

超音速インテーク内の流れの
乱流数値解析

榎本 俊治

超音速インテーク内の流れの 乱流数値解析

榎 本 俊 治

もくじ

1 序	5
1.1 これまでの研究	5
1.2 本研究の目的と概要	7
2 超音速インテーク	9
2.1 超音速インテークとは	9
2.1.1 ビトーインテーク	10
2.1.2 マルチショックインテーク	10
2.1.3 内部圧縮インテーク	11
2.1.4 混合圧縮インテーク	12
2.1.5 インテーク内の流れの分類	12
2.1.6 インテークの設計について	13
2.2 衝撃波 / 乱流境界層干渉現象	13
2.2.1 実験による研究	13
2.2.2 数値解析による研究	15
2.3 結び	17
3 数値解法	18
3.1 圧縮性流体力学基礎	18
3.1.1 完全気体の状態量	19
3.1.2 流れのある場合	20
3.1.3 先細ノズルの流れ	21
3.2 圧縮性ナビエ・ストークス方程式	21
3.2.1 無次元化	22
3.2.2 ベクトル表記	23
3.2.3 一般曲線座標系	24
3.3 差分演算子	25
3.4 時間差分	25

3.5	左辺の空間差分	27
3.5.1	近似因子分解法	27
3.5.2	対角化	27
3.5.3	風上差分	29
3.5.4	不完全 LUD 分解	30
3.5.5	まとめ	30
3.6	右辺の空間差分	31
3.6.1	一次元スカラー保存則に対する高次精度 TVD 差分法	32
3.6.2	対流項の差分	37
3.6.3	粘性項の差分	41
3.6.4	まとめ	42
3.7	局所時間刻み	43
3.8	複合格子法	44
3.9	乱流モデル	45
3.9.1	Baldwin-Lomax モデル	47
3.9.2	$k-\epsilon$ モデル	49
3.10	結び	53
4	乱流モデルのチェック	54
4.1	平板境界層	54
4.2	コンプレッション・コーナー流れ	55
4.3	入射斜め衝撃波流れ	56
4.4	結び	57
5	超音速インテーク内の流れの数値解析	59
5.1	模擬インテークの実験結果	59
5.2	模擬インテークの数値解析法	61
5.2.1	計算格子	61
5.2.2	計算条件	62
5.2.3	計算手順	63
5.3	二次元計算	63
5.3.1	Baldwin-Lomax モデルによる二次元計算	64
5.3.2	Jones-Launder モデルによる二次元計算	67
5.4	三次元計算	68
5.5	考察	71
5.5.1	各計算と実験の比較	71

5.5.2 インテークの設計に関して	71
5.6 結び	73
6 結論	74
付図、付表	83
超音速インテーク	83
複合格子法	87
平板境界層	88
コンプレッション・コーナー流れ	91
入射斜め衝撃波	97
模擬インテークの実験結果	102
模擬インテークの数値解析法	106
二次元 Baldwin-Lomax モデル (フローブラグを変えた場合)	107
二次元 Baldwin-Lomax モデル (ブリードバルブを変えた場合)	110
二次元 Baldwin-Lomax モデル (ヒステリシス)	113
二次元 Jones-Launder モデル	115
三次元計算	118
各計算と実験の比較	128
キャビティ抽気条件を変えた試行計算	129
A ラバルノズル流の計算	131
B 数値解法の補足	137
B.1 ナビエ・ストークス方程式	137
B.2 座標変換	138
B.3 一般座標系ナビエ・ストークス方程式	140
B.4 ヤコビ行列	142
B.5 対角化	145
B.6 Roe の近似リーマン解法	148

第1章 序

21世紀初頭の実現を目指して、現在、次世代の超音速旅客機(図1)の開発が盛んに行なわれている。超音速インテークは、機体外から中へ空気を取り込み、減速、圧縮しエンジンが必要とする流量の空気を供給するのがその機能である。このとき、幅広い動作範囲に対応し、また外乱に対して安定でなければならない。超音速インテークの開発は、米国を始めとし、ヨーロッパ諸国、及びわが国において活発に行なわれており、関連する研究発表も多数である。しかし、超音速機の開発経験のほとんど無いわが国にとっては未知の分野である。風洞試験を行なうにしても、気流が高速、高圧であるため、実験装置の大きさ、強度、時間に厳しい制約が課され、また計測は、シュリーレン法、圧力測定、オイルフローによる表面流線など以外は困難であり、流れ場の詳細は不明である。そのため現状では、設計の現場に於いては設計者の経験や勘に頼らざるを得ない。そこで流れ場の理解を助けることを目的として、数多くの数値解析が試みられている。しかしながら、流れ場の形状や衝撃波/乱流境界層干渉現象に代表される物理現象の複雑さのため、数値解析を行なうことも決して容易ではなく、特に詳しい三次元解析が行なわれた例は稀である。

本研究はこのような現状を背景として、超音速インテーク内の、二次元、三次元乱流数値解析を行ない、インテーク内の流れ場の詳しい構造を解明することを試みたものである。

1.1 これまでの研究

数値解析による超音速インテーク内の流れのシミュレーションは、主に'80年代に入ってから盛んに行なわれるようになってきた。広い意味での超音速インテークと言う言葉には、マッハ数 $M=1\sim 5$ 程度の狭義の超音速 (supersonic) インテークと、 $M>5$ の極超音速 (hypersonic) インテークとが含まれる。超音速と極超音速との違いを一口で言うとは、完全気体の仮定が成り立つかどうかである。ここでは(狭義の)超音速インテークに関する過去の研究を、主に数値解析を対象に調べてみた。

インテークの数値解析は、実際の要求があったからであろうが、計算機能力の乏しかった時代においてもたびたび試みられてきたようである。キャビティなどが無ければ翼よりも簡単な形状であることも、その理由の一つかも知れない。実用的形状の二次元超音速インテークの数値計算を行なったのはおそらく'77年のKnight[1, 2]が最初である。彼は陽差分法であるMacCormack法を用い、乱流モデルにCebeci-Smithの代数モデルを用いて $M=3.51$, $Re=1.4\times 10^7$ のインテーク流れを計算している。解いた領域はスロートより上流、即ち斜め衝撃波のある超音速流部分のみで、垂直衝撃波

と亜音速流部分は計算対象外だったようである。

NASA Lewis 研究所の Anderson らは'84 年頃より超音速インテークの三次元粘性解析を行なっている [3, 4]。彼らは PEPSIS と呼ぶ放物型解法の三次元超音速粘性解法コードを用いて、マッハ数 5 の混合圧縮インテークのスロートより前の部分を計算し、第一斜め衝撃波後の側壁の境界層の流れを明らかにした。それによれば、側壁上の境界層がランブ衝撃波による圧力勾配で二次流れを起こし、それがカウル面に当たってコーナー渦を発生させていた。しかしながら実験と比較すると定性的には幾つかの特徴を捉えているものの、必要な抽気量などの定量的データを得るまでには至らなかった。彼らはさらに二次元や三次元の斜め衝撃波/乱流境界層干渉問題などの流れの要素別ベンチマークテストを行なっている。

さらに NASA Lewis 研究所の Weir らは最近 ('89~'91) マッハ数 3 から 5 の二次元インテークモデルを作成し、10 feet \times 10 feet の超音速風洞で実験を行なっている [5, 6]。彼らは側壁上の斜め衝撃波の足、即ち剥離しやすい場所に、多数の小さな抽気孔を設けた。またコーナー渦を捉えるためにコーナーレイクを用いて全圧測定も行なった。彼らは結果を Rose らの計算結果と比較している。Rose らの計算¹では、三次元の放物型ナビエ・ストークス解法を用いて計算している。数ヶ所で境界層抽気を行ない、側壁渦を捕らえることに成功している。定量的にはともかく、定性的には複雑な三次元流れの幾つかの特徴を捕らえることが出来ているようである。

一方わが国でも、近年になって超音速航空機の開発設計が急ピッチで進められており、数値計算による解析も盛んに行なわれるようになってきた。

中橋らは'89 年に、マッハ数 3、 $Re=5 \times 10^6$ の混合圧縮インテークの数値実験について発表している [7]。彼らは境界層抽気が終端衝撃波に及ぼす影響と、最適な抽気位置、抽気流量を調べることを目的とした。解法は二次元のナビエ・ストークス方程式を基に、Van Leer の流束ベクトル分割法、二次精度の MUSCL である。乱流モデルは Baldwin-Lomax であった。結果は、抽気を行わないインテークでは境界層が大きく剥離し、抽気を行なうと境界層がなくなり、抽気領域の直後に安定した衝撃波が形成された。しかし実験との比較など精度に対する検討は行なわれていないようである。

また黒田らは'90 年に抽気室を有する超音速インテークの数値計算について発表しているが [8]、乱流モデルを用いておらず、解も定常に達していない。

Shigematsu らは'90 年にマッハ数 3.0、 $Re=2 \times 10^6$ の混合圧縮インテーク流れに Baldwin-Lomax モデルを適用して二次元及び三次元解析を行なった [9]。境界層抽気のある二次元インテークでは中橋らの例と同様に、抽気領域の直後に衝撃波が形成される様子が示された。また三次元解析では、ランブ衝撃波による側壁境界層の剥離を捕らえ、実験のオイルフロー結果などと比較しているが、剥離位置などの予測はもう一步のようであった。

藤本らは'90 年にマッハ数 2.5 の二次元混合圧縮型インテークの設計と CFD によるその検証を報告している [10, 11]。彼らは境界層抽気とキャビティを設けたインテークを設計し、乱流モデル

¹Rose らの原論文は入手困難だったため残念ながら直接確認はしていない

に $q-\omega$ モデルを用いた二次元計算を行なって、流れの解析及び設計の検証を行っており、キャビティと流路の界面にできる自由境界面が、垂直衝撃波による圧力勾配を受けて変形し、自動的に最適な場所にスロートを形成する様子を示した。

このように衝撃波による圧力勾配を受けて、受動的プロセスだけで最適流路形状が形成されると言う考え方は Bohning らの翼面上の衝撃波の安定化機構の機構の研究 [12] にも見られるが、村上らによれば [13]、キャビティによってかえって流れ場が乱され、衝撃波は安定しない。つまり、自由境界面を設ければ必ずそこで流れの調節機能が働くと言うわけではなく、何らかの条件が存在するようである。そのためキャビティも含めてインテーク内をどのように流れているかを調べる必要がある。

さて、'91年にはキャビティを含めたインテークの計算例が幾つか発表されており、例えば Volvo の Eriksson [14] はマッハ数 2.75 の混合圧縮型インテークを二次元ナビエ・ストークス方程式解法で解いた。用いた数値解法はマルチブロックの有限体積法で陽解法、乱流モデルは Baldwin-Lomax であった。彼はキャビティ後に垂直衝撃波の出来る流れを計算しており、実験と比較して壁面静圧やディフューザ出口部の全圧ともに、まずまずの一致を見せた。

また同じく '91年には ONERA の Duveau が、やはりキャビティを含めた二次元インテークの非粘性計算及びデータバンクを用いた半経験的解法で、インテークの性能予測を試みている。

以上のように、多くの数値解析が試みられているものの、現象や流路形状の複雑さから、これまでキャビティ抽気や垂直衝撃波を含めた三次元解析は行なわれていない。またキャビティ抽気がどのようにして衝撃波を安定化するかにしても明らかにはなっておらず、そのような観点から数値解析が行なわれた例もない。

1.2 本研究の目的と概要

本研究は、航空宇宙技術研究所の村上ら [13] の、定常運転のできる小型超音速風洞での模擬インテークを用いた実験データを基に、

1. 同じ条件で数値解析を行ない、そのデータだけでは解りにくい流れや衝撃波の挙動や三次元性構造を調べ、インテーク内部の遷音速流れの理解の一助とする。
2. 逆に、数値解析の妥当性を実験データを基に検証し、数値解析技術の確立を図る。

ことを目的とする。さらに、

3. 衝撃波を安定させ、境界層の剥離を抑え、高い圧力回復率を得るインテークを開発するための設計法の確立への指針を得る。

ことが最終的な目標である。

次章では、まず超音速インテークの空力的機能とインテーク設計に要求される事項について確認し、また衝撃波 / 乱流境界層干渉現象に関する従来の研究を概観する。次に第3章では解析に用いた

数値解法について詳しく解説し、さらに第4章で衝撃波 / 乱流境界層現象に対する数値解法の性能を確認する。第5章では、まず計算対象とした村上らによる模擬インテークの実験結果についての考察を行ない、これの数値予測を行なうときの問題点を明らかにする。次に本研究で行なった数値解析の手順について述べる。その後、Baldwin-Lomax モデル及び Jones-Launder $k-\epsilon$ モデルによるインテークの二次元計算の結果を示し、さらに Baldwin-Loamx モデルによる三次元計算の結果を示す。最後に実験結果とこれらの計算結果の比較を行ない、計算結果の持つ意義について述べ、さらにインテークの設計に対する提言を行なう。第6章は本研究の結論である。

第2章 超音速インテーク

超音速インテークに限らず、一般に工学的な数値解析を行なう前には、まず対象となる流体機械に求められる要件を明確にし、その流れ場の特徴を理解しておくことが重要である。本章では超音速インテークの構造や機能と、衝撃波 / 乱流境界層干渉現象に関する従来の研究をまとめておく。

2.1 超音速インテークとは

航空機のインテーク（空気取入れ口）の役割は、さまざまな動作状態においてエンジンの要求する流量の空気を少ない損失で適切に供給することである。インテークの中の流れは離陸時を除き減速流であり、特に高速飛行時には圧縮機としての性格が強くなる。それゆえインテーク内の流れ場は逆圧力勾配であり、常に剥離の危険性を伴っている。この章ではインテークの流れの問題点を理解するために超音速インテークの設計の基本となる考え方を簡単に確認しておく。なおこの節の内容は Seddon と Goldsmith の教科書 “Intake Aerodynamics” [15] を全面的に参考にしたので、詳しくはそちらを参照して頂きたい。

インテークのもたらすエネルギー損失は大きく分けて全圧損失と抗力とに分けられる。前者はインテーク内部の流れの損失でありエンジン出力に影響する。後者はインテーク外部の流れの損失であり通常は機体の抗力に加算される。この二者を同時に減らすことが究極の目的であるが困難であり、妥協点を見つけないといけない。例えばインテーク長さは短い方が摩擦損失を減らせるが、逆にある程度長い方が造波抵抗を小さくできる。またインテークの横幅は小さい方が造波抵抗は小さいが、内部流の衝撃波損失を小さくしようとすると、ある程度カウルが大きくなってしまふ。

以下、話を主にインテークの内部の流れに限定する。インテーク流の全圧損失はその約 1.5 倍のエンジン出力の低下を招くと言われ、経済性の問われる民生用航空機の開発に当たっては極めて重要な問題である。全圧損失の原因は、① 摩擦損失、② 乱流混合によるエネルギー散逸、③ 衝撃波損失、の三点に分けられる。摩擦損失を減らすには前述したように流路を出来るだけ短くすることが必要である。乱流混合は主に境界層の剥離と渦が原因で、これによる損失は極めて大きい。インテーク内の流れは逆圧力勾配で本質的に剥離しやすく、従って境界層の剥離を抑制するように流路を設計することが重要な課題である。衝撃波損失、は小さい斜め衝撃波をたくさん立てる、または等エントロピ圧縮を用いることにより減らすことが出来るが、構造上の制約からある程度の衝撃波損失は避け難い。

さて、超音速インテークはその形態から、超音速圧縮をカウルの外で行なうか、内部流路で行な

うかにより外部圧縮インテーク、内部圧縮インテークとに分類でき、それらの両方を行なうものは混合圧縮インテークと呼ぶ。

2.1.1 ビトーインテーク

はじめにインテークのもっとも基本的な形態であるビトーインテークを例に挙げて解説する。図3のような空力ダクト(aerodynamic duct)を考える。これは亜音速ジェットエンジン全体、つまりインテークからノズルまでの部分からエンジン部を取り除いたものを模擬している。記号は M がマッハ数、 P が全圧、 A が断面積を示し、添字は ∞ は主流、 c は入口(capture)、 e は出口(exit)を表す。 ω は「垂直衝撃波後の」という意味の修飾子である。

まず図4(a)はフロープラグが完全に閉じた状態である。ダクトは鈍頭物体になり、離脱衝撃波がやや上流に生じる。次にフロープラグを少し開くと図(b)の様に少し流れる。この場合 $A_{\infty} < A_c$ である。ただし A_{∞} は流入する流管の無限遠上流での断面積である。流れは出口でチョーク($M_e=1.0$)するので、ダクトを流れる流量は出口面積 A_e と全圧 $P_{\infty\omega}$ の積に比例する(3.1.3参照)。さらにフロープラグを開き $A_{\infty}=A_c$ となると、離脱していた衝撃波が付着衝撃波となり、流れは図(c)のようになる。ここで流入流量は最大となり、これ以上フロープラグを開いても変わらない。さらにフロープラグを開くと出口からの流出流量はさらに増えようとするが、流入流量が増えないために流出流量も増えるわけには行かない。出口面積 $A_{e(d)}$ が $A_{e(c)}$ より大きくなっても流出流量が増えないためには、出口での全圧 p_w が下がらなければならない。よって次の式が成り立つ。

$$P_{\infty\omega} A_{e(c)} = P_w A_{e(d)}$$

すなわち図(d)の衝撃波は、その後の全圧 P_w が上式を満たすような位置で安定する。

ビトーインテークは安定だが、超音速域での減速を垂直衝撃波のみに頼っており圧力回復率が低い。垂直衝撃波前後の全圧比のグラフ(図2)からわかるように、 $M_{\infty}=1.3$ ならば圧力回復率98%ではよいが、 $M_{\infty}=1.6$ になると90%まで落ち、かなり悪くなる。 $M_{\infty}=2.0$ では72%で全く問題外になってしまう。

以上のように垂直衝撃波による全圧損失を抑えるためにはマッハ数を1.3以上で垂直衝撃波を発生させてはならないことがわかる。

2.1.2 マルチショックインテーク

ビトーインテークの圧力回復率の低さを改善するために、垂直衝撃波の前に斜め衝撃波を発生させてマッハ数を少しずつ下げていくようにしたものがマルチショックインテークである。図5(a)は斜め衝撃波ひとつ、垂直衝撃波ひとつの2ショックインテーク、(b)は斜め衝撃波が二つの3ショックインテークの例である。2ショックインテークは理論上、主流マッハ数 $M=1.5$ で圧力回復率98%、 $M=2.0$ で90%、 $M=2.5$ で74%であり、ビトーインテークと比べやや改善される。3ショックインテークでは $M=2.0$ で95%、 $M=2.5$ で87%、 $M=3.0$ で74%と、かなり高速域まで

高い圧力回復率が保たれる。このようにショックの数を増やし、一つ一つのショック前後の圧力比を小さくした方が効率が良い。これをつき詰めて行ったのが等エントロピ圧縮を用いたインテーク(c)である。等エントロピ圧縮はプラントルマイヤーの角を回る流れの逆向きであり、その名の通り損失がない。実際には幾何形状から来る制約で、等エントロピ圧縮だけで超音速までは減速できず、最後に垂直衝撃波と組み合わせなければならず図(c)のようになるが、このとき理論的には $M=2$ で99%、 $M=3$ でも96%程度の圧力回復率が得られる。

マルチショックインテークの欠点は主に、1) 斜め衝撃波を発生させるためにランプ面を設けるため、その壁面に境界層が発達し摩擦損失および境界層剥離の原因となる。2) ショックの数を増やすと、すなわち効率を良くしようとすると、流れの転向角が大きくなりカウルの外部抗力が増大する。の二つが挙げられる。このうち後者の問題を解決するのが次の内部圧縮インテークである。

2.1.3 内部圧縮インテーク

内部圧縮インテークの特性を理解するために、ビトーインテークを形状を変え、内部圧縮できるようにした空力ダクトを用いて解説する(図6)。このインテークをフロープラグ全閉の状態から少しずつ開けていくと、2種類の状態が考えられる。まず図(a)の様にカウルに垂直衝撃波が付着したときにスロート部のマッハ数が1以下の場合である。この場合さらにフロープラグを開けると図(b)に移る。この状態を「インテークが始動した」と呼ぶ。一方図(c)のように、垂直衝撃波が付着するよりも先にスロート部のマッハ数が1になると、それ以上フロープラグを開けてもスロートより上流には影響が及ばず、図(d)のようにインテーク前のバウショックはカウルに付着しない。この状態を不始動状態と呼ぶ。

さて(特別な工夫無しに)図(b)の流れが成立するインテークを「自己始動するインテーク」と呼ぶ。自己始動インテークはスロートの高さに制限があり、あまり狭くできない。スロートまでの縮小流路部で超音速圧縮が行なわれるから、スロート高さが制限されるとスロートマッハ数を余り低くできず、十分な超音速圧縮が行えない。自己始動インテークでは主流のマッハ数 $M_\infty=2$ でスロートマッハ数 $M_t=1.8$ 、 $M_\infty=3$ で $M_t=2.7$ 程度であり、わざわざ内部圧縮を行なう意味がほとんど無い。一方、スロートマッハ数を充分下げ効率の良い内部圧縮インテークにしようとすると、自己始動しなくなってしまう。この場合、インテークを始動させるためには、抽気するか、可変形状にするかなければならない。

図7は可変形状インテークの、形状と流量と圧力回復率の関係を示している。図の(a)は不始動状態で流量も圧力回復率も小さい。ここで可変機構を用いてスロートを広くすると(b)、ショックをインテーク内部に吸い込むことができ流量が確保できる。次にスロートを狭くすると(c)、スロートマッハ数が下がり圧力回復率が上がる。さらにフロープラグを適当に調節すると垂直衝撃波がスロート近くまで移動し(d)、圧力回復率は最大となる。ところが(d)点よりさらに背圧が上がるとショックがスロートより前に出て、瞬間的に(a)点に移行してしまい、一旦(a)点に移ると再び(b)、(c)を経由しないと(d)点まで戻れない。このように可変形状インテークには動作にヒステリ

シス性がある。

一方、縮小流路部を穴開き壁で作り、そこから抽気することで始動性を確保する方法もある。この場合は流路縮小部でも(それを補償するだけの抽気を行えば)安定に垂直衝撃波が存在し得るため、ヒステリシス性は無くすることができる。しかし穴開き壁は流れに乱れを発生させ、また抽気した場合は抽気による流量損失が少なくないのが欠点である。

2.1.4 混合圧縮インテーク

通常は内部圧縮だけのインテークではなく、外部圧縮と内部圧縮とを組み合わせで用いる。これは混合圧縮インテークと呼ばれ、例えば図8のような形状をしている。

内部圧縮を行なう上での問題点は、流路壁に衝撃波が当たることである。境界層のある流路壁に衝撃波が入射すると、衝撃波による急激な圧力上昇によって境界層が剥離する恐れがある。インテークでは剥離は乱流混合による全圧損失を招くだけでなく、流路が閉塞し不始動状態へ遷移する原因ともなり得る。それゆえ剥離を抑制することは極めて重要な課題である。図8のようなインテークの場合、斜め衝撃波や等エントロピ圧縮波の当たる壁面や、垂直衝撃波の足の部分などで特に剥離が起きやすい。この剥離を抑制するために、境界層吸い込みを行なうという方法がある。境界層吸い込みには図9に示したように、穴開き壁タイプとスリットを開けるタイプとがある。前者の例が図(a)でporous bleedと呼ばれる。後者は図(b)のram scoop型(せき止め型)とflush型(面一型)とがあり、flush型にはさらに図(c)のnarrow型と図(d)のwide型とがある。図(a),(b),(c)は境界層吸い込みを主な目的としたものであるが、図(d)のwide flush bleed型は、境界層吸い込みの他、始動性やショックの安定性の為の抽気も兼ねることを目的としており、設計点外でも余り性能が悪くならないことが期待される。この形のインテークはコンコルドに採用されており、同様な理由で本研究で対象とした模擬インテークもこのタイプである。

2.1.5 インテーク内の流れの分類

インテーク内の流れの状態には、典型的なものに対しては呼び名がついている。簡単な例を以下に示す。

マルチショックインテークを例にとると、フローラグ位置によって流れの状態が図10のように変わる。McDounell Douglas 研究所のSajbenら[16]の分類によれば、(a)は設計点の流れの状態でクリティカルポイントと呼ぶ。(b)は(a)より背圧が下がり、衝撃波を吸い込んだ状態であり、スーパー・クリティカルと呼ぶ。背圧が上がり、場合は衝撃波が前方に出てしまった場合(c)は、サブ・クリティカルと呼ぶ。また、(a),(b)ではインテークは始動状態であり、(c)は不始動状態である。

またディフューザ部の流れに関しては、図11に示すように(a)上壁の剥離、(b)下壁の剥離、(c)側壁の剥離などが起こることが知られている。

2.1.6 インテークの設計について

Coltrin[17]によれば、インテーク設計の目標は設計点での高い性能の他に、1) off-designでの性能、2) ショックに安定性のあること、3) 抽気が少ないこと、4) 可変機構に無理のないこと、5) 境界層制御のあること、6) エンジンの要求する空気流量が供給できること、7) 軽いこと、8) 外部抗力の小さいこと、9) 不始動しにくいこと、再スタートできること、10) シールの必要な場所が少ないこと、などが挙げられる。これらの点を全て満足することは困難としても、適当な妥協点を見出すなくてはならない。また単体でうまく動作しても、エンジンの他の要素と組み合わせるとうまく動かないことなどがありうる。このような設計作業はデータが少ないこともあって現在は設計者の勘に頼っており、数値解析にはこれらのデータを補うことが求められている。

2.2 衝撃波 / 乱流境界層干渉現象

インテーク内の流れ場を最も特徴づけるものは衝撃波 / 乱流境界層干渉 (Shock / Boundary Layer Interaction, SBLI と略す) 現象である。SBLI 現象とは、衝撃波が乱流境界層に影響して境界層の厚さを変え、または剥離させ、その事が逆に衝撃波を変形させるという、衝撃波と乱流境界層の相互干渉により発生する複雑な現象の事である。この現象は古くから興味を持たれ、多くの研究が行なわれている。二次元の SBLI 現象は流れや衝撃波の形状により幾つかのパターン、例えばコンプレッション・コーナー (Compression corner) 流れ、入射斜め衝撃波 (Incident oblique shock) 流れ、垂直衝撃波 (Normal shock) 流れ、前方ステップ (Forward-facing step) 流れなどに分類されている。Green[18]は、これらの流れ場の定性的な性質や、簡易モデルに基づく予測法などをまとめている。彼によれば、流れ場を主に支配するものは衝撃波前後の圧力比であり、また長さスケールには干渉領域上流の境界層厚さが用いられることが多い。一般に三次元現象は現象の理解が困難だが、三次元の SBLI 現象では比較的取り扱いやすい例として、Swept Shock / Boundary Layer Interaction 問題が良く研究されており、最近では Settle らが詳しい解説 [19] を書いている。

2.2.1 実験による研究

それぞれの流れ場について実験による詳しい研究が数多く行なわれている。垂直衝撃波流れに関しては Seddon[20]の研究が有名である。彼は垂直衝撃波が境界層の剥離の影響で二つの斜め衝撃波に分岐し、そのため すべり面と supersonic tongue が発生することを示した。また入射斜め衝撃波に関しては、Green[21]が衝撃波の反射の詳しい構造を示しており、境界層の剥離の大きい場合の反射波は、連続した衝撃波・圧縮波・膨張波・圧縮波から成る構造を持つことを明らかにした。

NASA Ames 研究所の Reda らは、入射斜め衝撃波の実験を行なった [22, 23]。彼らは断面が 8inch (20.32cm) 四方の超音速風洞を用い、風洞の壁にできた乱流境界層にショックジェネレータで発生させた斜め衝撃波を入射させて実験を行なった。主流のマッハ数は 2.9、壁面は断熱、気温は 291K、境界層厚さは 1.694cm、境界層厚さを基にしたレイノルズ数 Re_{δ_0} は 0.97×10^6 であった。

目的は剥離の始まる限界を調べることであり、斜め衝撃波の偏角を 5° から 13° まで変化させて実験を行なった。それによれば偏角 9° を越えると剥離が始まり、このとき圧力比は約3であった。彼らの測定は、それ以前(1950年代)に行なわれた実験結果と良く一致したが、オイルフローパターンや、スパン方向の測定結果から、三次元性が存在することが確認された。この三次元性はショックジェネレータが風洞側壁の境界層と干渉することによって起きると考えた彼らは、さらにショックジェネレータに側壁を付けて、風洞側壁境界層の影響を受けないように改良した模型で実験を行なったが[24]、この場合はジェネレータとジェネレータ側壁との隅部で流れが剥離し、二次元性の良い流れ場はやはり形成されなかった。

Law は、マッハ数 2.96、 $Re_{\delta_0}=10^5 \sim 10^6$ のコンプレッション・コーナー流れの実験を行なった[25]。彼は剥離域の無次元長さ(δ_0 で無次元化)が、 Re が増えると小さくなり、剥離の起きる限界の角度は Re が増えると大きくなることを示した。また、入射斜め衝撃波の実験も行なっており[26]、マッハ数、レイノルズ数を同じに設定すると、コンプレッション・コーナーで 15° 、入射斜め衝撃波の偏角は 9° が剥離の限界であることを示した。これらはどちらも圧力比で約3であり、剥離の起きる圧力比は流れの形態によらない。しかし再付着位置は流れの形態に左右され、コンプレッション・コーナーの方が剥離域が小さい。彼の入射衝撃波の実験では風洞側壁境界層の影響を排除するために、ショックジェネレータの端が風洞側壁境界層の中に入らず、しかも端の影響が計測部に及ばない程度にジェネレータの幅を狭くして、二次元性の良い実験を行なった。

プリンストン大学の Settles らはコンプレッション・コーナーの実験を行なった[27]。彼らは $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ の風洞に、 8° 、 16° 、 20° 、 24° のコンプレッション・コーナーを設置して実験を行なった。マッハ数は2.8、全温は268K、 $Re_{\delta_0}=1.7 \times 10^6$ であった。彼らは油膜、シャドウグラフの可視化の他、壁面静圧分布、ピトー管による速度分布、プレストン管による壁面摩擦係数分布の測定を行なっている。彼らの実験では 8° では剥離せず、 16° は剥離のし始めであり、 20° と 24° では剥離した。油膜の写真をみると、剥離線、再付着線が波打っている。つまり、ゲルトラー渦が存在して、必ずしも二次元性の良い流れ場ではない可能性がある。

またプリンストン大学の Dolling らは、コンプレッション・コーナー流れの剥離衝撃波の非定常性に焦点を当てて実験を行なった[28]。彼らは $M=3$ 、 $Re_{\delta_0} \approx 10^6$ のコンプレッション・コーナー流れの壁面静圧の非定常測定を行なった。これによると、剥離点、再付着点近傍で大きな圧力変動があり、また剥離衝撃波の非定常性が、間欠的な圧力信号を生み出していた。定常測定で計られている圧力はこの低周波振動の平均値であり、また良く用いられている流れ方向の壁面静圧分布の図で静圧上昇が開始する点は、実は衝撃波の移動範囲の最上流点である。彼らの平均静圧測定結果は Settles らのそれと少し異なり、コンプレッション・コーナーの実験の困難さと不確かさ、データの理解の仕方などに問題があることを示した。

これらをまとめると、1) マッハ数3程度のSBLI流れの場合、圧力比が3を越えると剥離する。2) 角度の急なコンプレッション・コーナー流れが剥離している場合は、二次元性や定常性に疑問が残る。

ところで、境界層が厚い管内流やダクト流れで垂直衝撃波が発生した場合、流路の幅 h と上流境界層の厚さ δ との比 δ/h が小さい場合は単一の衝撃波となるが、大きくなると複数の垂直衝撃波が発生し、さらに δ/h が大きくなると連続した斜め衝撃波となることが知られている。この現象は Crocco により擬似衝撃波 (pseudo-shock wave) と名付けられたが [29]、擬似という曖昧な言葉が誤解されやすいのを嫌ってか、衝撃波列 (shock train)、複衝撃波 (multiple shock) などと呼ぶ人も多いようである。擬似衝撃波に関する研究も古くから数多く行なわれており、擬似衝撃波による圧力変化を予測する幾つかの手法が提案されている [30]。擬似衝撃波の構造は複雑でありその詳しい測定は困難であるが、ワシントン大学の Om らの実験 [31] や、フロリダ大学の Carroll らの LDV をもちいた乱流統計量を含めた測定 [32, 33] などが行なわれている。

2.2.2 数値解析による研究

これらの SBLI 流れを数値予測するにあたり困難が予想される点は、衝撃波の存在と、乱流境界層の剥離の二点である。近年の数値解析技術によれば、衝撃波は高解像スキームを用いることで比較的高精度にシミュレートすることができる。一方、乱流境界層の数値予測は精度の良いのは剥離のない流れの場合に限られ、剥離のある流れの場合、定性的な解以上のものを求めることは現状では困難である。次にこれまでに発表された数値計算による SBLI 流れの予測の試みをまとめてみる。

NASA Ames 研究所の Viegas と Horstman は、0 方程式モデル、1 方程式モデル、Jones-Laundery モデル、Wilcox-Rubesin モデルを、垂直衝撃波流れ、入射斜め衝撃波流れ、コンプレッション・コーナー流れに適用し、特に優れたモデルは無いことを示した [34]。壁面静圧や C_f 値を比較した結果、大まかに言って剥離のない場合は精度良く予測し、剥離のある場合はあまり良く合わなかった。

Shang と Hankey Jr. は Cebesi-Smith のモデル [35] を修正した渦粘性モデルを用いて、コンプレッション・コーナー [36] と、入射斜め衝撃波 [37] の計算を行なった。彼らは急激な加減速の直後の流れ場では、レイノルズ応力が新しい平衡状態まで距離の指数関数的に変化していくと考え、干渉領域の直前の渦粘性性と局所的な渦粘性性とを、干渉領域の長さの指数関数を用いた比率でブレンドする手法を提案し、これを緩和 (Relaxation) モデルと呼んだ。彼らは Law の実験と比較し、良く合った結果を示している。しかし干渉領域の位置を検知し、また流れ場に応じて定数を変えたりするなど結果を合わせるための工夫をしており、複雑なショックがある場合や三次元流れなどにも適用できる汎用性は無いように思われる。

Visbal と Knight は二次元コンプレッション・コーナーに対し三種類の Baldwin-Lomax モデルを適用し、実験と比較した [38]。彼らの用いたのは、1) 普通の Baldwin-Lomax モデル。2) BL モデル中の関数 F が2つの極大値を持つ場合は y の大きい方の極値を選び、また剥離点で τ_w が0になって渦粘性が異常に小さくなる現象を避けるため、ダンピング関数に τ_w の代わりに局所的な τ を用いる方法。3) Shang と Hankey の緩和モデル。の三つである。彼らは Settles らの実験と比較して計算を行なった。その結果によると、普通の Baldwin-Lomax モデルは実験では剥離の起こらない

