

形状記憶合金はりの超弾性挙動の有限要素解析

—その2：引張挙動と圧縮挙動が非対称な場合—

Finite Element Analysis of Superelastic Behavior of Shape Memory Alloy Beam

—Part 2: Asymmetric tension and compression behavior—

都井 裕*・李 宗 儼*・田 谷 稔**

Yutaka TOI, Jong-Bin LEE and Minoru TAYA

1. 序

形状記憶合金はりの超弾性挙動の有限要素解析に関する前報では、Brinsonの構成方程式¹⁾に基づいて、層分割法 Timoshenko はり要素による増分形有限要素解析の定式化を行ない、片持はりの引張および曲げ解析に適用した。圧縮変形挙動は引張変形挙動と対称的と仮定した。

しかしながら一般には、圧縮変形挙動は引張変形挙動と完全に対称的ではない。そこで本報では、変態臨界条件の判定において、静水圧の影響を含む Drucker-Prager 型の相当応力を用いることにより、形状記憶合金に対する Brinson の一次元構成方程式において引張挙動と圧縮挙動の相違を考慮する。この拡張された構成方程式を用いて、Nitinol 合金 (Ni₅₅Ti) 製の片持はりの曲げ挙動および Ni-Ti-10%Cu 合金製の両端支持はりの4点曲げ挙動を解析し、後者については Auriccho と Taylor による実験結果²⁾と比較することにより、解析法を検証する。

2. 構成方程式

Brinsonが提案したマルテンサイト変態および逆変態過程における形状記憶合金の構成方程式は

$$\sigma - \sigma_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Omega(\xi_s - \xi_{s0}) + \theta(T - T_0) \quad \cdots \cdots (1)$$

のように記述される¹⁾。ここで、 E は縦弾性係数、 Ω は変態テンソル、 ξ_s は応力誘起によるマルテンサイト体積率、 θ は熱弾性係数である。 Ω と E はそれぞれ以下のように表される。

$$\Omega = -\varepsilon_L E \quad \cdots \cdots (2)$$

$$E = E_a + \xi(E_m - E_a) \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに、 ε_L は最大残留ひずみ、 E_m はマルテンサイト相、

E_a はオーステナイト相の縦弾性係数である。温度誘起によるマルテンサイト体積率を ξ_i とすると、全マルテンサイト体積率 ξ は

$$\xi = \xi_s + \xi_i \quad \cdots \cdots (4)$$

のように表される。 ξ 、 ξ_s 、 ξ_i は温度 T と応力 σ の関数である。

ここで、 ξ 、 ξ_s 、 ξ_i の発展方程式を判別するための相当応力として、Misesの相当応力 σ_e の代わりに次式を用いることにする。

$$f = \sigma_e + 3\beta p \quad \cdots \cdots (5)$$

ここに、 β は材料定数、 p は静水圧であり、

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \cdots \cdots (6)$$

と表わされる。形状記憶合金はりの超弾性変形挙動は垂直応力のみ支配されると仮定すると、層分割法 Timoshenko はり要素においては、相当応力として次式が用いられる。

$$f = |\sigma| + \beta \sigma \quad \cdots \cdots (7)$$

ξ 、 ξ_s 、 ξ_i の発展方程式は、以下のように与えられる。

非双晶マルテンサイト相への変態過程

$T > M_s$ および $\sigma_s^{\sigma} (1 + \beta) + C_M (1 + \beta) (T - M_s) < f < \sigma_f^{\sigma} \times (1 + \beta) + C_M (1 + \beta) (T - M_s)$ の場合：

$$\xi_s = \frac{1 - \xi_{s0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{\sigma}(1 + \beta) - \sigma_f^{\sigma}(1 + \beta)} [f - \sigma_f^{\sigma} \times (1 + \beta) - C_M (1 + \beta) (T - M_s)] \right\} + \frac{1 + \xi_{s0}}{2} \quad \cdots \cdots (8)$$

$$\xi_r = \xi_{r0} - \frac{\xi_{r0}}{1 - \xi_{s0}} (\xi - \xi_{s0}) \quad \cdots \cdots (9)$$

