Lambda_P, \quad \Lambda_{PM}^* = \pm (6r_m/W) \Lambda_{PM}, \quad \Lambda_M^* = (6r_m/W)^2 \Lambda_M \quad (4.85)$$

ここで、 $\Lambda_{PM}^*$  における符号は内面き裂の場合に負、外面き裂の場合に正である。

**結果の整理と考察** 以上で式(4.80)の計算に必要な諸量がすべて導かれた。すなわち、図4.1に示される負荷(ただしき裂表面作用圧力は無視する)を受ける軸方向き裂付き円筒の  $\{R\}$  を求める連立方程式は次のように書ける。

$$[A] \{ \{R_0\} - \{R\} \} = \sum_{i=1}^N [D_i]^T \{ [\lambda_i^*] \{R_i\} + [\lambda_i^{p*}] \{R_i\} + \{L_i^*\} \} \quad (4.86)$$

ここで、 $[A], \{R_0\}, [D_i], [\lambda_i^*], [\lambda_i^{p*}], \{L_i^*\}$  はそれぞれ式(4.36)、式(4.41)、式(4.32)、式(4.29)、式(4.84)および式(4.29)に示されるとおりである。

さて、まず式(4.86)を解くためには、設定した  $\{R\}$  に対して式(4.32)から個々のき裂の  $\{R_i\}$  および  $[\lambda_i^{p*}]$  を求めて式(4.86)の右辺を計算し、左辺との差が  $\{0\}$  に収束するまでこれを繰り返す必要がある。ただし、式(4.86)右辺はその物理的意味(式(4.25)の説明参照)からもわかるように  $\{R\}$  の各成分に対する単調関数であるから、 $\{R_0\}$  を初期値として繰り返し計算を行えばその収束は一般に良好でかつ速い。こうして、得られた  $\{R\}$  と式(4.32)から目的とするき裂断面の  $\{R_i\}$  を計算すれば、式(4.31)と式(3.1)および式(4.82)第1式からそれぞれ  $J$  積分値の線形および非線形成分が得られる。

ところで、以上の手順で得られる  $J$  積分値の破壊力学パラメータとしての有効性については、上記の議論とは別問題である。その詳細は本論文2.5節において詳細に検討したとおりであるが、本手順においてはその解析過程で必ず出力される  $\{R_i\}$  を用いることにより、これまで実構造物に対してはほとんど検討されていなかった  $J$  積分の有効条件を容易に検討できるという利点があることも付記しておく。なお、このことは本論文5.6節および第6章において具体的に検討が行なわれることになるので、詳細はそちらを参照されたい。

#### 4.4.2 軸対称き裂問題に対する特別な関係式

軸方向き裂が1個の場合および同一形状の複数のき裂が円筒の軸を中心に等間隔(すなわち軸対称)に配置される場合には、すべてのき裂断面において  $F_i=0$  となりモードIのみの単一モード問題となることは直感的にも理解できよう。もちろん、このようなき裂形状が現実のものを代表するとは考えられないが、次章における詳細な非軸対称き裂問題の解析の結果から実際の構造健全性評価においてはこの種の軸対称問題の解(特に  $N=2$  の場合)が実用上重要となることが明らかにされる。すなわち、ここで導かれる軸対称問題に対する関係式とそれから導かれる知見が実用的にも極めて重要となるわけである。

さて、前節4.3.2項ではコンプライアンスマトリクスを利用してこの軸対称問題( $N \geq 2$ )に対する陽な解(式(4.63)~式(4.65))を論理的に導いたが、ここでは非線形弾性領域において同様な関係式を導いておく。すなわち以下では、まずマトリクス表記を利用して軸対称問題における内力を導き、次にこれに基づいて各種パラメータが  $K$  値あるいは  $J$  積分値に及ぼす影響度に関する統一的考察を試みる。

**軸対称き裂問題における内力** まず問題の幾何学的対称性から、この場合にはすべてのき裂断面において  $\{R_i\}$  が等しいことがわかる<sup>35</sup>。そこで、 $N$  個の軸対称き裂 ( $N \geq 2$ ) のうちの1つを  $\phi=2\pi$  に

<sup>35</sup> このことは、式(4.45)~式(4.48)に示した証明が  $([\lambda_i^*] \{R_i\} + \{H_i^*\} p_a + \{L_i^*\})$  を  $\{\partial \Omega_i^* / \partial R_i\}$  とおきかえても成立する(式(4.38)参照)ことから理解できよう。