16°で剥離を起こしてしまい、また F の二つの極大点が入れ替わることで μ_t が大きく変動し、解が定常にならなかった。そのような現象を抑えた他の修正モデルも、衝撃波後の速度分布や C_f 分布は合わなかった。ただし緩和モデルは剥離がある場合も静圧分布だけは比較的合うようであった。

McDonnell Douglas 研究所の Agarwal らは、Baldwin-Lomax モデル、Johnson-King モデル [39, 40]、Jones-Launder モデルを、二次元の垂直衝撃波、入射斜め衝撃波、コンプレッション・コーナーに適用して比較した [41]。彼の結果も、剥離のない場合はどのモデルもまあまあ合うが、剥離のある場合は合わないというものであった。しかしその中では Johnson-King モデルが比較的良好な結果を示した。また格子点の粗さは解に大きく影響を及ぼすため、第一格子点の y^+ が 1 以下であることが望ましいとした。

Viegas らは、剥離流でも適用できるように特に工夫した壁法則を用いて、SBLI 流れを計算している [42]。この壁法則によるモデルは特に精度が良いとは思われないが、計算格子点数が少なく済むため有用である。しかし三次元計算に適用する場合には本質的な困難を伴うであろう。

Rubesin は二方程式モデルの範囲内で、多くの実験結果と計算結果とを比較しているが [43]、精度良く実験を再現するモデルは無いようであった。

擬似衝撃波に対する数値解析に関しては、まず Carroll らが垂直衝撃波列の数値解析を行なっている [44]。主流のマッハ数は 1.61、境界層厚さと流路半幅の比が 0.32 という、かなり発達した内部流に対して計算を行ない、乱流モデルには Wilcox-Rubesin モデルと Baldwin-Lomax モデルを用いた。彼らの計算は第一格子点の $y^+ \leq 12$ というかなり粗い格子を用いており、その妥当性には疑問がある。Wilcox-Rubesin モデルでは第一衝撃波は二つの斜め衝撃波に分岐し、それ以後の衝撃波は分岐が起きず下流に行くに従いだんだん弱くなっていくという定性的な結果であった。また Baldwin-Lomax モデルではそのような構造は全く出なかった。

Rockwell の Lin らは、斜め衝撃波列 [45] と垂直衝撃波列 [46] の数値解析を行なった。二次元の定断面積ダクト内の $M=1.8$ の流れで、斜め衝撃波列と垂直衝撃波列の発生するマッハ数の違いや、境界層厚さの違いなどを調べた。彼らは乱流モデルに Goldberg の逆流モデル [47] を用いている。このモデルは実験結果の考察に基づき逆流領域の乱流量を代数的に定め、逆流域にこれを適用するものである。逆流域を検知して特別に扱わなければならないので、複雑な流れ場や三次元問題には適用困難と思われるが、二次元境界層流れに対しては Johnson-King モデルと同様に良い結果を示すようである。

これら、計算による研究の現状をまとめると、1) 剥離がない場合は、どの乱流モデルも良い予測精度を示し、剥離のある場合は、どのモデルも今一つ合わない。2) 剥離でも合うように特に工夫されたモデルも幾つか試みられているが、特に良いものはなく、その汎用性は (特に三次元計算に対して) 疑問である。

2.3 結び

この章では、超音速インテーク内の流れと、その中に発生する衝撃波 / 境界層干渉現象について調べた。超音速インテーク内では剥離を伴った複雑な流れが発生する恐れがあり、数値解析においては剥離が起きた場合、精度が良くないことがわかった。この後の章で超音速インテーク内の流れの数値解析を行なうが、困難を伴うことが予想される。

第3章 数値解法

流れの基礎方程式には三次元一般座標系の保存形レイノルズ平均圧縮性N.S.方程式を用い、併せて完全ガスの状態方程式、粘性係数に関するサザーランド則、ストークスの仮定を用いた。

数値解法はBeamとWarming[48, 49]による解法を基礎とした。Beam-Warming法は陰解法の差分法である。この方法では、保存変数の非線形関数である流束ベクトルを局所的に線形化することで陰解法を実現している。また多次元での計算効率を大幅に改善したのが、近似因子分解法の採用であった。本研究では松尾[50]を参考にしてBeam-Warming法を基礎に、時間離散化にはオイラー陰解法を用い、空間離散化では、左辺(陰解法部)にPulliam-Chauseeの対角化、Steger-Warmingの風上化、大林・藤井の不完全LUD分解法、局所時間刻みを用いて、計算を簡略、高速化した。右辺(陽解法部)には、Roeの近似リーマン解法や高次精度差分からなるChakravarthy-OsherのTVDスキームを用いて、高精度化を図った。また複雑な計算領域に対応するために、複数の計算領域を接合して計算を行なった。

乱流モデルにはBaldwin-Lomax代数モデルと、Jones-Launder, Chienなどの低レイノルズ数型の $k-\epsilon$ モデルの適用を試みた。衝撃波/乱流境界層干渉現象を乱流モデルで扱うには、1)圧縮性、2)境界層の剥離、の二つの問題がある。まず圧縮性に関しては、境界層流れの場合マッハ数5以下ならばFavre平均を用いることにより形式的に非圧縮性の乱流モデルをそのまま使うことができる。剥離に関しては、定量的に満足の行く結果が得られるモデルは現状では存在しないが、このため本研究では計算量が少ない代数モデルを主に用い、 $k-\epsilon$ モデルの可能性も探ってみた。

この章では、まず3.1節で圧縮性流体において成立する諸関係式を確認し、次に3.2節にナビエ・ストークス方程式を示し、その無次元化、座標変換を行なう。3.4～3.7節では、離散化と数値解法について詳しく説明する。3.8節では複合格子法について概説し、最後に3.9節で、本研究で用いた乱流モデルとその数値解法を示す。

3.1 圧縮性流体力学基礎

はじめに圧縮性流体の基本的事項を簡単に確認しておく。各関係式の詳しい導出は流体力学、熱力学の教科書(例えば[51, 52])を参照して頂きたい。

3.1.1 完全気体の状態量

	記号	次元
圧力	p	(Pa)
密度	ρ	(kg/m ³)
温度	T	(K)
内部エネルギー	e	(J/kg)
エンタルピー	$h \equiv e + \frac{p}{\rho}$	(J/kg)
定容比熱	c_v	(J/kg · K)
定圧比熱	c_p	(J/kg · K)
比熱比	$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$	空気の場合 1.4
気体定数	R	(J/kg · K)
音速	a	(m/s)

また次の式が成り立つ。

$$c_p = c_v + R, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

さて完全気体を仮定すると、完全気体の状態方程式

$$p = \rho RT \quad (3.1)$$

及び、

$$e = c_v T, \quad h = c_p T \quad (3.2)$$

が成り立つ。

次に完全気体が等エントロピ的に変化する場合は、

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \quad (3.3)$$

が成り立つ。ある基準状態を添字 0 で示すことにすると、上式は完全気体の状態方程式を用いて、

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma(\gamma-1)} \quad (3.4)$$

とも表せる。音速 a は、音波を微小擾乱の伝播と考えることで、連続の式、完全気体の等エントロピの式から導くことができ、

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad (3.5)$$

内部エネルギー、エンタルピーに関しては次式が成り立つ。

$$e = c_v T = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)}$$

$$h = c_p T = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

3.1.2 流れのある場合

この場合はさらに、流速および全エネルギー(よどみ点エネルギーとも言う)などが導入される。

記号	次元
流速 V	(m/s)
マッハ数 $M \equiv \frac{V}{a}$	
全エネルギー $E \equiv e + \frac{1}{2}V^2$	(J/kg)
全エンタルピー $H \equiv h + \frac{1}{2}V^2$	(J/kg)
全温 T_t	(K)
全圧 P	(Pa)

このとき、質量、運動量、エネルギー、の保存則が以下のように成り立つ。簡単のために管路あるいは流路に沿った一次元流を仮定する。

質量保存の式 管路あるいは流路の断面積を A とすると、質量保存の式(あるいは連続の式)は、
 $\rho VA = \text{const.}$ である。

運動量保存の式 これは質点の力学に於けるニュートンの運動方程式に相当し、また非圧縮性流体ではベルヌーイの式となる。ある検査体積に対する運動量の流入流出と圧力、剪断力の釣り合いから求める式であるが、管路に沿う積分という形になるので使いづらい。ここでは省略する。

エネルギー保存の式 は、単位時間当たり加えられた熱量 $= \Delta H$ で表され、特に断熱流の場合、
 $H = \text{const.}$ である。

全温、全圧は流れをある状態から断熱、かつ可逆的にせき止めた状態での温度、圧力のことであり、よどみ点温度、よどみ点圧力とも言う。断熱の仮定よりエネルギー保存の式が成り立つので

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}RT + \frac{1}{2}V^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_t$$

書き直して、全温は

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{(\gamma-1)V^2}{2\gamma RT} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \quad (3.6)$$

で求まる。全温は全エンタルピーを温度の尺度で表したものであり、断熱流れでは(可逆でなくても)全温は一定に保たれる。一方 全圧は可逆条件により等エントロピーの式を用いて

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{T_t}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.7)$$

で求められる。

3.1.3 先細ノズルの流れ

この節の内容は当面の議論には必要ないが、流体機械内部の流れがチョークした時の流量を算出するときに必要となるので、ここに記しておく。

一次元管路内の単位面積当たりの流量は、よどみ点での密度、音速、および全圧を用いて次のように表される。

$$\rho V = \rho_0 a_0 M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.8)$$

$$= \rho_0 a_0 \left(\frac{p}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (3.9)$$

先細ノズル、あるいはラバルノズルでは、全圧に対するスロート部の圧力の比が、

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

で示される値より小さくなるとスロートでチョークが起きる。空気の場合 $\gamma=1.4$ より $\frac{p}{P}=0.528$ である。またチョーク時の流量 m はスロート部を添字 * で示すと、

$$m = \rho_* V_* A_* = \rho_0 a_0 A_* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.10)$$

$$= \frac{A_* P}{\sqrt{RT_i}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (3.11)$$

である。断熱流れの場合 全温は一定であるから、一次元管路の最大流量 (チョーク流量) は、スロート部の高さ A_* と流れの全圧 P とに支配される。

3.2 圧縮性ナビエ・ストークス方程式

保存形で書かれた圧縮性ナビエ・ストークス方程式は、質量保存の式、運動量保存の式、エネルギー保存の式の三つからなる (例えば [51, 53])。

質量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (3.12)$$

運動量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \sigma_{ij}) = 0 \quad (3.13)$$

エネルギー保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho H u_j - \sigma_{ij} u_i + q_j) = 0 \quad (3.14)$$

ここではデカルト座標系を用いており、各座標方向を (x_1, x_2, x_3) あるいは (x, y, z) で表し、各方向の速度成分は (u_1, u_2, u_3) あるいは (u, v, w) で表す。総和規約に従い、各式は j に関して総和を取り、エネルギー式では i に関しても総和を取る。運動量の式の i は総和ではなく、二次元計算では $i=1, 2$ の二つの式、三次元では $i=1, 2, 3$ の三つの式になる。

これらの方程式は物理的な保存則から直接導かれ、それゆえ保存形の微分方程式と呼ばれる。形式的には全ての項に微分が掛かっている方程式を保存形と呼ぶ。数値解析を行なう上では保存形で書かれているということは重要である。なぜなら保存形の方程式は積分形式に書き換えることができ、数値積分を行なう前に既に一回解析的に積分したことに相当するため、計算精度が良くなるからである。また差分を行なうとき保存則を満たすように注意して離散化できるため、誤差の入り方が物理的に不自然になりにくい [54]。一方、直接計測できる諸量 (primitive variable)、即ち密度 ρ 、速度 u, v, w 、圧力 p 、を変数とした形を、原始形式の方程式と呼ぶ [53]。原始形式の方程式と保存形式の方程式とは、数学的にはもちろん等価である。原始形式は数値解析に直接用いるには不利な事が多いが、理論的な解析などで保存形よりも扱いが容易になることがある。

さて、ニュートン流体を仮定し、またストークスの仮定に基づき第二粘性係数を $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ とすると、応力テンソル σ_{ij} は次式のようにになる。

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (3.15)$$

熱流束 q はフーリエの熱伝導則を用いて、

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\gamma \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

である。ここで k は熱伝導率、 Pr はプラントル数である。本研究は作動流体が空気なので $Pr=0.72$ を用いた。

粘性係数 μ は $10^1 \sim 10^6 Pa$ の範囲で圧力にはほとんど無関係で、温度のみに依存する [55]。温度 T_0 のときの粘性係数 μ_0 がわかっているとき、温度 T のときの粘性係数 μ は、次のサザーランド則で示される。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T_0 + C}{T + C} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.17)$$

ここで C はサザーランドの定数で、空気では $C=117$ である。

3.2.1 無次元化

数値解析を行なうにあたっては、各変数を無次元化しておくとう便利である。無次元化により各変数の値は1のオーダーになり、計算中の値が計算機の実数表現の範囲外になる危険性が減る。また適切に無次元化することにより、相似則をはじめ現象の理解に役立つことが多い。

無次元化には、ある基準状態での、密度 ρ_∞ 、音速 a_∞ 、粘性係数 μ_∞ およびなんらかの代表長さ L を用いる。基準状態には、計算開始前に確定し計算中も値の変わらないような状態を選ぶべきである。外部流の場合は主流が存在するのでそれを基準状態とすればよいが、そもそも主流の存在しない内部流の場合は注意が必要である。無次元化した変数を肩添字*で表すことにすると、無次元と有次元の変換は次式の通り。

$$\rho = \rho^* \rho_\infty$$

$$u = u^* a_\infty$$

$$x = x^* L$$

$$t = t^* \frac{L}{a_\infty}$$

$$\mu = \mu^* \mu_\infty$$

また、これから派生する諸量の無次元化は、エネルギー類 e, E, h, H は $e = e^* a_\infty^2$ の様に、また圧力は $p = p^* \rho_\infty a_\infty^2$ である。

これらを有次元のナビエ・ストークス方程式(式(3.12)~式(3.14))に代入すると、結果は、全ての変数に肩添字*を付け、 μ のかかる項に $\frac{1}{Re}$ を掛けた形となる。ここで Re はレイノルズ数で、

$$Re = \frac{\rho_\infty a_\infty L}{\mu_\infty}$$

である。よって無次元化したナビエ・ストークス方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} \rho^* + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* u_j^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* u_i^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* u_i^* u_j^* + \delta_{ij} p^* - \frac{1}{Re} \sigma_{ij}^* \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* E^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^* H^* u_j^* - \frac{1}{Re} \sigma_{ij}^* u_i^* + \frac{1}{Re} q_j^* \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる。以降、肩添字*は省略する。

3.2.2 ベクトル表記

さて上記の無次元化した保存形ナビエ・ストークス方程式をまとめてベクトル形で表記する。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(F_j - \frac{1}{Re} F_{vj} \right) = 0 \quad (3.19)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + \delta_{ij} p \\ \rho H u_j \end{pmatrix}, \quad F_{vj} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \\ \tau_{kj} u_k - q_j \end{pmatrix}$$

ここで Q は未知変数で、保存変数ベクトルと呼ぶことにする。 F, F_v は Q の関数であり、 F を対流項、または流束ベクトル、 F_v を粘性項、粘性流束ベクトル、などと呼ぶ。なお添え字表記を使わずに全成分を書き下した形を付録 B.1 に示す。

3.2.3 一般曲線座標系

実際の流体機械の流れをシミュレートする為には、物体形状に合わせた形に計算格子を設定しなければならない。差分法では、物理空間内の曲線座標系を、計算空間内のデカルト座標系に写像して、計算空間内で離散化を行なう手法が一般に用いられている。ナビエ・ストークス方程式の一般曲線座標系への変換の手法は Peyret と Viviand[56] や Vinokur[57] によって行なわれ、デカルト座標系とはほぼ同様の形式の方程式となって容易に取り扱えることが示された [58, 59]。以下、物理空間を (x_i) 座標系あるいは (x, y, z) 座標系で表し、計算空間を (ξ_i) 座標系あるいは (ξ, η, ζ) 座標系で表す。

付録 B.2 に従って、座標変換の計量 (metric) $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$ が与えられると、微分の連鎖法則

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \quad (3.20)$$

を用いてナビエ・ストークス方程式 (式 3.19) を座標変換することができ、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(F_j - \frac{1}{Re} F_{vj} \right) = 0 \quad (3.21)$$

となる。この式は j, k について総和を取る。この形は弱保存形と呼ばれ厳密な保存形ではないが、以下のように強保存形に書き換えることができる。解析的な微分は可換であるから、 $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial \xi}$ の順序を変えることができるので、

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.22)$$

が成り立つ¹。よって第二項の $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$ を微分の中に入れることができ、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} (F_j - \frac{1}{Re} F_{vj}) \right) = 0$$

となる。ここで新たに

$$\hat{Q} \equiv \frac{Q}{J} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_k \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} F_j, \quad \hat{F}_{vk} \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} F_{vj}, \quad U_k \equiv \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} u_j \quad (3.23)$$

¹これは差分演算では必ずしも成り立たず、計算誤差の原因となり得るので、成り立つように注意深く離散化する必要がある。

と定義すると、

$$\hat{F}_k = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \\ \rho H u_j \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U_k \\ \rho u_i U_k + \delta_{ik} p \\ \rho H U_k \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

となって、形式的に \hat{F}_k は F_j と似た形になる。添え字 k を j に付け直すと、一般座標系でのナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\hat{F}_j - \frac{1}{Re} \hat{F}_{vj} \right) = 0 \quad (3.25)$$

の様に、再び保存形となった。なお、成分毎に書き下した形を付録B.3に示す。

3.3 差分演算子

ここで今後の説明に用いる差分演算子を定義しておく。まず、ある変数を ϕ の格子点 j での値を ϕ_j と表すことにする。差分演算子を次のように定義する。

$$\text{中心差分} \quad \delta \phi_j = \phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}}, \quad \delta \phi_{j+\frac{1}{2}} = \phi_{j+1} - \phi_j$$

$$\bar{\delta} \phi_j = \frac{1}{2}(\phi_{j+1} - \phi_{j-1})$$

$$\text{前進差分} \quad \delta^+ \phi_j = \phi_{j+1} - \phi_j$$

$$\text{後退差分} \quad \delta^- \phi_j = \phi_j - \phi_{j-1}$$

次にシフト演算子 E を定義する。これは「格子点をつづらす」という演算子で、

$$E \phi_j = \phi_{j+1}$$

$$E^{-1} \phi_j = \phi_{j-1}$$

が、その作用である。前述の差分演算子はシフト演算子を用いて次のように書ける。

$$\delta^+ = (E - 1)$$

$$\delta^- = (1 - E^{-1})$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{2}(E - E^{-1})$$

$$\delta^2 = (E - 2 + E^{-1})$$

3.4 時間差分

時間差分には一次時間精度のオイラー陰解法を用いた。時間ステップを肩添字 n で表し、時間方向のみを離散化した半離散式は次の通り。

$$\frac{\hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\hat{F}_j - \frac{1}{Re} \hat{F}_{vj} \right)^{n+1} = 0 \quad (3.26)$$

ここで、一時間ステップあたりの \hat{Q} の変化量 $\Delta \hat{Q}$ を次のように定義する。

$$\Delta \hat{Q} \equiv \hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n \quad (3.27)$$

また \hat{F}_j, \hat{F}_{vj} を局所的に線形化して、次のように時刻 $n+1$ の値を時刻 n の値で表すと、

$$\hat{F}_j^{n+1} = \hat{F}_j^n + \left(\frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \hat{Q}} \right)^n \hat{Q}^n = \hat{F}_j^n + \hat{A}_j^n \hat{Q}^n \quad (3.28)$$

$$\hat{F}_{vj}^{n+1} = \hat{F}_{vj}^n + \left(\frac{\partial \hat{F}_{vj}}{\partial \hat{Q}} \right)^n \hat{Q}^n = \hat{F}_{vj}^n + \hat{A}_{vj}^n \hat{Q}^n \quad (3.29)$$

となる。ここで、

$$\hat{A}_j \equiv \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \hat{Q}}, \quad \hat{A}_{vj} \equiv \frac{\partial \hat{F}_{vj}}{\partial \hat{Q}} \quad (3.30)$$

は、それぞれ対流項やコビ行列、粘性項やコビ行列と呼ばれる。 $\hat{F}_j, \hat{F}_{vj}, \hat{Q}$ がベクトルなので、 \hat{A}_j, \hat{A}_{vj} は二次元で 4×4 、三次元で 5×5 の行列となる。詳しい導出は付録 B.4 を参照。以下、肩添字 n を省略することになると、式 (3.26) は、

$$\Delta \hat{Q} + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left((\hat{F}_j + \hat{A}_j \Delta \hat{Q}) - \frac{1}{Re} (\hat{F}_{vj} + \hat{A}_{vj} \Delta \hat{Q}) \right) \right] = 0$$

よって、最終的に得られた半離散式は

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\hat{A}_j - \frac{1}{Re} \hat{A}_{vj} \right) \right] \Delta \hat{Q} = -\Delta t \left(\frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{F}_{vj}}{\partial \xi_j} \right) \quad (3.31)$$

(L.H.S.) $\Delta \hat{Q}$ = (R.H.S.)

となる。 I は単位行列を表す。この式の右辺は「R.H.S.」(right hand side)、または「右辺」と呼ばれ、また時刻 n での値から陽的に求まる値であることから「explicit part」、「陽解法部」などとも呼ばれる。また左辺大括弧内は「L.H.S.」(left hand side)、「左辺」、「implicit part」、「陰解法部」、などと呼ばれる。

さて $\hat{Q}, \hat{A}, \hat{F}$ などの変数は空間内に分布している値であるが、それらが一列に並んだ長いベクトルであると考ええる。即ち各要素が \hat{Q} (と言う小ベクトル) であるベクトル、 \hat{A} (と言う小行列) であるベクトル、等々である。すると、式 (3.31) 左辺の微分演算は $\Delta \hat{Q}$ の長いベクトルに対する行列演算として表すことができる。即ち式 (3.31) は、左辺で示される行列の反転を行なうことが主な演算となる。ところでこの行列は、微分演算の差分化の仕方にもよるが、例えば中心差分のような三点差分を用いるとするなら、ほとんどの要素が 0 の疎行列である。特に、空間が一次元であれば三重対角行

列となって、反転は容易である。しかし多次元空間の場合、バンド幅の小さくないブロック三重対角行列になり、厳密に計算すると演算量が大きくなってしまふ。

しかるに式(3.31)を良く見ると、定常解に達した場合 $R.H.S. = \Delta \hat{Q} = 0$ であり、従って定常解の精度は R.H.S. の離散化にのみ依り、L.H.S. の離散化には依らない。それ故、定常解が目的の場合は、左辺はどのように離散化しても(収束しさえすれば)問題はない。その様な根拠に基づき開発された簡略計算法、収束加速法が、近似因子分解法をはじめとする幾つかの収束加速法である。一方、右辺の差分精度は定常解に影響するため注意深く離散化する必要がある。

3.5 左辺の空間差分

式(3.31)の左辺を書き下すと(三次元の場合)、

$$(L.H.S.) \Delta \hat{Q} = \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{A} - \frac{1}{Re} \hat{A}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{B} - \frac{1}{Re} \hat{B}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{C} - \frac{1}{Re} \hat{C}_v \right) \right\} \right] \Delta \hat{Q} \quad (3.32)$$

3.5.1 近似因子分解法

Beam と Warming[48] は、近似因子分解²を用いて左辺を次のように簡略化した。

$$\begin{aligned} (L.H.S.) \Delta \hat{Q} &= L_{\xi} L_{\eta} L_{\zeta} \Delta \hat{Q} \\ L_{\xi} &= I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{A} - \frac{1}{Re} \hat{A}_v \right) \\ L_{\eta} &= I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{B} - \frac{1}{Re} \hat{B}_v \right) \\ L_{\zeta} &= I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{C} - \frac{1}{Re} \hat{C}_v \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

この簡略化に伴う誤差は Δt^2 のオーダーである。各行列は三重対角行列となり、演算はかなり簡略化される。つまり三次元の行列を一週に反転する演算を、三回の一次元行列反転に簡略化している。しかし行列の各要素はそれぞれ 5×5 の小行列であり、小行列の反転演算を行なわなくてはならない。

3.5.2 対角化

Warming と Beam[60] は、対流項ヤコビ行列 \hat{A} が

$$\Lambda_{\xi} = T_{\xi}^{-1} \hat{A} T_{\xi}$$

の様に対角化できることを示した(付録B.5参照)。さらに Pulliam と Chaussee[61] は、対角化を用いて近似因子分解された行列 $L_{\xi}, L_{\eta}, L_{\zeta}$ を次のように簡略化した。

$$L_{\xi} = I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{A} - \frac{1}{Re} \hat{A}_v \right)$$

² 近似因数分解と呼ぶほうがわかりやすいと思うのだが。

$$\begin{aligned}
&= I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_{\xi} \Lambda_{\xi} T_{\xi}^{-1} - \frac{1}{Re} \widehat{A}_v \right) \\
&\simeq T_{\xi} \left\{ I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda_{\xi} - \frac{1}{Re} \Lambda_{v\xi} \right) \right\} T_{\xi}^{-1} \\
&= T_{\xi} L_1 T_{\xi}^{-1} \\
L_1 &\equiv I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda_{\xi} - \frac{1}{Re} \Lambda_{v\xi} \right)
\end{aligned}$$

ただし粘性項ヤコビ行列 \widehat{A}_v は対角化できないので、適当な対角行列を代わりに用いて、例えば

$$\widehat{A}_v = \Lambda_{v\xi}$$

とした。なお、添え字の ξ は「 ξ 方向の」という意味の記号であって、微分を表すわけではない。ここで T_{ξ}, T_{ξ}^{-1} は ξ の関数であるため、偏微分 $\frac{\partial}{\partial \xi}$ の外に出す操作は Δt のオーダーの誤差を含む。

同様に

$$\begin{aligned}
L_{\eta} &= T_{\eta} L_2 T_{\eta}^{-1} \\
L_{\zeta} &= T_{\zeta} L_3 T_{\zeta}^{-1}
\end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= L_{\xi} L_{\eta} L_{\zeta} \Delta \widehat{Q} \\
&= T_{\xi} L_1 T_{\xi}^{-1} T_{\eta} L_2 T_{\eta}^{-1} T_{\zeta} L_3 T_{\zeta}^{-1} \Delta \widehat{Q} \\
&= T_{\xi} L_1 N_1 L_2 N_2 L_3 T_{\xi}^{-1} \Delta \widehat{Q}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
N_1 &\equiv T_{\xi}^{-1} T_{\eta} \\
N_2 &\equiv T_{\eta}^{-1} T_{\zeta}
\end{aligned}$$

である。 N_1, N_2 は計量のみを含み流れ場の変数によらないため計算が容易になると言う利点がある。対角化により、各小行列は対角行列となり五つの三重対角行列を解くことに帰着される。

前述したように粘性項ヤコビ行列は対角化できないため、適当な対角行列 Λ_v で置き換えている。この Λ_v をどのように決めるかは計算の安定性、収束性に影響するが、Pulliam[62]によると粘性項ヤコビ項を全く無視するという方法ですら、多くの場合はうまく行くらしい。本研究では松尾[50]の例にならって、 $\widehat{A}_{v\xi}$ の対角成分の最大値を用いた対角行列

$$\Lambda_{v\xi} = \frac{\gamma}{Pr} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu}{\rho} I$$

を採用した。空気の場合 $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.72$ で、 $\frac{\gamma}{Pr} \simeq 2$ となり、Fujii ら [63] の手法とも一致する。

最終的に得られた対角化を用いて簡略化した演算子は、

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv I + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda_\xi - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \nu_\xi I \right), \quad \nu_\xi \equiv \frac{\gamma \mu}{Pr \rho} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \\ L_2 &\equiv I + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \Lambda_\eta - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \nu_\eta I \right), \quad \nu_\eta \equiv \frac{\gamma \mu}{Pr \rho} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \\ L_3 &\equiv I + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \Lambda_\zeta - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \nu_\zeta I \right), \quad \nu_\zeta \equiv \frac{\gamma \mu}{Pr \rho} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。

3.5.3 風上差分

次に空間微分を差分に置き換える。風上差分は中心差分の持つ不安定性を排除するための方法である。非圧縮流の計算では流速の正負によって差分の方向を切り替えるが、圧縮流の場合は Steger-Warming[64] によれば、特性速度の正負によって切り替えるのが物理的に妥当である。

さて対角化により既に特性速度が計算されているので、Steger-Warming[64] の流束ベクトル分離法による風上化を適用するのは容易である。

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

の各要素を絶対値にしたものを $|\Lambda|$ と定義する。

$$|\Lambda| \equiv \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|)$$

そして以下のように固有値の符号によって Λ を Λ^+ と Λ^- の二つに分ける。

$$\Lambda^+ \equiv \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|)$$

$$\Lambda^- \equiv \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|)$$

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$$

$$|\Lambda| = \Lambda^+ - \Lambda^-$$

固有値が正の場合は後退差分、負の場合は前進差分を行ない、粘性項は中心差分する。3.3節で定義した差分演算子を用いて表すと、

$$\begin{aligned} L_1 &= I + \Delta t \left(\delta_\xi^- \Lambda_\xi^+ + \delta_\xi^+ \Lambda_\xi^- - \frac{1}{Re} \delta_\xi^2 \nu_\xi I \right) \\ L_2 &= I + \Delta t \left(\delta_\eta^- \Lambda_\eta^+ + \delta_\eta^+ \Lambda_\eta^- - \frac{1}{Re} \delta_\eta^2 \nu_\eta I \right) \\ L_3 &= I + \Delta t \left(\delta_\zeta^- \Lambda_\zeta^+ + \delta_\zeta^+ \Lambda_\zeta^- - \frac{1}{Re} \delta_\zeta^2 \nu_\zeta I \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。

3.5.4 不完全 LUD 分解

上式 (3.35) は三重対角行列になるが、さらに大林・藤井の LUD 分解 [65] を用いて下二重行列と上二重行列との積に分解する。粘性項の扱いはやや複雑なので松尾 [50] にならって、以下のように分解する。

3.3節で定義したシフト演算子を用いて式 (3.35) を書き換えると、

$$\begin{aligned} L_1 &= I + \Delta t \left((1 - E^{-1})\Lambda_{\xi}^+ + (E - 1)\Lambda_{\xi}^- - \frac{1}{Re}(E - 2 + E^{-1})\nu_{\xi}I \right) \\ &= -\Delta t E^{-1} \left(\Lambda_{\xi}^+ + \frac{1}{Re}\nu_{\xi}I \right) + I + \Delta t \left(\Lambda_{\xi}^+ - \Lambda_{\xi}^- + \frac{2}{Re}\nu_{\xi}I \right) - \Delta t E \left(-\Lambda_{\xi}^- + \frac{1}{Re}\nu_{\xi}I \right) \\ &= -\Delta t E^{-1} \left(\Lambda_{\xi}^+ + \frac{1}{Re}\nu_{\xi}I \right) + D_{\xi} - \Delta t E \left(-\Lambda_{\xi}^- + \frac{1}{Re}\nu_{\xi}I \right) \end{aligned}$$

ここで

$$D_{\xi} \equiv I + \Delta t \left(|\Lambda_{\xi}| + \frac{2}{Re}\nu_{\xi}I \right)$$

である。そして L_1 を下二重対角行列 L_{1l} と上二重対角行列 L_{1u} の二つに分解する。このとき Δt^2 の誤差が含まれる。

$$\begin{aligned} L_1 &= L_{1l}L_{1u} \\ L_{1l} &= -\Delta t E^{-1} \left(\Lambda_{\xi}^+ + \frac{1}{Re}\nu_{\xi}I \right) + D_{\xi} \\ L_{1u} &= I - D_{\xi}^{-1}\Delta t E \left(-\Lambda_{\xi}^- + \frac{1}{Re}\nu_{\xi}I \right) \end{aligned}$$

L_2, L_3 も同様に分解できる。

3.5.5 まとめ

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} \Delta \hat{Q} &= L_{\xi} L_{\eta} L_{\zeta} \Delta \hat{Q} && (\text{近似因子分解}) \\ &= T_{\xi} L_1 N_1 L_2 N_2 L_3 T_{\zeta}^{-1} \Delta \hat{Q} && (\text{対角化}) \\ &= T_{\xi} L_{1l} L_{1u} N_1 L_{2l} L_{2u} N_2 L_{3l} L_{3u} T_{\zeta}^{-1} \Delta \hat{Q} && (\text{不完全 LUD 分解}) \end{aligned}$$

最終的な解法の手順は

$$\Delta \hat{Q} = T_{\zeta} L_{3u}^{-1} L_{3l}^{-1} N_2^{-1} L_{2u}^{-1} L_{2l}^{-1} N_1^{-1} L_{1u}^{-1} L_{1l}^{-1} T_{\xi}^{-1} (\text{R.H.S.})$$

$$\hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^n + \Delta \hat{Q}$$

である。ここで $T_\zeta^{-1}, N_2^{-1}, N_1^{-1}, T_\xi^{-1}$ は定数行列であるから単なる掛け算である。一方、 L_{1l}^{-1}, L_{1u}^{-1} などは差分演算子を含んだ行列の反転演算を意味している。ここでその計算手順を確認しておく。

ここでは R を未知ベクトル、 S は既知ベクトルとし、 $R_{(j)}, S_{(j)}$ などの添字 (j) は j 番目の要素を表すことにする。まず $R = L_{1l}^{-1} S$ は、

$$\begin{aligned} L_{1l} R &= S \\ \left\{ -\Delta t E^{-1} \left(\Lambda_\xi^+ + \frac{1}{Re} \nu_\xi I \right) + D_\xi \right\} R &= S \\ -\Delta t \left(\Lambda_{\xi(j-1)}^+ + \frac{1}{Re} \nu_{\xi(j-1)} I \right) R_{(j-1)} + \left\{ I + \Delta t \left(|\Lambda_{\xi(j)}| + \frac{1}{Re} \nu_{\xi(j)} I \right) \right\} R_{(j)} &= S_{(j)} \end{aligned}$$

よって適当な境界条件 $R_{(0)}$ を与えてやることで、 $R_{(j)}$ は $j=1$ から j の増える方向に順次求まる。

また $R = L_{1u}^{-1} S$ の方は、

$$\begin{aligned} L_{1u} R &= S \\ \left\{ I - D_\xi^{-1} \Delta t E \left(-\Lambda_\xi^- + \frac{1}{Re} \nu_\xi I \right) \right\} R &= S \\ R_j - \Delta t \frac{\left(-\Lambda_{\xi(j+1)}^- + \frac{1}{Re} \nu_{\xi(j+1)} I \right) R_{(j+1)}}{\left\{ I + \Delta t \left(|\Lambda_{\xi(j)}| + \frac{1}{Re} \nu_{\xi(j)} I \right) \right\} R_{(j)}} &= S_{(j)} \end{aligned}$$

よって、こちらは境界条件 $R_{(nj+1)}$ を与えると $R_{(j)}$ は $j = nj$ から j の減る方向に順次求まる (nj は最大格子点番号)。

