研　究　速　報

研究速報

形状記憶合金はりの超弾性挙動の有限要素解析
—その1：引張挙動と圧縮挙動が対称の場合—
Finite Element Analysis of Superlastic Behavior of Shape Memory Alloy Beam
—Part 1: Symmetric tension and compression behavior—

都井　裕*・李　宗賓*・田谷　稔**
Yutaka TOI, Jong-Bin LEE and Minoru TAYA

1. 序

ニッケル・チタン系合金などに代表される形状記憶合金は，負荷・除荷後の残留ひずみが温度上昇により消失して元の形状に戻る形状記憶効果（shape memory effect）と，一定温度における負荷・除荷のヒステリシスにより大ひずみが回復して元の形状に戻る超弾性効果（superelastic effect）を有する[1]．これらの効果を利用して，形状記憶合金は工業機器，家電，医療，スポーツ，装身具など様々な分野で利用されている．また近年では，アクチュエータとしての高機能化，多機能化を念頭に，鉄系，ニッケル・マンガン・ガリウム系などの強磁性体形状記憶合金の開発が進められている．

多くの可能性を有する形状記憶合金素子の設計・開発の効率化・合理化のためには，計算による力学的挙動予測が不可欠である．本研究では，Brinsonにより引張挙動に対して提案された形状記憶合金の一次元構成方程式[1]を，圧縮挙動を含むように拡張し，Timoshenkoはり要素による増分形有限要素解析の定式化を行う．この方法により形状記憶合金はりの超弾性挙動の数値解析を行ない，はりの曲げ変形挙動を把握するとともに，AuricchioとTaylorによる実験結果[2]と比較し，計算法を検証する．（その1）では，Brinsonのモデルをそのまま用いた場合の定式化と計算結果を示す．

2. 形状記憶合金の構成方程式

応力および温度に依存したマルテンサイト変態，オーステナイト変態などを伴う，形状記憶合金の一次元応力（σ）・ひずみ（ε）関係は次式により記述される．

$$\sigma-\sigma_0=E(\varepsilon-\varepsilon_0)+\Omega(\xi_S-\xi_{S0})+\theta(T-T_0) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，Eは縦弾性係数，Ωは変態テンソル，ξ_Sは応力誘起によるマルテンサイト体積率，θは熱弾性係数，Tは温度であり，下添字0は初期値を意味する．最大残留ひずみをε_Lとすると，Ωは以下のように表される．

$$\Omega=-\varepsilon_L E \quad \cdots\cdots(2)$$

縦弾性係数Eはマルテンサイト体積率ξの関数として次のように表される．

$$E=E_a+\xi(E_m-E_a) \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに，E_mはマルテンサイト相，E_aはオーステナイト相の縦弾性係数である．温度誘起によるマルテンサイト体積率をξ_tとすると，全マルテンサイト体積率ξは

$$\xi=\xi_S+\xi_t \quad \cdots\cdots(4)$$

と表わされる．ξ，ξ_Sおよびξ_tは温度Tと応力σの関数として，各変態過程において以下のように表される．

非双晶マルテンサイト相への変態過程

$T>M_S$および$\sigma_f^{cr}+C_M(T-M_S)<|\sigma|<\sigma_f^{cr}+C_M(T-M_S)$の場合：

$$\xi_S=\frac{1-\xi_{S0}}{2}\cos\left\{\frac{\pi}{\sigma_S^{cr}-\sigma_f^{cr}}\times[|\sigma|-\sigma_f^{cr}-C_M(T-M_S)]\right\}+\frac{1+\xi_{S0}}{2} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\xi_T=\xi_{T0}-\frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{S0}}(\xi_S-\xi_{S0}) \quad \cdots\cdots(6)$$

$T<M_S$および$\sigma_S^{cr}<|\sigma|<\sigma_S^{cr}$の場合：

$$\xi_S=\frac{1-\xi_{S0}}{2}\cos\left[\frac{\pi}{\sigma_S^{cr}-\sigma_f^{cr}}(|\sigma|-\sigma_f^{cr})\right]+\frac{1+\xi_{S0}}{2} \quad \cdots\cdots(7)$$