なお、この延長として式(4.49)~式(4.51)ではき裂が1個場合の連立方程式が導かれているが、同様に考えればそこの手順が非線形弾性体に対しても全く同様に成立し、結局 Ramberg-Osgood 型の構成式からなる軸方向き裂(1個)付き円筒の内力を求める連立方程式は次式のようになる(ここでは  $p_a=0$  であることに注意)。

$$\begin{bmatrix} H_1 + \frac{H_2}{2} & H_1 \\ H_1 & H_1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \frac{P_0}{W} \\ \frac{M_0}{r_m W} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{P}{W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \lambda_P + \lambda_{PM}^p & \lambda_{PM}^p + \lambda_{PM}^{p*} \\ \lambda_{PM}^p + \lambda_{PM}^{p*} & \lambda_M^p + \lambda_M^{p*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P}{r_m W} \\ \frac{M}{r_m W} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_P \\ L_M \end{bmatrix}$$

同式は筆者ら<sup>(8)</sup>による初期の研究のものとは一致していることが確認できる。また、松原によるその後の研究では<sup>(9)(10)</sup>では上式の  $\sigma_L$  の項を無視した形をとっていることも確認できるが、この項は特に熱衝撃のように表面での張力が大きくなるような負荷に対してき裂が浅いところで他の項と同等あるいはそれ以上の大きさとなるものであるから、上式に示されるようにこの項は正しく考慮する方がよい。



配置した場合を考えれば、すべてのき裂断面 ( $\phi_i = \frac{2\pi i}{N}$ ,  $i=1 \sim N$ ) において  $\{R_i\} = \{R\}$  となる。よって、これらを

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ P_i \\ M_i/r_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ P \\ M/r_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^* \\ P^* \\ M^*/r_m \end{Bmatrix} = \{R^*\} \quad (4.87)$$

と置いて式 (4.32) を具体的に計算すれば次式が導かれる。

$$F^* = 0, \quad P^* = Q \quad (4.88)$$

すなわち、式 (4.43) と合わせればこの場合には

$$\{R_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ M_0/r_m \end{Bmatrix}, \quad \{R^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ M/r_m \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

であって、解析中はせん断力 ( $F$ ) が作用せず、また軸力 ( $P$ ) はき裂の有無によって変化しないことがわかる。もちろんこの結果は式 (4.63) に示されたものと一致しているが、ここでは式 (4.89) が力学的境界条件のみから導かれるものであり、弾性体の構成式によらず成立する点に注目されたい。

**M を求める方程式** 以上のことから、弾性体の構成式によらず軸対称き裂問題では曲げモーメントのみが変化することが明らかとなった。そこで次に、前項で導いた諸式を用いて Ramberg-Osgood 型の非線形弾性体に対し、マトリクス表記を利用して曲げモーメントを求める方程式を導く。

すなわち、まず式 (4.86) 左辺は式 (4.36) と式 (4.89) から次のように非常に簡潔なものとなることわかる。

$$[A](\{R_0\} - \{R^*\}) = H_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_0 - M}{r_m} \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

一方、式 (4.86) の右辺においてはすべての  $i$  に対して  $[\lambda_i^*]$ ,  $[\lambda_i^{p*}]$ ,  $\{R_i\}$ ,  $\{L_i^*\}$  が等しく、また式 (4.32) に示される  $[D_i]$  から任意の  $N(\geq 2)$  に対して

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N [D_i]^T &= N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [D^N] \\ \sum_{i=1}^N \sin\left(\frac{2\pi i}{N}\right) &= \sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{2\pi i}{N}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

が成立することがわかるから、式 (4.90) と同様以下のように簡潔に表せる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [D_i]^T (\{[\lambda_i^*]\{R_i\} + [\lambda_i^{p*}]\{R_i\} + \{L_i^*\}\}) &= [D^N] (\{[\lambda^*]\{R^*\} + [\lambda^{p*}]\{R^*\} + \{L^*\}\}) \\ &= N \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Omega^*}{\partial (M/r_m)} \\ \frac{\partial \Omega^*}{\partial (M/r_m)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.92)$$

ここで、 $\partial \Omega^c / \partial (M/r_m)$  ( $= \phi^c r_m$ ) はき裂部材のモーメント方向の角変位を表す量であり、その具体形は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega^c}{\partial (M/r_m)} &= \frac{\partial \Omega^{ce}}{\partial (M/r_m)} + \frac{\partial \Omega^{cp}}{\partial (M/r_m)} \\ \frac{1}{W} \frac{\partial \Omega^{ce}}{\partial (M/r_m)} &= \frac{Q}{W} \lambda_{PM}^* + \frac{M}{r_m W} \lambda_M^* + L_M^* \\ \frac{1}{W} \frac{\partial \Omega^{cp}}{\partial (M/r_m)} &= \frac{Q}{W} \lambda_{PM}^{p*} + \frac{M}{r_m W} \lambda_M^{p*} \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

式 (4.90) と式 (4.92) を等置すれば  $M$  を求める方程式として次式を得る。

$$\frac{H_1}{N} \left( \frac{M_0 - M}{r_m W} \right) = \frac{1}{W} \frac{\partial \Omega^c}{\partial (M/r_m)} \quad (4.94)$$