3.6 右辺の空間差分

式 (3.31) の右辺を書き下すと (三次元の場合)、

$$(R.H.S.) = -\Delta t \left\{ \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_v}{\partial \zeta} \right) \right\} \quad (3.36)$$

左辺の離散化の精度が定常解を得る場合には重要でなかったのに対し、右辺の離散化の精度は定常解の精度に直接影響する。そのため右辺はできるかぎり精度よく離散化する必要がある。本研究で用いた圧縮性流体の数値解法は、特性の理論を基に双曲型方程式の解法として構成されている。そのため解法の基本的な部分は非粘性流のための解法であり、粘性項を後から付加している。また基本的に一次元解析に基づいているから、多次元問題においては各方向独立に一次元解析を行ない微分値などを決めている。

さて以降、一次元問題に限定する。解を高精度化するに当たっては、1) 格子を細かくする。2) 差分を高次精度化する。の二つの方法が考えられる。低次精度差分のままで格子点数を多くすると、格子点数は少ないままで差分を複雑にすると、同じ精度を出すのにどちらが計算量が少なくて

済むか、あるいは同じ計算量でどちらが精度が高くなるか、という問題であるが、Fletcher[66]によれば、高次精度差分を行なう方が良く、差分は少なくとも2次精度にすべきである。

一方我々は衝撃波 (Shock wave) や、滑り面 (Contact discontinuity) など不連続を含む流れ場の数値解を求めようとしている。このとき不連続点では微分が値を持たないから、微分方程式で書かれた基礎方程式をテラー級数に基づく精度解析で高次精度化した (通常の) 高次精度解法は、不連続点近傍で妥当な解を出さない。不連続点をまたいで高次精度スキームを強引に適用すると振動発散解を招く。不連続点だけを特別扱いしてランキン・ウゴニオの関係をを用いると言う手法も考えられるが、不連続点がどこに現れるか事前にはわからないケースではそのような方法は現実的でない。数値粘性を用いて不連続点近傍に発生した振動を抑える方法は、鋭い衝撃波解を得ることはできず、また不連続のない部分にも非物理的な粘性を与えることになり、非粘性解法ならともかく、粘性解法では好ましくない。高解像スキームはこのような状況に対処するための手法であり、流れ場の状態に応じて差分を切替え、不連続をまたぐような高次精度差分を行なわないようにする方法である。

TVD スキームは高解像スキームの一種で、TVD 条件を満たせば振動発散解が発生しないという事実に基づき、差分スキームに TVD 条件を満たすようにリミタ (制限関数) をかけるものである。結果として得られたスキームは基本的には高次精度であるが、不連続の近傍では一次精度になるので振動解が発生しない。TVD スキームは以下の手順で得られる [53]。

- 一次精度の単調な数値流束を選ぶ。
- 数値流束を高次精度に拡張する。
- 非線形リミタを用いて TVD 条件を満たすように流束を制限する。

本研究では Chakravarthy-Osher の方法 [67, 68] に従い、一次精度の数値流束に Roe[69] の近似リマン解法による風上差分を用い、高次精度に拡張し、minmod リミタを用いて TVD 差分を行なった。

本節では、まず 3.6.1 節で一次元スカラー保存則に対する高次精度 TVD 差分法を導き、3.6.2 節でそれをナビエ・ストークス方程式系の対流項に適用する。さらに 3.6.3 節で粘性項の差分を示す。

3.6.1 一次元スカラー保存則に対する高次精度 TVD 差分法

ここでは Chakravarthy-Osher の方法 [67, 68] に従い、一次元スカラー保存則に対する TVD 条件を満たす高次精度風上差分法を導く。

一次元スカラー保存則

変数 q 、流束 f として

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = 0 \quad (3.37)$$

が、一次元双曲型スカラー保存則である。有限体積法的な考え方を導入して、 j 番目の格子点の周りの検査体積の界面 $x = x_{j+\frac{1}{2}}$, $x = x_{j-\frac{1}{2}}$ での流束を $f_{j+\frac{1}{2}}^*$, $f_{j-\frac{1}{2}}^*$ と定義すると、上式の第二項の空間差分は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^* - f_{j-\frac{1}{2}}^*) = \frac{1}{\Delta x} (1 - E^{-1}) f_{j+\frac{1}{2}}^* \quad (3.38)$$

と書くことができる。 $f_{j+\frac{1}{2}}^*$ は数値流束と呼ばれる。式 (3.37) の空間差分は、数値流束 $f_{j+\frac{1}{2}}^*$ を如何に精度良く求めるか、という問題に帰着することができる。

風上差分法

風上差分法はすでに 3.5.3 節でも述べたように、流束 f を次のように f^+ と f^- の二つの部分に分ける。まず、

$$a \equiv \frac{\partial f}{\partial q}$$

と定義すると a は特性速度 (情報の伝わる速度) となり、

$$\delta f = a \delta q \quad (3.39)$$

が成り立つ。よって流束は特性速度の符号により分離できて、

$$\begin{aligned} a^+ &= \max(0, a), & a^- &= \min(0, a) \\ \delta f^+ &= a^+ \delta q, & \delta f^- &= a^- \delta q \end{aligned} \quad (3.40)$$

である。また、

$$\begin{aligned} f &= f^+ + f^-, & |f| &= f^+ - f^- \\ f^+ &= \frac{1}{2} (f + |f|), & f^- &= \frac{1}{2} (f - |f|) \end{aligned} \quad (3.41)$$

が成り立つ。

さて (一次精度) 風上差分法では $\frac{\partial f^+}{\partial x}$ に後退差分 δ^- 、 $\frac{\partial f^-}{\partial x}$ に前進差分 δ^+ を用いる。(なお、差分演算子は 3.3 節で定義した。)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} (\delta^- f^+ + \delta^+ f^-) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta x} \{ (1 - E^{-1}) f^+ + (E - 1) f^- \} \\ &= \frac{1}{\Delta x} (1 - E^{-1}) (f^+ + E f^-) \end{aligned} \quad (3.43)$$

式 (3.38) と式 (3.43) を比較すると、1 次精度風上差分による数値流束 $f^{*(1)}$ は、

$$\begin{aligned}
 f_{j+\frac{1}{2}}^{*(1)} &= f_j^+ + E f_j^- \\
 &= f_j^+ + f_{j+1}^- \\
 &= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}(|f_{j+1}| - |f_j|) \\
 &= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}(\delta|f_{j+\frac{1}{2}}|) \\
 &= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}(\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \delta f_{j+\frac{1}{2}}^-)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

となる。

高次精度風上差分

一次精度後退差分は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} + o(\Delta x) \\
 &= \frac{1}{\Delta x}(1 - E^{-1})f_j + o(\Delta x)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

二次精度中心差分は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{6}\Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + o(\Delta x^3) \\
 &= \frac{1}{2\Delta x}(E - E^{-1})f_j - \frac{1}{6}\Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + o(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

二次精度後退差分は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3f_i - 4f_{j-1} + f_{j-2}}{2\Delta x} + \frac{1}{3}\Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + o(\Delta x^3) \\
 &= \frac{1}{2\Delta x}(3 - 4E^{-1} + E^{-2})f_j + \frac{1}{3}\Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + o(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

である。

二次精度の後退差分と中心差分を $\frac{1-\phi}{2}$: $\frac{1+\phi}{2}$ の比率でブレンド (ただし $-1 \leq \phi \leq 1$) すると一般化された二次精度後退差分ができる。以後、これを高次精度後退差分と呼ぶことにする。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \frac{1-\phi}{2}(3 - 4E^{-1} + E^{-2}) + \frac{1+\phi}{2}(E - E^{-1}) \right\} f_j \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1-\phi}{2} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1+\phi}{2} \right) \right\} \Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + o(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

右辺第二項は $\frac{1-3\phi}{12}\Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ であるから、高次精度後退差分は、

- $\phi = -1$ で二次精度風上差分
- $\phi = \frac{1}{3}$ で三次精度風上差分
- $\phi = 1$ で二次精度中心差分

となる。本研究では常に $\phi = \frac{1}{3}$ を用いた。

さて、高次精度後退差分を演算子 $\delta^{-(2)}$ で表すことにすると、

$$\begin{aligned}\delta^{-(2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1-\phi}{2} \right) (3 - 4E^{-1} + E^{-2}) + \frac{1+\phi}{2} (E - E^{-1}) \right\} \\ &= (1 - E^{-1}) \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1-\phi}{2} \right) (3 - E^{-1}) + \frac{1+\phi}{2} (E + 1) \right\} \\ &= (1 - E^{-1}) \underbrace{\left\{ 1 + (1 - E^{-1}) \left(\frac{1+\phi}{4} E + \frac{1-\phi}{4} \right) \right\}}_{A \text{ と定義する。}}\end{aligned}$$

同様に高次精度前進差分 $\delta^{+(2)}$ は、

$$\delta^{+(2)} = (1 - E^{-1}) \underbrace{\left\{ E - (E - 1) \left(\frac{1+\phi}{4} - \frac{1-\phi}{4} E \right) \right\}}_{B \text{ と定義する。}}$$

よって高次精度風上差分では

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} (\delta^{-(2)} f^+ + \delta^{+(2)} f^-) \\ &= \frac{1}{\Delta x} (1 - E^{-1}) (A f^+ + B f^-)\end{aligned}\tag{3.49}$$

より、高次精度数値流束 $f^{*(2)}$ は式(3.38)と比較して、

$$\begin{aligned}f_{j+\frac{1}{2}}^{*(2)} &= A f_j^+ + B f_j^- \\ &= f_{j+\frac{1}{2}}^{*(1)} - \frac{1-\phi}{4} \delta f_{j+\frac{3}{2}}^- - \frac{1+\phi}{4} \delta f_{j+\frac{1}{2}}^- + \frac{1+\phi}{4} \delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ + \frac{1-\phi}{4} \delta f_{j-\frac{1}{2}}^+\end{aligned}\tag{3.50}$$

となる。ここで式(3.44)より $f_j^+ + f_{j+1}^- = f_{j+\frac{1}{2}}^{*(1)}$ を用いた。

TVD 条件

一次元スカラー保存則に対する TV (Total Variation) は次の式で定義される。

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$$

TVD 条件 (Total Variation Diminishing) とは「TV が時間とともに増加しない」である。このとき新たな極値が生まれず、解の安定性が保証される。

Harten[70, 71] は、スカラー保存則の半離散式(式 3.38)が

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} (C_{j+\frac{1}{2}}^- \delta q_{j+\frac{1}{2}} + C_{j-\frac{1}{2}}^+ \delta q_{j-\frac{1}{2}}) \quad (3.51)$$

と書けるとき、

$$C_{j-\frac{1}{2}}^- \leq 0, \quad C_{j+\frac{1}{2}}^+ \geq 0 \quad (3.52)$$

ならば TVD であることを示した。

例えば一次精度風上差分は式 (3.42), 式 (3.40) より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_j}{\partial t} &= -\frac{1}{\Delta x} (\delta f_{j+\frac{1}{2}}^- + \delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-}{\delta q_{j+\frac{1}{2}}} \delta q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\delta f_{j-\frac{1}{2}}^+}{\delta q_{j-\frac{1}{2}}} \delta q_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} (a_{j+\frac{1}{2}}^- \delta q_{j+\frac{1}{2}} + a_{j-\frac{1}{2}}^+ \delta q_{j-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

となり、式 (3.51) と見比べると明らかに TVD 条件式 (3.52) を満たすことがわかる。

高次精度 TVD 差分

さて、高次精度風上差分の式 (3.50) をそのまま用いると残念ながら TVD 条件を満たさない。そこで Chakravarthy-Osher[67] にならって制限関数 $\Psi(r)$ を導入する。流束制限した数値流束を $\widetilde{f}^{*(2)}$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^{*(2)} &= f_{j+\frac{1}{2}}^{*(1)} - \frac{1-\phi}{4} \Psi(r_{j+\frac{1}{2}}^-) \delta f_{j+\frac{1}{2}}^- - \frac{1+\phi}{4} \Psi(s_{j+\frac{1}{2}}^-) \delta f_{j+\frac{1}{2}}^- \\ &\quad + \frac{1+\phi}{4} \Psi(s_{j+\frac{1}{2}}^+) \delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ + \frac{1-\phi}{4} \Psi(r_{j-\frac{1}{2}}^+) \delta f_{j-\frac{1}{2}}^+ \end{aligned}$$

ただし、

$$r_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+}{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+}, \quad r_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{\delta f_{j-\frac{1}{2}}^-}{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-}, \quad s_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\delta f_{j-\frac{1}{2}}^+}{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+}, \quad s_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-}{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-} \quad (3.54)$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{s_{j-\frac{1}{2}}^-}, \quad r_{j-\frac{1}{2}}^+ = \frac{1}{s_{j+\frac{1}{2}}^+} \quad (3.55)$$

また b を定数として、制限関数を次のように定義する。

$$\Psi(r) = \min\text{mod}(1, br)$$

$$\min\text{mod}(x, y) = \text{sign}(x) \cdot \max\left(0, \min(|x|, \text{sign}(x) \cdot y)\right)$$

制限された高次精度風上差分スキームは

$$-\Delta x \frac{\partial q_j}{\partial t} = \widetilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^{*(2)} - \widetilde{f}_{j-\frac{1}{2}}^{*(2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - \frac{1-\phi}{4} \left(\frac{\Psi(r_{j+\frac{1}{2}}^-)}{r_{j+\frac{1}{2}}^-} + \Psi(r_{j+\frac{1}{2}}^-) \right) - \frac{1+\phi}{4} \left(\Psi(s_{j+\frac{1}{2}}^-) + \frac{\Psi(s_{j-\frac{1}{2}}^-)}{s_{j-\frac{1}{2}}^-} \right) \right] \delta f_{j+\frac{1}{2}}^- \\
&\quad + [\dots \text{略} \dots] \delta f_{j-\frac{1}{2}}^+ \\
&= \left[1 - \frac{1-\phi}{4} (\min\text{mod}(r, b r_{j+\frac{1}{2}}) - \min\text{mod}(s_{j+\frac{1}{2}}, b)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1+\phi}{4} (\min\text{mod}(r_{j+\frac{1}{2}}, b) - \min\text{mod}(1, b s_{j+\frac{1}{2}})) \right] \delta f_{j+\frac{1}{2}}^- \\
&\quad + [\dots \text{略} \dots] \delta f_{j-\frac{1}{2}}^+
\end{aligned}$$

上式と式(3.53)とを見比べると上式がTVDであるためには大括弧内が非負でなければならない。最も厳しい条件となるのは、+の項が0、-の項が最大になるようなとき、つまり $r_{j+\frac{1}{2}} < 0$, $s_{j+\frac{1}{2}} > b$ の時で、このとき

$$b \leq \frac{3-\phi}{1-\phi}$$

を満たさなければならない。本研究では $\phi = \frac{1}{3}$ を用いたので、 $b = 4$ ならば良いことがわかる。

よって高次精度 TVD 差分の数値流束は

$$\begin{aligned}
\widetilde{f_{j+\frac{1}{2}}^{*(2)}} &= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}(\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \delta f_{j+\frac{1}{2}}^-) \\
&\quad - \frac{1-\phi}{4} \widetilde{\delta f_{j+\frac{3}{2}}^-} - \frac{1+\phi}{4} \widetilde{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-} + \frac{1+\phi}{4} \widetilde{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+} + \frac{1-\phi}{4} \widetilde{\delta f_{j-\frac{1}{2}}^+} \quad (3.56) \\
\widetilde{\delta f_{j+\frac{3}{2}}^-} &= \min\text{mod}(\delta f_{j+\frac{3}{2}}^-, b \delta f_{j+\frac{1}{2}}^-) \\
\widetilde{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-} &= \min\text{mod}(\delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, b \delta f_{j+\frac{3}{2}}^-) \\
\widetilde{\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+} &= \min\text{mod}(\delta f_{j+\frac{1}{2}}^+, b \delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) \\
\widetilde{\delta f_{j-\frac{1}{2}}^+} &= \min\text{mod}(\delta f_{j-\frac{1}{2}}^+, b \delta f_{j+\frac{1}{2}}^+) \\
b &\leq \frac{3-\phi}{1-\phi}
\end{aligned}$$

3.6.2 対流項の差分

さて次に、前節で導いたスカラー保存則に対する高次精度 TVD 差分をナビエ・ストークス方程式に応用する。

特性変数形ナビエ・ストークス方程式

ナビエ・ストークス方程式系(非粘性部分)は、相互に関連した五つの式(三次元)からなる連立方程式であるが、保存変数から特性変数への変換を行なうと独立な五つの方程式となり、それぞれに3.6.1節で説明した一次元スカラー保存則の解法を用いることができる。そのため、まず特性変数形への変換を説明する。

一方向のナビエ・ストークス方程式の非粘性部分は式(3.25)より、

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} = 0, \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi} = 0 \quad (3.57)$$

である。ここでは \hat{Q} の成分を q^i 、 \hat{F} の成分を f^i と書くことにする。左辺の対角化(付録B.5参照)で説明したように、ヤコビ行列 \hat{A} は(三次元では)五つの固有値 λ^i ($i = 1 \dots 5$) を持つ。ここでは対応する右固有(列)ベクトルを R^i 、左固有(行)ベクトルを L^i とし、対角行列を Λ 、対角化の行列を \mathcal{L} 、 \mathcal{R} を次のように定義する。

$$\hat{A} = \mathcal{R} \Lambda \mathcal{L} \quad (3.58)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda^1 \quad \lambda^2 \quad \lambda^3 \quad \lambda^4 \quad \lambda^5), \quad \mathcal{R} = (R^1 \quad R^2 \quad R^3 \quad R^4 \quad R^5), \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} L^1 \\ L^2 \\ L^3 \\ L^4 \\ L^5 \end{pmatrix}$$

となる。式(3.58)を式(3.57)に代入し、 $\mathcal{R}\mathcal{L} = I$ を用いると

$$\mathcal{L} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \Lambda \mathcal{L} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi} = 0$$

以後わかりやすいように出来るかぎりベクトル表記と成分表記を併記する。その際原則として、大文字はベクトル量、小文字はスカラー量を表すことにする。さて、ここで特性変数ベクトル W とその成分 w^i (スカラー) を、次のように定義する。

$$\delta W \equiv \mathcal{L} \delta \hat{Q}, \quad \text{あるいは} \quad \delta w^i \equiv L^i \delta \hat{Q} \quad (3.59)$$

すると、特性変数形のナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial w^i}{\partial t} + \lambda^i \frac{\partial w^i}{\partial \xi} = 0 \quad (3.60)$$

のように、独立した五つのスカラー保存則となる。また特性変数形の流束ベクトルとその成分とをそれぞれ \hat{F}^* , f^* と表すことにし、次のように定義する。

$$\delta \hat{F}^* \equiv \Lambda \delta W, \quad \text{あるいは} \quad \delta f^* \equiv \lambda^i \delta w^i \quad (3.61)$$

特性変数流束ベクトルから保存形の流束ベクトルへの変換は

$$\delta \hat{F} = R \delta \hat{F}^*, \quad \text{あるいは} \quad \delta \hat{F} = \sum_{i=1}^5 R^i \delta f_i^* \quad (3.62)$$

である。

Roeの近似リーマン解法

ナビエ・ストークス方程式系に於いて一次精度の単調な数値流束を求める方法としては、特性量の伝わる方向を考えて流束ベクトルのヤコビ行列の固有値の符号により流束を分離する Steger と Warming[64] の流束ベクトル分離法による風上差分がもっとも基礎的なものと言える。また、Steger-Warming の流束が微分値に不連続点を持つのを改善したのが、Van Leer の方法である。一方、Godunov 法は計算格子点の周りに検査体積を考え、その内部で保存量が一定の値を持ち、検査体積界面に不連続が存在する分布であると考えた場合、ある時間ステップから次の時間ステップまでの時間積分は、検査体積界面でリーマン問題を解くことに帰着できるとしたものである。リーマン問題とは、双曲型方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

に、 $x=0$ で不連続のある初期値

$$Q = \begin{cases} Q_L & x < 0 \\ Q_R & x > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

を与えたときの解の時間発展を解く問題である。この問題の解析解を求めるにはニュートン反復を必要とするため、Godunov 法は計算量が多い。しかも次の時間ステップでの格子点の値を求めるために検査体積内で平均するため、せっかく求めた詳しい情報も無駄になってしまう。つまりリーマン問題を厳密に解く必要はなく、近似リーマン解法で十分だというわけで、Osher[72] や、Roe[69] らの近似リーマン解法が提案された。本研究ではこれらの中でも特に計算量の少ない Roe の近似リーマン解法を用いて、一次精度の風上差分を構成した。Roe の近似リーマン解法の欠点はエントロピ条件を満足しない、即ち膨張衝撃波の存在を許してしまうことであるが、物理的には、圧縮波は進行して行くにつには(圧縮) 衝撃波となるが、膨張波は膨張衝撃波へは向かわない。計算上何らかの理由で膨張衝撃波が発生してしまった場合は、Roe の近似リーマン解法ではそれは消えないけれども、実際には膨張衝撃波が発生するケースはほとんどないため問題は少ない。Roe の近似リーマン解法にエントロピ条件を付加する方法については幾つか提案されている(たとえば [73]) が、本研究では計算量の節約のため用いなかった。

さて、Roe の平均化(付録 B.6 参照) によるヤコビ行列を $\hat{A}_{j+\frac{1}{2}}$ とする。Roe の平均化は、まず格子点 j と $j+1$ の各点の r, u, v, w, H を計算し、それらに密度の平方根 $\sqrt{\rho}$ を加重して平均する。

$$\rho_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_j} \rho_j + \sqrt{\rho_{j+1}} \rho_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_j}u_j + \sqrt{\rho_{j+1}}u_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \\
v_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_j}v_j + \sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \\
w_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_j}w_j + \sqrt{\rho_{j+1}}w_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \\
H_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{\rho_j}H_j + \sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \quad (3.64)
\end{aligned}$$

これらを用いてヤコビ行列 $\hat{A}_{j+\frac{1}{2}}$ を計算すればよい。このヤコビ行列は Roe の平均化の定義より、

$$\delta \hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{A}_{j+\frac{1}{2}} \delta \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}$$

を厳密に満たす。

TVD 条件を満たす高次精度数値流束

次にこのヤコビ行列 $\hat{A}_{j+\frac{1}{2}}$ を対角化する。式 (3.58) と同様に、 $\hat{A}_{j+\frac{1}{2}}$ から $\Lambda_{j+\frac{1}{2}}$, $\mathcal{R}_{j+\frac{1}{2}}$, $\mathcal{L}_{j+\frac{1}{2}}$ (あるいは $\lambda_{j+\frac{1}{2}}^i$, $R_{j+\frac{1}{2}}^i$, $L_{j+\frac{1}{2}}^i$) を求め、固有値を符号によって二つに分ける。

$$\Lambda_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{1}{2}(\Lambda_{j+\frac{1}{2}} + |\Lambda_{j+\frac{1}{2}}|), \quad \text{あるいは} \quad \lambda_{j+\frac{1}{2}}^{i+} = \frac{1}{2}(\lambda_{j+\frac{1}{2}}^i + |\lambda_{j+\frac{1}{2}}^i|)$$

$$\Lambda_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\Lambda_{j+\frac{1}{2}} - |\Lambda_{j+\frac{1}{2}}|), \quad \text{あるいは} \quad \lambda_{j+\frac{1}{2}}^{i-} = \frac{1}{2}(\lambda_{j+\frac{1}{2}}^i - |\lambda_{j+\frac{1}{2}}^i|)$$

とすると、格子中間点での流束差は式 (3.59)、式 (3.61)、式 (3.62) より、

$$\delta W_{j+\frac{1}{2}} \equiv \mathcal{L}_{j+\frac{1}{2}} \delta \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}, \quad \text{あるいは} \quad \delta w_{j+\frac{1}{2}}^i \equiv L_{j+\frac{1}{2}}^i \delta \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}$$

$$\delta F_{j+\frac{1}{2}}^+ \equiv \Lambda_{j+\frac{1}{2}}^+ \delta W_{j+\frac{1}{2}}, \quad \text{あるいは} \quad \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i+} \equiv \lambda_{j+\frac{1}{2}}^{i+} \delta w_{j+\frac{1}{2}}^i$$

$$\delta F_{j+\frac{1}{2}}^- \equiv \Lambda_{j+\frac{1}{2}}^- \delta W_{j+\frac{1}{2}}, \quad \text{あるいは} \quad \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i-} \equiv \lambda_{j+\frac{1}{2}}^{i-} \delta w_{j+\frac{1}{2}}^i$$

$$\delta \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \mathcal{R}_{j+\frac{1}{2}} \delta F_{j+\frac{1}{2}}^+, \quad \text{あるいは} \quad \delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ = \sum_{i=1}^5 R_{j+\frac{1}{2}}^i \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i+}$$

$$\delta \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^- = \mathcal{R}_{j+\frac{1}{2}} \delta F_{j+\frac{1}{2}}^-, \quad \text{あるいは} \quad \delta f_{j+\frac{1}{2}}^- = \sum_{i=1}^5 R_{j+\frac{1}{2}}^i \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i-}$$

となる。よって、一次精度風上差分による流束はスカラー保存則に対する式 (3.44) と見比べて、

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*(1)} = \frac{1}{2}(\hat{F}_j + \hat{F}_{j+1}) - \frac{1}{2}(\delta \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \delta \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^-) \quad (3.65)$$

となる。よって求める流束リミタを用いた高次精度 TVD 差分は式 (3.56) と同様に、以下のように求まる。

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*(2)} = & \frac{1}{2}(\widehat{F}_j + \widehat{F}_{j+1}) - \frac{1}{2}(\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^-) \\ & - \frac{1-\phi}{4}\delta\widehat{F}_{j+\frac{3}{2}}^- - \frac{1+\phi}{4}\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^- + \frac{1+\phi}{4}\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ + \frac{1-\phi}{4}\delta\widehat{F}_{j-\frac{1}{2}}^+\end{aligned}\quad (3.66)$$

$$\delta\widehat{F}_{j+\frac{3}{2}}^- = \mathcal{R}_{j+\frac{3}{2}}\delta\widehat{F}_{j+\frac{3}{2}}^{*-}, \quad \delta\widehat{F}_{j+\frac{3}{2}}^{*-} = \text{Minmod}(\delta F_{j+\frac{3}{2}}^{*-}, b\delta F_{j+\frac{1}{2}}^{*-})$$

$$\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^- = \mathcal{R}_{j+\frac{1}{2}}\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*-}, \quad \delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*-} = \text{Minmod}(\delta F_{j+\frac{1}{2}}^{*-}, b\delta F_{j+\frac{3}{2}}^{*-})$$

$$\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \mathcal{R}_{j+\frac{1}{2}}\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*+}, \quad \delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*+} = \text{Minmod}(\delta F_{j+\frac{1}{2}}^{*+}, b\delta F_{j-\frac{1}{2}}^{*+})$$

$$\delta\widehat{F}_{j-\frac{1}{2}}^+ = \mathcal{R}_{j-\frac{1}{2}}\delta\widehat{F}_{j-\frac{1}{2}}^{*+}, \quad \delta\widehat{F}_{j-\frac{1}{2}}^{*+} = \text{Minmod}(\delta F_{j-\frac{1}{2}}^{*+}, b\delta F_{j+\frac{1}{2}}^{*+})$$

あるいは、

$$\delta\widehat{F}_{j+\frac{3}{2}}^- = \sum_{i=1}^5 R_{j+\frac{3}{2}}^i \delta f_{j+\frac{3}{2}}^{i-}, \quad \delta f_{j+\frac{3}{2}}^{i-} = \text{minmod}(\delta f_{j+\frac{3}{2}}^{i-}, b\delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i-})$$

$$\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^- = \sum_{i=1}^5 R_{j+\frac{1}{2}}^i \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i-}, \quad \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i-} = \text{minmod}(\delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i-}, b\delta f_{j+\frac{3}{2}}^{i-})$$

$$\delta\widehat{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \sum_{i=1}^5 R_{j+\frac{1}{2}}^i \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i+}, \quad \delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i+} = \text{minmod}(\delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i+}, b\delta f_{j-\frac{1}{2}}^{i+})$$

$$\delta\widehat{F}_{j-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{i=1}^5 R_{j-\frac{1}{2}}^i \delta f_{j-\frac{1}{2}}^{i+}, \quad \delta f_{j-\frac{1}{2}}^{i+} = \text{minmod}(\delta f_{j-\frac{1}{2}}^{i+}, b\delta f_{j+\frac{1}{2}}^{i+})$$

ただし、

$$\phi = \frac{1}{3}, \quad b = 4$$

$$\text{minmod}(x, y) = \text{sign}(x) \cdot \max\left(0, \min(|x|, \text{sign}(x) \cdot y)\right)$$

ここで Minmod 関数はベクトルに対する関数で、成分毎に minmod 関数を計算する。すなわちベクトル X, Y, Z の成分を X^i, Y^i, Z^i とすると、 $Z = \text{Minmod}(X, Y)$ の定義は $Z^i = \text{minmod}(X^i, Y^i)$ である。

3.6.3 粘性項の差分

粘性項は二階微分であり本質的に安定であるから、たとえ不連続面をまたいでいようと、無条件に二次精度中心差分を行なっても解の振動を招く心配はない。

粘性項は同じ方向に2回微分する $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \phi \right)$ か、異なる方向に1回ずつ微分する $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right)$ のいずれかのタイプに分けられる(式(B.15), 式(B.19), 式(B.20) 参照)。ここでは添え字 j で ξ 方向の差分を、添え字 k で η 方向の差分を示すことにする。基本的には ξ 方向の微分は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \phi = \phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}}$$

と差分する。ただし最終的に格子点間の値 $\phi_{j+\frac{1}{2}}$ が必要となった場合は、

$$\phi_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_j + \phi_{j+1})$$

で置き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \phi \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \alpha (\phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}}) \} \\ &= \alpha_{j+\frac{1}{2}} (\phi_{j+1} - \phi_j) - \alpha_{j-\frac{1}{2}} (\phi_j - \phi_{j-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_{j+1})(\phi_{j+1} - \phi_j) - \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_{j-1})(\phi_j - \phi_{j-1}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \alpha (\phi_{k+1} - \phi_{k-1}) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{j+\frac{1}{2}} (\phi_{k+1} - \phi_{k-1})_{j+\frac{1}{2}} - \alpha_{j-\frac{1}{2}} (\phi_{k+1} - \phi_{k-1})_{j-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{8} [(\alpha_j + \alpha_{j+1}) \{ (\phi_{k+1} - \phi_{k-1})_j + (\phi_{k+1} - \phi_{k-1})_{j+1} \} \\ &\quad - (\alpha_j + \alpha_{j-1}) \{ (\phi_{k+1} - \phi_{k-1})_j + (\phi_{k+1} - \phi_{k-1})_{j-1} \}] \end{aligned} \quad (3.68)$$

なお特定の方向の粘性微分項を省略したナビエ・ストークス方程式を、薄層近似 (thin layer approximation) ナビエ・ストークス方程式と呼ぶ。剥離のない、あるいは剥離域の小さい境界層流れなどで有効な近似である。また粘性は主に物体近傍のみで効き、物体近傍では流れと格子が直交していることが期待できることから、交差微分項 ($\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$ など) をすべて省略するという手法もある。本研究では剥離流れを扱うので全ての粘性項を省略せずに計算した。

3.6.4 まとめ

この節では、Chakravarthi-Osher の方法に従い TVD 条件を満たす高次精度風上差分法を導き、それを用いて右辺を離散化する方法を示した。

$$(\text{R.H.S.}) = -\Delta t \left\{ \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_v}{\partial \zeta} \right) \right\}$$

のうち、対流項は式(3.66)で定義した TVD 条件を満たす高次精度数値流束を用いて、

$$\left. \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} \right|_j = \hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{*(2)} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^{*(2)}$$

として求める。粘性項は式(3.67)、式(3.68)に従って計算する。

3.7 局所時間刻み

クーラン数

$$\text{C.F.L.} = \frac{a \Delta t}{\Delta x}$$

は、計算の時間刻みの大小を示すパラメータである。 a は流れの情報が伝わる早さ(非圧縮流解法ならば流速、双曲型方程式の解法ならば特性速度の最大値)、 Δt は計算時間刻み、 Δx は格子点間隔である。陽解法では離散化の方法にもよるが一般にクーラン数が1以下に制限される。線形方程式の陰解法の場合、基本的には無条件安定でありクーラン数が数十から数百の計算を行なうことも可能である。しかしナビエ・ストークス方程式の数値解法は非線形であり、余りに大きな時間刻みを用いることは、たとえ陰解法を用いても計算の発散を招くおそれがある。

一方粘性計算では格子点間隔が場所によって大きく異なる格子を用いることが多く、格子の切り方やレイノルズ数にもよるが、最大格子点間隔と最小格子点間隔の比率が5桁にも10桁にもなることがある。このような場合、空間内に一様に時間刻みを設定し、最大のクーラン数が例えば数10になるようにしたとしても、一方でクーラン数が非常に小さな領域ができてしまい非経済である。

局所時間刻みは逆に、クーラン数が一様になるように場所によって時間刻みを変化させる手法であり、定常解のみが必要で時間精度が必要でない場合には有効である。多次元問題に対するクーラン数には厳密な定義が無く、あくまで目安に過ぎないため、時間刻みの決め方に幾つかの方法が提案されている[62]。

- 特性速度の変化が穏やかな場合。

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{\text{ref}}}{1 + \sqrt{J}}$$

これはどちらかと言えばオイラー計算での格子のように、格子点間隔に大きな差がない場合に有効な方法である。 $J = \frac{1}{\text{格子面積}}$ であるから、大雑把に言って格子点間隔が広いほど Δt が大きくなる。次に挙げる手法と異なり時間刻みの計算に流れの値を含まないので、計算量が少ないのが利点である。

- 壁面近傍で格子の細かい粘性計算の場合。

$$\Delta t = \frac{\text{C.F.L.}}{|U| + |V| + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2}}$$

分母は大体 $\frac{\text{特性速度の最大値}}{\text{格子面積}}$ であるから、クーラン数が指定した一定の値になるように、時間刻み Δt が設定される。

ナビエ・ストークス数値解法の計算では、非線形性のためクーラン数が幾らまでなら安定と言ったはっきりした決まりはなく、発散しない程度でできる限り大きいクーラン数、あるいは時間ステップを、試行錯誤で探していかななくてはならない。

3.8 複合格子法

本研究のように複雑な形状の流れ場の計算では、計算格子が物体形状に適合することが要求される。このことは、有限要素法や一部の有限体積法で用いられているような非構造格子を用いれば容易に実現し得る。しかし本研究では差分法を用いるため構造格子でなければならず、幾つかの問題を生じる。本節ではそれにとまなう問題点と解決策について述べる。なお格子生成一般に関しては、中橋の解説[74]が参考になる。

我々は既に一般曲線座標系への写像を行なうことができるから、物理空間の形状が、矩形の計算領域に滑らかな写像で変換できるような形状であれば問題はない。翼のような滑らかな形状の場合、単一の計算領域への写像を得ることは比較的容易である。