*東京大学生産技術研究所　人間・社会大部門
**ワシントン大学　知的材料システム研究センター

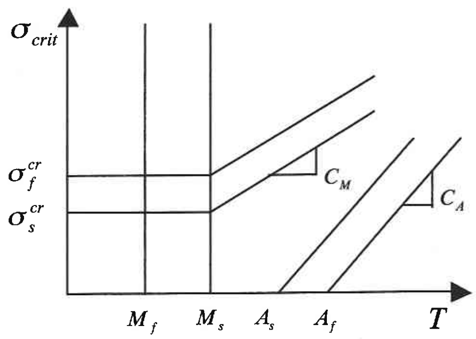

Fig. 1　Critical stresses for transformation as functions of temperature

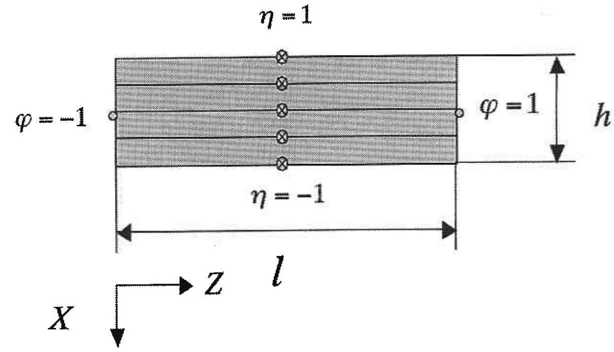

Fig. 2　Timoshenko beam element with layered approach

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{S0}}(\xi_S - \xi_{S0}) + \Delta_{T\xi} \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに，$M_f < T < M_S$ および $T < T_0$ の時は

$$\Delta_{T\xi} = \frac{1-\xi_{T0}}{2}\{\cos[a_M(T-M_f)]+1\} \quad \cdots\cdots (9)$$

その他の時は

$$\Delta_{T\xi} = 0 \quad \cdots\cdots (10)$$

オーステナイト相への変態過程

$T > A_S$ および $C_A\ (T-A_f) < |\sigma| < C_A\ (T-A_S)$ の場合：

$$\xi = \frac{\xi_0}{2}\{\cos[a_A(T-A_S-\frac{|\sigma|}{C_A})]+1\} \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\xi_S = \xi_{S0} - \frac{\xi_{S0}}{\xi_0}(\xi_0 - \xi) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{\xi_0}(\xi_0 - \xi) \quad \cdots\cdots (13)$$

ここに，C_M と C_A は変態臨界応力と温度の関係図における傾き，M_f と M_S はマルテンサイト変態終了および開始温度，A_f と A_S はオーステナイト変態終了および開始温度，σ_f^{cr} と σ_S^{cr} はマルテンサイト変態終了および開始臨界応力である（図1を参照）．また，a_M と a_A は次のように定義される．

$$a_M = \frac{\pi}{M_S - M_f},\quad a_A = \frac{\pi}{A_f - A_S} \quad \cdots\cdots (14)$$

3. 有限要素定式化

有限要素として，図2に示すような層分割法によるTimoshenkoはり要素を用いる．

本解析では，圧縮変形挙動は引張変形挙動と対称的，せん断変形挙動は線形弾性的（すなわち，せん断弾性係数 G は一定）と仮定する．Brinsonの構成方程式に基づいて接線剛性法による有限要素定式化を行なうと，次式のような増分形の要素剛性方程式を得る．

$$\{F^r\} + \{\Delta F\} + \int_V [B]^T [D_t] \{\Delta\varepsilon_\theta\}\, dV = [K_t]\{\Delta u\} \quad \cdots\cdots (15)$$

ここに，

$$[K_t] = \int_V [B]^T [D_t][B]\, dV \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\{\Delta\varepsilon_\theta\} = \begin{Bmatrix} -\alpha_t \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (17)$$

式中，$\{F^r\}$ と $\{\Delta F\}$ はそれぞれ残差力ベクトルと外力増分ベクトル，$\{\Delta u\}$ は微小変形時の節点変位ベクトル，$[K_t]$ は剛性マトリックス，$\{\Delta\varepsilon_\theta\}$ は熱ひずみ増分である．$[B]$ はひずみ・節点変位マトリックス，$[D_t]$ は応力・ひずみマトリックス，α_t は熱膨張係数 α の関数であり，それぞれ以下に示すように表わされる．

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h\eta}{2l} & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{h\eta}{2l} & \frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1-\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{l} & -\frac{1+\varphi}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots (18)$$

非双晶マルテンサイト相への変態過程

$T > M_S$ および $\sigma_f^{cr} + C_M\ (T-M_S) < |\sigma| < \sigma_f^{cr}$ の場合：

$$[D_t] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-E\varepsilon_L n} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{matrix} \sigma \geq 0 \text{ の場合} & \alpha_t = \alpha - \varepsilon_L n C_M \\ \sigma \leq 0 \text{ の場合} & \alpha_t = \alpha + \varepsilon_L n C_M \end{matrix}$$

$$\cdots\cdots (19)$$

ここに，

$$n = \frac{1-\xi_{S0}}{2}\sin\{\frac{\pi}{\sigma_S^{cr}-\sigma_f^{cr}} \times [|\sigma| - \sigma_f^{cr} - C_M(T-M_S)]\}\frac{\pi}{\sigma_S^{cr}-\sigma_f^{cr}} \quad \cdots\cdots (20)$$