*東京大学生産技術研究所 人間・社会大部門

**ワシントン大学 知的材料システム研究センター

$T > M_s$ および $\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) < f < \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)$ の場合:

$$\xi_s = \frac{1-\xi_{s0}}{2} \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)} \right] \times (f - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)) + \frac{1+\xi_{s0}}{2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{s0}} (\xi_s - \xi_{s0}) + \Delta_{T\xi} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに,

$M_f < T < M_s$ および $T < T_0$ の時

$$\Delta_{T\xi} = \frac{1-\xi_{T0}}{2} \{ \cos [a_M(T - M_f)] + 1 \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

その他の時は

$$\Delta_{T\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

オーステナイト相への変態過程

$T > A_s$ として $C_A(1+\beta)(T - A_f) < f < C_A(1+\beta)(T - A_s)$ の場合:

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_s - \frac{f}{C_A(1+\beta)} \right) \right] + 1 \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\xi_s = \xi_{s0} - \frac{\xi_{s0}}{\xi_0} (\xi_0 - \xi) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{\xi_0} (\xi_0 - \xi) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに, C_M と C_A は変態臨界応力と温度の関係における傾き, M_f と M_s はマルテンサイト変態終了および開始温度, A_f と A_s はオーステナイト変態終了および開始温度, σ_f^{σ} と σ_s^{σ} はマルテンサイト変態終了および開始臨界応力である. a_M と a_A は次式のように定義される.

$$a_M = \frac{\pi}{M_s - M_f}, \quad a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで,

$$\sigma \geq 0 \text{ の場合 } m = 1 + \beta$$

$$\sigma \leq 0 \text{ の場合 } m = 1 - \beta$$

とすると, 接線剛性法による有限要素解析に用いる応力・ひずみマトリックス $[D_i]$ は, 以下のように表現される.

非双晶マルテンサイト相への変態過程

$T > M_s$ として $\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) + C_M(1+\beta)(T - M_s) < f < \sigma_f^{\sigma} \times (1+\beta) + C_M(1+\beta)(T - M_s)$ の場合:

$$[D_i] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-E\varepsilon_Lnm} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

$$\sigma \geq 0 \text{ の場合 } \alpha_i = \alpha - \varepsilon_L n C_M (1 + \beta) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\sigma \leq 0 \text{ の場合 } \alpha_i = \alpha + \varepsilon_L n C_M (1 + \beta)$$

ここに,

$$n = \frac{1-\xi_{s0}}{2} \sin \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)} \right\} \times [f - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta) - C_M(1+\beta)(T - M_s)] \times \frac{\pi}{\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$T < M_s$ として $\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) < f < \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)$ の場合:

$$[D_i] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-E\varepsilon_Lnm} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \alpha \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに,

$$n = \frac{1-\xi_{s0}}{2} \sin \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{\sigma}(1+\beta) - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)} \right\} \times [f - \sigma_f^{\sigma}(1+\beta)] \frac{1-\xi_{s0}}{2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

オーステナイト相への変態過程

$T > A_s$ として $C_A(1+\beta)(T - A_f) < f < C_A(1+\beta)(T - A_s)$ の場合:

$$[D_i] = \begin{bmatrix} \frac{C_A(1+\beta)E}{C_A(1+\beta) + E\varepsilon_Lnm} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma \geq 0 \text{ の場合 } \alpha_i = \alpha + \varepsilon_L n \\ \sigma \leq 0 \text{ の場合 } \alpha_i = \alpha - \varepsilon_L n \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに,

$$n = \frac{\xi_{s0}}{2} \sin \left[a_A \left(T - A_s - \frac{f}{C_A(1+\beta)} \right) \right] a_A \quad \dots\dots\dots (23)$$

その他の場合は

$$[D_i] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \alpha \quad \dots\dots\dots (24)$$

3. 有限要素解析

3.1 解析条件および材料定数

図1に示す Nitinol 合金 (Ni₅₅Ti) 製の片持はりの材料定数を表1に示す. 温度条件は $T = 60^\circ\text{C}$ である. 要素数, 層分割数はそれぞれ5要素, 21層分割とした.