複雑形状を単一の計算領域で計算した例としては、Leeのマルチブロック法が挙げられる。この方法では大きい計算領域の中に物体を埋め込んでしまうという発想であり、例えば沢田ら[75]は、航空機全体をマルチブロック法を用いて単一の計算領域で解いている。しかしながらこの方法は、計算に使われない無駄な格子点が存在することや、必要のない場所に細かい格子ができる、などの欠点がある。

物理空間を複数の領域に分ければ、それぞれを矩形の計算領域に容易に写像できる場合が考えられる。これを複合格子法と呼ぶことにする。この方法では格子間のデータのやり取りをどう行なうかが問題である。理想としては格子の接続が全く無いかのように、スムーズに流れの変数が伝わることを望ましい。

複合格子には二つの格子の境界線が一致する「接合格子」と、重なり合うだけで格子点は一致しない「重なり格子」とが考えられる。

重なり格子の有名な例であるStegerら[76, 77]のキメラ格子は、複数の格子をそれぞれ独立に生成し、計算領域が重なった部分ではどちらかの格子の解を優先して、それを他方の格子に補間する方法である。それぞれの格子を自由に生成できるため自由度が高く、格子生成も計算も容易で、空間内を物体が動いていく計算などには威力を発揮する。しかし格子間のデータのやり取りにおいて補間の精度を上げるのが難しい。Moonら[78]は保存則を満たしつつ補間する手法を提案しているが完璧ではないようである。

接合格子を用いた場合は、精度の高い格子間のデータのやり取りや補間が可能になるが、この場合は境界線上の格子点の扱いが問題となる。Rai[79]は境界線上で格子点が重なっていない場合に、

特に工夫をして双方の計算格子の接続境界面を横切る流束が保存する手法を提案したが、これも境界線上だけ内部領域と異なるスキームで解いていることになり、さほど良い方法とは思われない。そもそも計算領域の境界線上は、計算上は境界条件を与える所であって、計算は行なわれない。接合格子で境界線を重ねた場合はどちらの格子でも計算されない場所が存在するわけである。

これは境界線上で格子点が完全に一致する場合でも同じである。図12はGrid 1とGrid 2とを接合するときの格子点の配置を一次的に示したものである。黒丸は計算が行なわれる格子点を示し、白丸は境界条件として値が与えられる格子点を示している。境界線を重ねた接合格子は図の(A)に対応する。さて格子を少し重ねれば計算されない点を無くしてしまいうことが出来る。図の(B)は格子点を2点重ねた例である。また前節の計算スキームは5点差分を用いているので、格子点を4点重ねて図の(C)の様にすれば全ての格子点で同じ計算を行なっていることになり、格子接続点での情報の伝達には全く問題がなくなる[8]。しかし、一般には格子線を重ねることはできても格子点までは重ね難い場合の方が多いと思われる。

図13、図14に本研究で用いた格子接続法を図示した。図13はInternalとExternalの接続を示しており、太い線はInternal領域、細い線はExternal領域の格子線である。図は見やすいように縦方向に拡大している。この部分の接続では格子線を四つ重ねたうえ、格子点も完全に一致させた。また図14は、InternalとCavityの接続である。太い線はInternal領域、細い線はCavity領域の格子線である。こちらは、格子線は四つ重ねたが格子点を一致させることは困難だったため、格子点は一致させず格子線上で直線補間を行なうことにした。この方法では保存則を満たすことは保証されないが、実際に計算を行なったところ誤差は数%以下で許容される範囲であった。

さて、重ね格子にせよ、数格子点重ねた接合格子にせよ、隣の格子からもらったデータを計算領域内に与える必要がある。これには藤井の解強制置換法[80, 81]を用いると便利である。たとえば近似的因子分解されたスキーム(式3.33)にある変数 χ を用いて次のように書き換える。

$$\begin{aligned} & \left[(1+\chi)I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{A} - \frac{1}{Re} \hat{A}_v \right) \right] \left[(1+\chi)I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{B} - \frac{1}{Re} \hat{B}_v \right) \right] \Delta \hat{Q} \\ & = (\text{R.H.S.}) + \chi(\hat{Q}_f - \hat{Q}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

これは $\chi=0$ ならば元のスキームと同じであり、 $\chi \gg 1$ ならば、 $\chi+1 \simeq \chi$ として両辺を χ で割ると $\Delta \hat{Q} = \hat{Q}_f - \hat{Q}$ となる事からわかるように、 \hat{Q} の値が強制的に \hat{Q}_f に変更される。値を強制したい場所でのみ $\chi \gg 1$ とし、他は0としておけば、格子境界でない計算領域内部の点にも容易に値を与えることができる。

3.9 乱流モデル

本研究のような流れ場を始め、実用的な流体機械の内部の流れは乱流である。乱流現象をナビエ・ストークス方程式の直接の解として捉えようとするならば、コルモゴロフの長さや時間よりも小さな計算格子幅と時間ステップが必要となる。近年では簡単な形状に対してはこのような直接数値

計算も行なわれるようになってきているが、低レイノルズ数に限られており、現在、あるいは近い将来の計算機能力をもってしても、現実の流体機械の流れ場を直接数値計算で解くことは現実的ではない。

さてそこで流れ場の細かい変動を時間平均してしまい、マクロな量の釣り合いの式にしたものが、レイノルズ平均したナビエ・ストークス方程式である。その中に新たに出てくる見かけの応力 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ をレイノルズ応力と呼ぶ。ここで時間平均からの変動値をプライムで表した。さらに、レイノルズ応力を、粘性応力に類似した形で表せるとしたのが、ブジネスクの渦粘性の仮定で、

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \mu_t \frac{du}{dy}$$

である。 μ_t を渦粘性、乱流粘性などと呼ぶ。渦粘性の仮定を用いるタイプの乱流モデルは、その計算の容易さと、感覚的な理解のしやすさから工学的に広く用いられている。流れ場から直接 μ_t の分布を導くものを代数モデル（0方程式モデル）と呼び、乱れの長さスケールと速度スケールの二つの輸送方程式を解くものを二方程式モデルと呼び、その代表的なものが $k-\varepsilon$ モデルである。

これらのモデルは元来非圧縮性流体に対するものであるが、圧縮性流体に対しても比較的低マッハ数であれば、そのまま流用できることが知られている。Morkovin の仮説 [82] によれば、圧縮性流体の乱流は密度変動が十分に小さい ($\frac{p'}{\bar{p}} \ll 1$) ならば乱流の基本構造が非圧縮性流体のそれと変わらない。すると実験事実より $\frac{p'}{\bar{p}} \ll 1$, $\frac{T'_0}{T_0} \ll 1$ なので、

$$\frac{p'}{\bar{p}} \simeq -\frac{T'}{T} \simeq (\gamma-1) M^2 \frac{u'}{U}$$

となる。境界層や伴流では、マッハ数が高い主流では u' が小さく、 u' の大きい境界層内ではマッハ数が低いので、結果として主流のマッハ数が5以下ならば、 $\frac{\sqrt{\rho'^2}}{\bar{\rho}} < 0.1$ が成り立つ。一方噴流ではマッハ数1.5以下に限られる。本研究で扱うのはマッハ数2以下の境界層流れであるから、この仮説が十分成り立つと考えられる。

さて圧縮性のナビエ・ストークス方程式をレイノルズ平均すると、密度変動を含む項が現われ複雑になってしまう。このような場合、質量加重平均 (Favre 平均) を用いると形式的に非圧縮のレイノルズ平均と同じ形式に書くことが出来る (例えば [83])。

Favre 平均した圧縮性ナビエ・ストークス方程式に渦粘性の仮定を導入すると、次のようになる。(例えば [35] など)。

質量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (3.70)$$

運動量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \sigma_{ij}) = 0 \quad (3.71)$$

エネルギー保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho H u_j - \sigma_{ij} u_i + q_j) = 0 \quad (3.72)$$

$$\sigma_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \rho k \quad (3.73)$$

$$q_j = -\gamma \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial e}{\partial x_j} \quad (3.74)$$

Pr_t は乱流プラントル数である。本研究では $Pr_t=0.8$ とした。上式は元のナビエ・ストークス方程式と同じ形をしており、同様の解法を用いることができ、新たに必要な量は μ_t と乱流エネルギー k だけである。代数モデルでは直接 μ_t を求める。このとき k はわからないので式 (3.73) の右辺の最後の項は 0 としておく。一方、二方程式モデルでは二つの輸送方程式から μ_t と k を求める。以下では、本研究で用いた代数モデルである Baldwin-Lomax モデルと、二方程式モデルである $k-\varepsilon$ モデルの Jones-Launder モデル、Chien モデルについて説明する。

3.9.1 Baldwin-Lomax モデル

Baldwin と Lomax のモデルは、特に外部流の数値計算で広く用いられている代数型のモデルである。Cebeci-Smith のモデル [35] を基に、境界層の排除厚さを指定しなくても良いようにしたのが特徴である。このモデルでは内層の乱流粘性 μ_{tinner} と外層の乱流粘性 μ_{touter} を別々に求める。

内層の乱流粘性は

$$\mu_{tinner} = \rho l^2 |\omega|$$

で与えられる。ここで l は混合距離、 ω は渦度で、壁からの距離を y とすると

$$l = \kappa y \{ 1 - \exp \left(\frac{-y^+}{A^+} \right) \}$$

$$y^+ = y \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w}}{\mu_w}$$

$$\tau_w = \mu_w |\omega_w|$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}$$

$$\kappa = 0.4, \quad A^+ = 26$$

である。ここで下添え字 w は壁面 (近傍) での値を示す。また、外層の乱流粘性は

$$\mu_{touter} = \rho K C_{\mu} y_{\max} F_{\max} F_{\text{kleb}}$$

で与えられる。ここで、 F_{\max} は関数

$$F(y) = y|\omega| \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{A^+}\right) \right\}$$

の最大値であり、 y_{\max} は $F(y)$ が最大値を取るときの y の値である。また F_{kleb} はクレバノフの間欠係数で、

$$F_{\text{kleb}} = \left\{ 1 + 5.5 \left(\frac{C_{\text{kleb}} y}{y_{\max}} \right)^6 \right\}^{-1}$$

ただし $C_{\text{kleb}}=0.3$ である。内層と外層の切り換えは、値の小さいほうを用いる。すなわち、

$$\mu_t = \min(\mu_{t_{\text{inner}}}, \mu_{t_{\text{outer}}})$$

である。3.2.1節と同様に無次元化すると、全ての変数に肩添え字 * がつく。形の変わる式のみ書くと、

$$\mu_{t_{\text{inner}}}^* = \rho^* l^{*2} |\omega^*| Re$$

$$\mu_{t_{\text{outer}}}^* = \rho K C_{\text{cp}} y_{\max} F_{\max} F_{\text{kleb}} Re$$

$$y^+ = y^* \frac{\sqrt{\rho_w^* \tau_w^*}}{\mu_w^*} Re$$

$$\tau_w^* = \mu_w^* |\omega_w^*| \frac{1}{Re}$$

となる。

このモデルでは壁に垂直な方向に沿って関数 $F(y)$ の最大値を探すという操作が必要である。「壁に垂直な方向」というのは、平板境界層や曲率の大きい翼面などでは明らかだが、複雑な形状の流れ場では定義しにくい。またモデルの成立仮定から見て複雑な流れ場に強引にこのモデルを適用することには、物理的な意味はない。本研究では便宜的に、以下の手段を用いた。まず二次元計算において上下に壁のある流路では、中心線で二つの領域に分け、それぞれ独立して Baldwin-Lomax モデルを適用した。また三次元計算においては流路角部で二方向に壁のある領域が存在する。Baldwin-Lomax モデルにおいては壁に垂直な方向に沿って $F(y)$ の最大値を探すという計算操作のため、二つの壁の効果を勘定に入れることは困難である。そこで流路角部ではそれぞれ反対側の壁が存在しないかのように二つの乱流粘性を計算し、壁からの距離の二乗の逆数を加重して平均することにした。すなわち、二つの壁 a, b に対して求めた、ある点の乱流粘性を μ_{ta}, μ_{tb} とし、それぞれ壁までの距離を l_a, l_b とすると、

$$\mu_t = \frac{l_b^2 \mu_{ta} + l_a^2 \mu_{tb}}{l_a^2 + l_b^2}$$

とした。もちろんこのような扱いは便宜的なものであり、三次元流れにおける流路角部の物理現象を表しているものではなく、単なる実用上の近似の一つにすぎない。

3.9.2 $k-\varepsilon$ モデル

現時点でもっとも良く用いられている二方程式モデルは $k-\varepsilon$ モデルである。標準的な $k-\varepsilon$ モデル [84] は高レイノルズ数を想定しているため、壁面境界条件は対数法則を用いて与えなくてはならない。壁面まで適用可能な $k-\varepsilon$ モデルは低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルと呼ばれ、基本的なモデルは Jones と Launder [85] によって提案された。

これら $k-\varepsilon$ モデルは Patel ら [86] によれば、 k と ε をパッシブスカラーとした輸送方程式に、生成項、散逸項、その他の補正項を加えた一般形にまとめることができる。よって輸送方程式の部分は 3.2~3.6 節の解法をスカラー用に書き換えればよく、本研究では Gorski ら [87] にならって高次精度 TVD 差分を用いたパッシブスカラーの輸送方程式の解法としてまとめておく。さらに Coakley [88] にならって、二方程式モデルを多次元圧縮性の形で書いたものを示し、最後に本研究で用いた Jones-Launder のモデルと Chien のモデルの詳細を示す。

パッシブスカラーの輸送方程式の高次精度 TVD 差分法

パッシブスカラーを ϕ で表すと、その輸送方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho\phi u_j - \mu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \Phi \quad (3.75)$$

である。ここで右辺の Φ は ϕ のソース項である。また、 μ_ϕ は ϕ の粘性拡散係数である。無次元化すると、

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^*\phi^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\rho^*\phi^*u_j^* - \frac{1}{Re}\mu_\phi^*\frac{\partial \phi^*}{\partial x_j^*} \right) = \Phi^* \quad (3.76)$$

となる。以下、肩添字*は省略する。

式 (3.19) と表記を統一するために、保存量を q 、対流輸送項を f_j 、粘性拡散項を f_{vj} とし、次のように定義する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f_j - \frac{1}{Re}f_{vj} \right) &= \Phi \\ q &= \rho\phi, \quad f_j = \rho\phi u_j, \quad f_{vj} = \mu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.77)$$

さらに一般座標系化すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{f}_j - \frac{1}{Re}\hat{f}_{vj} \right) &= \Phi \\ \hat{q} &= \frac{1}{J}q, \quad \hat{f}_j = \frac{1}{J}\rho\phi U_j, \quad \hat{f}_{vj} = \frac{\mu_\phi}{J} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \end{aligned} \quad (3.78)$$

となる。局所線形化で用いる特性速度は次式で得られる。

$$\hat{a}_j = \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial \hat{q}} = U_j$$

$$\hat{a}_{vj} = \frac{\partial \hat{f}_{vj}}{\partial \hat{q}} = J \frac{\partial}{\partial(\rho\phi)} \frac{\mu\phi}{J} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\rho\phi}{\rho} \simeq \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) \frac{\mu\phi}{\rho}$$

ここで \hat{a}_v を求める際には、式中の微分の位置を変え、交差微分項を省略するなどの近似を行なっている。よってオイラー陰解法(式3.31)により時間方向のみ差分化すると、

$$\left[1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\hat{a}_j - \frac{1}{Re} \hat{a}_{vj} \right) \right] \Delta \hat{q} = -\Delta t \left(\frac{\partial \hat{f}_j}{\partial \xi_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{f}_{vj}}{\partial \xi_j} \right) \quad (3.79)$$

となる。

上式の左辺の離散化は、ナビエ・ストークス方程式の解法と同様に近似因子分解法を用い、

$$(L.H.S.) = L_\xi L_\eta L_\zeta$$

たとえば L_ξ は、

$$\begin{aligned} L_\xi &= 1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{a} - \frac{1}{Re} \hat{a}_v \right) \\ &= 1 + \Delta t \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \frac{\mu\phi}{\rho} \right) \end{aligned}$$

さらに風上化、不完全LUD分解を用いると、

$$U^+ = \max(0, U), \quad U^- = \min(0, U)$$

$$L_\xi = 1 + \Delta t (\delta^- U^+ + \delta^+ U^- - \frac{1}{Re} \delta^2 \nu)$$

$$\text{ただし } \nu_\xi \equiv (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \frac{\mu\phi}{\rho}$$

$$= 1 + \Delta t \left\{ (1 - E)U^+ + (E - 1)U^- - \frac{1}{Re} (E - 2 + E^{-1}) \nu_\xi \right\}$$

$$= -\Delta t E^{-1} \left(U^+ + \frac{1}{Re} \nu_\xi \right) + D - \Delta t E \left(-U^- + \frac{1}{Re} \nu_\xi \right)$$

$$\text{ただし } D \equiv 1 + \Delta t \left(|U| + \frac{2}{Re} \nu_\xi \right)$$

$$= \left(-\Delta t E^{-1} (U^+ + \frac{1}{Re} \nu_\xi) + D \right) \left(1 - \frac{1}{D} \Delta t E (-U^- + \frac{1}{Re} \nu_\xi) \right)$$

となる。右辺対流項の差分は一次元スカラー方程式の差分式(式3.56)がそのまま適用でき、右辺粘性項の差分も3.6.3節に従って行なえばよい。

低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル

多次元圧縮性の低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルは、一般に次の形に書ける [88]。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho k u_j - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} = \mathcal{P} - \rho \varepsilon + S_k \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho \varepsilon u_j - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} = C_1 \mathcal{P} \frac{\varepsilon}{k} - C_2 f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (3.81)$$

$$\mathcal{P} = \mu_t S - \frac{2}{3} \rho k \mathcal{D}$$

$$S = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \mathcal{D}^2$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon}$$

無次元化は $k = k^* U_0^2$, $\varepsilon = \varepsilon^* \frac{U_0^3}{L_0}$ として 3.2.1 節と同様に行なう。

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* k^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left\{ \rho^* k^* u_j^* - \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \right\} = \mathcal{P}^* - \rho^* \varepsilon^* Re + S_k^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho^* \varepsilon^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left\{ \rho^* \varepsilon^* u_j^* - \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j^*} \right\} = C_1 \mathcal{P}^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} - C_2 f_2 \rho^* \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} Re + S_\varepsilon^*$$

$$\mathcal{P}^* = \mu_t^* S^* - \frac{2}{3} \rho^* k^* \mathcal{D}^* Re$$

$$S^* = \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{2}{3} \mathcal{D}^{*2}$$

$$\mathcal{D}^* = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*}$$

$$\mu_t^* = C_\mu f_\mu \frac{\rho^* k^{*2}}{\varepsilon^*} Re$$

例によって、以後肩添字 * は省略する。これらの式の左辺はバッシュスカラーの輸送方程式の離散化をそのまま用いることができる。右辺ソース項は 3.6.3 節などを参考に中心差分で離散化する。

Jones-Launder モデル

Jones と Launder のモデル [85] を多次元圧縮性に対応するように書き換えると、式 (3.80) に以下の式を加えた形になる。

$$f_\mu = \exp \left(-\frac{2.5}{1 + 0.02 Re_t} \right)$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$$

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}$$

$$S_k = -2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right)^2$$

$$S_\varepsilon = \frac{2\mu\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$$

無次元化すると、

$$R_t = \frac{\rho^* k^{*2}}{\mu^* \varepsilon^*} Re$$

$$S_k^* = -2\mu^* \left(\frac{\partial \sqrt{k^*}}{\partial x_i^*} \right)^2$$

$$S_\varepsilon^* = \frac{2\mu^* \mu_t^*}{\rho^* Re} \left(\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_k^*} \right)^2$$

となる。

このモデルは S_k の離散化が少し困難である。このモデルは層流境界層の乱流遷移をある程度シミュレートするので、遷移点近傍では乱流エネルギー k が (空間的に) 急増する分布が現れる。ここで、格子点番号 j が $j \leq n$ の領域で $k \approx 0$ であり、 $n < j$ の領域で $k \gg 1$ であるとする。このようなとき S_k を、

$$S_{kj} = -2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} \right) \bigg|_j = -2\mu_j \left(\frac{\sqrt{k_{j+1}} - \sqrt{k_{j-1}}}{2\Delta x} \right)^2$$

と離散化すると、 $j=n$ の点では $k_j \approx k_{j-1} \approx 0$ であるにもかかわらず、 $k_{j+1} \gg 1$ のため $S_{kj} \ll 0$ となってしまう、式(3.80)の右辺が絶対値の大きな負の値を持ち、次の時間ステップで乱流エネルギーが負になってしまう。本研究ではこの不都合を回避するために、

$$S_{kj} = -2\mu_j \cdot \min \left(\left(\frac{\sqrt{k_{j+1}} - \sqrt{k_j}}{\Delta x} \right)^2, \left(\frac{\sqrt{k_j} - \sqrt{k_{j-1}}}{\Delta x} \right)^2 \right)$$

と離散化した。一方 S_ε の離散化には特に問題はないが、一般座標系化すると項数が非常に増えるので、交差微分項を省略してかなり簡略化した。

Chien モデル

Chien のモデル [89] を多次元圧縮性に対応するように書き換え、無次元化し、さらに肩添字 * を省略した後の形は、

$$f_{\mu} = 1 - \exp(-C_3 y^+)$$

$$f_2 = 1 - \frac{2}{9} \exp(-\frac{1}{36} R_t^2)$$

$$y^+ = \frac{u_* y}{\nu} Re$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \Big|_{\text{wall}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y}} \Big|_{\text{wall}}$$

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon} Re$$

$$S_k = -\frac{2uk}{y^2}$$

$$S_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{k} S_k \exp(-C_4 y^+)$$

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_{\varepsilon} = 1.3, C_{\mu} = 0.09, C_1 = 1.35, C_2 = 1.8$$

$$C_3 = 0.0115, C_4 = 0.5$$

となる。

3.10 結び

以上で本研究で用いた数値解法に関して、全て解説した。数値解析を実際に行なうに当たっては、これらをプログラムにしなければならない。計算機が広く世に出てからまだ日が浅く、計算機利用文化がまだまだ未熟な現状では致し方無いことではあるが、流体数値計算のプログラムを書くことには多大な労力と時間を要求される。流体解析の分野では極めて不幸なことにあの悪名高い FORTRAN が未だに主に使われている。日本の主なスーパーコンピュータには現在 FORTRAN コンパイラしかないこともその理由の一つであるが、主には歴史的な理由によると考えられる。しかし、複合格子法など複雑な計算を面倒無くプログラミングすることは、FORTRAN の様な原始的なプログラミング言語を利用している限り絶望的である。流体数値解析のプログラムを、書き変えやすく、読みやすく、汎用性のあるものにし、プログラムの生産性を上げるためには、流体数値解析に携わる研究者達は是非とも C や C++ のような「使いやすい」言語に習熟しする必要がある。そうすることが計算機を使う上での苦勞を減らし、本職の流体力学に専念する時間を増やすことにもつながる。

第4章 乱流モデルのチェック

数値解法の章で掲げた乱流モデルを用いて実際に計算を始める前に、モデルの精度の確認と、計算プログラムへのモデルの組み込みにミスが無いかどうかのチェック、必要な格子点数の確認を目的として、幾つかの簡単な流れ場を計算した。

ここでは、4.1節で圧力勾配の無い平板境界層、4.2節でコンプレッション・コーナー流れ、4.3節で入射斜め衝撃波流れ、の三種の流れ場に対して計算を行なった。

なお以下の文章では、Baldwin-Lomax モデルを BL、Jones-Launder モデルを JL、Chien のモデルを CH と略すことがある。

4.1 平板境界層

先ず最も単純な例として圧力勾配のない平板境界層の計算を行なった。主流はマッハ数 0.5 で、計算は、平板前縁よりやや上流から $Re_x = 2.0 \times 10^7$ まで行なった。低レイノルズ数型の $k-\epsilon$ モデルの包括的なテストを行なった Patel ら [86] によれば、JL モデルは速度分布にオーバーシュートがあり結果として C_f 値を小さく見積る傾向がある。また CH モデルは速度分布、 C_f 値ともに正確である。

図 15 は BL モデルの結果である。先ず、左列は横軸は平板前縁からの Re_x で縦軸は局所摩擦係数 C_f である。図中左側の実線はブラジウスの解から導かれる層流の C_f 値 (例えば [90]) で、

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_x}}$$

である。また右側の実線は乱流境界層の C_f 値で、

$$C_f = \frac{0.455}{(\log Re_x)^{2.58}}$$

である。中列の図は $Re_x = 1.1 \times 10^7$ での速度プロファイルである。図中、○印で示す実験値は Wieghardt のデータ [91] である。対数速度分布は $u^+ = 2.44 \log(y^+) + 5$ である。右列の図は壁面に隣接する格子点 (第一格子点と呼ぶ) の y^+ の値である。

図は上段から下段へ、格子を粗くしていった場合の解の変化を示している。(a) は格子が十分に細かい場合で、速度分布、摩擦係数ともに良い精度である。(b) は (a) の流れ方向の格子点を粗くした場合で計算精度には問題はない。(c) は (b) の y 方向の格子点を粗くした場合で、これも問題はない。しかしさらに y 方向の格子点を粗くし (d)、第一格子点の y^+ が 5 程度になると、速度分布には問題がないものの、 C_f の値が下がりはじめた。ここでは C_f の値は層流粘性の値と第一格子点の

速度から求めている。つまり第一格子点が粘性底層内にあることが前提であるから、 $y^+ > 5$ で C_f がおかしくなるのは当然である。

さて、次の図 16 は JL モデルの場合である。Patel らの結果 [86] とは逆に、 C_f の値はやや大きめである。速度分布は対数則よりも低めに出ている。しかし格子点の粗さに対しては鈍感で、 $y^+ \approx 3$ 程度までならそれより細かい格子の場合と結果は変わらない。

次の図 17 は CH モデルの結果である。このモデルは速度分布、 C_f 値ともに正確であるが、JL モデルに比べると細かい格子を必要とする。

次の図 18 は C_f 値のマッハ数依存性を確かめた計算である。図中 Theory は、Wilson による断面壁の場合の C_f 値の評価である [92]。BL モデルの場合はマッハ数依存性に関しても充分あっている。JL モデルはそもそも亜音速の場合の C_f 値が異なっているので比較し難いが、マッハ数が上がるにつれ C_f 値の違いが小さくなるので問題はないと考えられる。

以上をまとめると、

- 平板境界層に対しては、Baldwin-Lomax、Chien、は精度の良い解を与える。Jones-Launder は C_f 値を過大評価する傾向がある。
- Baldwin-Lomax と Jones-Launder は第一格子点 y^+ は 3 程度で良く、他のモデルに比べ格子の粗い計算が可能である。
- C_f 値のマッハ数依存性はどのモデルでも良好にシミュレートできる。

4.2 コンプレッション・コーナー流れ

次に行なったテストはコンプレッション・コーナー流れの数値解析である。

比較の対象とした実験は Settles らによるもの [27] で、主流のマッハ数は 2.85、角の角度は 8° 、 16° 、 20° 、 24° の 4 種類。境界層厚さを基にしたレイノルズ数は 1.7×10^6 であった (図 19 参照)。実験結果は、壁面静圧分布、壁面摩擦分布、速度分布が得られている。この流れ場では、角から発生する斜め衝撃波によって逆圧力勾配が発生し、場合によっては境界層が剥離する。この実験では 8° では剥離せず、 16° が剥離のし始めて、 20° と 24° では大きく剥離が起こった。

この結果に対し Viegas ら [34] は、Baldwin-Lomax、Jones-Launder、Wilcox-Rubesin などのモデルで計算し、壁面静圧や C_f 値を比較している。結果は大まかに言って剥離のない 8° や 16° では良く合い、剥離している 20° 、 24° ではあまり良く合わなかった。

図 20 は計算格子で、格子点数はどれも 102×115 、境界層内には約 100 点の格子点が入っており、第一格子点の $y^+ < 1.0$ であった。上流の境界条件には平板境界層の計算結果を与えた。

図 21 は結果の概略図で、JL モデルの解の速度ベクトルと圧力の等高線である。等圧力線の間隔は主流の静圧を p_0 とすると $0.28p_0$ である。

計算を行なった BL, JL, CH の結果を図 22(A)~(D) に示す。角部を拡大して示している。速度ベクトルと等圧力線で、圧力等高線の間隔は主流の静圧を p_0 とすると $0.28p_0$ である。網掛けは亜音速領域を示している。図 (A) は 8° の場合で、どのモデルでも剥離はほとんど見られない。図 (B) は 16° の場合で、図ではわかり難いが、かすかに剥離がおきている。図 (C) は 20° の場合で剥離領域はやや大きくなっている。図 (D) は 24° で、JL に限り剥離領域がかなり大きくなっている。

次の図 23 は静圧分布である。どのモデルも、 8° , 16° は良い予測精度だが、 20° , 24° の圧力上昇開始点の位置などは全く合っていない。また図 24 は壁面摩擦係数である。 $k-\varepsilon$ モデルは概してショック後の摩擦係数の値が大きくなる傾向があり逆に BL モデルは小さくなる。剥離点、再付着点はどれも合わず、特に BL モデルは剥離しやすく再付着しにくい傾向が見られる。

コンプレッション・コーナー流れの場合、実験データには幾つかの問題点がある。一つめは上流境界層の定常性の問題である。実験では上流境界層の厚さは多かれ少なかれ変動しており、それにしたがって斜め衝撃波及び剥離域の大きさは、やはり変動していると考えられる。実験結果はその時間平均値であるわけだが、計算では時間平均された境界層分布に対する固定した衝撃波位置と剥離域とを求めているわけで、それらに対応する保証はない。二つめは凹面流れであるためゲルトラー渦が発生し、純粋な二次元流とは言えない点である。これは特に角度が大きい場合に顕著なようであり、これに対する解決策は計算を三次元で行なうことしかないであろう。これらの理由から、コンプレッション・コーナー流れは、圧縮性の衝撃波、剥離、流線の曲率と、さまざまな要素がからみあった流れ場であり、乱流モデルの簡単なテストとしてはあまり適当ではない。しかし、インテークなど実際の流体機械内部にこの流れ場が存在すると言う事実から考えて、この流れ場をうまく予測することは重要である。

まとめると、

- 静圧分布に関しては、剥離のない(小さい)場合はどのモデルも良く合い、大きく剥離した場合はどのモデルもあまり合わなかったが、強いて言えば Jones-Launder モデルがやや実験に近かった。
- 摩擦係数に関しては、Baldwin-Lomax モデルが最も良く、 $k-\varepsilon$ モデルはどれも衝撃波後の C_f 値を過大評価する傾向があった。また剥離域の予測に関しては Baldwin-Lomax も $k-\varepsilon$ モデルもあまり合わなかった。

4.3 入射斜め衝撃波流れ

次のテストは平板境界層に入射する斜め衝撃波による干渉流れである(図 25 参照)。このケースはコンプレッション・コーナー流れと異なり、特定の場所に特定の強度の斜め衝撃波を入射させるのが実験にせよ計算にせよ、やや困難であることが欠点だが、主流がほとんど曲がらないのでゲルトラー渦が発生しないなど、より純粋な SBLI 流れと考えることができる。

対象とした実験はRedaらによるもので[22, 23, 24]、主流のマッハ数2.9、境界層厚さを基にしたレイノルズ数 0.97×10^6 であった。入射衝撃波の流れの偏角をさまざまに変えて実験を行っており、結果は壁面静圧と摩擦係数が得られている。彼らの実験は残念ながら側壁の影響が無視できず、二次元性が良くないことがわかっている。

このケースもViegasら[34]が計算を行なっているが、彼らの結果は静圧分布にかなり変な所がある。これは彼らの用いた計算格子が粗かったことが原因のようである[41]。

図26は計算に用いた格子で、ショックの入射する位置に合わせて格子を変えた。図27は流れ場の概観でJLの結果である。左上から入射する衝撃波が段々焦点を結ぶように細くなっていくのは、格子間隔が変わっているからである。物理現象ではもちろん、衝撃波はどこでも極めて薄い面をなしている。

図28は速度ベクトルと圧力等高線である。図(A)は 7° の場合で、ほとんど剥離は見られない。図(B)は 10° である。図(C)は 13° で、かなり大きく剥離している様子が見える。

壁面静圧を実験と比較したのが図29である。BLは 7° では圧力上昇が早め、 13° では遅め、と実験と比べ流れ場の形が変化しない。JLはなぜか、かなり良く一致している。CHはBLとはほぼ同様の傾向が見られる。

一方壁面摩擦分布を見ると、剥離点、再付着点の位置に関しては、JLが良い。ショック後の C_f 分布を見ると、BL, JL, CHの相対的な関係はコンプレッション・コーナー流れの場合と同様であるが、実験結果の C_f が大きいため、結果としてBLはそれほど良くなく、 $k-\varepsilon$ モデルも実験値に近くなっている。

以上まとめると、

- 壁面静圧分布に関しては、Jones-Launderが実験と良く一致している。
- 摩擦係数に関しては、まずBaldwin-Lomaxは剥離域の予測精度が悪いので全くあわない。 $k-\varepsilon$ モデルは剥離のない場合は C_f 値もまあまあ合うが、剥離する場合は剥離後の C_f 値を過大評価する傾向がある。これはコンプレッション・コーナー流の場合と同じである。剥離点、再付着点の予測はJones-Launderが良く、Chienはまあまあである。

4.4 結び

以上のテストをまとめ、以下のような結論が得られた

- 平板境界層は、BL, CHは精度の良い解を与える。JLは対数領域で数%速度が低く、 C_f は逆に高くなるようである。BL, JLは第一格子点は $y^+ \approx 4$ 程度で充分で、他のモデルに比べ格子の粗い計算が可能である。
- Morkovinの仮説の成り立つ流れであることから、 C_f のマッハ数依存性は良好にシミュレートできる。

- 衝撃波/乱流境界層干渉流の場合、どのモデルも良い予測値を与えない。特に剥離点、再付着点位置や、剥離後の C_f の値は合わない。しかし静圧分布だけに関して言えば、Jones-Launders モデルは場合によって実験と良い一致を見せ、少なくとも他のモデルより悪くはない様子である。

インテーク内の流れの乱流数値予測に十分な乱流モデルは残念ながら現状では無い。そのため、剥離がない場合には十分精度が良くしかも計算量の少ない Baldwin-Lomax モデルを第一近似として用いることは、妥当であると考えられる。また Jones-Launders モデルは、モデル中に壁からの距離を含まないという実理的な理由から内部流に適用しやすいと言う利点を持つことと、衝撃波/乱流境界層干渉流においては他のモデルに比べ少なくとも悪い解を出さないと言う点から、インテークの計算に向いているモデルであると考えられる。