$T < M_S$ および $\sigma_S^{cr} < \sigma < \sigma_f^{cr}$ の場合：

$$[D_t] = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-E\varepsilon_L n} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad \alpha_t = \alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

ここに，

$$n = \frac{1-\xi_{S0}}{2} \sin\left[\frac{\pi}{\alpha_S^{cr} - \alpha_f^{cr}} \left(|\sigma| - \sigma_f^{cr}\right)\right] \frac{1-\xi_{S0}}{2} \quad \cdots\cdots (22)$$

オーステナイト相への変態過程

$T > A_S$ および $C_A\ (T-A_f) < \sigma < C_A\ (T-A_S)$ の場合：

$$[D_t] = \begin{bmatrix} \dfrac{C_A E}{C_A + E\varepsilon_L n} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{matrix} \sigma \geq 0 \text{ の場合 } \alpha_t = \alpha + \varepsilon_L n \\ \sigma \leq 0 \text{ の場合 } \alpha_t = \alpha - \varepsilon_L n \end{matrix} \quad \cdots\cdots (23)$$

ここに，

$$n = \frac{\xi_{S0}}{2} \sin\left[a_A \left(T - A_S - \frac{|\sigma|}{C_A}\right)\right] a_A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

その他の場合

$$[D_t] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad \alpha_t = \alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

4. 有限要素解析

4.1 解析条件および材料常数

本章の解析におけるすべての材料定数を表1に示す．一定温度下において，図3に示すような Nitinol 合金（$Ni_{55}Ti$）製の片持はりの引張と曲げ変形挙動を解析した．引張り解析における温度条件は20℃，40℃，60℃，曲げ解析の温度条件は60℃である．はり全長を5要素分割，深さ方向は21層分割とした．要素番号は固定端から1，2，3，4，5，層番号は下面から1，2，3，…，20，21とした．

4.2 有限要素解析結果

各温度における引張解析結果を図4，5，6に示す．荷重と変位は，はりの先端における値である．オーステナイト変態開始温度より低いT=20℃の場合は，図4に示すように除荷後に大きな残留ひずみが残り，オーステナイト変態終了温度より高いT=60℃の場合は，図6に示すように完全にオーステナイト相に戻り，残留ひずみが消滅する．すなわち超弾性挙動を示す．オーステナイト変態開始温度と終了温度の間に位置する．T=40℃の場合は，図5に示すようにマルテンサイト相とオーステナイト相が混在する．

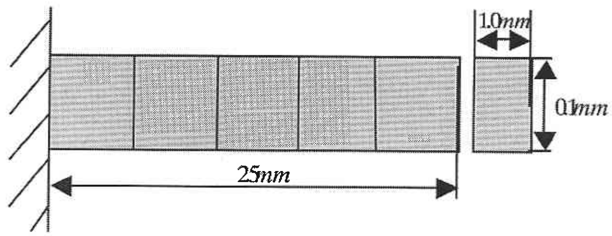

Fig. 3　Nitinol alloy (Ni55 Ti) beam

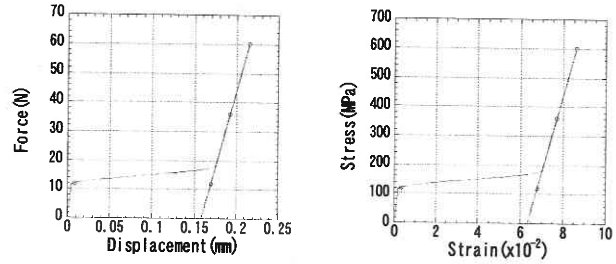

Fig. 4　Results of tensile analysis (T = 20 ºC)

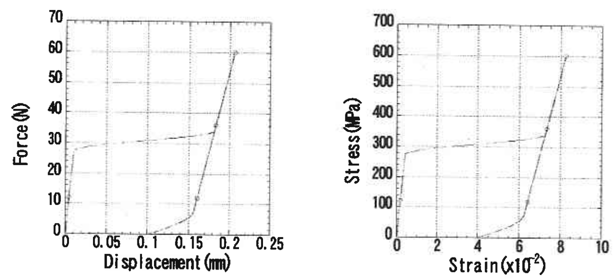

Fig. 5　Results of tensile analysis (T = 40 ºC)

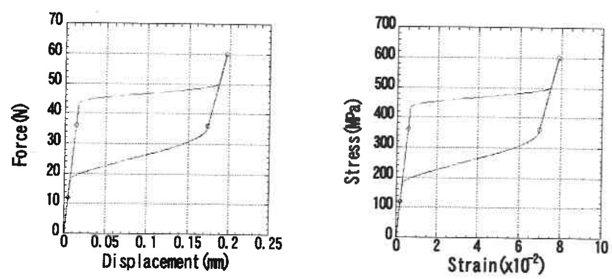

Fig. 6　Results of tensile analysis (T = 60 ºC)

