研究速報

形状記憶合金コイルばねの超弾性有限変形挙動の有限要素解析

Finite Element Analysis of Superelastic, Large-Deformation Behavior of Shape Memory Alloy Helical Springs

都井　裕*・李　宗儐*・田谷　稔**・松永泰弘**
Yutaka TOI, Jong-Bin LEE, Minoru TAYA and Yasuhiro MATSUNAGA

1. はじめに

形状記憶合金は工業機器，家電，医療，スポーツ，装身具など様々な分野で利用されている．また近年では，アクチュエータ素子としての高機能化，多機能化を念頭に，鉄系，ニッケル・マンガン・ガリウム系などの強磁性体形状記憶合金の開発が進められている．多くの可能性を有する形状記憶合金素子の設計・開発の効率化・合理化のためには，計算による力学的挙動予測が不可欠である．本研究では，形状記憶合金に対するBrinsonの一次元構成方程式[1]を，引張・圧縮挙動の非対称性およびねじり挙動を含むように拡張した超弾性構成式モデルを用いて，層分割チモシェンコはり要素によるラグランジュ型増分有限要素解析法に基づき，アクチュエータなどに用いる形状記憶合金コイルばねの超弾性挙動解析を行う．解析結果をワシントン大学知的材料システム研究センターで実施された実験結果と比較することにより，本計算手法の有用性を示す．

2. 形状記憶合金の構成方程式

2.1 垂直応力・ひずみに関する構成方程式

一般に形状記憶合金の一次元応力・ひずみ関係は次式により記述される．

$$\sigma-\sigma_0=E(\varepsilon-\varepsilon_0)+\Omega(\xi_S-\xi_{S0})+\theta(T-T_0) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，Eは縦弾性係数，Ωは変態係数，ξ_Sは応力誘起によるマルテンサイト体積率，θは熱弾性係数，Tは温度であり，下添字0は初期値を意味する．最大残留ひずみをε_Lとすると，Ωは以下のように表される．

$$\Omega=-\varepsilon_L E \quad \cdots\cdots(2)$$

縦弾性係数Eはマルテンサイト体積率ξの関数として次のように表される．

$$E=E_a+\xi(E_m-E_a) \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに，E_mはマルテンサイト相，E_aはオーステナイト相の縦弾性係数である．温度誘起によるマルテンサイト体積率をξ_Tとすると，全マルテンサイト体積率ξは

$$\xi=\xi_S+\xi_T \quad \cdots\cdots(4)$$

と表わされる．ξ，ξ_Sおよびξ_Tは温度Tと応力σの関数である．ここで，引張と圧縮の相違を考慮するため，ξ，ξ_S，ξ_Tの発展方程式を判別するための相当応力として，Misesの相当応力σ_eの代わりに次式を用いることにする．

$$f=\sigma_e+3\beta p \quad \cdots\cdots(5)$$

ここに，βは材料定数，pは静水圧であり，

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \quad \cdots\cdots(6)$$

と表わされる．形状記憶合金はりの超弾性曲げ変形挙動は軸方向垂直応力σ_zのみに支配されると仮定すると，相当応力として次式が用いられる．

$$f=|\sigma_z|+\beta\sigma_z \quad \cdots\cdots(7)$$

式（7）をBrinsonによるξ，ξ_Sおよびξ_Tの発展方程式に導入することにより，（非双晶）マルテンサイト相への変態過程およびオーステナイト相への変態過程における以下の発展方程式が得られる．すなわち

(i) マルテンサイト相への変態過程

$T>M_s$および$\sigma_s^{cr}(1+\beta)+C_M(1+\beta)(T-M_s)<f<\sigma_f^{cr}(1+\beta)+C_M(1+\beta)(T-M_s)$の場合：

$$\xi_S=\frac{1-\xi_{S0}}{2}\cos\left\{\frac{\pi}{\sigma_s^{cr}(1+\beta)-\sigma_f^{cr}(1+\beta)}\left[f-\sigma_f^{cr}(1+\beta)-C_M(1+\beta)(T-M_s)\right]\right\}+\frac{1+\xi_{S0}}{2} \quad \cdots\cdots(8)$$