次章では、Baldwin-Lomax モデルと Jones-Launders モデルを用いてインテーク内の流れの乱流数値解析を行なう。

第5章 超音速インテーク内の流れの数値解析

5.1 模擬インテークの実験結果

本研究では航空宇宙技術研究所の村上らの行なった模擬インテークを用いた実験[13]を数値計算で再現することを目的としたので、まずこの実験についてまとめておく。

彼らはキャビティを有する超音速インテークの動作特性、すなわち、流れの基本構造、圧力回復率、始動性を調べるために、基礎的な実験を行なった。小型だが連続運転の出来る超音速風洞を用いて、インテークのスロート部を模擬した超音速流路に抽気機構を有するキャビティを設け、実験を行なった。計測はシュリーレン写真と、壁面静圧、ディフューザ出口部での全圧トラバースとを行なった。

図31は実験で用いられた模擬インテーク実験の概念図である。図の左の stagnation chamber 内の高圧空気は、supersonic nozzle で超音速に加速され、試験部に入る。試験部に入った流れはランプを通り、カウル内に入り、ディフューザ、フローブラグを経て図の右方に排出される。またカウルより下側の流れは機体外部の流れに相当し、やはり図の右方に排出される。図32は試験部の詳細である。試験部の入口は一辺35mmの正方形流路である。ランプの角度は 6.8° である。カウルの先端位置は、ランプの左端からの斜め衝撃波よりも0.5mmほど下流になるように決められている。入り口部の上壁からカウルまでの高さ、つまり捕捉高さ H_c は23.1mmである。キャビティ部からは抽気でき、その流量はブリードバルブで調節することができる。ディフューザ下流にはフローブラグがあり高さが変えられる。これによりディフューザ背圧を調整できる。計測は流れの左右の対称性を仮定して全て流路中心線上(対称面)で行なわれた。上壁(ランプ面)と下壁(カウル面)にそれぞれ数点ずつの静圧孔を設けて静圧測定を行なった。また、ディフューザ直後には全圧プローブを挿入することができ、上下方向にトラバースして全圧分布を測定した。以下、図の左右方向をx方向、上下方向をy方向、紙面に垂直な方向をz方向と呼び、図32に示すように座標原点を定める。

非粘性を仮定した設計状態の流れは図33のようになる。試験部入口での主流のマッハ数は $M_0=1.85$ である。ランプショック、カウルショックの二つの斜め衝撃波を経て、キャビティ部の垂直衝撃波により $M=0.75$ に減速し、さらにディフューザで $M=0.37$ まで亜音速減速する。各状態の流れの諸量と、各衝撃波の前後の関係を表1に示した。ただしこの計算においてはキャビティ抽気による圧力変化が無いものとしている。また、試験部入り口での流速と捕捉高さ $H_c=23.1\text{mm}$ によるレイノルズ数は 10^6 である。試験部には超音速ノズル内で発達した境界層が流入する。事前に行なわれた超音速ノズルの検定試験(付録A参照)の結果より、その厚さは約 $1.8\text{mm}=0.078H_c$ であること

がわかっている。

図34は実験のシュリーレン写真である。三枚の写真は、フローラグ位置を一定にしてキャビティからの抽気量を変えた場合の衝撃波システムの変化を示している。オリジナルの写真はカラーで、縦方向に細くスリット状に三色に分かれたカラーフィルタを用いたカラーシュリーレンである。スリットの中央は明るい黄色で、左右は暗い青色と赤色であったので、掲載した白黒の図で暗く写っている部分は、横方向(x方向)の何らかの密度変化のある部分である。はっきりと黒い部分は衝撃波で、薄くぼんやりした部分は膨張波か圧縮波のどちらかである。なおこの写真は、比較的速いシャッタースピードで撮影されたものであり、実験のビデオ画像では写真のようなはっきりした衝撃波は見えない。これは写真のような衝撃波が定常的に存在するわけではなく、空間的に細かく振動しているためと考えられる。

抽気が十分な時(9%)は設計通りのランプ衝撃波、カウル衝撃波が形成され、キャビティ部の抽気で膨張し、ディフューザ入口部で垂直衝撃波を経た後、再膨張し、ふたたび垂直衝撃波が形成されている。このように連続する垂直衝撃波をまとめて擬似衝撃波と呼ぶ。また最終的に亜音速に減速させる衝撃波と言う意味で、終端衝撃波と呼ぶこともある。抽気量を絞ると(6%)、カウル衝撃波がゆがみ、その直後に垂直衝撃波が出来る。これはキャビティリップよりも前方に出た垂直衝撃波によりキャビティ内の圧力が上昇し、キャビティ前部に影響を及ぼすためである。さらに抽気量を絞ると(2%)ランプ面で剥離が起こりキャビティ抽気によっても抽気しきれず、剥離はディフューザ部まで続いている。またカウル先端で衝撃波が離脱しバウショックとなり、その後連続した衝撃波列が見られる。

次に抽気量9%の時のショックシステムを詳しく見てみる(図35)。図中の(1)はランプ衝撃波である。(2)のカウル衝撃波はカウルから離脱しバウショック状になっている。一方(3)はカウルに付着した斜め衝撃波である。(4)はおそらくランプ面の境界層が剥離したことによる弱い圧縮波である。(5)はカウル衝撃波(2)の反射膨張波である。(6)、(7)は垂直衝撃波であろうと考えられる。以上のように流れ場は極めて複雑な様相を呈しており、例えば斜め衝撃波(2)の衝撃波角は非粘性解析(図33)では説明できない。

図36は、これ以後用いる流れ方向の分布図の横軸とインテーク外形との対応を示したものである。図の横軸は流れの方向の座標で、捕捉高さ H_c で無次元化している。横軸上□印は、左から順にカウル先端、キャビティの始まり、終わり、ディフューザの終り、を示している。

図38は静圧測定結果である。縦軸は入口静圧で無次元化した静圧である。また図中 点線は非粘性解析(図33)による静圧分布である。静圧分布で特徴的なところを挙げると、ランプ面(図A)には垂直衝撃波による圧力上昇直後に一旦圧力の下がる部分が見られる。これらの圧力の挙動の原因は明確ではない。またカウル面(図B)を見ると、圧力はキャビティ直下で非粘性のそれよりも上がった後、キャビティ抽気による膨張波で再び下がっている様子が見られる。一方図37はディフューザ出口の全圧分布である。抽気量2%の場合、上壁側で流れが剥離し、下側を流れている様子が見られる。

村上らの結論は

- 垂直衝撃波が発生する位置はカウル先端部とキャビティリップ部とであり、キャビティ直下には発生しなかった。
- キャビティ抽気はインテークの始動性を向上させる。
- キャビティ抽気流量が不十分になるとキャビティ内の圧力が上昇し、流れの状態が上流に遡ってしまう。
- キャビティ抽気量の増加はスロートマッハ数の増加をもたらし、衝撃波損失を大きくする。

などであった。

5.2 模擬インテークの数値解析法

5.2.1 計算格子

図32の流れ場を模擬するために、図39に示すように三つの格子からなる計算領域を設定した。計算領域は主な流路である Internal 領域と、カウルから外に出てしまう気流が通る External 領域、そして Cavity 領域とに分けた。

Internal 領域の終わり（図の右端）には計算上のフロープラグを付けた（図39の Computational Flow Plug）。これは 実験模型のフロープラグにもほぼ対応するものである。計算上はディフューザの背圧が調整できればよいのであって、当初は計算点数を節約するために、ディフューザ直後で格子を終わらせ数値的に背圧を与えようとした。出口境界条件で圧力を与える場合には、出口付近に空間的に定常な流れを仮定し、密度、速度を内点から外挿し、圧力は外部から指定する。しかし本研究ではディフューザ直後で流れが剥離しているなど、空間的に定常な流れを仮定することに無理があった。Eriksson はこの困難を避けるためにディフューザの下流に扇型の大きな緩衝領域を設けて、その緩衝領域の下流に背圧を与えた[14]。彼の方法は背圧を陽的に与える必要がある場合には有効であると考えられるが、計算点数が増えることと、不自然な格子形状にやや抵抗を感じる。本研究では結局多くの他の研究で用いられているのと同様に計算上のフロープラグを設けることとし、その形状は模型のそれと同じとした。実際にフロープラグを設けて計算を行なってみると、

- 計算の初期値に入口から出口まで超音速の一様分布を与えると、フロープラグを下げていくに連れ、まずフロープラグのスロート部に亜音速領域ができ、そののちショックが前方に移動しディフューザ中ほどまで亜音速となる。背圧を与える境界条件を用いた場合、始めに超音速であった流れ場は出口にどのような条件を与えようとも超音速のままである。
- ディフューザで亜音速になった流れはフロープラグのスロートでチョークし超音速になる（ようにできる）ので、計算上 出口の境界条件を与えなくて良くなる。このときディフューザ背

圧は3.1.3節に示したように、フローブラグのスロット高さ（と流れの全圧）のみに支配される。

これらの性質は計算を安定かつ容易にするので大変望ましい。このためキャビティからの抽気量を調節する機構にも同様にフローブラグを設けることにした。これが図39のComputational Bleed Valveである。こちらは機能は実験のバルブに相当するが形状はもちろん全く対応していない。

計算格子を図40に示す。上の図は二次元計算の格子、あるいは三次元計算の格子のxy断面である。下の図は三次元格子のxz断面で、図の上側が対称面、下側が側壁である。格子点数を表2に示す。計算格子相互の接続は3.8節で既に述べたように、Internal領域、External領域間では格子点を全て重ね、4格子線をオーバーラップさせた。Internal領域、Cavity領域間では、4格子線をオーバーラップさせたが、格子点は重ねず、直線補間を用いてデータのやり取りを行なった。また壁面近傍に格子点を集め、第一格子点の y^+ はどこでも5以下となるようにした。これは4.1節で示した条件をやや満足していないが、格子点数の関係上致し方なく、また大部分の領域では $y^+ < 3$ であったので計算精度を著しく損ねている恐れはないものと考えている。

5.2.2 計算条件

計算のレイノルズ数は、捕獲高さ H_c 、入口での主流の流速、密度、粘性係数を基準として $Re=10^6$ とした。これは付録Aのノズル流の計算の $Re=3 \times 10^6$ に対応する。

本研究では二次元のBaldwin-Lomaxモデルおよび $k-\epsilon$ モデルによる計算、三次元のBaldwin-Lomaxモデルによる計算を行なったが、モデルを厳密に適用したのはInternal領域のみであり、計算量の節約のためExternal領域、Cavity領域では表3のように、適宜モデルを省略した。境界条件の与え方を図41に示す。まず二次元Baldwin-Lomaxモデルによる計算の場合、Internal領域にはBaldwin-Lomaxモデルを適用し、上壁、下壁を粘着壁、すなわち速度 $=0$ とした。External領域はモデルを適用しなくてもインテークの解にほとんど影響しないので、非粘性計算とし、壁面は滑り壁とした。Cavity領域はその複雑な形状と循環流のためBaldwin-Lomaxモデルの適用は困難で、そのため非粘性計算、滑り壁とした。二次元 $k-\epsilon$ モデルの場合、External領域は同様の理由で非粘性計算としたが、Cavity領域は $k-\epsilon$ モデルならば適用が容易なため適用した。この場合はCavity内の壁は粘着壁とした。三次元Baldwin-Lomaxモデルの計算は最も困難を伴った。Internal領域は上壁、下壁、側壁ともにBaldwin-Lomaxモデルによる粘性計算とした。External領域は側壁のみBaldwin-Lomaxモデルを適用し、下壁とカウル下側は滑り壁とした。Cavity領域は剥離と激しい循環流のためBaldwin-Lomaxモデルの適用が困難であった。しかし非粘性計算として側壁を滑り壁とすることはInternal領域の側壁の境界層との間で不整合を起こす恐れがあったので、結局一様な層流粘性を与えて、側壁は粘着壁、その他は滑り壁とすることで対処した。その他の壁面の条件については、圧力は勾配 $=0$ とし、熱流束に関しては断熱条件を用いた。

入口には超音速流入条件を与えた。主流のマッハ数は1.85とし、二次元計算ではInternal領域の上壁に境界層分布を与えた。また三次元計算ではInternal領域の上壁と側壁、External領域の側

壁と境界層分布を与えた。境界層分布は、前もって付録Aで求めておいたものを主流のマッハ数が厳密に1.85になるようにスケールリングして用いた。 $k-\epsilon$ モデルを用いた場合は k や ϵ の分布も与えた。境界層分布を与えた場合、境界層内に流速が亜音速の部分が存在し、超音速流入条件を用いることは不合理のように考えられる。しかし実際上問題となるのは、境界層内をつたって下流の圧力が上流側に伝わる場合である。本研究のように主流の大部分が超音速で境界層も充分薄く、入口付近に急激な圧力上昇があるわけでもない場合には、境界層内に超音速流入条件を適用しても問題はない。また、出口はディフューザ下流の出口、キャビティの出口、カウル外に流出する部分の三ヶ所があるが、全て超音速なので、超音速流出条件を問題なく用いることができた。

5.2.3 計算手順

まず粗い格子を用意し、非粘性計算を行なった。非粘性計算は初期値に一樣な超音速流を仮定し、ブリードバルブを適当な高さにし、フローブラグを十分に上げた状態で計算を開始した。定常解に達したならば、その解を初期値として少しフローブラグを下げた計算格子で計算を行ない、これを繰り返してディフューザ中程に垂直衝撃波が形成されるまでフローブラグを下げた。

次にこの解を粘性計算用の細かい格子に補間し、入口から下流まで全ての壁面に境界層分布を与えたものを初期値として、Baldwin-Lomaxや $k-\epsilon$ モデルによる乱流計算を行なった。二次元計算の場合、最初の1ケースの解が得られるまで航空宇宙技術研究所のVP400を用いて100分程度のCPU時間を必要とした。それを初期値として、少しずつフローブラグやブリードバルブを変化させた別の解を得る場合には数10分必要であった。三次元計算の場合は二次元計算の解を三次元に拡張し、側壁の境界層も推定した初期値を用い、主に航空宇宙技術研究所のVP2600を用いて50時間程度のCPU時間を必要とした。それゆえ三次元計算は1ケースしか解が得られていない。

本研究の場合、フローブラグ高さのわずかな変化によって解の形（衝撃波位置）が大きく変化した。それゆえ望んだ形の解を得るためにはフローブラグ高さやキャビティ抽気量を細かく調整して、そのたびに収束するまで計算を行なわなければならない。三次元計算の場合は何通りも計算を行なう余裕がなかったため、流れが安定するように抽気量を多めにし、また側壁の影響を考慮して対応する二次元計算よりもややフローブラグを大きく開けるなどの大体的見当をつけて1ケースのみ計算を行なった。

5.3 二次元計算

本研究の研究対象である模擬インテークは、アスペクト比は小さいものの形状は二次元的である。そのため、まず二次元計算を行なった。5.3.1にBaldwin-Lomaxモデルによる二次元計算の結果を示す。このモデルによる計算では、フローブラグや抽気流量を様々に変えて計算を行ない、インテークの

5.3.1 Baldwin-Lomax モデルによる二次元計算

まず Baldwin-Lomax モデルによる二次元計算を行なった。本節ではその結果をフローブラグ位置の違いとキャビティ抽気流量の違いの二つの点から比較し検討する。また最後にディフューザの流れの状態から発生するヒステリシスについて述べる。

フローブラグ位置による流れの変化

まずブリードバルブ高さ H_c を固定してフローブラグ高さ H_p を変化させたときの流れの変化をしてみる。図 42 は密度の等高線に合わせて、超音速領域を掘み掛けで示したものである。図の右下の数字はフローブラグ高さである。フローブラグ高さが小さくなるにつれ、衝撃波が上流に出る様子がわかる。衝撃波位置での剥離の大きさを見ると、衝撃波が上流に行くほど剥離が小さく、「きれいに」流れているのがわかる。これは、衝撃波の位置が下流寄りの場合、衝撃波の強度が強くなる上その場所の境界層が厚くなるので、境界層が剥離しやすくなるためであると考えられる。ここで図には示していないが、フローブラグ高さ H_p を 16.2mm よりも小さくすると、ショックはさらに前方へ出る。しかしショックはキャビティ部では安定せず、カウルより前に出て不始動状態に移行してしまう。

図 43 に $H_p=16.8\text{mm}$ の場合の衝撃波パターンを示す。非粘性設計通りのランプ衝撃波 (1)、カウル衝撃波 (2) の他、キャビティ抽気により流線がわずかに上方に曲がることによる膨張波 (3) と、カウル衝撃波の反射膨張波 (4) が見られる。また垂直衝撃波 (5) によって上下の壁面の境界層が剥離し、ラムダ型衝撃波が形成されている。

さてこれらの等密度線図を実験のシュリーレン写真 (図 34、図 35) と比較してみる。シュリーレン法は密度変化のある部分が暗くなる可視化手法であるから、等密度線図はシュリーレン写真と直接比較するのに適している図と考えられる。実験の抽気量 9% の例と計算結果とを比べてみると、垂直衝撃波は形状が複雑で比較が困難なのでとりあえず保留しておくとして、斜め衝撃波部分を見てみると、ランプ衝撃波は実験と計算とが良く一致している。しかしカウル衝撃波とその後の膨張波の角度を見てみるとシュリーレン写真と計算結果とはくい違っている。膨張波の角度はマッハ角であるからその場所のマッハ数を推定することが出来る。これについては後述する。

図 44 は等圧力線図と速度ベクトルとを重ねた図である。垂直衝撃波を過ぎると境界層厚さが急増し、場合によっては剥離している様子が見られる。

図 45 は全圧分布図である。全圧損失の要因には粘性損失、衝撃波損失があるが、衝撃波による剥離域での粘性損失が特に大きいことがわかる。

図 46 は x 方向の各断面を通る流量である。入口の音速で無次元化した x 方向速度 u 、入口の密度で無次元化した密度 ρ 、捕獲高さで無次元化した y 座標を用いて、流量 $= \int \rho u dy$ として求めているので、入口マッハ数 1.85 より、入口での流量は 1.85 となるはずだが、それよりやや少ないのは境界層の排除厚さの分である。次にカウル先端付近ではカウルより外にわずかに漏れるため流量が減る。その後キャビティにより一旦わずかに流入した後、多量に抽気されているのがわかる。キャビティ直

後に見られるスパイク（鋭い振動）は、衝撃波による計算誤差である。これらスパイクの前後で流量が変わらないことから考えて、計算スキームでは精度良く流量は保存されていて、流量を計算した後処理プログラムの計算誤差が図に現われていると思われる。さて、この図よりキャビティにより抽気された量の評価を行なうことが出来る。この場合キャビティ側のブリードバルブ高さは一定であるから、フロープラグ位置にかかわらず抽気流量は同じで約5%であった。またカウルから外に漏れる量は約1.4%であった（表4）。

図47はカウル面（下壁）の静圧分布である。比較のために実験の静圧分布も重ねて描いている。また、図48は流路中心線上のマッハ数である。まず三つの計算結果を比較すると、定性的な傾向として、フロープラグ高さが低く垂直衝撃波位置が前にあるほど垂直衝撃波による圧力上昇ははっきりし、ディフューザ出口での静圧も高く、マッハ数も十分に低くなることがわかる。次に実験結果と比較する。抽気量9%の実験結果と $H_p=16.8\text{mm}$ の計算結果とがほぼ同様の位置に垂直衝撃波が存在するのでこれらを比較すると、まず計算結果では垂直衝撃波による圧力回復が大きすぎる。またカウル衝撃波と垂直衝撃波の間の領域（ $x/H_c \approx 2$ ）に、実験結果には圧力変動が見られるが、計算結果ではこれは全く出ない。計算ではカウル衝撃波と図43の（3）の膨張波の間にはカウル面の圧力が変化する要因は全くない。図48の $x/H_c=2$ 、 $M=1.27$ に示した○印は、シュリーレン写真の膨張波の角度から算出したマッハ数である。計算結果はこのマッハ数を上回っており、また流れ場の様子（図42）を見るかぎり、計算をさらに工夫することによりこの場所のマッハ数がさらに下がるとは考えられない。

図49はx断面内で平均した全圧分布である。静圧一定の条件で全圧の違う二つの流れを混合した後の全圧を求める式を導くと、求める全圧は二つの流れの全圧の体積加重平均となる。よってこの平均全圧には、全圧の体積流量加重平均を用いた。（もっともここでは比較する実験結果もなく定性的な議論に限られるので、質量流量加重平均を用いたとしても大きな差はないかもしれない。）平均全圧を図の左の方から見ていくと、まず $x/H=0$ からキャビティ始まりまでは境界層内の粘性の影響ですこしずつ全圧が損失する。キャビティでは一旦わずかに流入するために平均全圧が一度下がり、次に境界層内の低エネルギー流体がキャビティ側に抽気されるために平均全圧が上がる。その後、衝撃波による大きな全圧損失があり、続いてディフューザ内の剥離流れにより粘性損失する。図の三つの流れを比べると、衝撃波損失はどのケースもほぼ同じだが、ディフューザ内の粘性損失が大きく異なっている。フロープラグを通る流量はフロープラグ高さと同数の関数だが（3.1.3節参照）、フロープラグ高さが違うにも係らず、流量は三ケースとも同じであるから、全圧が変わらなければならない。本計算結果ではその全圧の違いは主にディフューザ内の粘性損失の違いによって生まれていることがわかる。

図50はディフューザ出口での全圧分布を実験結果と比較したものである。すでに見たように、実験結果と計算結果とは静圧レベルが異なるため単純な比較はできないが、計算では全圧の損失を少なく見積っている様子がわかる。全圧に合わせて静圧がわかればマッハ数で比較することができるが、この場所の実験の静圧の正確な値が不明なため断念した。

キャビティ抽気流量による流れの変化

次にフロープラグ高さを固定 ($H_0=17.0\text{mm}$) してブリードバルブを変化させた場合を次に示す。

まず図51は等密度線図である。計算ではキャビティ流量を絞った時の実験で起こるカウル衝撃波の変形は起こらなかった。しかし抽気流量の不足によるランプ境界層の剥離とカウル前方のパウショックは再現することができた。ただし $H_b=10\text{mm}$ の結果は解が定常にならなかったため、振動の数周期分を平均した結果である。本研究で用いた解法は定常解を前提としているため時間精度は一次精度以下であり、非定常解には物理的意味がない。したがって非定常解の時間平均にも意味があるかどうかは疑問ではあるが、ここではその問題には目をつぶることとした。それ以外の解は定常解である。

図53に流量を示す。この図より抽気量やカウルからの洩れ量が算出でき、表5のようになる。

図54は静圧分布、図55は流路中心でのマッハ数、図56はディフューザ出口での全圧分布である。抽気量を変化させた計算でも実験を良く再現する結果を得ることができなかった。

また図57の $H_b=10\text{mm}$ の場合の全圧分布を見ると、キャビティ後に振動があり、解の精度が良くないのがわかる。先に述べたようにこの解は非定常解の時間平均であり、平均をとる時間間隔が短かったのではないと思われる。そもそも時間平均をとるという手法に問題があるのかも知れない。

流れのヒステリシス

ふたたびキャビティブリードバルブ開度を一定にして、フロープラグ高さを変えた場合について考える。フロープラグ高さを流れ場の状態とは実は一対一対応をしておらず、図58の $17.0\text{mm}(u)$ と $17.0\text{mm}(l)$ に示すように、同じフロープラグ高さと二つの流れの状態が存在した。まずフロープラグ高さを 17.8mm にセットすると一番上の図のような流れ場となる。垂直衝撃波位置で下壁境界層が剥離し、ディフューザ内は流れが上壁に付着している。この解を初期値にして、さらに 17.0mm 迄下げた計算を行なうと、次の $17.0\text{mm}(u)$ のような流れ場となる。ここでさらにフロープラグ高さを下げると、ショックは一旦キャビティ部まで出た後、次の 16.5mm のような流れ場になって安定する。このときディフューザ内の流れは下壁に付着している。流れが一旦このような解になると、逆にフロープラグを上げて $17.0\text{mm}(l)$ や 17.4mm の解のように下壁に付着したままであり、衝撃波の位置も変わってしまう。

衝撃波位置とフロープラグの高さの関係を図示したのが図59である。実際にフロープラグによって衝撃波位置をコントロールしようと考えた場合、この図のようなヒステリシス性を持つ可能性がある。これはディフューザの形状が非対称であることが原因である。流れが上壁に付着した場合の様子を図60、図61、図62に示す。中心線マッハ数や静圧分布の図からは、上壁に付着した場合ディフューザで剥離のため圧力が回復せず、速度も下がっていないことがわかる。全圧分布の図から下壁側で大きな逆流が存在することがわかる。

まとめ

本節では Baldwin-Lomax モデルを用いて超音速インテーク内の衝撃波/乱流境界層流れの数値計算を行ない、実験の流れをある程度再現することが出来た。

- フローブラグ高さによってディフューザ背圧を変えることで衝撃波の位置が変わる様子をシミュレートし、この模擬インテークでは衝撃波位置が後ろに下がると、剥離が大きくなり全圧損失が増えることを確認した。
- 実験のシュリーレン写真と二次元計算とを詳しく比較すると、実験の流れ場は二次元的には説明がつかないことを示した。
- 実験との定量的な比較では、垂直衝撃波による静圧の変化を大きく見積り過ぎ、特にディフューザ内の圧力の予測精度が悪かった。
- キャビティ抽気量を絞ると、実験で見られた、カウル先端部にバウショックが発生しさらにディフューザ入口部に垂直衝撃波が発生するという流れ場を、計算で再現することができた。
- ディフューザ内の流れ方によって、同じフローブラグ位置でも二種類の衝撃波位置が存在する可能性があることを示唆した。

5.3.2 Jones-Launder モデルによる二次元計算

次に $k-\varepsilon$ モデルの例として Jones-Launder モデルを用いて二次元計算を行なった。

図 63 は等密度線図である。4.2 節、4.3 節で確認したように Baldwin-Lomax モデルには一旦剥離すると再付着しにくい傾向があったのに対し、 $k-\varepsilon$ モデルには剥離が起きにくい傾向がある。そのため、図を見るとわかるようにこの計算では垂直衝撃波によるラムダ型ショックは発生せず、ほとんど剥離が生じなかった。そのため図 65 の静圧分布を見ると、Baldwin-Lomax モデルに比べてさらに高い圧力が得られ、実験結果からは遠ざかってしまった。図 66 の中心線マッハ数をみても実験のマッハ数を示した○印を通る様子はない。これらの結果より、Jones-Launder モデルをはじめ、 $k-\varepsilon$ モデルを用いた計算をこれ以上行なっても、解が物理現象をより良く表す可能性はあまり無いと考えられる。

図 68 からは抽気量、カウルからの洩れ量が算出できる。これを表 6 に示す。Baldwin-Lomax モデルに比べ全圧損失が少ないので抽気量は少なくて済み、実験結果の抽気量とも合わない。

図 69 は全圧分布である。実験と比較すると、全圧の絶対的な値の違いの他に分布の形もかなり異なり、ディフューザ内の流れを正しく再現していないようである。

この節の内容をまとめると、

- Jones-Launder モデルを用いた計算では、Baldwin-Lomax モデルよりも剥離の小さい解が得られ、そのため圧力回復率は良くなり、実験値からますます離れる結果となった。

- 全圧分布も改善されなかった。
- Jones-Launder モデルを用いても、Baldwin-Lomax モデルに比べ精度の良い解は得られなかったことから考えて、たとえ剥離流れを精度良く模擬する乱流モデルが存在し、それを用いたとしても、二次元計算の範囲内では精度の良い解析は不可能であろうと思われる。

5.4 三次元計算

前節までの結果、実験の流れ場を二次元計算の範囲内で精度良く再現することは、乱流モデルを高度なものにしたとしても、困難であろうと思われた。これは実験の流れ場が二次元的な流路形状ではあるが、アスペクト比が1で、しかも側壁の境界層が厚く抽気も全くされないため、強い三次元性を持っていると考えられるからである。こうした理由から次に三次元計算を行なった。ただし計算量の制限から乱流モデルは Baldwin-Lomax モデルを用い、得られた解も一ケースに限られた。計算は流れの対称性を仮定して、対称面で切った半分の領域で行なった。ディフューザ部で側壁剥離が起きた場合、非対称に流れる恐れが十分にあるが、計算量の制限からやむを得ず対称性を仮定することとした。以下に得られた解を示す。

まず図70、図71のように図示する xy 断面、xz 断面に名前を付け、その位置を示す。二次元計算は xy 断面に対応する。xz 断面(図74)の各図は、下側が側壁、上側が対称面である。側壁と上下壁と表示した断面は、計算上の第一格子点の面を意味している。

図72、図74は等密度線図である。ただし超音速の領域を網掛けで示している。断面(xy-A)の衝撃波パターンの説明を図73に示す。二次元計算と同様なランプ衝撃波(1)、カウル衝撃波(2)が見られる。二次元計算結果と異なり、キャビティ内の渦が流路側に張り出すため主流の流線が下方に曲がることにより(3)の衝撃波が発生している。次にカウル衝撃波(2)の反射膨張波(4)を経て垂直衝撃波(5)が発生し超音速になるが、すぐ再膨張して超音速に戻り、その後小さな垂直衝撃波(6)と再膨張を経て、最終的に亜音速に減速している。すなわち単一の垂直衝撃波ではなく擬似衝撃波となっている。断面(xy-A)から(xy-B)、(xy-C)と側壁に近付いて行くと、カウル衝撃波が次第に変形し角度が急になって行く。これは断面(xz-C)の対応する部分を見るとわかるが、カウル衝撃波が側壁に接する部分で側壁境界層が剥離し、その影響でカウル衝撃波が変形してラムダ型になっているためである。(xz-B,C,D)の各断面を見ると側壁境界層はカウル衝撃波によって急激に厚くなり、ディフューザ入口部分では側壁境界層は分厚くなっている。そのため単一の垂直衝撃波ではなく擬似衝撃波が発生したと考えられる。

図75に xy 断面、図76に xz 断面の等圧力線と速度ベクトルを示す。またこれらの図のうち断面(xy-E)、(xz-A)、(xz-E)は、壁面からの第一格子点での速度ベクトルであり、ベクトルの長さは適宜見やすいように調整してある。第一格子点はほとんど全ての計算領域で粘性底層内に入っているため、三つの図は実験におけるオイルフロー図を模擬していると考えられる。断面(xy-A)、すなわち対称面での速度ベクトルを見ると、上壁 下壁共に境界層は薄く、垂直衝撃波位置でも剥離してい

ない。これは断面 (xz-A), (xz-E) の対称面付近の速度ベクトルを見るとわかるが、流路対称面から左右 (z 方向) 60% 以上の幅の間では、上壁、下壁とも剥離せずにスムーズに流れている。一方断面 (xz-C) を見ると、側壁の境界層は厚く、ディフューザ部では目だって剥離はしていないものの境界層厚さが流路の約半分を占めていることがわかる。この側壁の境界層の様子を断面 (xy-E) で見てみると、側壁境界層はカウル衝撃波によって剥離し、その剥離がディフューザ内まで続いて大きな逆流領域が存在しているようすがわかる。剥離は特に流路隅部で大きく、圧力勾配に沿って流れ、キャビティへと流れ込んでいる。断面 (xz-A), (xz-E) を見ても側壁の近く、即ち流路の隅部で大きく剥離しているようすがわかる。

次に yz 断面に (A) から (H) までの名前を付け、それぞれ位置を図 77 に示した。図 78 は yz 断面内の二次流れのベクトル線図である。また図 79 は静圧分布である。図は見やすくするために x 軸方向に 2 倍に拡大してあり、各断面は右端が側壁、左端が対称面である。ベクトル線図 (図 78) の各図の右下隅を斜めに走る曲線は x 方向速度が 0 の等値線であり、従ってこの線よりも隅側は逆流領域である。断面 (A) のベクトル図では、ランプ衝撃波による境界層内の圧力勾配の影響で側壁上を下に向かう二次流れが発生し、それがカウル面に当たって流路隅部に集まり、そこから流れが内側へとそれる様子が見える。同じ断面の静圧図をみると、下壁に平行な等圧力線で示されるカウル衝撃波の他に、流路隅部を斜めに横切る等圧力線が見られ、断面の右下から左上へと伝播する三次元的な斜め衝撃波が存在することを示唆している。この三次元斜め衝撃波はさらに断面 (B), (C) のベクトル図、静圧図にも見られ、これがカウル衝撃波後のマッハ数を二次元解析のマッハ数よりも低くしている理由と考えられる。断面 (D), (E) のベクトル図にはキャビティ抽気により上に向かう二次流れが見られるが、特に側壁近傍の低速流がより多く抽気されている様子が見える。側壁を上方向に向かう二次流れはキャビティリップを過ぎると上壁に当たり、断面 (F) に見られるように流路上隅部に高圧領域を作り、さらに (F) から (G) にかけて断面の右上から左下へと高圧領域が広がっており、ここにも三次元的な斜め衝撃波あるいは緩く湾曲した垂直衝撃波が存在することが推測される。

図 80 は全圧分布である。側壁上の剥離領域で特に全圧が低く、この側壁剥離が損失の大半を産んでいると考えられる。Anderson ら [3, 4] などの計算結果では流路隅部に縦渦が発生し、全圧の低い領域が認められたが、本計算では特に縦渦構造は認められなかった。

図 81 は三次元計算と、実験結果のうち垂直衝撃波位置がほぼ対応するものを選んで、静圧分布を比較した図である。この結果にはカウル衝撃波後の圧力変動が存在し、また垂直衝撃波による圧力上昇値が実験と一致していることなど、二次元計算では得られなかった特徴が定性的ではあるが認められる。つまり実験の流れ場では三次元性が本質的に重要な役割を占めており、三次元解析を行なうことにより初めて予測することができたと考えられる。一方 計算結果のディフューザ内の圧力回復は実験に比べ低い。これは Baldwin-Lomax モデルが剥離の大きい結果を出すことの影響と考えられる。そのため定量的な予測精度を向上させるためには、より精度の高い乱流モデルを用いる必要があると言える。

図 82 はディフューザ出口での全圧分布である。図の (a), (b), (c) はそれぞれ図 70 の (xy-A),

(xy-B), (xy-C)の断面に対応する。前の図と同じ実験結果を比較のために示している。計算結果の全圧分布は流路中心(対称面)に極めて全圧の高い部分が見られる。これは側壁剥離が大きく主流が中央に集められることの結果と思われる。Baldwin-Lomax モデルが発達した内部流に対して精度が悪いことも理由の一つであろう。

図83は中心線上のマッハ数である。カウル衝撃波後($x/H_c \approx 2$ 前後)のマッハ数が実験では非粘性解析より低くなるという現象を二次元計算では全く予測できなかった。しかし前述した三次元的な斜め衝撃波の影響で、三次元解析は図に示すように非粘性解析よりも低いマッハ数を予測した。

図84は流量平均した全圧分布である。二次元結果と異なり、衝撃波損失はほとんど目立たず、損失の原因の大半はディフューザ内の粘性損失である。また上下壁だけでなく側壁でも粘性損失が起きているため、当然の結果であるが二次元計算よりも損失が大きい。