ここで、 $\lambda_{PM}^{p*}$  および  $\lambda_M^{p*}$  は  $Q$  と  $M$  の関数である ( $\because F=0$ ) から、Ramberg-Osgood 型の場合には式 (4.94) は非線形方程式となり Newton 法などによって解く必要がある。ただし、その変数は 1 つであるから式 (4.86) に比べれば計算ははるかに容易であろう。

**線形弾性体に対する解との対応およびその非線形弾性体との類似点と相違点** ここで、後の考察のために線形弾性体における解を式 (4.94) から導き、前節の結果との一致を確認しておく。すなわち、線形弾性体の場合には式 (4.93) において  $\Omega^{cp}=0$  とすれば良いから、このとき式 (4.93) と式 (4.94) から次式が導かれる。

$$\frac{M}{r_m W} = \frac{M_0}{r_m W} - \frac{\frac{Q}{W} \lambda_{PM}^* + \frac{M_0}{r_m W} \lambda_M^* + L_M^*}{H_1/N + \lambda_M^*} \quad (4.95)$$

これは前節で導いた式 (4.63) において  $p_s=0$  としたものに一致することが確認できるであろう。

ところで、式 (4.95) と式 (4.40) の説明として脚注に示した式 (4.40') および式 (4.53) との類似性に注目すれば、式 (4.53) および式 (4.95) がいずれも式 (4.40') の特殊なケースであること<sup>\*36</sup>、また線形弾性体の場合には繰り返し計算を必要とせずすべての内力が定まることなどが理解できよう。一方、Ramberg-Osgood 型の場合にも同様に、式 (4.94) の最も一般的な三変数の場合が式 (4.86) であり (もちろんその原型は式 (4.25) であるが)、またその二変数の場合が前ページの脚注に示されるものであることが確認できるであろう。さて、こうしてすべての場合についての諸式を線形弾性体の場合のものと比べた時に、まずいずれもき裂部材の変形量の非線形成分の存在のために隔年形で  $\{R\}$  が書き下せないことがわかるが、このとき逆にそれが幸いして方程式の物理的意味がより明確なものとなっていることにも気付くであろう。

**M を求める方程式に基づく考察** さて、Ramberg-Osgood 型の場合の不静定力を求める方程式の個々の項の持つ物理的意味は式 (4.25) の説明にも述べたとおりであるが、式 (4.94) では具体的に  $H_1$  が円筒の厚肉度 (式 (4.36) 参照)、 $N$  がき裂個数を、また式 (4.94) の右辺はき裂部材に作用する曲げモーメント方向の角変位を表すことから、数値計算を行なうまでもなく以下のような考察が可能となる。

すなわち、まず円筒の内外面き裂を考えれば、図 4.1(b) に示される定義により式 (4.94) 右辺は内面き裂の時に負、外面き裂の時に正値をとる。すなわち、式 (4.94) より内面き裂の時には  $M > M_0$ 、外面き裂の時には  $M < M_0$  となることがわかるから、これを図 4.1(b) と合わせれば内外面き裂いずれの場合に

\*36 さらにいえば、式 (4.40') は式 (4.11) の特別な場合である。



も  $M$  はき裂が閉じる方向に変化することがわかる。さらに具体的には式(4.94)から、円筒が厚肉であり( $H_1$ が小さい)、き裂個数( $N$ )が多いほど、またき裂が深い(式(4.94)右辺が大きい)ほど  $M$  の変化が大きくなることなどが読みとれる。

以上のことは「不静定構造物中にき裂が存在する場合には内力が低下する」ことに相当し、その程度に及ぼす各種因子の影響のメカニズムを端的に表すものとなっている。また、式(4.65)に示した事実とそれに基づく考察は、その結果として「破壊力学パラメータはき裂がない場合の内力から計算されるものよりも必ず小さくなる」ことを表すものであるが、ここでの考察が非線形弾性体に対しても全く同様に成り立つものであることは自明であろう。さらに、式(4.93)と式(4.94)を用いて線形弾性体とRamberg-Osgood型の各種パラメータの影響度を比較した場合、同じき裂深さであれば後者の方が式(4.94)の右辺が大きくなるためき裂を閉じる方向の  $M$  の変化が大きく、またこの  $M$  の変化は肉厚比やき裂個数の変化に対して敏感となる(すなわちこれらの変化に対する  $J$  積分値の変化が大きい)ことがわかる。一方、三次元表面き裂では同じ  $M$  に対するき裂部材の角変位(コンプライアンス)を表す式(4.94)右辺は当然二次元き裂よりもかなり小さなものとなるから、Ramberg-Osgood型の場合とは逆に一般にき裂の存在あるいは成長に伴う  $M$  の変化は小さくなり、結果的に  $K$  値あるいは  $J$  積分値に及ぼす肉厚比およびき裂個数の影響は二次元き裂の場合よりも小さくなるものと予想される。

