研究速報

研究速報

鉄道用レールの疲労損傷問題に対する計算力学的アプローチ

Computational Mechanics Approach for Fatigue Damage of Rail

都井　裕*・李　帝明*・姜　成洙*
岩渕研吾**・森本文子**・森　久史**
Yutaka TOI, Jae-Myung LEE, Sung-Soo KANG,
Kengo IWAFUCHI, Fumiko MORIMOTO, Hisashi MORI

1. はじめに

連続体損傷力学（Continuum Damage Mechanics）に基づく構成方程式を導入した有限要素解析法，いわゆる「局所的破壊解析法（local approach to fracture)」により，構造解析と損傷・破壊解析を融合した数値解析が可能となりつつある[1)−3)]．この方法の実用化には，材料定数の決定を含むモデリング，解の要素サイズ依存性など，現時点ではいくつかの問題点もあるが，構造崩壊解析と材料破壊解析の統合化に対する一つの有力なアプローチと考えられる．

鉄道車両，鉄道軌道などにおいても適切な維持管理のために，繰返し荷重下において材料損傷・劣化を受ける構造要素の寿命評価法の確立が求められている[4)]．本稿では，レール頭頂面におけるシェリング損傷などの疲労損傷問題への局所的破壊解析法の適用について考察し，その計算手順を提示するとともに簡単な試計算を行う．2章で局所的破壊解析法による損傷評価法について述べ，3章で簡単な数値例を紹介する．最後の4章はまとめである．

2. 局所的破壊解析法による疲労損傷評価法

連続体損傷力学（以下では損傷力学と略称する）においては，マイクロクラックあるいはマイクロボイドなどの微視的損傷の効果が，損傷の程度を表す状態変数である損傷変数を導入することにより，連続体力学の枠組の中で考慮される．損傷力学理論には，大きく分けてスカラー損傷変数を用いる等方性理論とベクトルあるいはテンソル損傷変数を用いる異方性理論がある．本稿では等方性理論の使用に限定する．以下では，レールの疲労損傷問題に適用することを念頭に，損傷力学と有限要素法による局所的破壊解析法における2つの可能なアプローチ，すなわち，完全連成解析法（fully-coupled approach）と部分連成解析法（locally-coupled approach）の概要を示す[1)]．

2.1　完全連成解析法

損傷発展を考慮したクリープ塑性等方硬化理論における粘塑性ひずみ速度ベクトル $\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}$ は次式で与えられる．

$$\{\dot{\varepsilon}^{vp}\} = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\{\sigma^d\}}{\sigma_{eq}} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに，

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}^T\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}\right)^{1/2} = \left\langle \frac{\sigma_{eq}/(1-D) - R - k}{K} \right\rangle^N \quad \cdots\cdots (2)$$

$$R = Q_1 p + Q_2[1 - \exp(-bp)] \quad \cdots\cdots (3)$$

この式は，ChabocheとRousselierによる粘塑性構成式[5)]を，損傷発展を考慮したクリープ塑性等方硬化モデルに拡張した理論である[6)]．式中，$\dot{p}$，$\{\sigma^d\}$ および σ_{eq} はそれぞれ累積相当粘塑性ひずみの変化率，偏差応力およびMisesの相当応力である．D は損傷変数であり，6つのパラメータ K, N, k, Q_1, Q_2, b は材料定数である．〈　〉はMacauley括弧である．

等方性損傷発展式として次式を用いる[7)]．

$$\dot{D} = \left(-\frac{Y}{S}\right)^s \dot{p} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここに，

$$-Y = \frac{1}{2E(1-D)^2}\left[\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)\sigma_H^2\right] \quad \cdots\cdots (5)$$

*東京大学生産技術研究所　人間・社会部門
**鉄道総合技術研究所

式中，Y，E，νおよびσ_Hはそれぞれ，弾性エネルギー解放率，ヤング率，ポアソン比（＝0.3）および静水圧である．Sおよびsは材料定数である．累積粘塑性ひずみが限界値ε_{pd}を超えると，式（4）に従って損傷が進展する．すなわち，

$$\dot{D}=0 \qquad p<\varepsilon_{pd} \text{ のとき} \tag{6 a}$$

$$\dot{D}>0 \qquad p\geq\varepsilon_{pd} \text{ のとき} \tag{6 b}$$

ひずみ等価性仮説に従えば，応力変化率ベクトルと弾性ひずみベクトル$\{\dot{\varepsilon}^e\}$の関係は，次式により与えられる．

$$\begin{aligned}\{\dot{\sigma}\}&=(1-D)\{\dot{\bar{\sigma}}\}-\dot{D}\{\bar{\sigma}\}\\&=(1-D)[D_e](\{\dot{\varepsilon}\}-\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}-\{\dot{\varepsilon}^T\})-\dot{D}\{\bar{\sigma}\}\\&=[\bar{D}_e]\{\dot{\varepsilon}^e\}-\dot{D}\{\bar{\sigma}\}\end{aligned} \tag{7}$$