図85は流量分布である。この図によると、表7に示すように、本計算のカウルから外部への漏れ量は2%、キャビティからの抽気量は8%であった。またキャビティリップ部より下流ディフューザ内の流量が一定でなく数%の誤差が認められ、解が完全に収束には至っていないことがわかる。しかしながら二次元計算を行なった時の経験では、これ以上計算を行なっても定性的には解に大きな変化が無いにもかかわらず、このような解に至るまでに必要とした計算時間の数10%の計算時間をさらに必要とした。本計算では、乱流モデルの予測精度を考えると厳密に定量的な計算を行なう意味は無く、しかも既にかなり膨大な計算時間を消費していることから、ここで計算を打ち切ることとした。

以上の結果をまとめると、この模擬インテークの流れ場では

- ランプ衝撃波は二次元的であった。一方 カウル衝撃波は側壁上でラムダ型に変形し、三次元構造を持った。
- カウル衝撃波により側壁境界層が剥離し、その剥離はディフューザ内まで続いていた。特に流路隅部で剥離が大きかった。
- 側壁剥離が大きいため、ディフューザ入口部には単一の垂直衝撃波ではなく疑似衝撃波が発生した。
- カウル先端、キャビティリップ部など新たに流路隅部となる箇所から、三次元的な斜め衝撃波が発生した。
- 側壁の剥離、三次元的な斜め衝撃波など流れの三次元性が大きく、二次元計算では定性的な予測が困難であった。三次元計算を行なったことによりこれらを定性的ではあるが解明することができた。

このように三次元計算結果は、実験結果からでは理解し難かった流れ場の三次元構造を把握するための一助となったと考えられる。

5.5 考察

5.5.1 各計算と実験の比較

個々の計算に対しては既に考察を行なったが、ここでは、三次元計算結果に衝撃波位置が近い実験結果と二次元計算結果を選んで、比較してみる。

図86は、実験のシュリーレン写真と計算結果の等密度線図である。また合わせて各流れ場の模式図(図87)も示す。三次元計算の図は、実験に於けるシュリーレン法を模擬する目的で、 z 方向に密度を積算してその等密度線を示している。それ以外の図は既に掲げた図の再掲である。

カウル衝撃波を比較すると、実験と計算とはその角度が異なって見える。実験のカウル衝撃波は模式図の(2)、(3)のように二つ見え、(3)が二次元的な斜め衝撃波で、(2)はカウル先端と側壁とから発生する馬蹄渦とそこから発生した斜め衝撃波であると考えられる。計算では垂直衝撃波部分を重視した計算格子を用いカウル先端近傍の格子が粗かったため、三次元計算で馬蹄渦が発生せず、そのため計算結果のカウル衝撃波の角度の実験のそれとは合わなかった。

次にキャビティ直下の膨張波を比較すると、三次元計算結果が実験に比較的近いことがわかる。これは前節で述べたようにカウル先端からの三次元的な斜め衝撃波によりこの付近のマッハ数が低下しているためである。

キャビティ左端から発する波を模式図で見ると、二次元計算の(3)は膨張波であるのに対し、三次元計算の(3)は衝撃波(圧縮波)である。(実験はカウル衝撃波がこの部分に当たるため流れ場の様子が全く違い、比較はできない。)この違いはキャビティ内の流れに依存しており、計算が二次元か三次元かは本質的な違いではない。本計算では計算量を減らす目的からキャビティ内は単純化した形状で模擬しているため、この部分の衝撃波システムを定量的に予測することは難しいと考えられる。

図88はカウル壁上の静圧分布の比較である。垂直衝撃波付近を見ると二次元解析では実験に比べ圧力回復しすぎたのに対し、三次元解析ではよく一致しており、三次元解析は擬似衝撃波を含む衝撃波システムの構造を良く近似していると考えられる。一方下流のディフューザ内の圧力に関しては、二次元計算では側壁の影響が考慮できないため圧力回復しすぎる。特にJones-Launderモデルは、Baldwin-Lomaxモデルと比べると境界層剥離が小さいため、静圧は高い値を示した。三次元解析ではBaldwin-Lomaxモデルが剥離を大きく予測するために、圧力の低い結果となってしまったと考えられる。

図89は全圧分布の比較である。これを見る限りでは計算は定性的にも合っているとは言い難い。ディフューザ内の流れ場は、実験において左右非対称な側壁剥離を起こしている恐れもあり、精度良く予測することは、今後の課題である。

5.5.2 インテークの設計に関して

さて以上の数値解析の結果から、効率の良いインテークを設計するために、どのようにすれば良いかここで考えてみる。

まず本研究で用いた模擬インテークの流れ場に於いては、側壁境界層が厚くそれが大きく剥離することが、全圧損失に対して最も大きな影響を与えていた。それゆえキャビティ抽気などで上壁の境界層を減らすと共に、側壁の境界層も抽気し剥離をできる限り押えることが、損失を減らすために最も重要なことである。

また三次元解析によって、流路隅部に低速流体が溜り、そこから流れを乱す三次元的な斜め衝撃波が発生していることが明らかになった。このことから考えて、抽気は特にカウル先端近くやキャビティリップ近くの流路隅部で行なうと有効であると考えられる。

さて本研究の対称とした模擬インテークでは、実験においても、計算においても、キャビティ部で衝撃波を安定させることができなかった。ここで、どのようにすれば衝撃波を安定させうるのかについて考えてみる。まずある適正な流れの状態、ディフューザ入口部に垂直衝撃波が形成されたとする。何らかの理由で適正状態よりフローラグ下を通りエンジンへと流れる流量が減ったとすると、ディフューザ背圧は上がり、衝撃波は前方に移動する。ここで流れ場を安定させるためには、減った流量の分だけキャビティから抽気してやれば良いはずである。衝撃波が前方に移動するとキャビティ内の静圧は高くなるから、静圧が高くなると抽気量が増えるようにしてやれば良い。ところで実験においても、計算においても、抽気流量はバルブを用いて調節しており、ここで流れはチョークする。バルブを固定した状態では、チョークしたときの流量は流れの全圧に比例する。全圧は衝撃波によって減るから、衝撃波がキャビティよりも前にある時と、後ろにある時とで、(キャビティ内で損失される全圧量に違いがないとすると、) 衝撃波が前方に出た場合はかえって抽気流量が減ってしまうという結論に達する。抽気量が静圧に比例するようにするためには、計算で用いたように抽気が滑らかに流れるような形状では駄目である。抽気を広いチャンバーに放出するなどして運動エネルギーを散逸させ、そこからバルブで流量をコントロールして排出すれば、チャンバー内の静圧がバルブ流れに対する全圧になるから、その流量はチャンバー内の静圧に比例するはずである。

図93～図92は、キャビティ形状と抽気条件を変えて行なった試行計算の結果である。計算量を節約するためディフューザ以下の形状を大幅に省略してある。キャビティからの抽気は、キャビティ内の上壁に小さい穴がたくさん開いていてそこから流れ出している状態を想定して、上壁境界に壁に垂直な速度を境界条件として与えることで行なった。境界速度はチョーク条件(式3.11)に基づき、壁面での静圧をチョーク条件の全圧に与えてやることで、抽気量が静圧に支配されるようにした。この試行計算では、これ以外の抽気流量や背圧などを変えた計算を行なっておらず結果に関しても検討が十分でないが、このような抽気条件では $H_p=14.0\text{mm}$ のケースのように垂直衝撃波がキャビティリップよりも前方に出た場合には抽気流量が増える(図90)ので衝撃波がこの位置で安定した。よって図91に示すように、背圧がかなり広い範囲にわたって変化しても、垂直衝撃波が安定してキャビティ部に発生するような数値解となった。実験においてもこのような抽気条件を実現すれば、衝撃波をキャビティ部に安定して保持することが可能になると考えられる。

5.6 結び

本章ではインテーク内の流れ場の二次元および、三次元の乱流数値解析を行なった。インテーク内の流れ場は三次元性が強く、二次元解析はあまり有効ではない。三次元解析によれば、二次元解析や実験などでは得難い流れ場の三次元的情報が比較的容易に得られ、物理現象を理解するための一つの有用な手段となり得る。しかしながら現状では最速のスーパーコンピュータをもってしても三次元計算は計算量の上でかなり困難であり、パラメータスタディを行なうことなどは余り期待できない。

また計算格子の生成、初期値の生成、結果の後処理など、複雑なデータ処理作業が必要であることも、困難さを増大させている。しかしながら、プログラミングとデータ処理に熟練し、処理プログラムの蓄積が進めば、このような作業は容易なこととなるはずである。

乱流モデルに関しては本研究の範囲内では残念ながら甲乙つけ難い。Jones-Launderモデルによる三次元計算ならば、たとえば静圧分布はさらに実験と合うことが期待されるが、それはもちろんモデルの精度が良いことを保証するわけではない。

第6章 結論

本研究では超音速インテーク内の流れの数値解析を行ない、次のような知見を得た。

- 衝撃波／乱流境界層干渉 (SBLI) 現象は、本研究のように超音速と言えどもマッハ数があまり高くない場合、剥離流であることが本質的である。それゆえ非圧縮性の乱流モデルをそのまま適用することに問題は無いと考えられるが、剥離流れを十分に精度良く予測する乱流モデルが現時点では存在しないため、SBLI 流れを予測することは困難である。
- 本研究では Baldwin-Lomax モデル及び Jones-Launder モデルを用いて超音速インテーク内の衝撃波／乱流境界層流れの数値計算を行ない、垂直衝撃波の発生位置などの実験の定性的な傾向を良く再現することができた。
- ディフューザ内の流れ方によって、同じフローブラグ位置でも二種類の衝撃波位置が存在する可能性があることを示唆した。
- 計算対象とした模擬インテークは側壁の境界層やその剥離が大きい。三次元計算により新たな斜め衝撃波や擬似衝撃波の発生などの特徴的な現象を捕らえることに成功し、定性的に流れ場を解明した。
- 三次元計算結果によれば、側壁境界層は本モデルの場合カウル衝撃波によって剥離し、その剥離がディフューザ内まで続いて大きな逆流領域が存在している。剥離は特に流路隅部で大きく、圧力勾配に沿って逆流しキャビティへと流れ込んでいる。
- 斜め衝撃波や終端衝撃波による圧力回復率は、二次元計算ではかなり過大評価してしまうのに対し、三次元計算では定量的に良く一致する解を得ることができた。
- ディフューザ出口での全圧分布は、どの計算も実験と合わなかった。従ってディフューザの流れはどの計算もうまく再現できていないと考えられる。もっとも実験の流れの対称性、定常性にも疑問があり一概に比較はできない。

謝辞

本研究を行なうにあたっては、下記の方々の御指導、御助言、御鞭撻、御助力を賜りました。この場を借りまして深く感謝の意を表します。

田中厚成様 そもそもインテークの数値解析を私の研究対象にと薦めてくださり、インテーク研究会に私を紹介してくださいました。研究を遂行するうえでも様々な御指導を賜りました。

坂田公夫様、本阿彌眞治先生、ほかインテーク研究会の皆様 インテーク研究会に私を歓迎して下さり、模擬インテークの実験データを提供して下さったほか、数多くの興味深い実験に参加させてくださいました。私の遅々として進めぬ研究にも愛想を尽かさずお付き合いくださり、インテークの現象論や私の数値解析結果に関する貴重な御意見、御指導を頂戴いたしました。

航空宇宙技術研究所の皆様 研修生として受け入れてくださり、スーパーコンピュータの数百時間にわたる膨大なCPUタイムをはじめ、研究所の数多くの研究施設を利用させてくださいました。

松尾裕一様 圧縮性流体の数値解法、乱流モデル、航研計算機の使い方など研究に関することから、博士課程に於ける生活態度、こぶの滑り方まで、幅広く御指導いただきました。

山本誠様 乱流モデルに関していろいろと教えて下さいました。

岡本助手、鈴木助手、および山下君を初めとする7代にわたる荒川研の学生諸君 主に日常生活でいろいろとお世話になりました。特に、計算機管理を引き継いでくれただけでなく、私がさぼっていた数多くのソフトウェアのインストールをしてくれた鮫島君、よく肩を揉んでくれた島野君、宴会やテニスコートの予約に奔走し、また銭湯によく付き合ってくれた藤原君。

私の両親 退職して進学、留年など、決して順調とは言えない私の研究生生活を快く支援してくれました。

本論文をまとめるに際し、小竹進教授、小林敏雄教授、吉識晴夫教授、松本洋一郎教授にはご多忙の中から貴重な時間をさいて御討論いただき、御助言を賜りました。

本研究は 荒川忠一助教授 の懇切丁寧な御指導のもとに行なわれました。先生はまた、精神的 金銭的にも御支援して下さい、なかなか研究成果を出せない私を、急かすことなく優しく気長に見守って下さいました。ここに深く感謝の意を表します。

参考文献

- (1) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (2) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (3) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (4) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (5) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (6) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (7) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (8) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (9) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (10) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (11) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (12) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (13) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (14) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (15) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (16) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (17) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (18) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (19) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.
- (20) Taylor, G. I. Design, development, construction of high speed gas turbine engine. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1941, 15, 100-101.

参考文献

- [1] Doyle D. Knight. Improved calculation of high speed inlet flows: Part I. Numerical algorithm. *AIAA J.*, Vol. 19, No. 1, 1981. (AIAA paper 80-0383).
- [2] Doyle D. Knight. Improved calculation of high speed inlet flows: Part II. Results. *AIAA J.*, Vol. 19, No. 2, 1981. (AIAA paper 80-0383).
- [3] Bernhard H. Anderson and Thomas J. Benson. Internal computational fluid mechanics on supercomputers for aerospace propulsion systems. *NASA CP 2454*, 1986.
- [4] Bernhard H. Anderson. Three-Dimensional viscous design methodology for advanced technology aircraft supersonic inlet systems. *AIAA paper 84-0194*, *NASA TM 83558*, 1984.
- [5] Lois J. Weir, D. R. Reddy, and George D. Rupp. Mach 5 inlet CFD and experimental results. *NASA TM 102317 (AIAA paper 89-2955)*, 1989.
- [6] Lois J. Weir and D. R. Reddy. A comparison of CFD predictions and experimental results for a mach 5 inlet. *NASA CP 10063*, 1991.
- [7] 清水邦弘, 中橋和博. 超音速インテーク内部流の数値実験. 「日本航空宇宙学会第 21 回流体力学講演会講演集」, 11 1989.
- [8] 黒田真一, 藤井孝蔵. 抽気室を有する超音速インテークの数値計算. 「日本航空宇宙学会第 22 回流体力学講演会講演集」, p. 144, 11 1990.
- [9] J. Shigematsu, K. Yamamoto, K. Shiriishi, and A. Tanaka. A numerical investigation of supersonic inlet using implicit TVD scheme. *AIAA paper 90-2135*, 1990.
- [10] A. Fujimoto, N. Niwa, and K. Sawada. Numerical investigation on supersonic inlet with realistic bleed and bypass systems. *AIAA paper 91-0127*, 1991.
- [11] 藤本ほか. 高マッハ数空気取り入れ口の変・抽気機構の研究. 技術開発に関する研究調査 成果報告書 no.107, 日本宇宙工業会革新航空機技術開発センター, 3 1990.
- [12] R. Bohning. Calculation of 2D turbulent shock/boundary-layer interaction at curved surfaces with suction and blowing. In *Turbulent Shear Layer/Shock Wave Interactions, IUTAM Symposium*. Springer-Verlag, 1985.
- [13] 村上哲, 坂田公夫. キャピティ抽気のある模擬インテークの実験的研究. 「日本航空宇宙学会第 22 回流体力学講演会講演集」, p. 140, 11 1990.

- [14] Lars-Erik Eriksson. Navier-Stokes simulations applied to air inlets configured for ramjet powered missiles. *ISABE 91-7076*, 1991.
- [15] J. Seddon and E.L. Goldsmith. *Intake Aerodynamics*. AIAA Education Series, 1985. ISBN 0-930403-03-7.
- [16] M. Sajben, T.J. Bogar, and J.C. Kroutil. Experimental study of flows in a two-dimensional inlet model. *AIAA paper 83-0176*, 1983.
- [17] Robert E. Coltrin. High-speed inlet research program and supporting analysis. *NASA CP-3049 pp.469-486*, 1987.
- [18] J. E. Green. Interactions between shock waves and turbulent boundary layers. *Progress in Aeronautical Science*, Vol. 11, pp. 235-337, 1970.
- [19] G. S. Settles and D. S. Dolling. Swept shock/boundary-layer interactions - Tutorial and update. *AIAA paper 90-0375*, 1990.
- [20] J. Seddon. The flow produced by interaction of a turbulent boundary layer with a normal shock wave of strength sufficient to cause separation. *A.R.C. R. & M.*, No. 3502, 1967.
- [21] J. E. Green. Reflexion of an oblique shock wave by a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, Vol. 40, part I, pp. 81-95, 1970.
- [22] Daniel C. Reda and John D. Murphy. Shock wave - turbulent boundary layer interactions in rectangular channels. *AIAA paper 72-715*, 1972.
- [23] Daniel C. Reda and John D. Murphy. Shock wave/turbulent boundary-layer interactions in rectangular channels. *AIAA J.*, Vol. 11, No. 2, 1973.
- [24] Daniel C. Reda and John D. Murphy. Sidewall boundary-layer influence on shock wave/turbulent boundary-layer interactions. *AIAA J.*, Vol. 11, No. 10, 1973.
- [25] C. Herbert Law. Supersonic and Turbulent Boundary-Layer Separation. *AIAA J.*, Vol. 12, No. 6, pp. 794-797, 1974.
- [26] C. Herbert Law. Supersonic shock wave turbulent boundary-layer interactions. *AIAA J.*, Vol. 14, No. 6, 1976.
- [27] Gary S. Settles, Thomas J. Fitzpatrick, and Seymour M. Bogdonoff. Detailed study of attached and separated compression corner flowfields in high reynolds number supersonic flow. *AIAA J.*, Vol. 17, No. 6, 1979.
- [28] D. S. Dolling and M. T. Murphy. Unsteadiness of the separation shock wave structure in a supersonic compression ramp flowfield. *AIAA J.*, Vol. 21, No. 12, 1983.
- [29] 松尾一泰. 擬似衝撃波について. 「ながれ」, Vol. 6, pp. 308-318, 1987.
- [30] 生井武文, 松尾一泰, 永井寛. 擬似衝撃波の構造. 「日本機械学会論文集」, Vol. 39, No. 326, 1973.

- [31] Deepak Om and Morris E. Childs. Multiple transonic shock-wave/turbulent boundary-layer interaction in a circular duct. *AIAA J.*, Vol. 23, No. 10, 1985. (AIAA paper 83-1744).
- [32] B.F. Carroll and J.C. Dutton. Turbulence phenomena in a multiple normal shock wave/turbulent boundary-layer interaction. *AIAA J.*, Vol. 30, No. 1, 1992. AIAA paper 90-1455.
- [33] B. Carroll and J. Dutton. an LDV investigation of a multiple normal shock wave/turbulent boundary layer interaction. *AIAA paper 89-0355*, 1989.
- [34] J. R. Viegas and C. C. Horstman. Comparison of multiequation turbulence models for several shock boundary-layer interaction flows. *AIAA J.*, Vol. 17, No. 8, 1979. (AIAA paper 78-1165).
- [35] Tuncer Cebeci and A.M.O. Smith. *Analysis of turbulent boundary layers*. Academic press, 1974.
- [36] J. S. Shang and W. L. Hankey Jr. Numerical solution for supersonic turbulent flow over a compression ramp. *AIAA J.*, Vol. 13, No. 10, 1975.
- [37] J. S. Shang, W. L. Hankey Jr., and C. Herbert Law. Numerical simulation of shock wave - turbulent boundary-layer interaction. *AIAA J.*, Vol. 14, No. 10, 1976.
- [38] M. Visbal and D. Knight. The baldwin-lomax turbulence model for two-dimensional shock-wave / boundary-layer interactions. *AIAA J.*, Vol. 22, No. 7, 1984.
- [39] D. A. Johnson and L. S. King. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *AIAA J.*, Vol. 23, No. 11, 1985. (AIAA paper 84-0175).
- [40] D.A. Johnson. Transonic separated flow predictions with an eddy-viscosity/reynolds-stress closure model. *AIAA J.*, Vol. 25, No. 2, 1987. (AIAA paper 85-1683).
- [41] Ramesh K. Agarwal, Jerry E. Deese, and G. R. Peters. Transonic shock/boundary-layer interaction studies - asymptotic theories, numerical solutions, and the role of turbulence modeling. *AIAA paper 88-3800-CP*, 1988.
- [42] J. R. Viegas, M. W. Rubesin, and C. C. Horstman. On the use of wall functions as boundary conditions for two-dimensional separated compressible flows. *AIAA paper 85-0180*, 1985.
- [43] Morris W. Rubesin. Turbulence modeling for aerodynamic flows. *AIAA paper 89-0606*, 1989.
- [44] B. F. Carroll and J. C. Dutton. Computation of multiple normal shock wave/turbulent boundary layer interactions. *AIAA paper 90-2133*, 1990.
- [45] Pei Lin, G.V.R. Rao, and George M. O'Connor. Numerical investigation on shock wave/boundary-layer interactions in a constant area diffuser at mach 3. *AIAA paper 91-1766*, 1991.

- [46] Pei Lin, G. V. R. Rao, and George M. O'Connor. Numeircal analysis of normal shock train in a constant area isolator. *AIAA paper 92-2162*, 1991.
- [47] Uriel C. Goldberg and Sukumar R. Chakravarthy. Prediction of separated flows with a new backflow turbulence model. *AIAA J.*, Vol. 26, No. 4, 1988.
- [48] Richard M. Beam and R. F. Warming. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form. *J. of comp. phys.*, Vol. 22, pp. 87-110, 1976.
- [49] Richard M. Beam and R. F. Warming. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, Vol. 16, No. 4, 1978.
- [50] 松尾裕一. 「高速ターボプロップ流れの数値解析」. 学位論文, 東京大学, 昭和 63 年度.
- [51] 生井武文, 松尾一泰. 「圧縮性流体の力学」. 理工学社, 1977.
- [52] 生井武文, 松尾一泰. 「衝撃波の力学」. コロナ社, 1983.
- [53] Ch. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1 & 2. John Wiley & sons, 1990.
- [54] 桑原邦郎. ナヴィエ・ストークス方程式の数値解法. 「ながれ」, Vol. 1, No. 4, pp. 333-342, 1982.
- [55] 東京天文台(編). 「理科年表」. 丸善, 1981.
- [56] Roger Peyret and Henri Viviand. Computation of viscous compressible flows based on the Navier-Stokes equations. *AGARD-AG-212*.
- [57] Marcel Vinokur. Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems. *J. of comp. phys.* 14, 105-125, 1974.
- [58] Joseph L. Steger. Implicit finite-Difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries. *AIAA J.*, Vol. 16, No. 7, 1978.
- [59] Thomas H. Pulliam and Joseph L. Steger. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow. *AIAA J.*, Vol. 18, No. 2, 1980.
- [60] R. F. Warming, Richard M. Beam, and B. J. Hyett. Diagonalization and simultaneous symmetrization of the gas-dynamic matrices. *Math. of comp.*, Vol. 29, No. 132, pp. 1037-1045, oct 1975.
- [61] T.H. Pulliam and D.S. Chaussee. A Diagonal Form of an implicit approximate-factorization algorithm. *J. of comp. phys.*, Vol. 39, pp. 347-363, 1981.
- [62] T.H. Pulliam. Solution methods in computational fluid dynamics, 1986.
- [63] K. Fujii and S. Obayashi. Practical applications of new LU-ADI scheme for the three-dimensional Navier-Stokes computation of transonic viscous flows. *AIAA 86-0513*, 1986.

- [64] Joseph L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *J. of comp. phys.*, Vol. 40, pp. 263-293, 1981.
- [65] S. Obayashi, K. Matsushima, and K. Fujii. Improvements in efficiency and reliability for Navier-Stokes computations using the LU-ADI factorization algorithm. *AIAA paper 86-0338*, 1986.
- [66] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. 1. Springer Verlag, 1988.
- [67] S.R. Chakravarthy and S. Osher. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. *AIAA paper 85-0363*, 1985.
- [68] S.R. Chakravarthy. The versatility and reliability of euler solvers based on high-accuracy TVD formulations. *AIAA paper 86-0243*, 1986.
- [69] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. of comp. phys.*, Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- [70] Amiram Harten, Peter D. Lax, and Bram van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, Vol. 25, No. 1, 1983.
- [71] Ami Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. of comp. phys.*, Vol. 49, pp. 357-393, 1983.
- [72] S. Chakravarthy and S. Osher. Numerical experiments with the Osher upwind scheme for the euler equations. *AIAA paper 82-0975*, 1982.
- [73] Sukumar R. Chakravarthy. High resolution upwind formulations for the Navier-Stokes equations. *von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1988-05, Computational fluid dynamics*, 5 1988.
- [74] 保原充, 大宮司久明 (編). 「数値流体力学 基礎と応用」. 東京大学出版会, 1992.
- [75] K. Sawada. A Numerical investigation on wing/nacelle interferences of USB configuration. *AIAA paper 87-0455*, 1987.
- [76] J.L. Steger, F. Carroll Dougherty, and John A. Benek. A chimera grid scheme. In *Advance in Grid Generation, ASME FED.*, Vol. 5, Jun 1985.
- [77] J.A. Benek, F.G. Buning, and J.L. Steger. A 3-D chimera grid embedding technique. *AIAA paper 85-1523*, 1985.
- [78] Young J. Moon and Meng-Sing Liou. Conservative treatment of boundary interfaces for overlaid grids and multi-level grid adaptations. *AIAA 89-1980-CP*, 1989.
- [79] M.M. Rai. A Conservative treatment of zonal boundaries for euler equation calculations. *AIAA paper 84-0164*, 1984.

- [80] Kozo Fujii. A method to increase the accuracy of vortical flow simulations. *AIAA 88-2562-CP*, 1988.
- [81] 藤井孝蔵. 解強制置換法. 「第五回数値流体力学シンポジウム講演論文集」, p. 95, 1991.
- [82] P. Bradshaw. Compressible turbulent shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pp. 33-54, 9 1977.
- [83] Morris W. Rubesin and William C. Rose. The turbulent mean-flow, reynolds-stress, and heat flux equations in mass-averaged dependent variables. *NASA TM-X-62248*, 1973.
- [84] B. E. Launder and D. B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 3, pp. 269-289, 1974.
- [85] W. P. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301-314, 1972.
- [86] Virendra C. Patel, Wolfgang Rodi, and Georg Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. *AIAA J.*, Vol. 23, No. 9, 1985.
- [87] J. J. Gorski, S. R. Chakravarthy, and U. C. Goldberg. High accuracy TVD schemes for the $k - \epsilon$ equations of turbulence. *AIAA paper 85-1665*, 1985.
- [88] T. J. Coakley. Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA paper 83-1693*, 1983.
- [89] Kuei-Yuan Chien. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model. *AIAA J.*, Vol. 20, No. 1, 1982. (AIAA paper 80-0134).
- [90] 白倉昌明, 大橋秀雄. 「流体力学 (2)」. コロナ社, 1969.
- [91] S.J. Kline, et al., editors. *1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford conference on complex turbulent flows*, 1980.
- [92] Dr. Hermann Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [93] 田村善昭, 藤井孝蔵. 風洞超音速ノズル設計に対する数値計算の利用. 「日本航空宇宙学会第21回流体力学講演会講演集」, 11 1989.

付図、付表

超音速インテーク

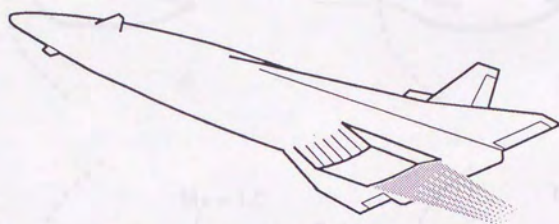


図 1：超音速旅客機

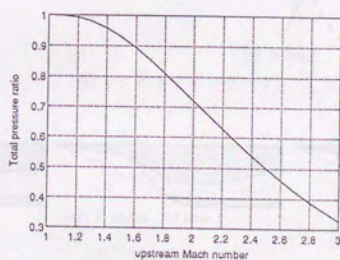


図 2：垂直衝撃波による全圧損失

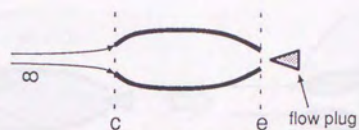


図 3：空力的ダクト

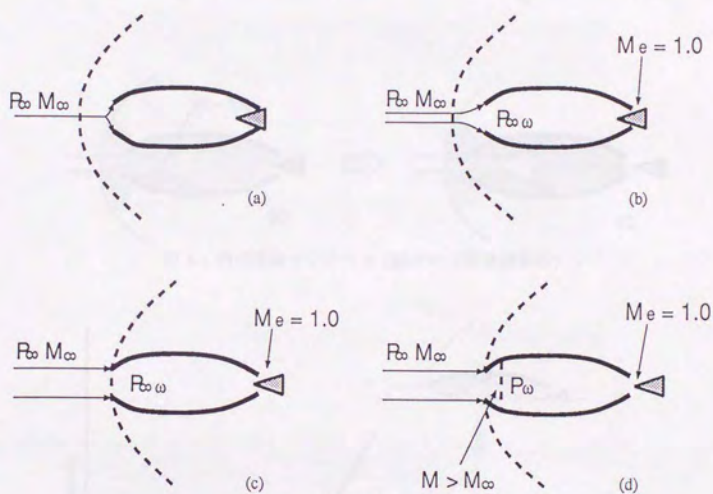


図 4：ピトーインテーク

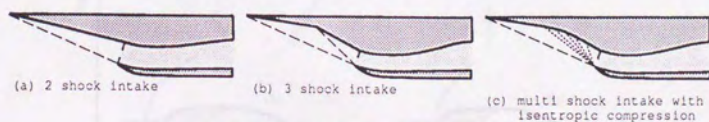


図 5：マルチショックインテーク (網掛けは亜音速領域)

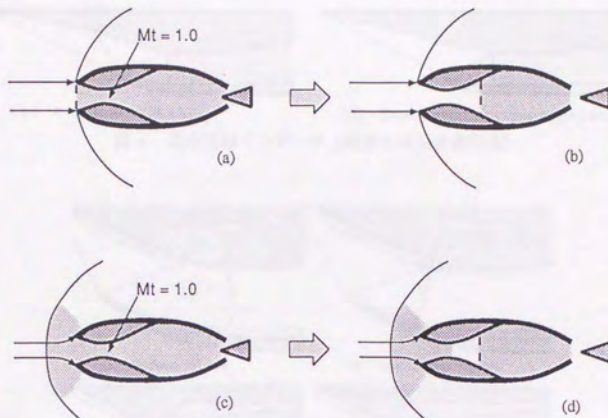


図 6：内部圧縮インテーク（網掛けは亜音速領域）

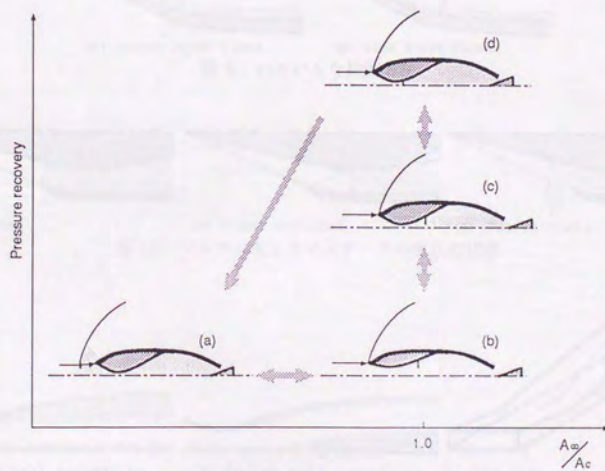


図 7：可変形状インテークと、そのヒステリシス

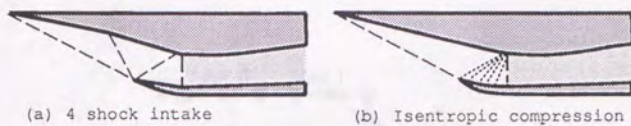


図 8：混合圧縮インテーク（網掛けは亜音速領域）

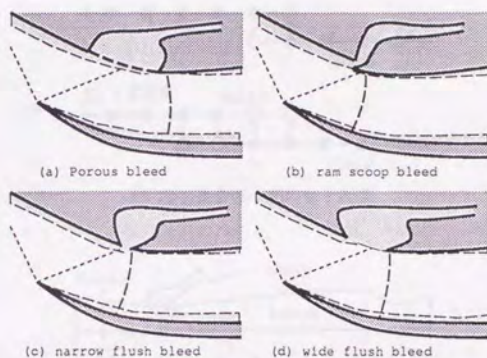


図 9：いろいろな抽気方法

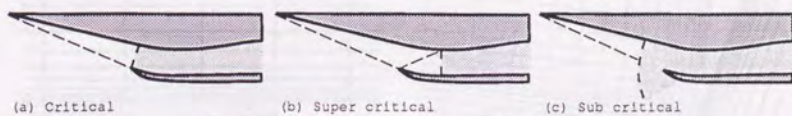


図 10：マルチショックインテークの流れの状態

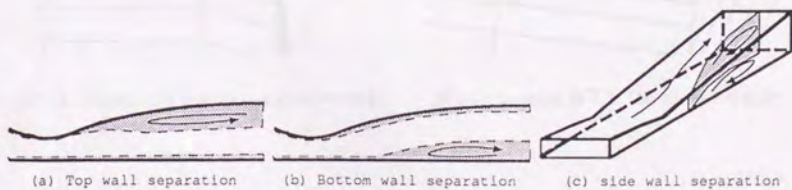


図 11：ディフューザ部の剥離

複合格子法



図 12：接合格子法の格子配置

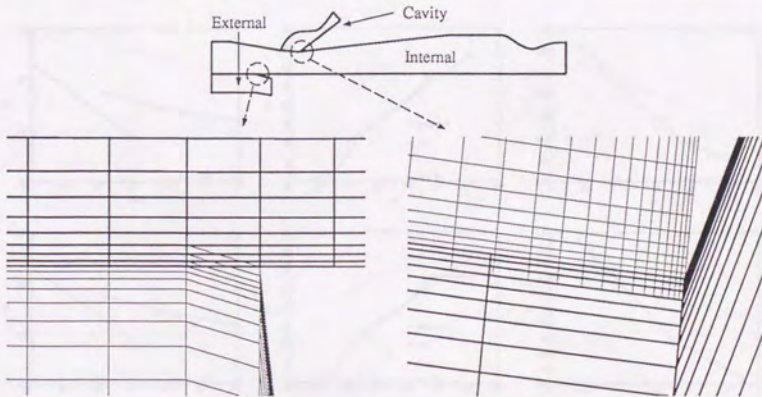


図 13：Internal 格子と External 格子の接続

図 14：Internal 格子と Cavity 格子の接続

平板境界層

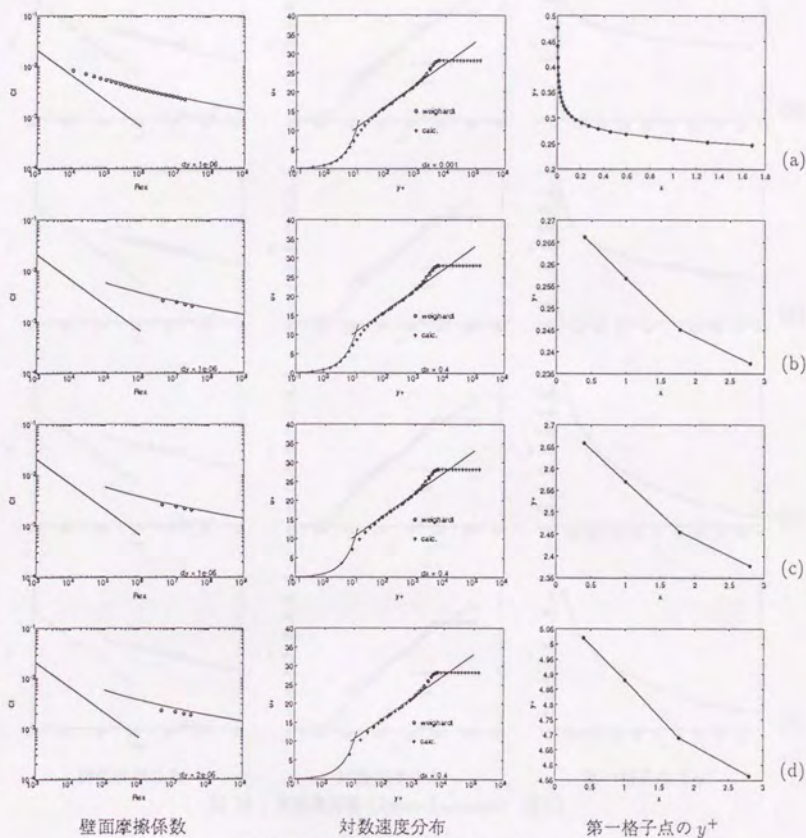
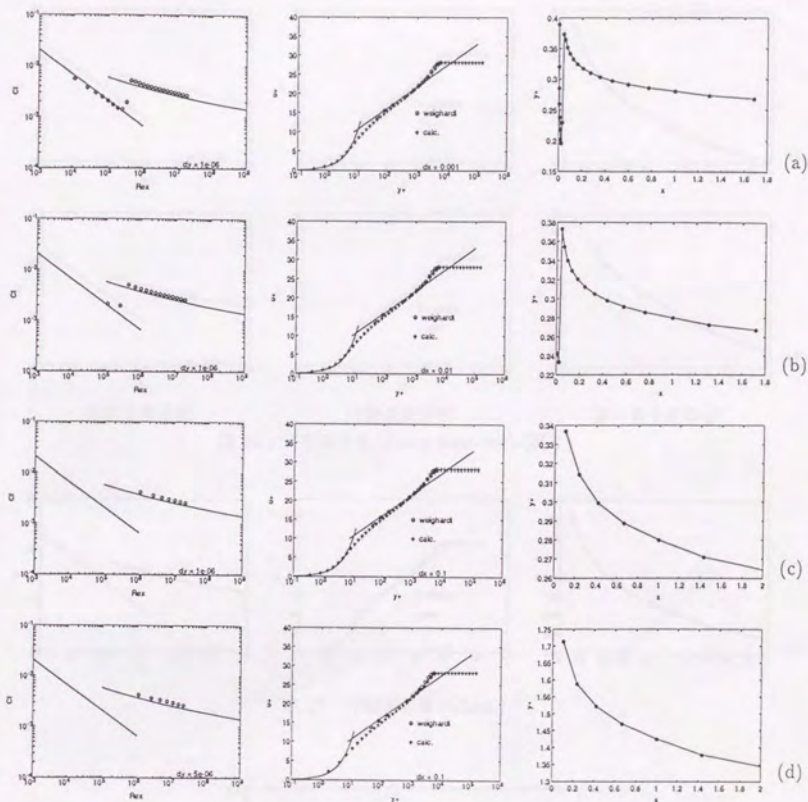