研究速報

図2は、4点曲げを受けるNi-Ti-10%Cu合金製の円形断面はりである。材料定数は実験による応力・ひずみ線図から表1のように同定した。要素数等は6要素(図中に要素番号を示す。), 21層分割である。

3.2 有限要素解析結果

図3は引張と圧縮挙動が対称的な場合、図4は非対称の場合($\beta = 0.15$)の, Nitinol合金(Ni_{55}Ti)はりにおける曲げ応力・ひずみ曲線である。図4の圧縮側においては、図3よりも高い応力レベルで超弾性挙動が起こっていることがわかる。

Ni-Ti-10%Cu合金はりの4点曲げ解析においては、Taylorらによる引張実験結果²⁾から表2に示すように材料定数を決定した。引張と圧縮挙動が非対称な場合は、 $\beta = 0.15$ を仮定している²⁾。決定した応力・ひずみ曲線と実験結果を図5に示す。この材料定数を用いてNi-Ti-10%Cu合金はりの4点曲げ挙動を解析した結果の荷重・変位曲線が図6である。本解析結果はTaylorらの実験結果²⁾と良好に一致していることが確認できる。図7は、Ni-Ti-10%Cu合金はりの4点曲げ解析において、引張挙動と圧縮挙動を

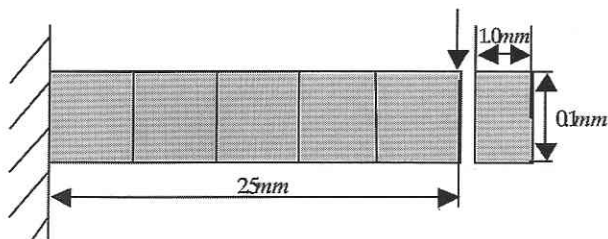
Fig. 1 Nitinol alloy (Ni_{55}Ti) beam

Table 1 Material constants of Nitinol alloy

Modulus	Transformation temperatures	Transformation constants	Maximum residual strain
$E_a = 67 \times 10^3 \text{ MPa}$ $E_s = 26.3 \times 10^3 \text{ MPa}$ $\theta = 0.55 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $\beta = 0.15$	$M_f = 9^\circ\text{C}$ $M_s = 18.4^\circ\text{C}$ $A_s = 34.5^\circ\text{C}$ $A_f = 49^\circ\text{C}$	$C_u = 8 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $C_s = 13.8 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $\sigma_s^{cr} = 100 \text{ MPa}$ $\sigma_f^{cr} = 170 \text{ MPa}$	$\varepsilon_L = 0.067$

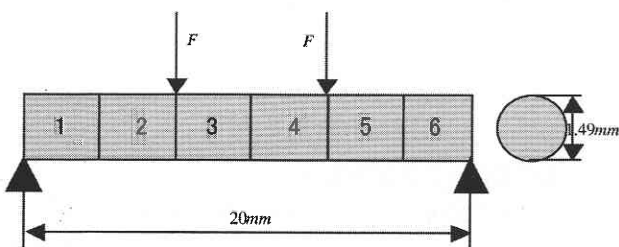
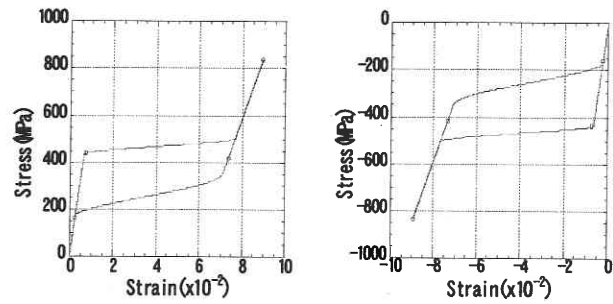
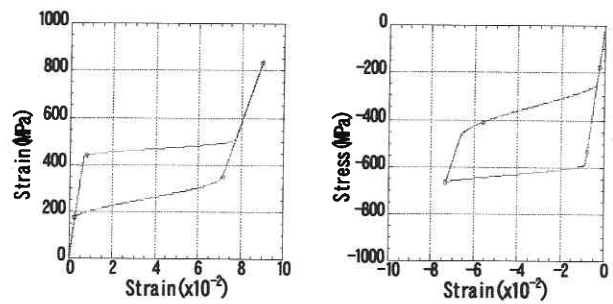