*東京大学生産技術研究所　人間・社会部門
**ワシントン大学知的材料システム研究センター

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{S0}}(\xi_S - \xi_{S0}) \qquad (9)$$

$T < M_s$ および $\sigma_s^{cr}(1+\beta) < f < \sigma_f^{cr}(1+\beta)$ の場合：

$$\xi_S = \frac{1-\xi_{S0}}{2}\cos\left[\frac{\pi}{\sigma_s^{cr}(1+\beta)-\sigma_f^{cr}(1+\beta)} \times \left\{f - \sigma_f^{cr}(1+\beta)\right\}\right] + \frac{1+\xi_{S0}}{2} \qquad (10)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1-\xi_{S0}}(\xi_S - \xi_{S0}) + \Delta_{T\xi} \qquad (11)$$

ここに，$M_f < T < M_s$ および $T < T_0$ の場合

$$\Delta_{T\xi} = \frac{1-\xi_{T0}}{2}\left\{\cos\left[a_M(T-M_f)\right]+1\right\} \qquad (12)$$

その他の場合は

$$\Delta_{T\xi} = 0 \qquad (13)$$

(ii) オーステナイト相への変態過程

$T > A_s$ および $C_A(1+\beta)(T-A_f) < f < C_A(1+\beta)\times(T-A_s)$ の場合：

$$\xi = \frac{\xi_0}{2}\left\{\cos\left[a_A\left(T - A_s - \frac{f}{C_A(1+\beta)}\right)\right]+1\right\} \qquad (14)$$

$$\xi_S = \xi_{S0} - \frac{\xi_{S0}}{\xi_0}(\xi_0 - \xi) \qquad (15)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{\xi_0}(\xi_0 - \xi) \qquad (16)$$

ここに，a_M と a_A は次式のように定義される．

$$a_M = \frac{\pi}{M_s - M_f},\ a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \qquad (17)$$

2.2 せん断応力・ひずみに関する構成方程式

形状記憶合金の超弾性ねじり変形挙動を考慮するために，次のように仮定する．すなわち，形状記憶挙動のねじり変形挙動は引張変形挙動と定性的に同様である．ねじり挙動と引張・圧縮挙動は独立と仮定し，ねじり挙動に対してはねじりによるマルテンサイト体積率 ξ_τ，$\xi_{S\tau}$，$\xi_{T\tau}$ とその発展方程式を利用する．ただし，ねじりによるマルテンサイト体積率の発展方程式を判別する際には，式（7）の f の代わりに $\sqrt{3}|\tau|$ を用いる．よって，

$$\tau - \tau_0 = G_\tau(\gamma - \gamma_0) + \Omega_\tau(\xi_{S\tau} - \xi_{S\tau 0}) \qquad (18)$$

ここに，G_τ はせん断弾性係数，Ω_τ は変態テンソル，ξ_S は応力誘起によるマルテンサイト体積率，T は温度であり，下添字0は初期値を意味する．最大残留ひずみを γ_L とすると，Ω_τ は以下のように表される．

$$\Omega_\tau = -\gamma_L G_\tau \qquad (19)$$

せん断弾性係数 G_τ はマルテンサイト体積率 ξ_τ の関数として次のように表される．

$$G_\tau = G_a + \xi_\tau(G_m - G_a) \qquad (20)$$

ここに，G_m はマルテンサイト相，G_a はオーステナイト相のせん断弾性係数である．温度誘起によるマルテンサイト体積率を $\xi_{T\tau}$ とすると，全マルテンサイト体積率 ξ_τ は

$$\xi_\tau = \xi_{S\tau} + \xi_{T\tau} \qquad (21)$$

と表わされる．ξ_τ，$\xi_{S\tau}$ および $\xi_{T\tau}$ は温度 T と応力 τ の関数である．

せん断によるマルテンサイト体積率の発展方程式を記述するための相当応力を $\sqrt{3}|\tau|$ とする．せん断によるマルテンサイト体積率 ξ_τ，$\xi_{S\tau}$，$\xi_{T\tau}$ の発展方程式を以下のように仮定する．すなわち，式（8）から式（16）において