このように、破壊強度に及ぼす各種パラメータの影響度のみならず二次元き裂と三次元き裂あるいは線形弾性体と非線形弾性体の類似点と相違点をマトリクス表記を利用して定性的にはあるが統一的に議論できるわけである。なお、この種の知見を健全性評価等に活用する考え方は具体的な解析結果の考察と交えて本論文第5章で展開されるので参照されたい。

#### 4.4.3 結果の整理と考察

本節では、前節と同様4.2節に示したマトリクス法破壊力学の具体的な適用例として、Ramberg-Osgood型構成式の材料からなる軸方向き裂付き円筒を例にとってその  $J$  積分値を求める具体的な適用手順を示した。ここで導かれた式(4.86)の利点および汎用性は前節4.3.4項で述べた線形弾性体の場合とほぼ同様であるから、ここでは本節で新たに明らかとなった非線形弾性体に固有の問題および統一的議論によって始めて明らかとなるものに焦点を絞って詳しい考察を行なう。

まず本手法の特徴を要約すれば以下になる。

- (1) き裂が複数でありまた材料が非線形弾性体であっても、導かれた連立方程式(式(4.86))のもつ数学的・物理的意味はなおも明確である。また、二次元-三次元き裂問題および線形-非線形弾性問題に対して全く同じ方程式を用いて統一的に議論できる。
- (2) 試験片レベルで蓄積されてきた破壊力学の実験的・解析的知見が有効に活用でき、構造全体に対する詳細な応力解析をせずとも個々のき裂の挙動をパラメトリックに知ることができる。
- (3) マトリクス表記を用いて陽な形で定式化されているため、計算機の利用が容易であるだけでなく、個々の因子の影響度の直観的考察が可能となる。特にここでは新たに、軸対称問題に対して導かれた特別な関係式を用いることにより非線形領域においても具体的な数値解析を行なうまでもなく多くの重要な知見が導かれることが示された。

以上の利点から、本手法はこれまでの非線形破壊力学における試験片レベルでの詳細な検証的研究と実構造物の強度評価の間にあったギャップを解消し、前者の知見を後者に的確に反映させるために必要となる要素を満足して余りあるものとなっているといえよう。具体的には、これまで実構造物に対しては有限要素法などによる数値計算が必要であったためか、三次元表面き裂に対してはもちろん非線形弾性体については二次元き裂であってもこれらに対する解析は基本的にケーススタディであり、構造物の肉厚や規模また特にき裂個数に対するパラメータスタディが行なわれておらずすなわちその破壊強度に関する体系的知見は得られていなかったわけである。ところが、本手法によればこの種の体系的解析とそれに基づく強度特性の解明が現実的に可能となるばかりか、さらにはその体系的解析に基づき実構造物の強度評価のために現在欠落している情報を明らかにし、今後必要となる試験片および実験レベルでの解析的あるいは実験的研究の方向を示すなどの発展性が期待できる。一方、上記(1)の利点によりこの種の具体的な解析結果を待たずともさらに以下のような考察が可能となる。

式(4.86)に基づく統一的議論の産物 すなわち、前項の後半にも示したように本手法を伸介とすることにより、二次元の線形弾性き裂に対する解析結果から得られる知見を非線形弾性問題および三次元き裂問題に具体的に反映できることが実用的にも大きな意味を持つのである。

つまり、本章でとりあげた軸方向き裂について見てみれば、複数のき裂が任意に配置される場合には各荷重に対して式(4.30)に示すような平板に対する解が必要となるわけであるが、本論文第3章にも示したようにせん断荷重( $F$ )に対する解は全面塑性解はもちろんのこと応力拡大係数であっても三次元き裂に対するものは全く整備されていないという現実の問題がある<sup>\*37</sup>。ところが、唯一解の整備された二次元弾性き裂に対する詳細な解析(本論文第5章5.3および5.4節参照)から得られる「構造健全性評価においては、き裂個数とその配置及びそれぞれの長さが任意の場合に対して  $K_{II}$  を無視しても良く、また実用上重要な浅いき裂に対してはき裂が軸対称に2個配置される場合の  $K_I$  を用いることにより同様に任意の場合に対して精度良い安全側の評価が可能となる」という知見を、式(4.86)を伸介とすることによってこの種の検討が困難である非線形弾性体や三次元き裂に対する強度特性の考察に反映させることができるわけである。