Fig. 2 Ni-Ti-10%Cu alloy beam

対称と仮定した場合と非対称と仮定した場合の荷重・変位曲線の比較である。両者ともに引張試験結果と合うように構成方程式におけるパラメータを決定しているが、引張と圧縮挙動が対称的な場合は過大な変位が計算されている。図8は、最大荷重時における各要素内の応力分布とひずみ



(a) Clamped, lower end (b) Clamped, upper end

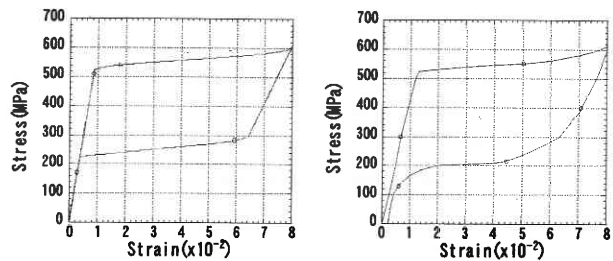
Fig. 3 Stress-strain curve in a Nitinol alloy beam ($\beta = 0$)

(a) Present result (b) Taylor's experiment

Fig. 4 Stress-strain curve in a Nitinol alloy beam ($\beta = 0.15$)

Table 2 Material constants of Ni-Ti-10%Cu alloy

Modulus	Transformation temperatures	Transformation constants	Maximum residual strain
$E_a = 60 \times 10^3 \text{ MPa}$ $E_s = 20 \times 10^3 \text{ MPa}$ $\theta = 0.55 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $\beta = 0.15$	$M_f = T_0 - 72.5^\circ\text{C}$ $M_s = T_0 - 52.5^\circ\text{C}$ $A_s = T_0 - 21.7^\circ\text{C}$ $A_f = T_0 - 14.5^\circ\text{C}$	$C_u = 8 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $C_s = 13.8 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$ $\sigma_s^{cr} = 100 \text{ MPa}$ $\sigma_f^{cr} = 180 \text{ MPa}$	$\varepsilon_L = 0.067$



(a) Clamped, lower end (b) Clamped, upper end

Fig. 5 Stress-strain curve for a Ni-Ti-10%Cu alloy beam ($\beta = 0.15$)

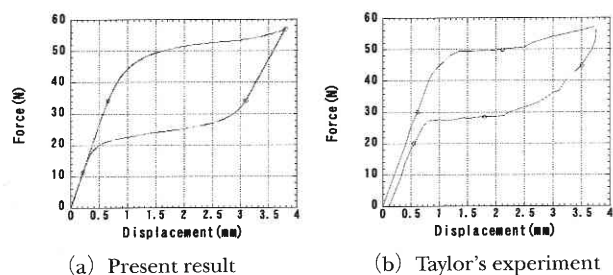


Fig. 6 Load-displacement curve for a Ni-Ti-10 % Cu alloy beam ($\beta = 0.15$)