ここに，$\{\bar{\sigma}\}$，$\{\dot{\varepsilon}\}$および$\{\dot{\varepsilon}^T\}$はそれぞれ，有効応力変化率（$\{\bar{\sigma}\}=\{\sigma\}/(1-D)$），全ひずみ速度および熱ひずみ速度ベクトルである．$[D_e]$および$[\bar{D}_e]$はそれぞれ，等方性弾性固体および損傷弾性固体に対する応力・ひずみマトリックスである．

粘塑性ひずみおよび損傷の進展をこれらの式によって考慮することにより，有限要素解析における増分形要素剛性方程式が以下のように与えられる．

$$[k_0]\{\Delta u\}=\{\Delta f\}+\{\Delta f_{VP}\}+\{\Delta f_T\}+\{\Delta f_D\} \tag{8}$$

ここに，

$$[k_0]=\int_V [B_0]^T[\bar{D}_e][B_0]\,dV \tag{9}$$

$$\{\Delta f_{VP}\}=\int_V [B_0]^T[\bar{D}_e]\{\Delta\varepsilon^{vp}\}\,dV \tag{10}$$

$$\{\Delta f_T\}=\int_V [B_0]^T[\bar{D}_e]\{\Delta\varepsilon^T\}\,dV \tag{11}$$

$$\{\Delta f_D\}=\int_V [B_0]^T\Delta D\{\bar{\sigma}\}\,dV \tag{12}$$

式中，以下の記号を使っている．微小変形下の増分剛性マトリックス：$[k_0]$，節点変位増分ベクトル：$\{\Delta u\}$，外力増分ベクトル：$\{\Delta f\}$，粘塑性ひずみ増分ベクトル$\{\Delta\varepsilon^{vp}\}$（$=\{\dot{\varepsilon}^{vp}\}\Delta t$）による見かけの外力増分ベクトル：$\{\Delta f_{VP}\}$，熱ひずみ増分ベクトル$\{\Delta\varepsilon^T\}$（$=\{\dot{\varepsilon}^T\}\Delta t$）による見かけの外力増分ベクトル：$\{\Delta f_T\}$，損傷増分$\Delta D$（$=\dot{D}\Delta t$）による見かけの外力増分ベクトル：$\{\Delta f_D\}$，初期有効応力ベクトル：$\{\bar{\sigma}\}$，微小変形下のひずみ・節点変位マトリックス：$[B_0]$．計算精度および安定性の観点から，一般には接線剛性法の方が非線形有限要素解析に適している[8]．しかしながら，温度依存の材料非線形問題に対する複雑な定式化およびコーディングを避けるために，本解析では式（8）～（12）に示すような初期ひずみ法を用いた．

式（8）～（12）を全要素に渡って足し込んだ全体系に対する増分形剛性方程式を時間積分することにより，与えられた構造部材の弾粘塑性損傷解析が可能となる．数値的安定性および精度を向上させるため，文献9）と同様に時間積分公式として無条件安定の中心差分法を用いている．以上の方法は，損傷を考慮した構成方程式を直接，有限要素解析に取り込んだ計算法であり，完全連成解析法と呼ばれている．

2.2 部分連成解析法

疲労損傷解析には極めて多数の荷重サイクル（低サイクル疲労では10000回程度以下，高サイクル疲労では100000回程度以上）に対する繰返し計算が要求されるため，前節の完全連成解析法を実際の構造部材にそのまま適用することとは，極低サイクル疲労の場合を除き，ほとんど不可能である．そこで，次のような計算手順をとる．

まず，有限要素法による構造部材の弾性解析あるいは弾粘塑性解析により，繰返し荷重1サイクルに対する構造部材内の応力およびひずみ履歴を求める．同時に，計算された応力値あるいはひずみ値により，損傷評価点（特定要素内の特定数値積分点）を決定する．損傷評価点における荷重1サイクル分の応力あるいはひずみ履歴を，式（1）～（7）の損傷を考慮した弾粘塑性構成方程式系に繰返し入力することにより，評価点における損傷履歴を計算する．

このとき，最初に計算された応力あるいはひずみが降伏値を超え塑性領域に入っている場合は低サイクル疲労の問題となり，粘塑性変形を考慮した前節の定式化をそのまま用いればよいが，弾性範囲内に留まっている場合は高サイクル疲労の問題となるため，以下に示す修正が必要となる．まず，式（4），（6 a），（6 b）における累積相当粘塑性ひずみpは，累積相当全ひずみに置き換えられる．すなわち，

$$\dot{\varepsilon}=\left(\frac{2}{3}\{\dot{\varepsilon}^e\}^T\{\dot{\varepsilon}^e\}\right)^{1/2} \tag{13}$$