$$f \to \sqrt{3}|\tau|,\ \beta = 0,\ \xi \to \xi_\tau,\ \xi_0 \to \xi_{\tau 0},\ \xi_S \to \xi_{S\tau},\ \xi_{S0} \to \xi_{S\tau 0},\ \xi_T \to \xi_{T\tau},\ \xi_{T0} \to \xi_{T\tau 0},\ \Delta_{T\xi} \to \Delta_{T\tau\xi} \qquad (22)$$

と置き換えればよい．

3. 有限要素解析の定式化

形状記憶合金コイルばねの有限要素解析においてはチモシェンコはり要素を用いる．ラグランジュ流の増分理論に基づく定式化により有限変形の影響を考慮する．このとき軸方向変位に関する非線形項を無視する．材料非線形性については前章の構成方程式に基づき，接線剛性法の定式化を行なう．すなわち，曲げ変形，軸変形に伴う垂直応力・垂直ひずみ挙動，ねじり変形に伴うせん断応力・せん断ひずみ挙動に対しては超弾性挙動を仮定する．ただし，曲げによるせん断ひずみエネルギー項は処罰項とし，線形弾性挙動を仮定する．

4. 形状記憶合金コイルばねの有限要素解析結果

以上の定式化を，ワシントン大学知的材料システム研究センターで実施された形状記憶合金コイルばねの引張実験の解析に適用した．コイルばねの巻き数は図1に示すように5および10の2種類である．図2は同じ材料の形状記憶合金棒に対する引張実験結果と本解析で仮定した材料特性の比較である．仮定された材料定数値とばねの寸法をTable 1に示す．図3は引張荷重を受けるコイルばねの荷重-変位曲線である．有限要素解析結果は実験結果とほぼ良好に対応しているが，形状に若干の相違がある．この相違は，ねじりの材料試験結果が現時点では利用できず，引張試験のみからすべての材料定数値を決定していることに起因すると思われる．図4は巻き数5のコイルばね中心部

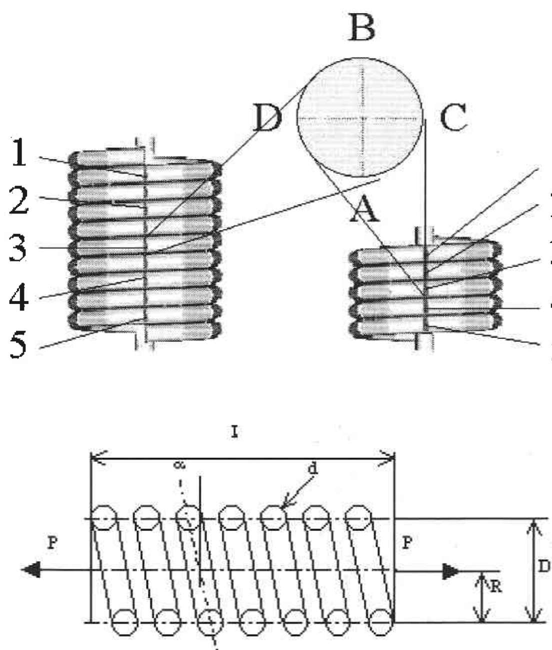
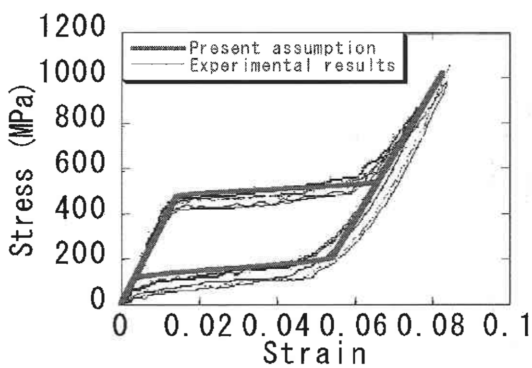
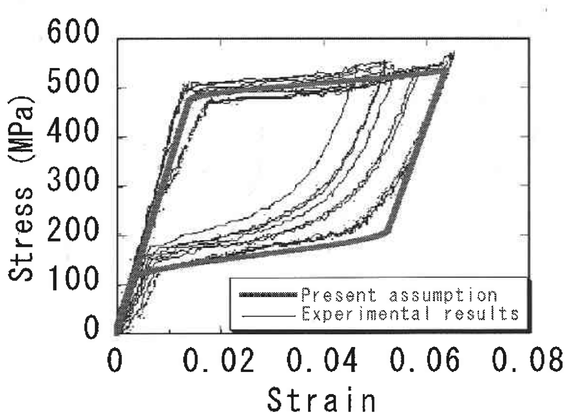