すなわち、線形弾性体とRamberg-Osgood型の違いは式(4.86)右辺における  $[\lambda_i^*]$  の項の有無のみであり、また三次元表面き裂の場合にはき裂部材の変形を表す  $([\lambda_i^*]\{R_i\} + [\lambda_i^*]\{R_i\} + \{L_i^*\})$  全体が小さくなるものであるから、上記「」の事実が程度の差はあれやはりRamberg-Osgood型のものや三次元き裂に対しても成立するのである。さらに、このことを前項での式(4.94)に基づく考察と合わせて考えれば、上記の混合モード状態としての取扱いの必要性の他にき裂個数の影響などについても(すなわち不静定構造物中に複数のき裂を考慮すること自体が)三次元き裂に対してはそれほど重要ではないが、逆に非線形弾性体においては極めて重要となることが理解できよう。ここで、三次元き裂に対する上記の結果は直感的にも十分に理解できるものであろうが、逆に非線形弾性体に対する結果は従来の非線形破壊力学による実構造物の強度評価においてほとんど認識されていなかったものであろう。特に、軸方向き裂付き円筒における「き裂2個の場合の方がき裂1個の場合よりもその破壊力学パラメータが大きくなる」という事実(本論文第5章参照)は、これまでの非線形破壊力学による健全性評価の結果が大きく危険側の評価をしていることを示唆するものであり、見過せない事実である。

軸対称き裂問題に対する関係式(式(4.94))の実用的重要性 詳細は本論文第5章に示されることになるが、混合モード状態が破壊強度に及ぼす影響はき裂個数の変化に伴うものに比べれば非常に小さ

<sup>\*37</sup> このことは、き裂同士の応力場が干渉する場合についても全く同じことが言える。



なものである。このことを上記の事実と合わせて考えれば、前項で取扱った軸対称き裂問題に対する解析が実用的にも極めて重要となることが理解できよう。具体的には、き裂1個の解(従来の強度評価結果)と軸対称き裂2個の解(現実が生じる最大のもの)との比較さらにはその実用のためにき裂2個の解を整備するという作業が重要となるが、このき裂2個の解は言うまでもなく式(4.94)から容易に計算できるものであり、さらに同式を用いてき裂深さや肉厚比などの影響特性に関する見通しの良い議論ができるという利点があることは前項にも示したとおりである。

さらに、ここで新たな利点が生じる。それは、筆者らが別報<sup>(2)(11)</sup>において提唱した荷重変位線図上での議論がこのとき再び可能となることである。この考え方は、現象の物理的意味の解明に極めて有効となることから本論文第2章における基礎事項の説明に主として用いてきたわけであるが、不静定次数の高い(すなわち  $F$ ,  $P$ ,  $M$  が同時に変化する)実際の現象に対しては系のコンプライアンスの特性が直線で表せるという利点が損なわれるため、実構造物の強度評価への適用性には限界があると考えていたものである。ところが、式(4.94)に示されるようにここで変化する変数は  $M$  のみであり、当然このとき系のコンプライアンスの特性は直線で表せるから再びこの強度評価手法が活用できることになるわけである。また同式からもわかるように、ここでは新たにき裂個数の影響が系のコンプライアンスの特性を表す直線の傾きに反映できることから、これが延性不安定破壊現象に及ぼす影響もまた視覚的に理解できるようになるなどの利点もあげられよう。

#### 4.5 その他の具体的問題への適用に関する考察

本章4.3および4.4節においては4.2節における一般論の具体的適用例として軸方向き裂付き円筒をとり上げ、その破壊力学パラメータを評価する手順を示したわけであるが、ここで行なわれた詳細な定式化とその物理的意味の説明および導かれた諸式を用いた強度特性の考察の手順は本問題の解決に限らずその他の対象に対する適用にあたっても大いに参考となると考えられる<sup>\*38</sup>。

ここでは、4.1節に示した一般論のその他の問題への適用性とその意義を考察すべく、前節までに得られた知見を加味することにより実構造物におけるき裂問題に関する総合的な議論を行ないたい。

##### 不静定次数によるき裂を有する不静定構造物の分類

まず、具体的問題を考える前に個々の現象の共通点と相違点を認識する上で便利な整理方法を提案したい。すなわち、この種の不静定問題はき裂断面に作用する等価集中力(内力)のうち変化するものの個数で大きく分類でき、以下ではこの個数を不静定次数と呼ぶことにする<sup>\*39</sup>。すなわち、まず本章に示した軸方向き裂付き円筒の不静定次数を見れば、これは一般にはせん断力・軸力・曲げモーメントの3次であるが、き裂が1個の場合にはこれからせん断力がなくなって2次となり、等長き裂が軸対称に配置される場合にはさらに軸力が変化しないので1次となることが確認できるであろう。一方、その他の構造物についても同様にその不静定次数を考えることができるが、例えば試験機の剛性を考慮した破壊靱性試験片あるいは構造物の剛性をバネで模式化した Tearing Instability の説明図などを見てもわかるように、この種のき裂問題は多くの場合不静定次数1次の現象として認識されていることに気付くであろう。