また，式（6 a），（6 b）の損傷進展条件に次式が追加される．

$$\sigma_{eq}\geq\sigma_f \tag{6 c}$$

このような計算により評価点における損傷履歴が計算され，損傷変数が

$$D=D_{cr} \tag{14}$$

の条件を満たしたときにその評価点近傍がマクロ破壊する

と判定する．損傷変数 D の理論上の最大値は1であるが，実際には1未満の限界値 D_{cr} で材料が破壊する．D_{cr} は一般には応力・ひずみ履歴に依存すると考えられるが，同様の荷重条件下での試験結果からこれを決定することを前提に，鋼材ごとに D_{cr} は一定値をとると仮定する．

繰返し同一載荷時に損傷評価点が同一応力履歴を受けるか，同一ひずみ履歴を受けるかは物理的判断である．車両重量を受けるレール頭頂面近傍などにおいては同一応力履歴と仮定する方が適当であろうし，一般的な小規模損傷状態においては同一ひずみ履歴と仮定すべきであろう．次章の解析では前者の立場に立って，損傷を無視した有限要素解析の結果から得られた応力履歴を，損傷を考慮した構成方程式系に入力して，疲労損傷に対する部分連成解析を行っている．

3. レールの疲労損傷問題の部分連成解析

図1はレールの解析モデルである．形状は実際のレールを模している．長さは600 mm，高さは174 mmであり，長さはまくらぎ間隔に対応している．境界条件としてレール底面を完全固定とし，他は自由とした．熱ひずみは考慮しない．図2は3次元6面体要素（1節点3自由度）による有限要素分割図であり，総要素数は3060，総節点数は4095である．

車両重量は車輪とレールの接触面を介し，レールに伝達される．この際の接触力を，Kalkerの接触理論[10]により

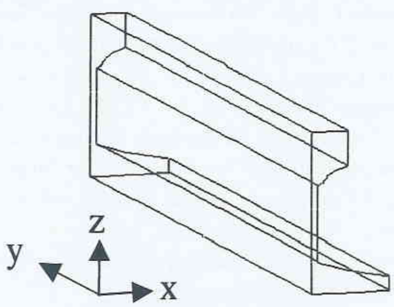

Fig. 1　Rail model for damage analysis

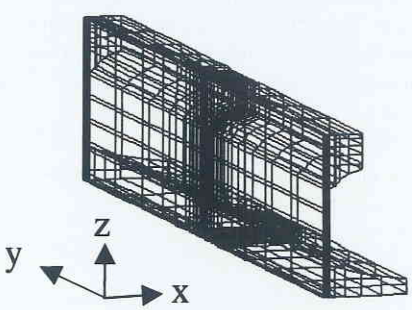

Fig. 2　3-d finite element mesh

数値計算した．図3と図4はそれぞれ，垂直接触力および水平接触力の分布図である．最大で790 MPa程度の接触圧，198.3 MPa程度のせん断力が負荷されていることがわかる．

図5と図6は，これらの接触力を外力として図2の有限要素モデルに載荷した場合の，Misesの相当応力の分布で

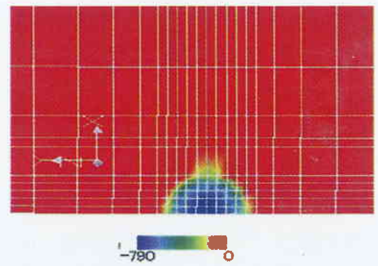

Fig. 3　Distribution of normal load (MPa)

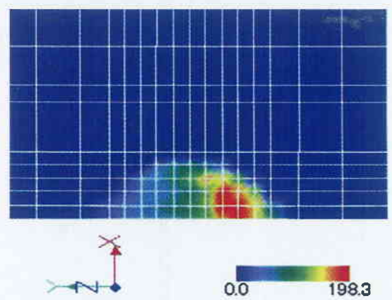

Fig. 4　Distribution of tangential load (MPa)

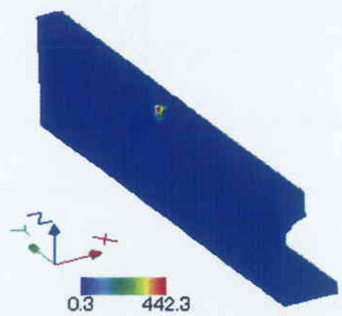

Fig. 5　Distribution of equivalent stress (MPa)

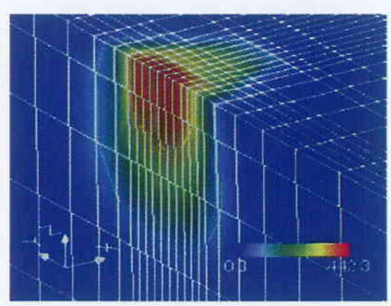

Fig. 6　Distribution of equivalent stress (MPa) (closed-up view)