Fig. 1 SMA helical spring



(a) short stroke

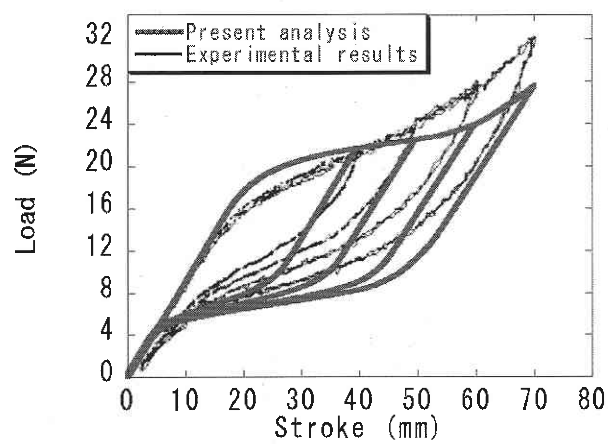


(b) long stroke

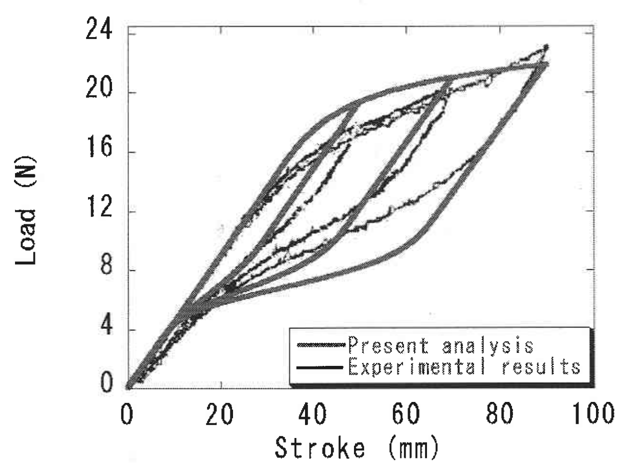
Fig. 2 Assumed stress-strain curves

Table 1 Dimensions and material constants of TiNi springs

Dimensions (mm)	Material constants (MPa)
5 turns L = 5 d=1 D=7.3	$E_m = 28500$, $E_a = 34000$ $G_m=10690$, $G_a=12753$ $\sigma_{MS} = \sigma_s^{cr} + C_M(T - M_s) = 427.8$ $\sigma_{Mf} = \sigma_f^{cr} + C_M(T - M_s) = 542.8$ $\sigma_{AS} = C_A(T - A_s) = 210.5$ $\sigma_{Af} = C_A(T - A_f) = 110.4$
10 turns L = 10 d=1 D=7.3	$\varepsilon_L = \gamma_L = 0.047$ $\beta = 0.15$