ここで、本論文の理解のために一つの問題点を指摘しておきたい。それは、実構造物中のき裂問題がすべてこの不静定次数1次の場合の常識をもとに判断されているのではないかということである。そしてその常識というのが「不静定構造物中にき裂が存在する場合にはき裂がないとして計算した場合よりも系全体としてのコンプライアンスが大きく(剛性が小さく)なり、そのため与えられた外力に対する内力および破壊力学パラメータが小さくなる」というメカニズムであり、これを基に行なわれている判断

<sup>\*38</sup> 本論文第7章では、外力として集中力が作用するリング状試験片に対して本章4.2節の一般論を適用することになるが、そこでは4.3および4.4節で行なった各種の考察が大いに活用され、単独の議論のみからは知り得なかった特性までもが新たに導かれることになる。

<sup>\*39</sup> 構造力学における不静定次数(あるいは不静定度)の正しい定義は2.2.3項で定義した不静定力の個数であって、ここでの定義とは厳密には異なるものである。ただし、一般に三次元問題では3個の集中力と3個の偶力(モーメント)の計6個が、二次元問題では2個の集中力と1個のモーメントの計3個が最大の不静定次数となるのは構造力学における定義によるものと全く同じである。参考までに構造力学における各不静定次数の例をあげれば、ラーメン構造のごとくその接合部分における角変位の拘束まで正しく考慮する場合にはその不静定次数がせん断力・軸力・曲げモーメントの3次であるが、不静定力作用点がトラスの接合部のような摩擦のないヒンジである場合にはその不静定次数はこれから曲げモーメントを除いた2次となる。なお、ラーメン構造においても構造全体の寸法に対して梁の断面寸法が十分に小さい時には、そのひずみエネルギーに及ぼすせん断力の影響が小さいことから軸力と曲げモーメントのみを考慮した解析が行なわれるが、この時の不静定次数はもちろん2次である。本文中におけるき裂問題の例との類似点と相違点に注意されたい。



というのが「き裂が大きいほどあるいはき裂が多いほど内力の低下が大きくなるから、強度評価においてはき裂が1個の場合の解が最も厳しいものとなる」というものである<sup>40)</sup>。

このことが不静定次数1次の場合に正しいことは明白であり、式(4.94)はこれを具体的に支持する結果となっている。ところが、例えば式(4.10)あるいは式(4.25)に示されるように不静定次数が高次の場合には、き裂の個数と配置およびそれぞれの大きさや形状の違いによって複数の不静定力が多様に変化し、これから算出される破壊力学パラメータは結果的に非常に複雑な変化をすることになる(例えば図5.19参照)。このことが強度評価上具体的に問題となる例として、軸方向き裂付き円筒で見られる $K_I$ (き裂1個) $<K_{II}$ (き裂2個)なる現象があげられる(図5.10および図5.11参照)。本件に関する詳細は第5章において具体的なデータを交えて検討されるのでここでは問題提起にとどめることとするが、この種の現象は閉じた系の不静定構造物において一般に見られるものであることがもっと広く認識されるべきであると言えよう。

#### 円筒の周方向き裂問題とマトリクス法破壊力学

次に、円筒型構造物において軸方向き裂と同様にその解析的研究の多く見られる周方向き裂を例にとって、マトリクス法破壊力学の適用性とその意義を考えてみる。まず、周方向き裂問題自体を考えてみれば、これが問題となるのは軸方向の曲げ荷重が作用する配管などであり(5.2.1項参照)、このような小型構造物中のき裂の安定・不安定挙動が通常は破壊力学パラメータを用いて評価することはできない(4.3.2項参照)ことを考えれば、压力容器など大型構造物で問題となる軸方向き裂に比べればその解析の重要度はかなり低いものであるといえよう。とはいえ、疲労によるき裂進展挙動などはやはり $K$ あるいは $J$ で記述できることから、その解析自体は必要な作業なのである。

そこで次に、本問題へのマトリクス法破壊力学の適用を考えれば、最も簡単なのが軸方向き裂付き円筒の場合と同様に片側き裂材の解を用いるものであろう。すなわちこの場合に対象となるき裂形状は同じ深さのき裂が円筒の周方向に同心円状にある場合に限られるが、これは配管の熱影響部で実際に良く見られるものであることから従来より多くの解析が行なわれている<sup>(13)~(17)</sup>。また、マトリクス法破壊力学と同様の簡易解法による解析として、コンプライアンス概念<sup>(4)</sup>の拡張としてのChengら<sup>(18)</sup>のものやShankiら<sup>(19)</sup>のLSMによる解析が見られるが、いずれも片側き裂材をその回転変形を拘束した形で引張るという問題を解くものであり、岡村の著書(文献<sup>(4)</sup>のP.118)で論じられているものの域を出ていない。もちろんマトリクス法破壊力学を適用しても導かれる結果は同じであるが<sup>41)</sup>、この解析対