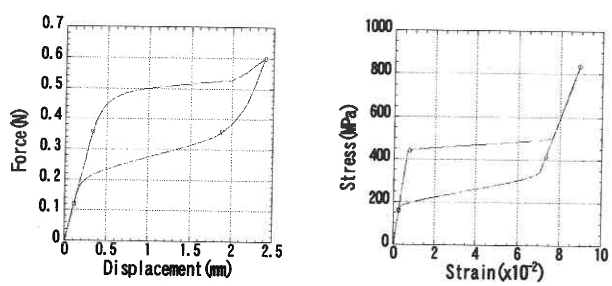

Fig. 7　Results of bending analysis (T = 60 ºC)

Table 1　Material constants of Nitinol alloy

Modulus	Transformation temperatures	Transformation constants	Maximum residual strain
$E_a=67\times10^3$MPa	$M_f=9$℃	$C_M=8$ MPa/℃	$\varepsilon_L=0.067$
$E_m=26.3\times10^3$Mpa	$M_s=18.4$℃	$C_A=13.8$ MPa/℃	
$\theta=0.55$MPa/℃	$A_s=34.5$℃	$\sigma_s^{cr}=100$ MPa	
	$A_f=49$℃	$\sigma_f^{cr}=170$ MPa	

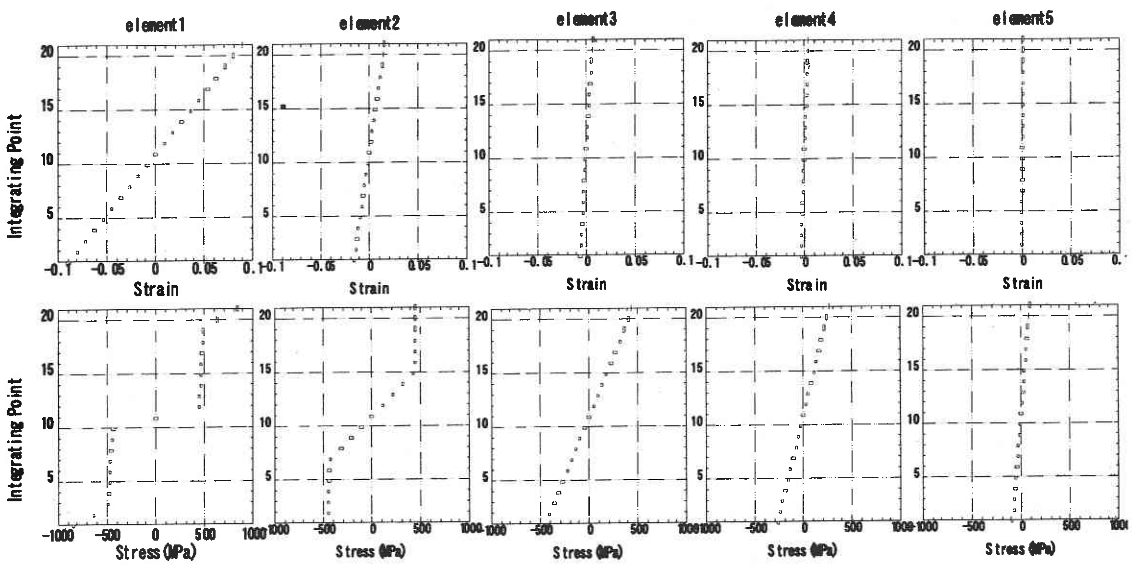

Fig. 8　Bending stress and strain distribution at the maximum load（$T=60$℃）

図７は曲げ解析結果における荷重・たわみ曲線と応力・ひずみ曲線である．応力・ひずみ曲線は図６の引張解析結果と一致する．図８は，最大荷重時の各要素内における応力およびひずみ分布である．先端に近い要素３，４，５は未だ低応力下にあるためマルテンサイト変態が起こらないが，要素１の上下縁ではすでにマルテンサイト変態が終了している．要素２の上下縁は，マルテンサイト変態過程にある．

5. 結　　論

本報では，形状記憶合金に対するBrinsonの１次元構成方程式に基づいて，層分割Timoshenkoはり要素による増分法有限要素定式化を示し，一定温度下における片持はりの引張および曲げ解析に適用した．引張解析においては温度による挙動の違いが，曲げ解析においては全体変形と応力およびひずみ分布が良好にシミュレートされた．

（2001年３月８日受理）

参　考　文　献

1) L.C. Brinson: One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloy: Thermomechanical derivation with Non-Constant material Functions and Redefined Martensite Internal Variable, J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., Vol.4, April (1993), pp. 229–242.
2) F. Auricchio and R.L. Taylor: Shape-Memory Alloys-modeling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 143, (1997), pp. 175–194.