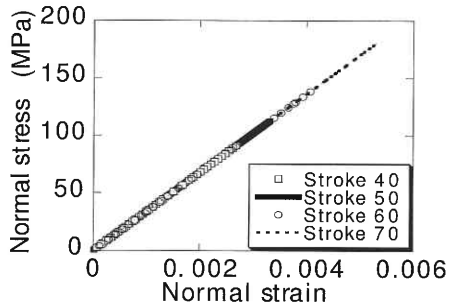


(a) 5 turns

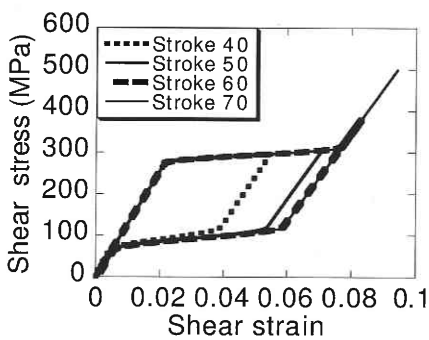


(b) 10 turns

Fig. 3 Calculated load-stroke curves



(a) normal stress-normal strain (5 turns, A)



(b) shear stress-shear strain (5 turns, A, B, C, D)

Fig. 4 Calculated stress-strain curves

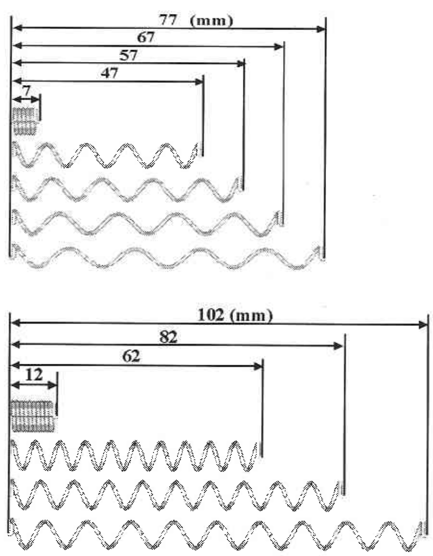


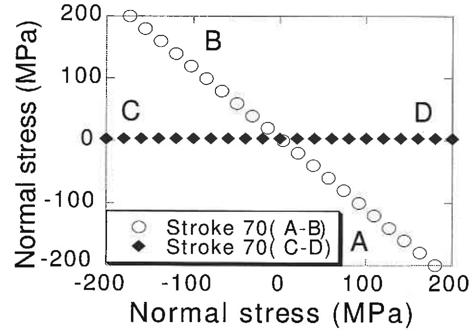
Fig. 5 Calculated deformations

の断面内各点（図1を参照）における計算された応力-ひずみ曲線である．図5はコイルばねの変形図である．図6は巻き数5のコイルばねの断面内における応力分布である．

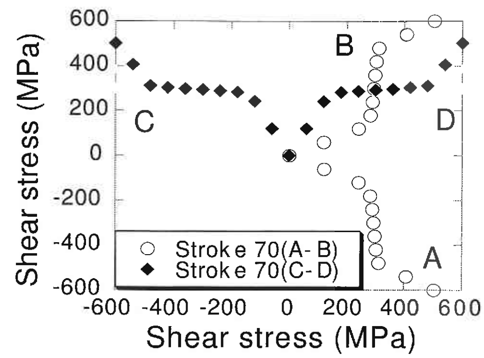
5. まとめ

本報告では，はり，コイルばねなど一次元的形状を有する形状記憶合金素子の超弾性大変形挙動の有限要素解析法を提示した．すなわち，Brinsonの一次元構成方程式において引張挙動と圧縮挙動の非対称性を考慮し，さらにねじり変形を考慮できるように拡張した．この構成式を用いて層分割型線形チモシェンコはり要素による超弾性有限変形問題の増分形有限要素解析プログラムを開発した．

計算例として，TiNi合金製コイルばねの超弾性大変形挙動を解析し，ワシントン大学知的材料システム研究センターによる実験結果との比較により，本解析法がほぼ合理的であることを確認した．さらなる改善のためには，超弾性ねじり挙動の材料試験結果が不可欠である．さらに，磁場解析との連成を考慮することにより，強磁性形状記憶合金素子の超弾性挙動解析に拡張する研究を進めている．



(a) normal stress



(b) shear stress

Fig. 6 Calculated stress distributions (5 turns)

（2002年8月5日受理）

参考文献

1) Brinson, L. C., Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol.4 (1993), 229–242.
2) 都井・李・田谷，機論（A），(2002) 投稿中