<sup>40)</sup> 複数のき裂に対する解析はき裂の増加によってどの程度破壊力学パラメータが低下し、安全裕度が増すのかという観点からの研究である場合がほとんどである。このことは、静定構造において研究されているき裂同士の影響場の干渉による応力拡大係数の低下<sup>(12)</sup>と全く同じ考え方で実構造物中の複数のき裂問題の解析結果を整理しようという研究が多いことからも伺える(本論文第5章5.2.2項参照)。

なお、不静定構造物中においてき裂同士の応力場が干渉する場合には、まず式(4.30)に示される有限幅補正係数が小さくなるのでその積分結果として得られるコンプライアンス(式(4.29)参照)もまた小さくなる。このとき、例えば式(4.63)から計算される内力(ここでは $M$ )は干渉がない場合のものよりも大きくなるが、同時に有限幅補正係数が小さくなっているわけであるから結局式(4.65)からその影響度を予測することはできないことになる。なお、本論文においてこのことをそれほど重視していないのは、本論文第5章で示されるように強度評価においてはこの種のき裂の干渉を考慮すべき領域での解が事実上重要ではないことが明らかとなっているためである(例えば図5.19参照)。

<sup>41)</sup> ただし、本手法に限らずこの種の簡易解析手法の適用は厚肉円筒に対しては曲率の影響から誤差が大きくなるため、薄肉円筒に限られる。

象については諸式の物理的意味が明確でありかつ計算が容易であるということ以外に本手法の利点が表に現れない。なぜならば、この問題の不静定次数はモーメントのみの1次であって、本問題においてき裂が複数ある場合にはき裂が1個の場合よりも必ず内力が低下するため、結局強度評価で問題となるのはき裂が1個の場合の解析となるためである。すなわち、軸方向き裂付き円筒で見られた興味深い現象はここでは期待できないのである。

一方、LBB問題との関連からより現実的なき裂形状として周方向の表面き裂に対する解析も行なわれるようになってきている<sup>(20)(21)</sup>。この場合にもLSMと同様の工夫をすれば片側き裂材の解を用いて解析が可能となるであろうが、本手法の拡張という立場からは上記のような解析結果をき裂を有する配管要素と考えることによって本章で示してきたマトリクス法破壊力学の利点が活用できると考えられる。そしてこのときには複雑な配管系が前述した閉じた不静定構造系となるから、ここで複数のき裂を考慮することにより軸方向き裂付き円筒の場合と全く同様に新たな強度特性を明らかにできる可能性があるといえよう。ところが、き裂を有する配管要素に対する解析は三次元表面き裂の場合と全く同様で現段階では解析のケースが非常に限られているため、このアイデアを実現するにはまだ時間がかかりそうである。

#### 4.6 結 言

本章では、まず4.2節においてエネルギー原理に基づく不静定構造物の解析手順をき裂問題に拡張し、実構造物中のき裂の破壊力学パラメータを求める方法論として示し、これらを総称してマトリクス法破壊力学と命名した。具体的には、まずコンプライアンスマトリクスを仲介とした古典構造力学における鮮やかなマトリクス演算の手順を線形弾性き裂問題に拡張適用し、複数のき裂を有する不静定構造物の内力を求めるための連立方程式(式(4.15))を導いた(4.2.1項)。またここでは、導かれた連立方程式およびその各項の物理的意味を詳細に検討し、き裂がない場合の不静定力を本手順に導入する利点などを明らかにしたが、特に次に4.2.2項で示した非線形弾性体に対するマトリクス法破壊力学の定式化はこのときのき裂部材に関する項(式(4.12))に対する考察に基づいて発想されたものである。

さらにここでは、非線形領域における本手法の実用のために線形弾性体における式(4.15)の利点を非線形弾性体に対する式(4.20)の中に取り入れるべく、Ramberg-Osgood型の構成式を仮定したうえで現実的な考察に基づいて式(4.25)を導いた(4.2.3項)。すなわち、4.2節における成果のすべてが同式に集約されていると言っても過言ではない。

4.3節以降は4.2節に示した一般論の具体的な問題への適用例であり、ここでは複数の軸方向き裂を有する円筒を対象として線形弾性体(4.2節)およびRamberg-Osgood型構成式からなる非線形弾性体(4.3節)に対してそれぞれ個々のき裂の破壊力学パラメータを求める手順を示した。ここでの主要な結果をまとめると以下ようになる。