図 15：平板境界層 (Baldwin-Lomax)



壁面摩擦係数

対数速度分布

第一格子点の y^+

図 16：平板境界層 (Jones-Launder) (続く)

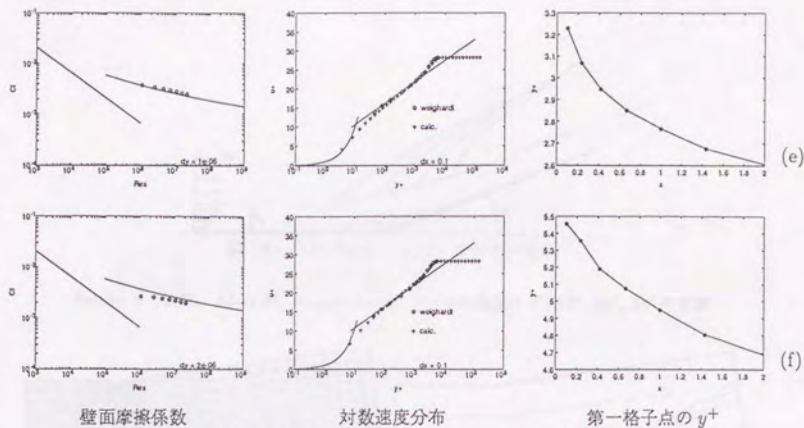


図 16：平板境界層 (Jones-Launder) (終り)

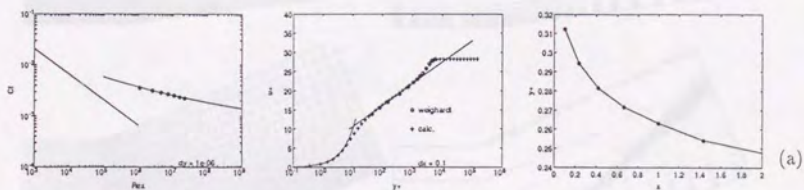


図 17：平板境界層 (Chien)

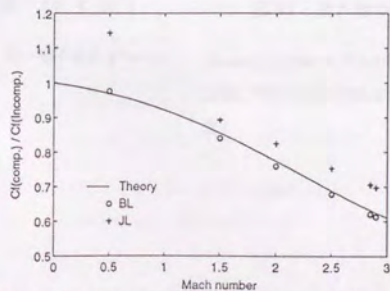


図 18：平板境界層の壁面摩擦係数とマッハ数との関係

コンプレッション・コーナー流れ

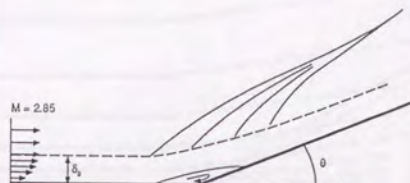
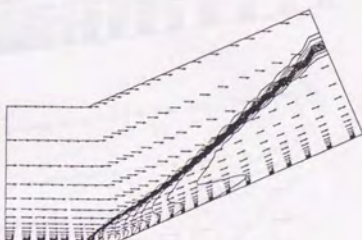
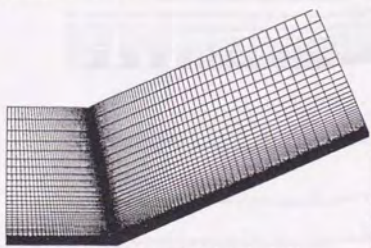
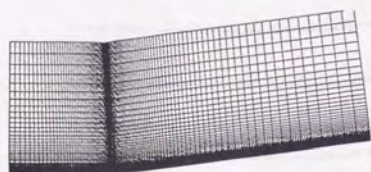


図 19：コンプレッション・コーナー流れ

Settles らの実験。 $M=2.85$, $Re_{\delta_0}=1.7 \times 10^6$ コーナの角度は 8° , 16° , 20° , 24° の四種

図 20：計算格子 (8° と 24°)図 21：流れ場の概要 (8° と 24°)

格子点数は 102×115 、第一格子点の $y^+ < 1.0$

Jones-Launder モデルの解。速度ベクトルと等圧力線。等圧力線の間隔は $0.28p_0$ 。 (p_0 は入口の静圧)

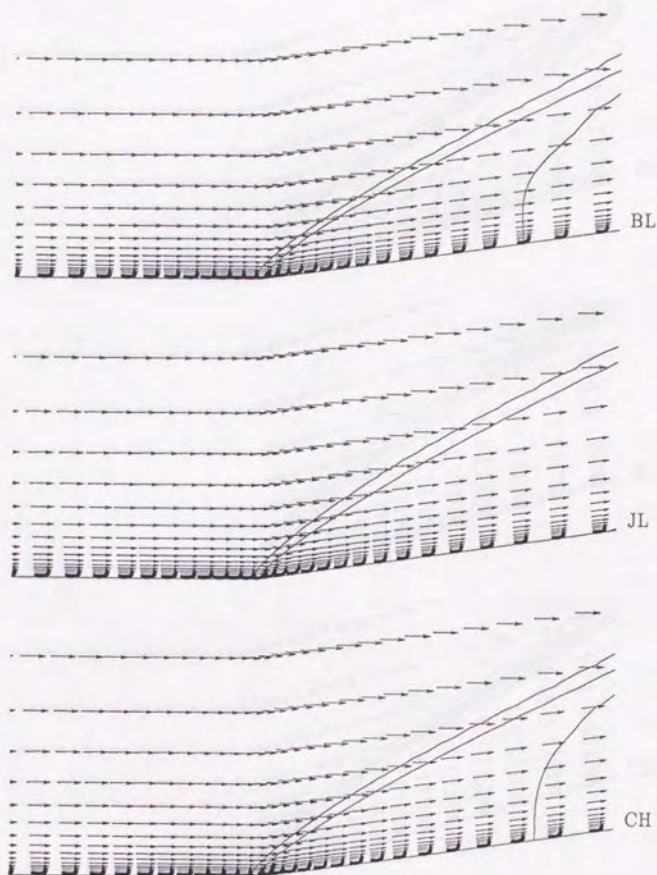


図 22 (A): 速度ベクトルと等圧力線 (8°)

図の右に用いた乱流モデルを示す。等圧力線の間隔は $0.28p_0$ 。 (p_0 は入口の静圧)

網掛け部分は超音速領域を表す。

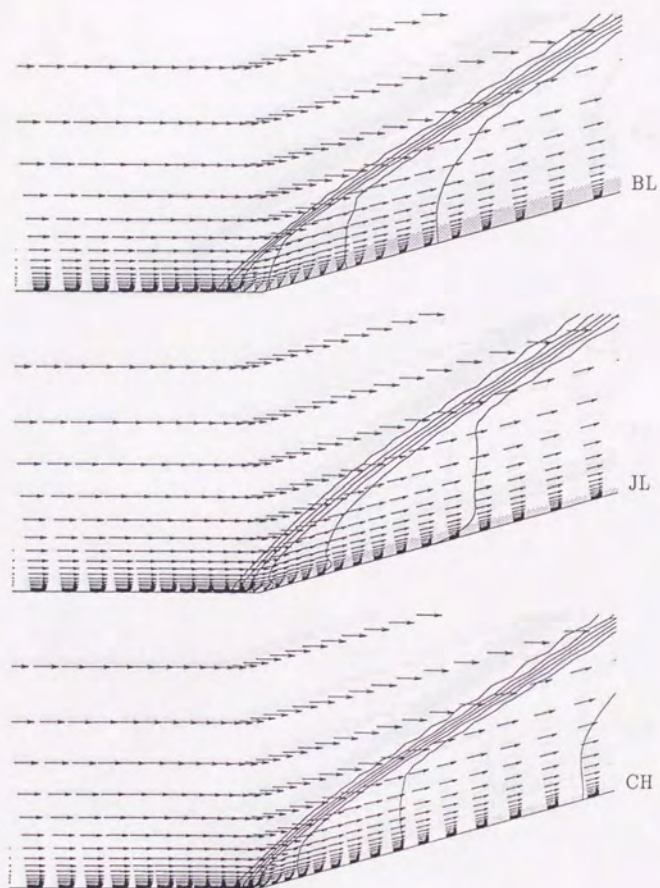


図 22 (B): 速度ベクトルと等圧力線 (16°)

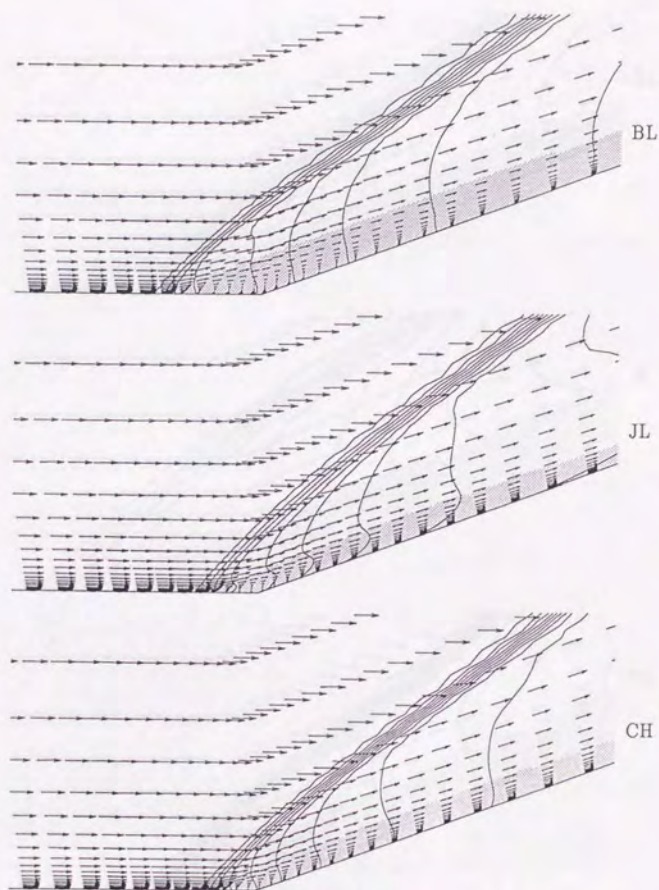


図 22 (C): 速度ベクトルと等圧力線 (20°)

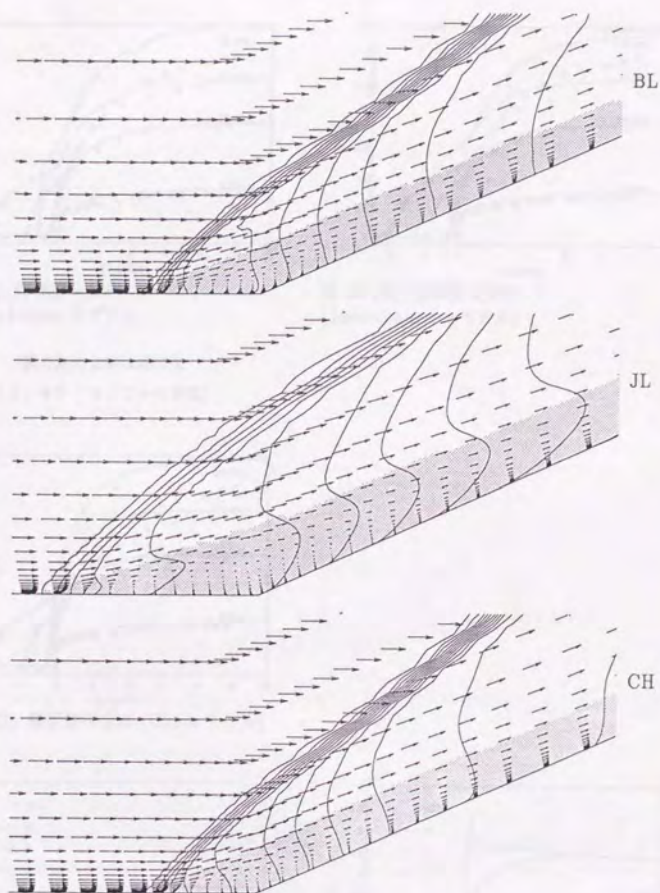


図 22 (D): 速度ベクトルと等圧力線 (24°)

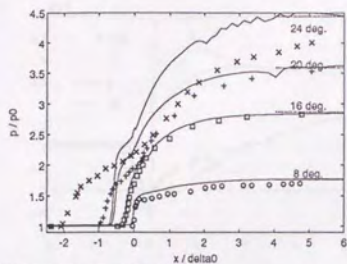


図 23 (A): 壁面静圧分布
(Baldwin-Lomax モデル)

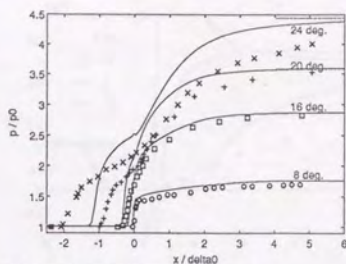


図 23 (B): 壁面静圧分布
(Jones-Launder モデル)

図の左の点線は漸近値
(ランキン・ウゴニオの関係)

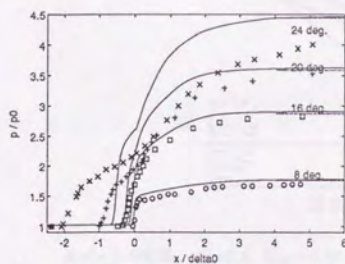


図 23 (C): 壁面静圧分布 (Chien モデル)

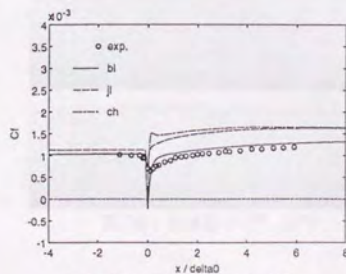


図 24 (A): 壁面摩擦係数 (8°)

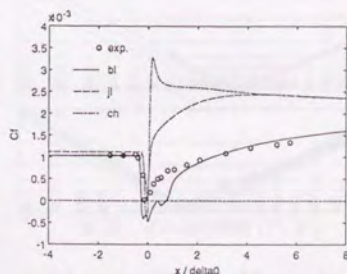


図 24 (B): 壁面摩擦係数 (16°)

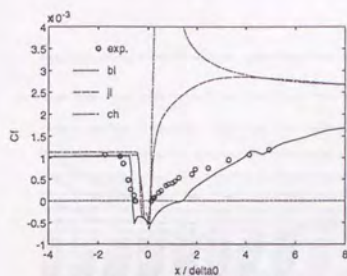


図 24 (C): 壁面摩擦係数 (20°)

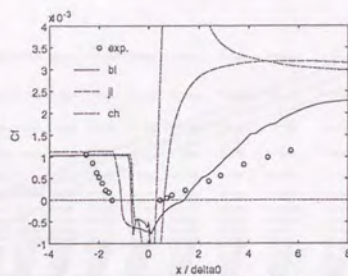


図 24 (D): 壁面摩擦係数 (24°)

入射斜め衝撃波

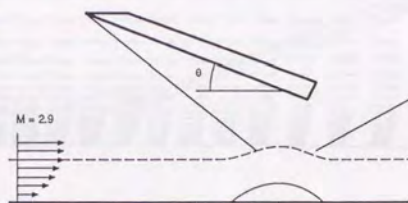


図 25：入射斜め衝撃波

Reda らの実験。 $M=2.9$, $Re_{\delta_0}=0.97 \times 10^6$ 衝撃波による流れの偏角は $7^\circ, 10^\circ, 13^\circ$ の三種

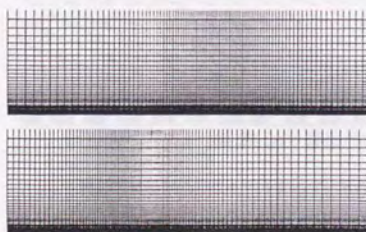


図 26：計算格子 ($7^\circ, 13^\circ$)

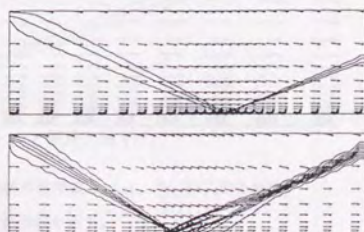


図 27：流れ場の概観 ($7^\circ, 13^\circ$)

Jones-Launder モデルの解。速度ベクトルと等圧力線。等圧力線の間隔は $0.28p_0$ 。 (p_0 は入口の静圧)

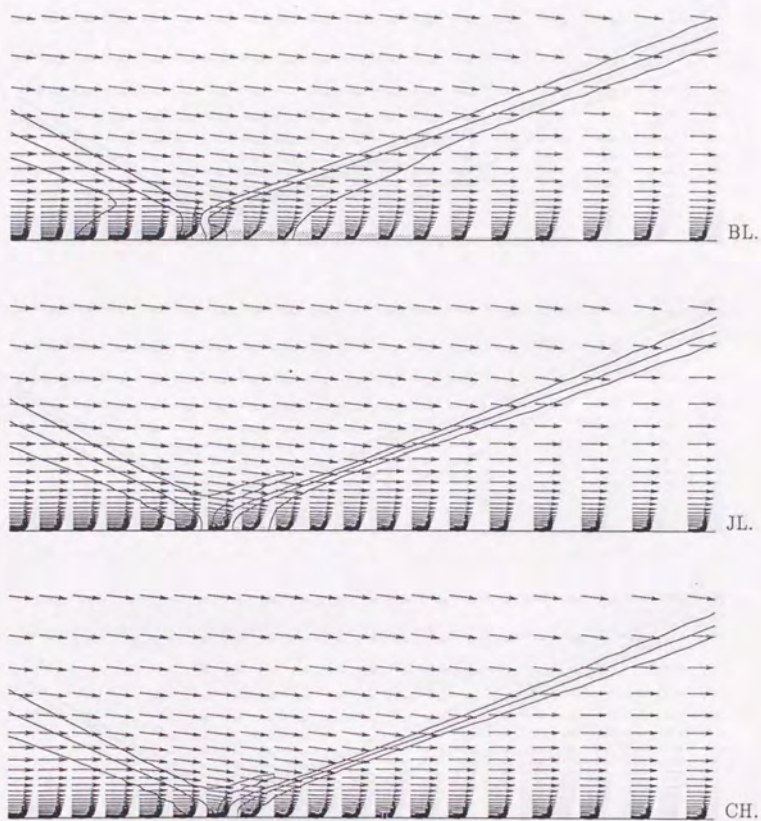


図 28 (A): 速度ベクトルと等圧力線 (7°)

図の右に用いた乱流モデルを示す。等圧力線の間隔は $0.28p_0$ 。 (p_0 は入口の静圧)

網掛け部分は超音速領域を表す。

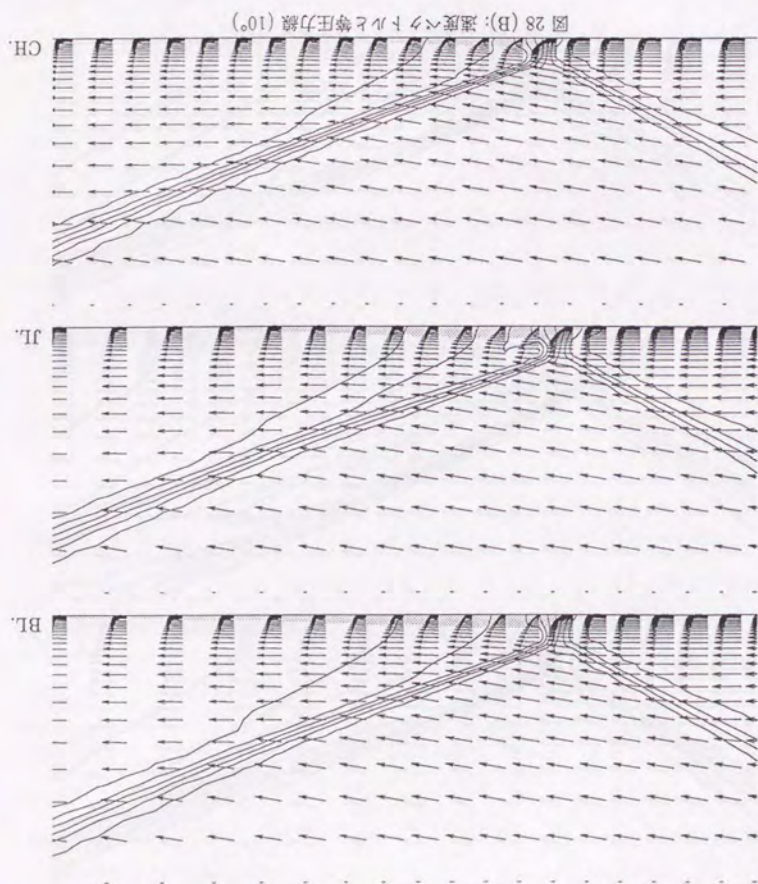


図 28 (B): 速度ベクトルと等圧力線 (10°)

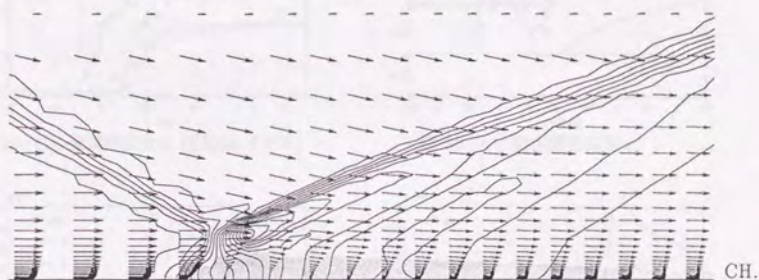
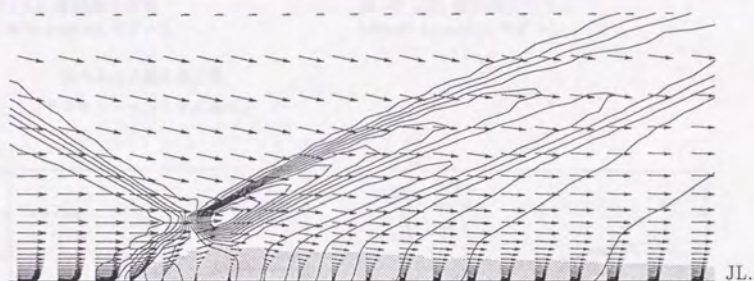
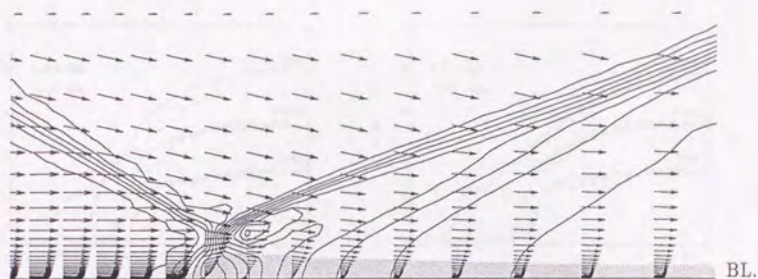


図 28 (C): 速度ベクトルと等圧力線 (13°)

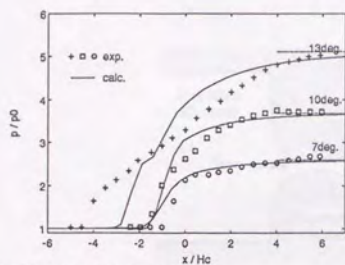


図 29 (A): 壁面静圧分布
(Baldwin-Lomax モデル)

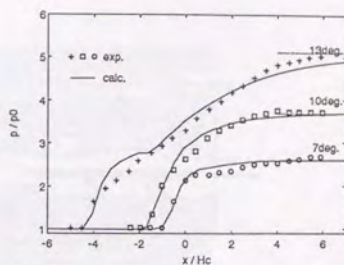


図 29 (B): 壁面静圧分布
(Jones-Launder モデル)

図の左の点線は漸近値
(ランキン・ウゴニオの関係)

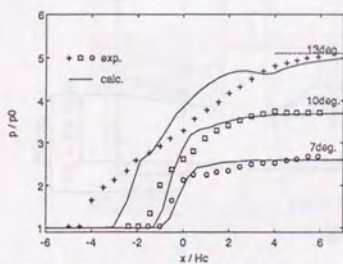


図 29 (C): 壁面静圧分布 (Chien モデル)

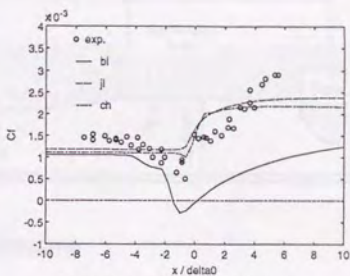


図 30 (A): 壁面摩擦係数 (7°)

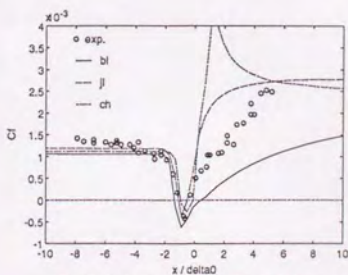


図 30 (B): 壁面摩擦係数 (10°)

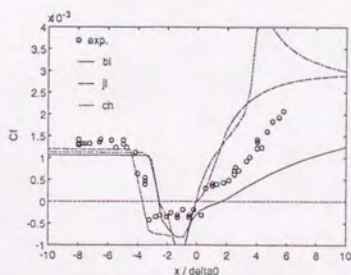


図 30 (C): 壁面摩擦係数 (13°)

模擬インテークの実験結果

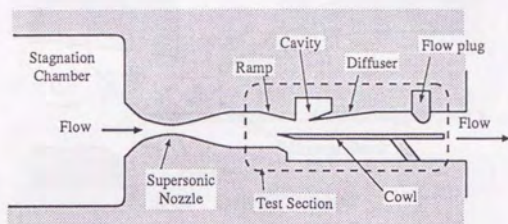


図 31：模擬インテーク実験の概念図

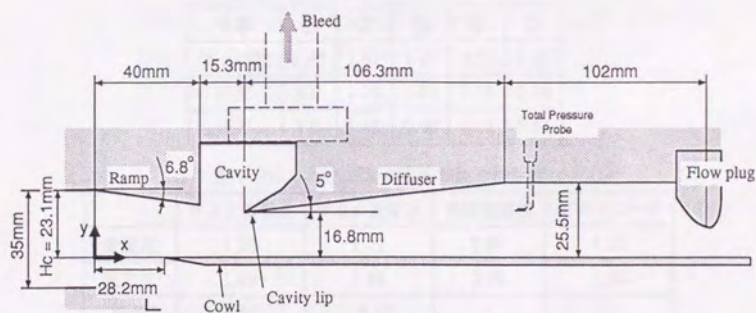


図 32：試験部詳細

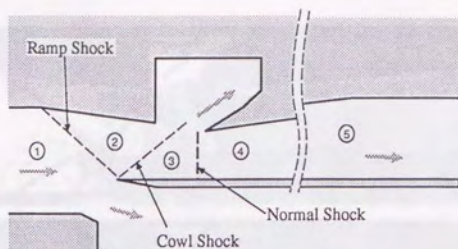


図 33：非粘性設計の流れ

表 1 (A): 非粘性設計の各状態の諸量

状態	①	②	③	④	⑤
マッハ数	1.85	1.61	1.37	0.75	0.37
密度	1.0	1.29	1.64	2.73	3.33
圧力	1.0	1.43	2.00	4.12	5.44

表 1 (B): 非粘性設計の各衝撃波の特性値

	ランプ衝撃波	カウル衝撃波	垂直衝撃波	ディフューザ
密度比	1.29	1.27	1.66	1.22
圧力比	1.43	1.40	2.06	1.32
偏角	6.8°	-6.8°	-	-
衝撃波角	39°	-46°	-	-

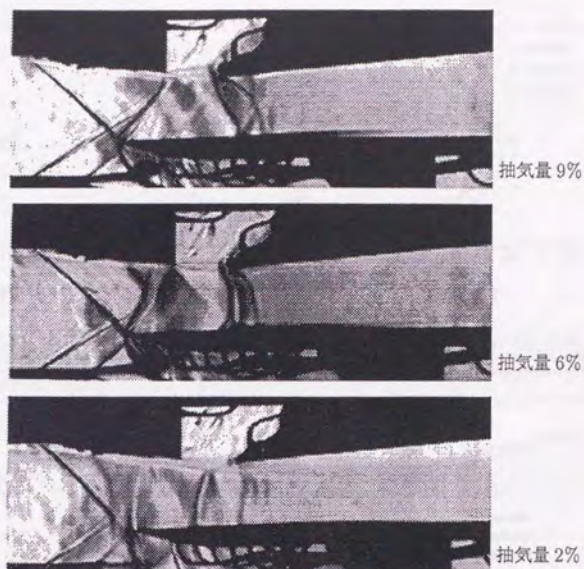


図 34：シュリーレン写真

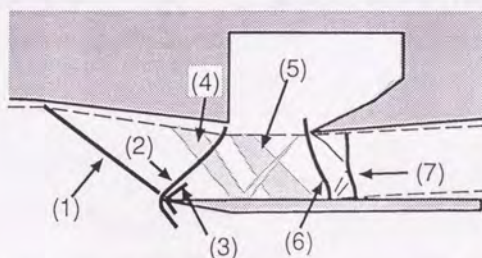


図 35：流れ場の模式図 (抽気量 9% のシュリーレン写真より)

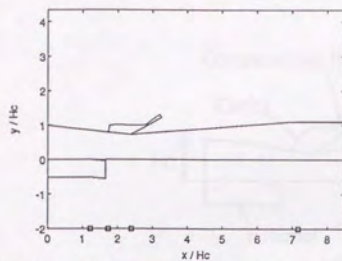


図 36：模擬インテーク外形とグラフの対応

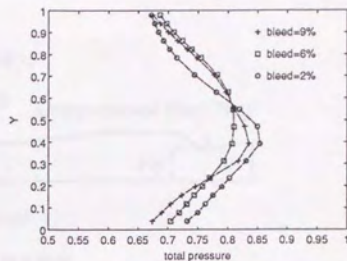


図 37：全圧分布

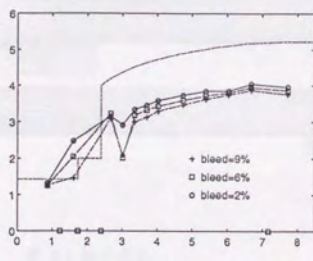


図 38 (A)：静圧分布 (上壁、ランプ面)

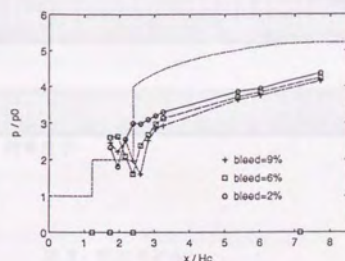


図 38 (B)：静圧分布 (下壁、カウル面)

模擬インテークの数値解析法

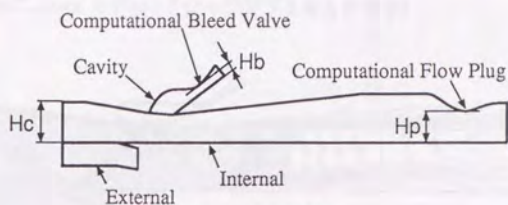


図 39：計算領域



図 40：計算格子

表 2：格子点数

Internal	110 × 60 × 40
External	19 × 30 × 40
Cavity	50 × 40 × 40
Total	366,800

表 3：乱流モデル

	二次元 BL	二次元 $k-\epsilon$	三次元 BL
Internal	BL	$k-\epsilon$	BL
External	Inviscid	Inviscid	BL
Cavity	Inviscid	$k-\epsilon$	laminar