ある．最大応力値は442.3 MPa程度であり，要素サイズが粗いため，接触面近傍を含む全レール領域において弾性応力状態にある（仮定した鋼材の降伏応力は708 MPa）．

図7は，長さ方向レール中央断面およびレール頭頂面に最も近い数値積分点におけるレール長さ方向の相当応力分布である．車両がレール頭頂面を通過した場合，各数値積分点はこの図と相似形の応力時刻歴を受けることになる．このような応力時刻歴が繰返し多数回載荷されたとき，レール頭頂面近傍にどの程度の疲労損傷を及ぼすかを，前章で述べた部分連成解析法により試計算した．損傷を考慮した構成方程式系には応力6成分の時刻歴が入力される．

疲労限応力として，図7に示す4レベルを仮定した．それぞれの疲労限応力下で，荷重サイクルによる損傷の進展を評価した結果が図8である．疲労限が低いほど損傷の進展が速く，高い疲労限応力に対しては損傷の進展が遅い結果となる．以上のような計算手順で，車両通過による繰返し荷重を受けるレール頭頂面近傍における損傷進展を評価することができる．このような計算の定量的な信頼度を上げるためには，①構成方程式中の材料定数の決定，②要素サイズなどによる数値誤差の制御，③場合によってはメソスケールさらにはミクロスケールの解析，などについて検討を加える必要があろう．上記の計算結果は，前章で述べた計算手順による試計算例として提示したものであることを強調しておく．

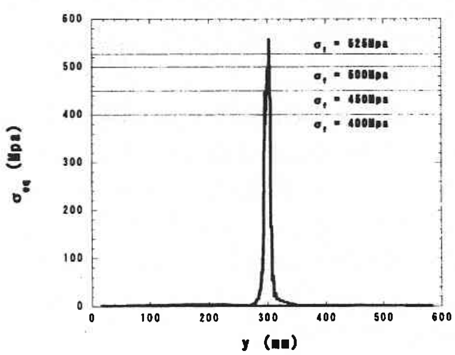

Fig. 7　Equivalent stress distribution on the running surface of rail

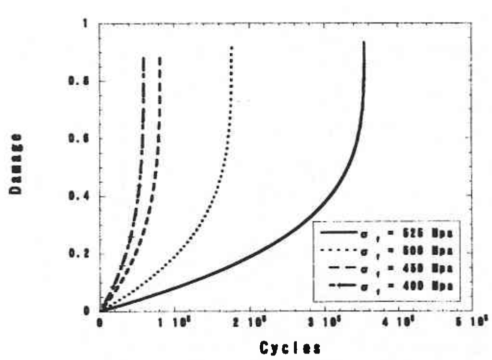

Fig. 8　Damage evolution

4. ま　と　め

本研究では，鉄道用レールの疲労損傷評価を行うことを目的に，損傷力学と有限要素法による局所的破壊解析法の概略，特に部分連成解析法の計算手順を提示し，簡単な数値計算例を示した．今後，必要な材料試験結果を十分に計算に取込み，また損傷評価結果を疲労試験結果あるいは実際の損傷事例と比較検討することにより，実用的な疲労損傷評価法として確立したい．

（2001年6月19日受理）

参　考　文　献

1)　J. Lemaitre: *A Course on Damage Mechanics*, 2 nd Ed., Springer. (1996).
2)　D. Kracjinovic: *Damage Mechanics*, North-Holland, (1996).
3)　J. Skrzypek, J. and A. Ganczarski: *Modeling of Material Damage and Failure of Structures (Theory and Applications)*, Springer, (1999).
4)　上浦正樹，須長誠，小野田滋：鉄道工学，森北出版株式会社，(2000).
5)　J. L. Chaboche and G. Rousselier: On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations (Part 1: Rules Developed with Internal Variable Concept), Journal of Pressure Vessel Technology (Transactions of the ASME), 105, (1983), 153–164.
6)　F. P. E. Dunne and D. R. Hayhurst: Continuum Damage Based Constitutive Equations for Copper Under High Temperature Creep and Cyclic Plasticity, Proc. R. Soc. Lond. A, 437, (1992), 545–566.
7)　J. Lemaitre and J. L. Chaboche: *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, (1990).
8)　D. J. R. Owen and E. Hinton: *Finite Elements in Plasticity (Theory and Practice)*, Pineridge Press, (1980).
9)　Y. Toi, K. Kobashi and T. Iezawa: Finite Element Analysis of Thermal Elasto-Plastic Behaviors of Bridge Girders in Hot-Dip Galvanization, Computers & Structures, 53–6, (1994), 1307–1316.
10)　J. J. Kalker: Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Kluwer Academic Publisher, (1990).