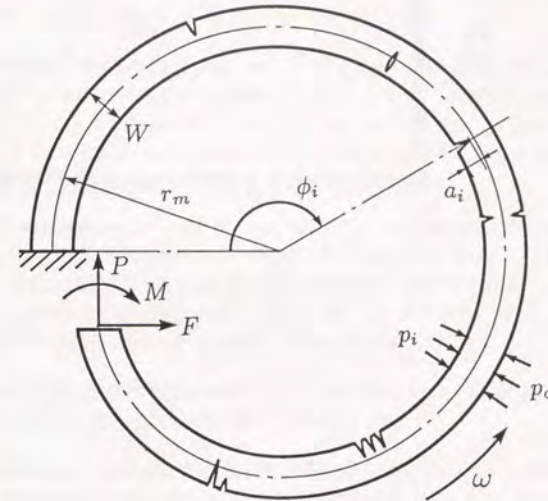
まず、エネルギー停留原理から直接導かれた不静定力を求める連立方程式(式(4.40)および式(4.86))に対して次のことが言える。

- (1) き裂が複数でありまた材料が非線形弾性体であっても、導かれた連立方程式のもつ数学的・物理的意味はなおも明確である。また、二次元～三次元き裂問題および線形～非線形弾性問題に対して全く同じ方程式を用いて統一的に議論できることから、パラメトリックな解析が困難である三次元問題あるいは非線形問題に対して二次元弾性問題に対する詳細なパラメータスタディから得られる知見を反映させることが可能となる。
- (2)  $[A]$  は構造物の剛性(あるいはコンプライアンス)を、 $\{R_0\}$  は外荷重の性質を、さらに  $\{\partial\Omega_i^*/\partial R_i\}$  は個々のき裂の大きさを反映する項であることから、個々の因子の影響度の直観的考察が可能となる。特に、 $\{\partial\Omega_i^*/\partial R_i\}$  の項の評価および評価された  $\{R_i\}$  から求める破壊力学パラメータを破壊靱性値と比較する際に、試験片レベルで(例えば片側き裂材に対して)蓄積されてきた破壊力学の解析的・実験的知見が有効に活用できる。具体的には、構造全体に対する詳細解析が必要なくなるだけでなく、破壊力学パラメータの有効性や破壊靱性値の荷重様式依存性なども考慮した繊細な強度評価が現実的に可能となり、構造健全性評価における極めて強力なツールとなり得るものと考えられる。

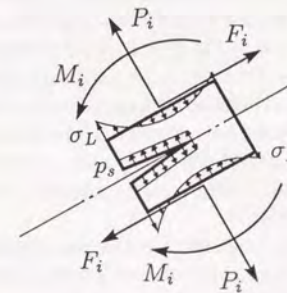
一方、そのマトリクス表記を用いた簡便な定式化の利点として、次のものがあげられる。

- (3) 計算機の利用が容易であるから、上記(2)と合わせることで数値解析過程の途中経過の出力から解析の妥当性のチェックや現象の推移のメカニズムの考察が可能となる。さらに、個々の解析過程で必ず出力されるき裂断面に作用する内力  $\{R_i\}$  を用いることにより、これまで実構造物に対してはほとんど検討されていなかった  $J$  積分の有効条件を容易に知ることができるなどの利点もあり、今後さらに詳細な解析を行なうべき対象のみならず実機の正確な強度評価に必要な実験的研究の方向を明らかにするなどの発展性も期待できる。
- (4) き裂配置の対称性などを用いることによって簡単な考察から連立方程式の次数が下がるから(式(4.63)および式(4.94))、これを用いることにより具体的な解析を行なうまでもなく各種パラメータが破壊現象に及ぼす影響などを議論することが可能となる。
- (5) また、4.3.3項で導いた諸量の漸近特性は上記(4)で得られる知見と同様解析結果の妥当性のチェックおよび結果の効果的な整理に有用なものとなるが、ここで明らかにされた  $a/W \rightarrow 1$  における特性(式(4.77))はクラックアレストとの関連もあってこれ自体興味深い特性であるといえよう。

もちろん、本論文は有限要素法にとつかわる万能的数値解析手法として本手法の価値を主張するものではない。つまり、本手法はあくまで簡易解析手法であって当然その評価精度は常に有限要素法などによって検証してやる必要があり、また上記(3)あるいは(5)に示したように本手法で明らかとなった構造健全性評価で問題とすべき対象に対する詳細解析はやはり有限要素法によらざるを得ず、言ってみれば二人三脚を理想とするものである。すなわち本手法は、ひとたび精度が検証されれば、その類似のケース(例えば構造形状が同一でき裂個数のみが変化するような場合)に対しては有限要素法などよりはるかに容易にパラメータスタディが行なえ、さらにはマトリクス表記に基づく各パラメータの影響度の考察が強度評価特性の本質的議論に有効であることを主張するものであることを理解頂きたい。



(a) き裂配置と静定化の概念図



(b)  $i$  番目のき裂部材と作用する内力

図 4.1 軸方向き裂付き円筒の解析モデル