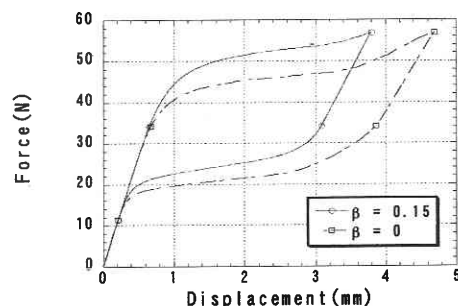


Fig. 7 Load-displacement curve for a Ni-Ti-10 % Cu alloy beam ($\beta = 0$ and $\beta = 0.15$)

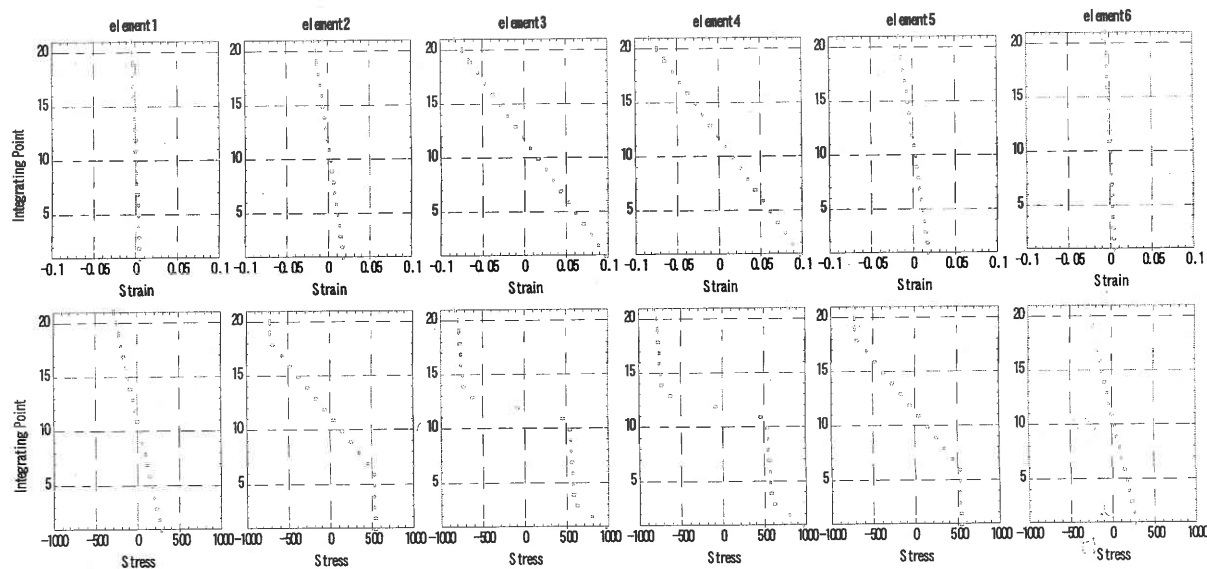


Fig. 8 Stress and strain distribution in a Ni-Ti-10%Cu alloy beam at the maximum load

分布である。各要素において上縁が圧縮、下縁が引張状態にある。はり要素を使用しているため必然的に、ひずみ分布は直線状である。応力分布より、要素1と6においては未だマルテンサイト変態が起きていないが、要素3と4の下縁ではすでにマルテンサイト変態が終了しており、上縁ではマルテンサイト変態が進行していることがわかる。

4. 結 論

Brinson による形状記憶合金の1次元構成式を、非対称な引張・圧縮挙動に拡張し、片持はりおよび4点曲げを受ける支持はりの有限要素解析に適用した。定温下の形状記憶合金はりの曲げ変形挙動が良好にシミュレートされ、後者は Taylor らによる実験結果とも良好に一致した。

(2001年3月8日受理)

参 考 文 献

- 1) L.C. Brinson: One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloy: Thermomechanical derivation with Non-Constant material Functions and Redefined Martensite Internal Variable, J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., Vol.4, April (1993), pp.229-242
- 2) F. Auricchio and R.L. Taylor: Shape-memory alloys: modeling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior, Comput. methods Appl. Engrg. Vol. 143, (1997), pp. 175-194.