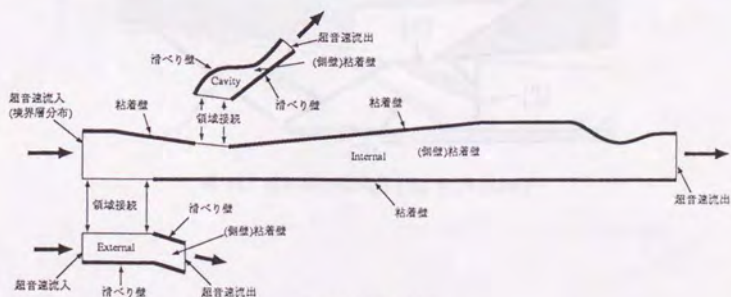


図 41：境界条件

二次元 Baldwin-Lomax モデル (フロープラグを変えた場合)

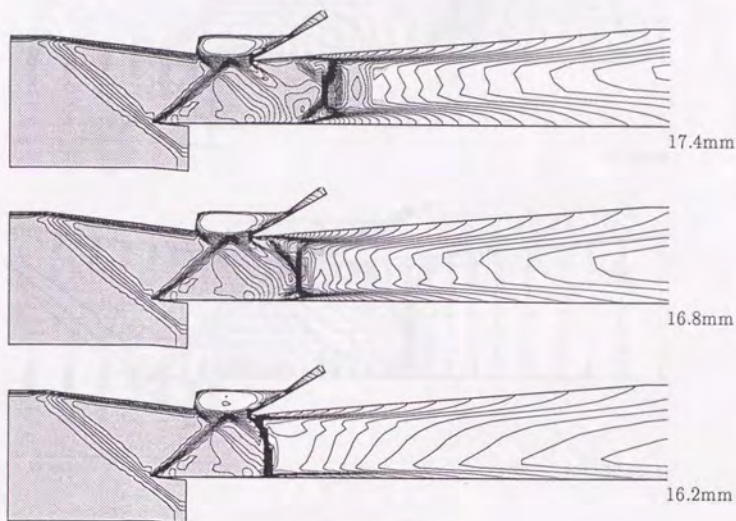


図 42：等密度線図

図の右の数字はフロープラグ高さ H_p 網掛け部分は超音速 等密度線間隔は $0.05\rho_0$ (ρ_0 は入口の密度)

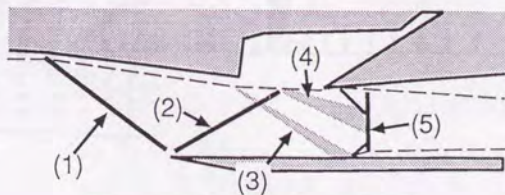
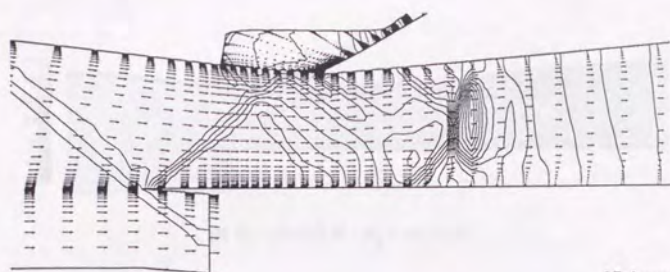
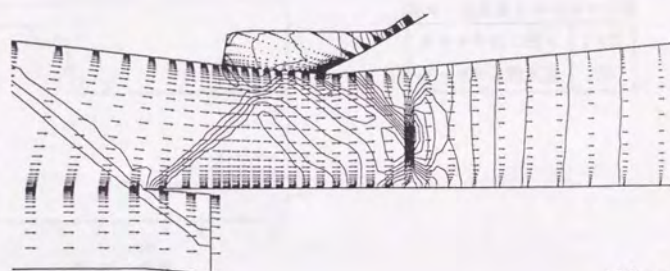


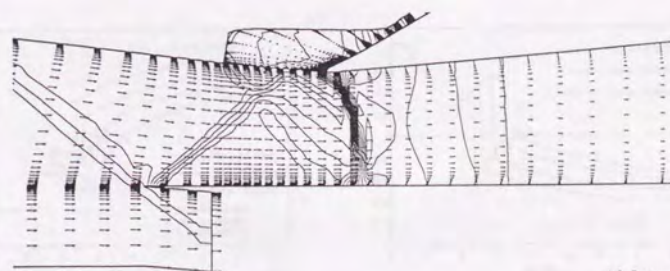
図 43：流れ場の模式図 ($H_p = 16.8\text{mm}$)



17.4mm



16.8mm



16.2mm

図 44：等圧力線と速度ベクトル

図の右の数字はフロープラグ高さ H_p 等圧力線の間隔は $0.14p_0$ (p_0 は入口の静圧)

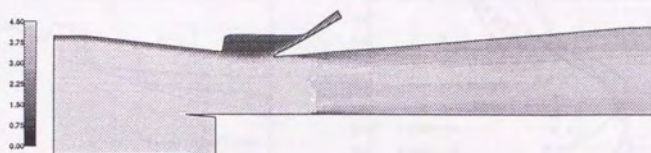


図 45：全圧分布 ($H_p=16.8\text{mm}$)

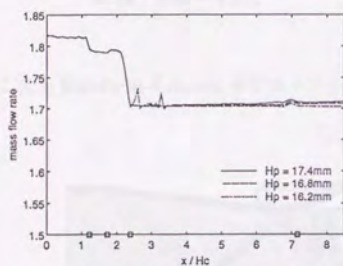


図 46：流量

表 4：抽気量とスピレージ量

カウルからの洩れ	1.4%
キャビティ抽気量	5%

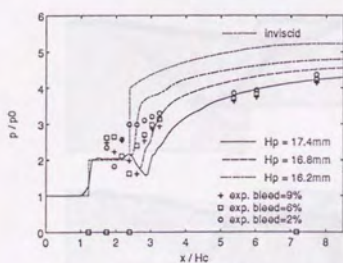


図 47：静圧分布

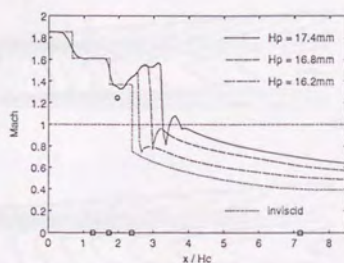


図 48：中心線上マッハ数

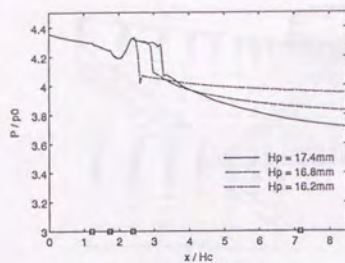


図 49：流量平均全圧

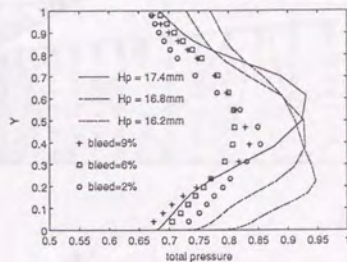


図 50：全圧分布

二次元 Baldwin-Lomax モデル (ブリードバルブを変えた場合)

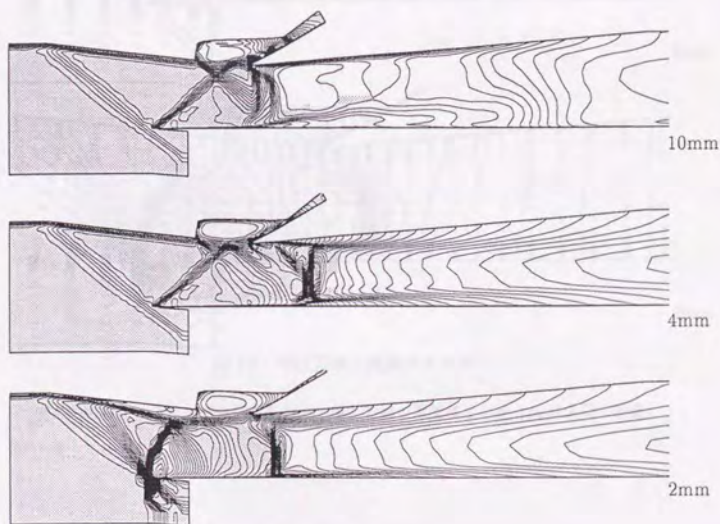


図 51：等密度線図

図の右の数字はブリードバルブ高さ。網掛け部分は超音速 等密度線間隔は $0.05\rho_0$ (ρ_0 は入口の密度)

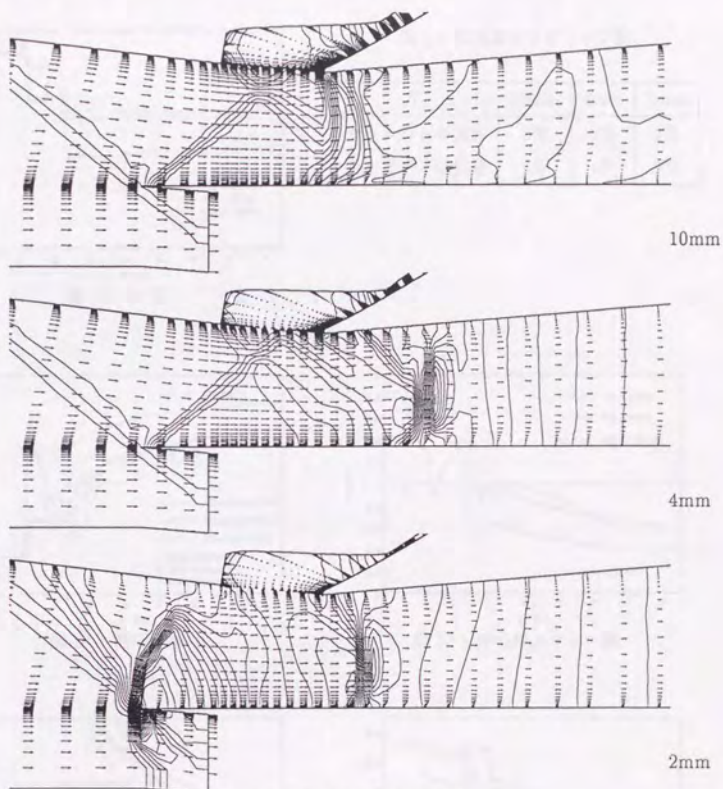


図 52：等圧力線と速度ベクトル

図の右の数字はフローブラグ高さ H_p 等圧力線の間隔は $0.14p_0$ (p_0 は入口の静圧)

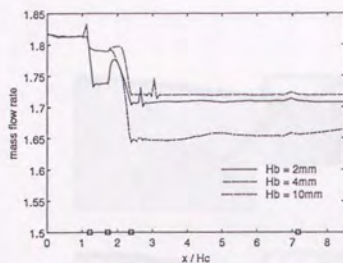


図 53：流量

表 5：抽気量とスピレージ量

H_b	10mm	4mm	2mm
カウルからの洩れ	6%	2%	2%
キャビティ抽気量	8%	4%	2%

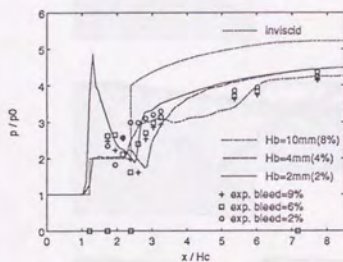


図 54：静圧分布

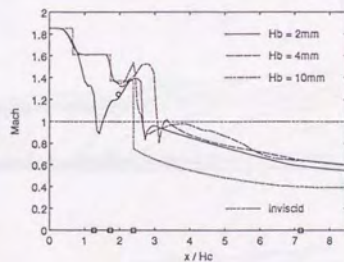


図 55：中心線上マッハ数

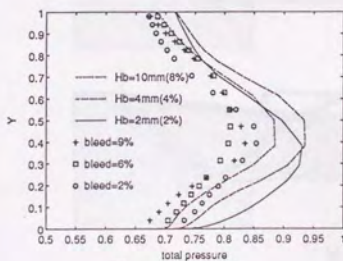


図 56：全圧分布

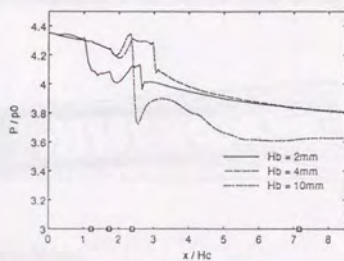


図 57：流量平均全圧

二次元 Baldwin-Lomax モデル (ヒステリシス)

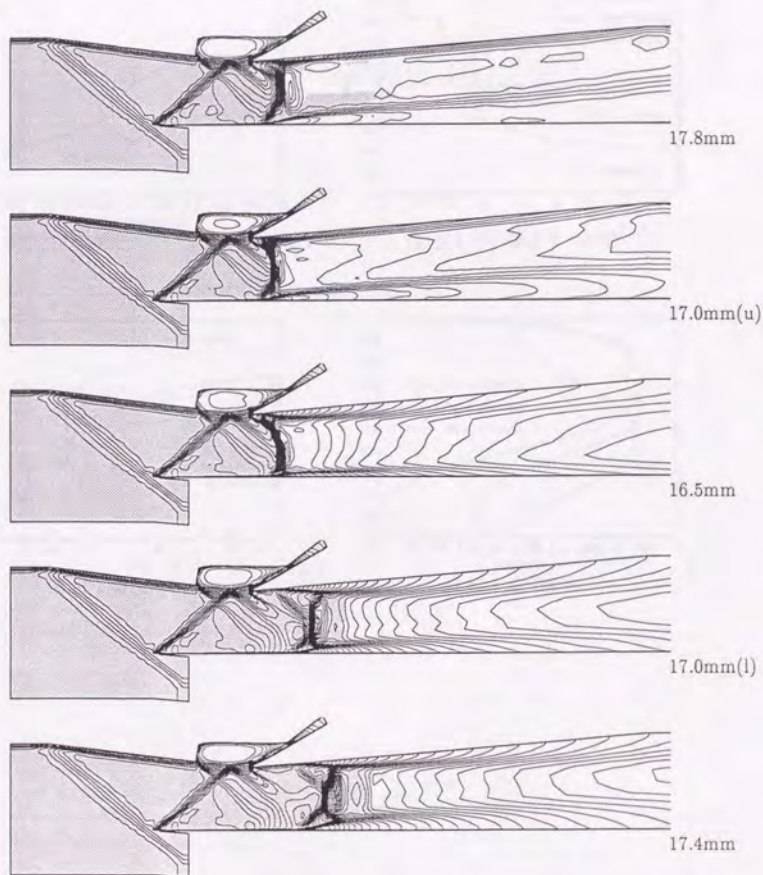


図 58：等密度線図

図の右の数字はフロープラグ高さ。 網掛け部分は超音速 等密度線間隔は $0.05\rho_0$ (ρ_0 は入口の密度)

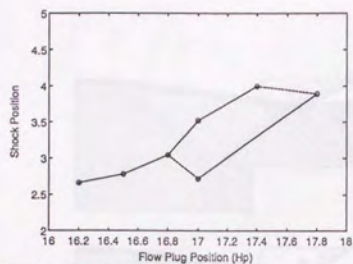


図 59：衝撃波の位置とフロープラグの関係

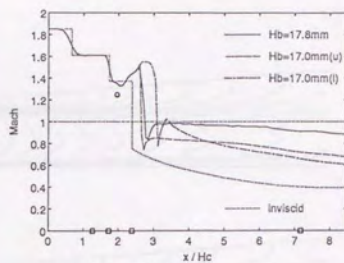


図 60：中心線上マッハ数

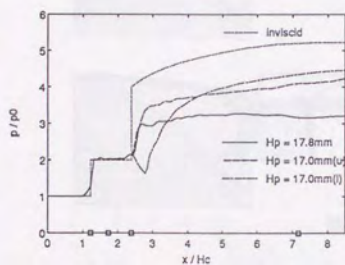


図 61：静圧分布

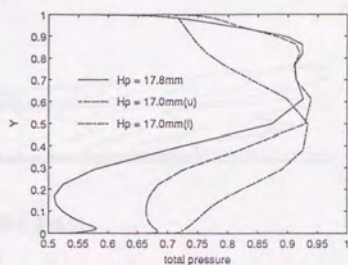


図 62：全圧分布

二次元 Jones-Launder モデル

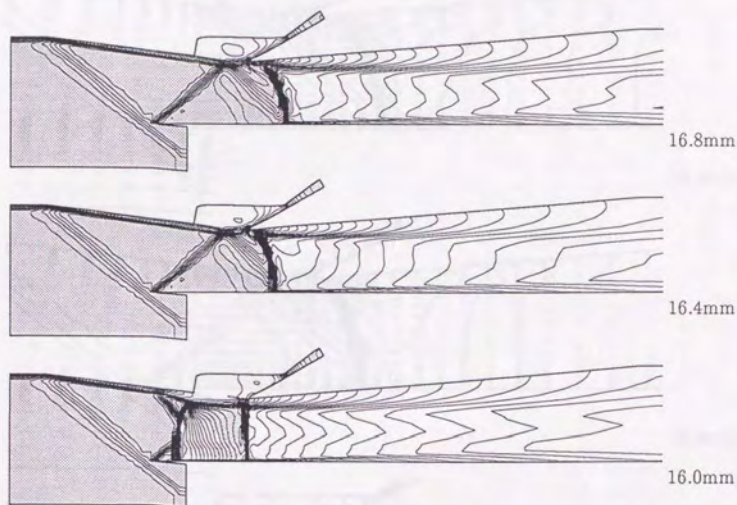


図 63：等密度線図

図の右の数字はブリードバルブ高さ。網掛け部分は超音速 等密度線間隔は $0.05\rho_0$ (ρ_0 は入口の密度)

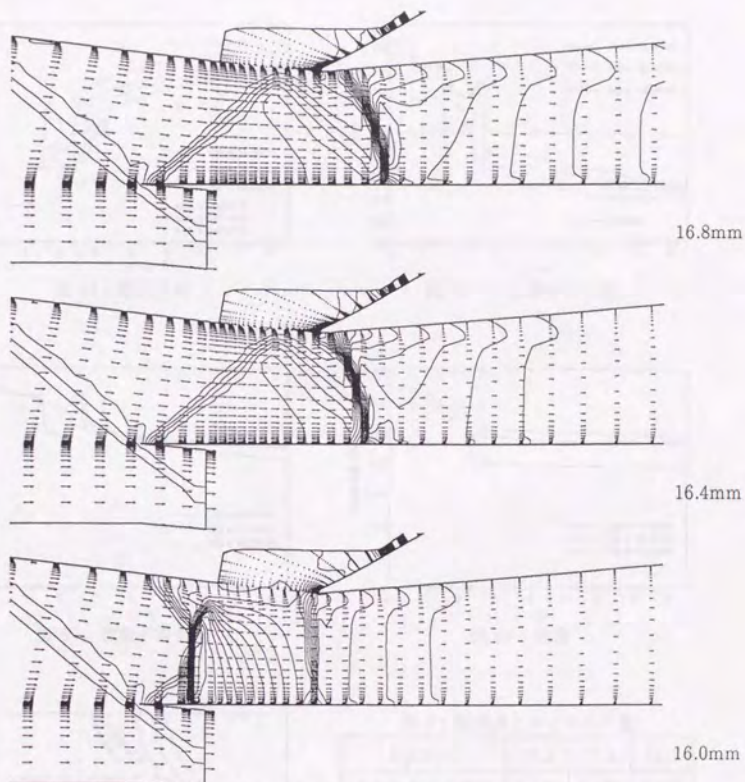


図 64：等圧力線と速度ベクトル

図の右の数字はフローブラグ高さ H_p 等圧力線の間隔は $0.14p_0$ (p_0 は入口の静圧)

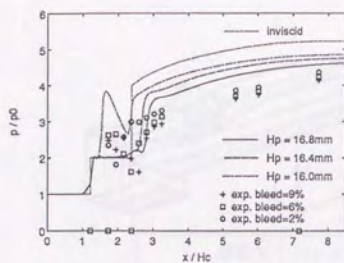


図 65：静圧分布

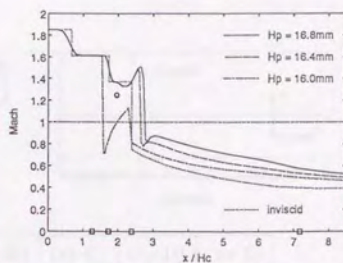


図 66：中心線マッハ数

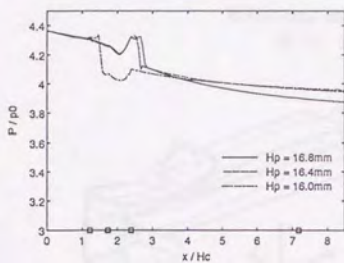


図 67：流量平均全圧

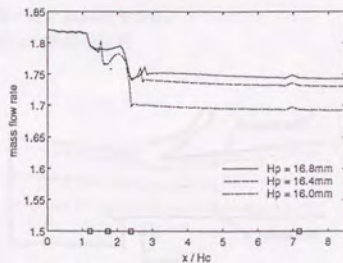


図 68：流量

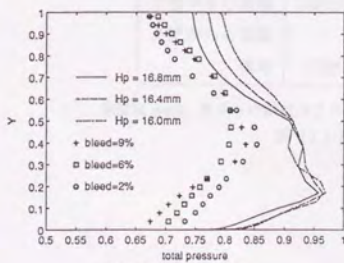
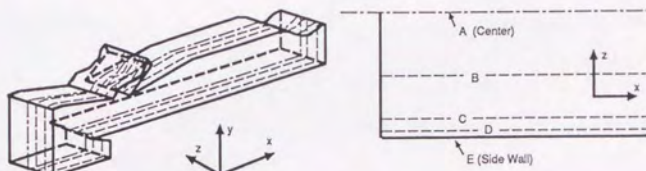


図 69：全圧分布

表 6：抽気量とスプレー量

H_p (mm)	16.8	16.4	16.0
カウルからの洩れ	1.4%	1.4%	1.4%
キャビティ抽気量	2.5%	2.5%	3.6%

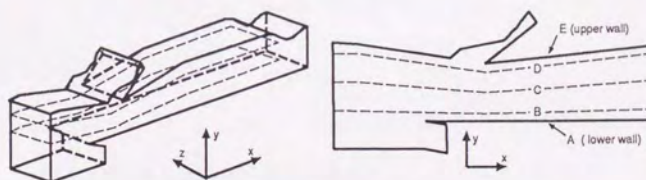
三次元計算



断面名	(xy-A)	(xy-B)	(xy-C)	(xy-D)	(xy-E)
側壁からの距離	17.5	8.75	2.8	0.7	0.0016
備考	対称面				側壁

単位は mm。流路の幅は一定で 35mm である。

図 70：図示した xy 断面の位置



断面名	(xz-A)	(xz-B)	(xz-C)	(xz-D)	(xz-E)
下壁からの距離	0.0016	2.4	8.4	—	—
上壁からの距離	—	—	8.4	2.5	0.0012
備考	下壁		中心面		上壁

単位は mm。壁からの距離はスロート部での値である。スロート高さは 16.8mm。

図 71：図示した xz 断面の位置



(Fig. 15)



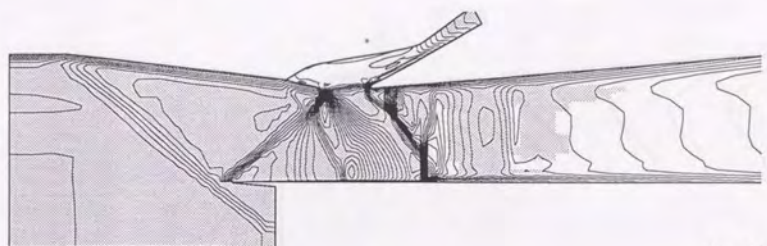
(Fig. 16)

图 15、16 地质构造示意图

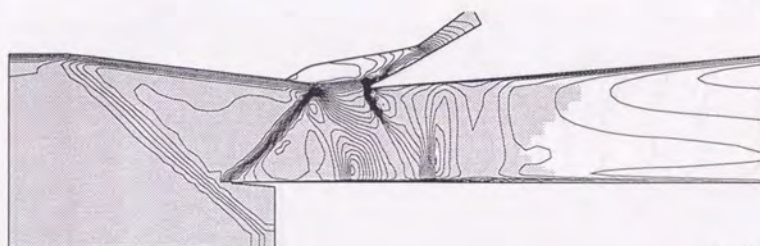
说明：(1) 断层线 (2) 断层带 (3) 断层带内之岩层 (4) 断层带内之岩层 (5) 断层带内之岩层



图 17 地质构造示意图



(xy-A)



(xy-B)

図 72 : xy 断面の等密度線図

網掛け部分は超音速 等密度線間隔は $0.05\rho_0$ (ρ_0 は入口の密度)

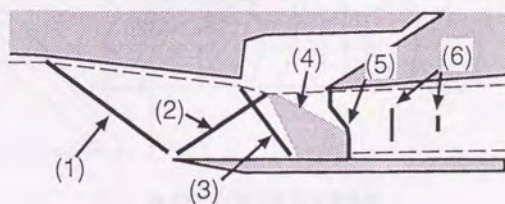
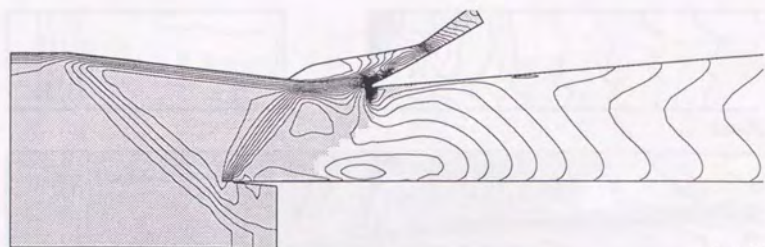
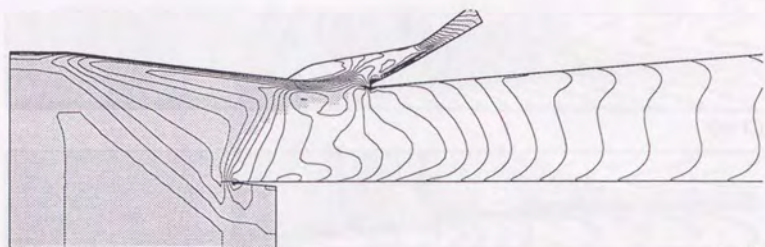


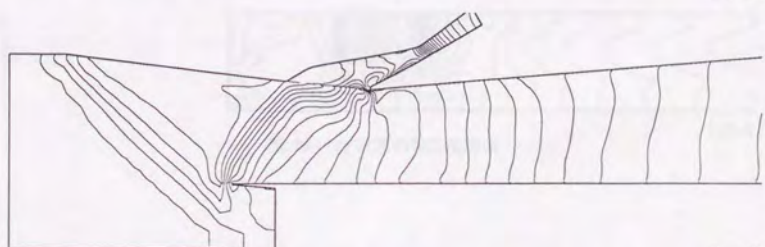
図 73 : 流れ場の模式図



(xy-C)



(xy-D)



(xy-E)

図 73 : xy 断面の等密度線図

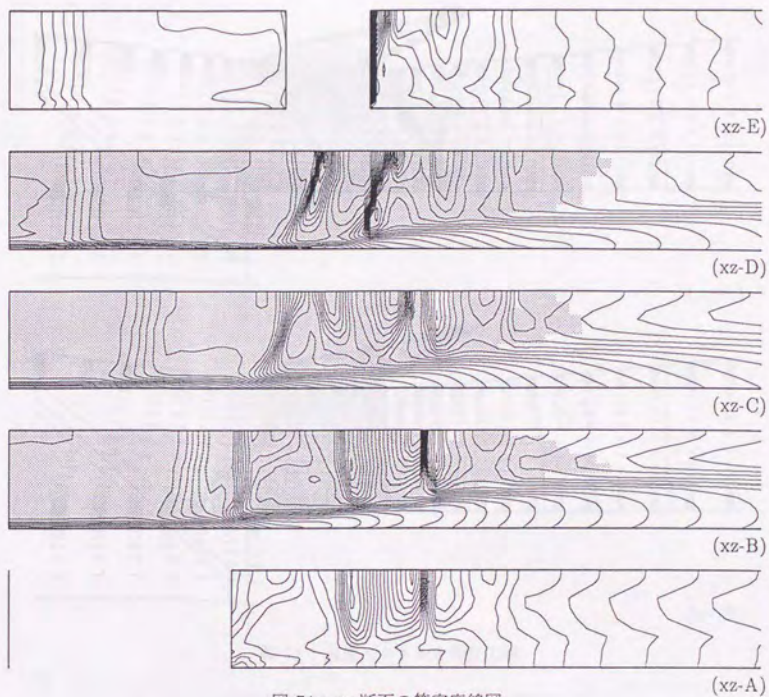
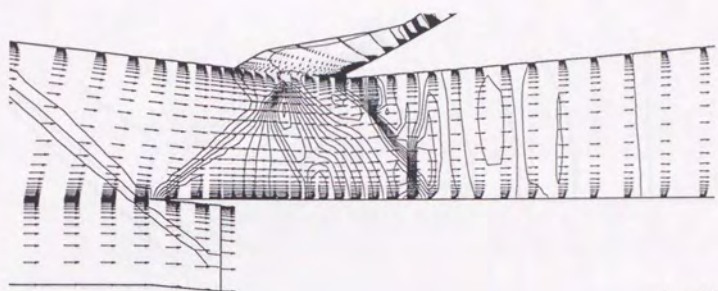
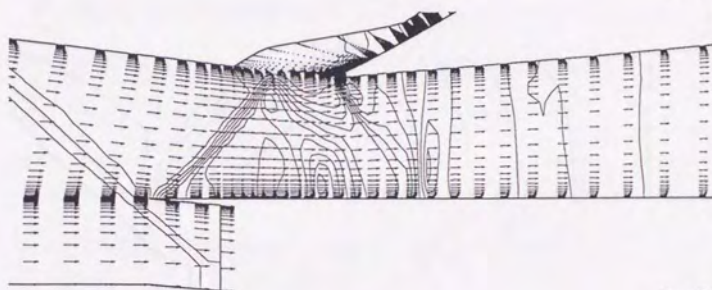


図 74 : xz 断面の等密度線図



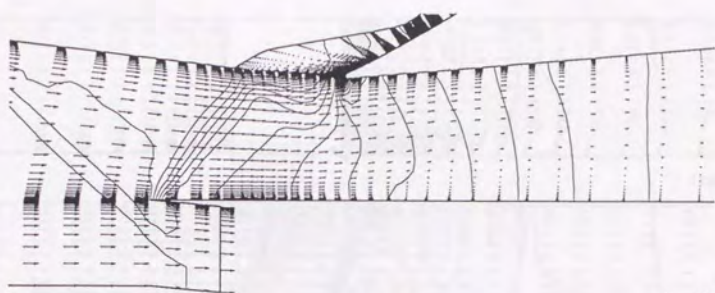
(xy-A)



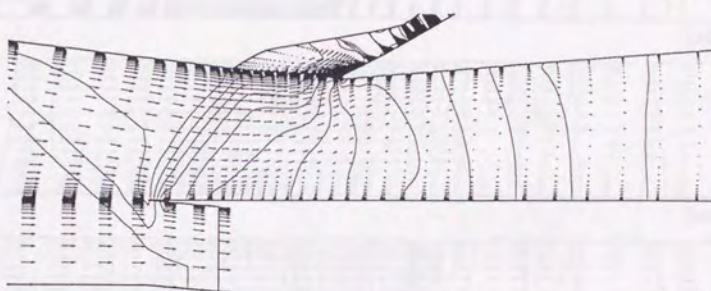
(xy-B)

図 75：速度ベクトルと等圧力線

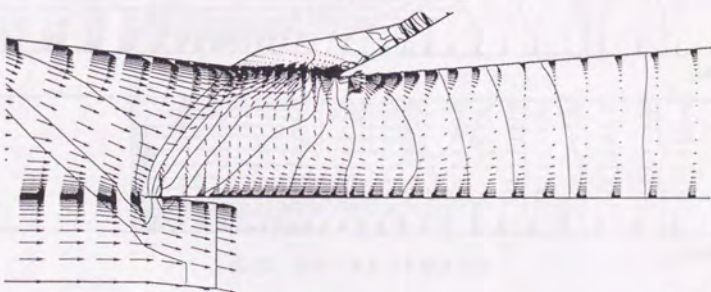
等圧力線の間隔は $0.14p_0$ (p_0 は入口の静圧)



(xy-C)



(xy-D)



(xy-E)

図 75：速度ベクトルと等圧力線

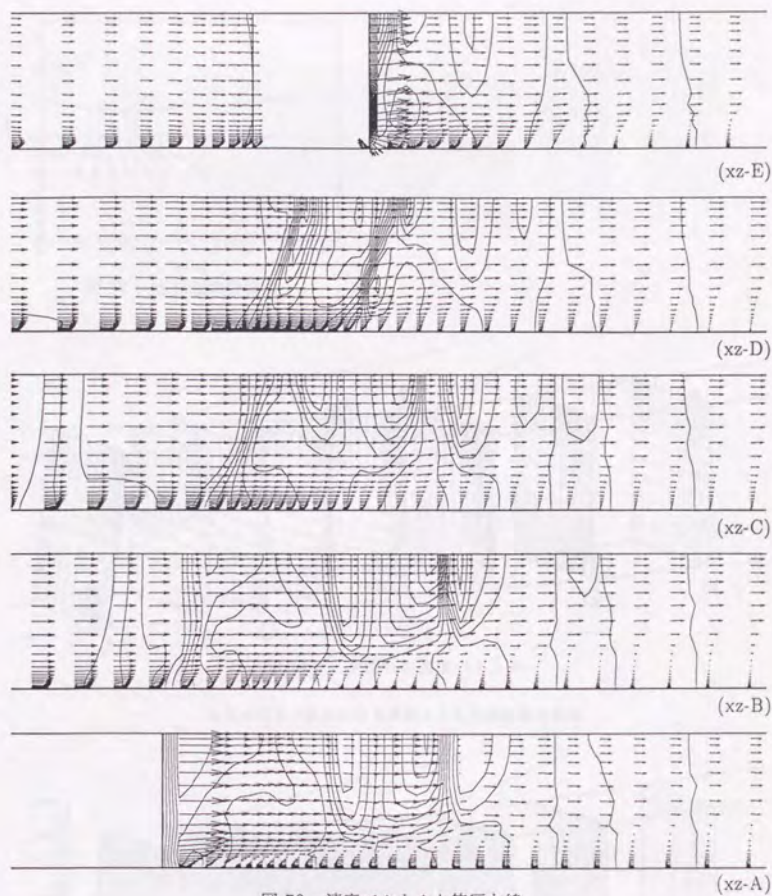


図 76：速度ベクトルと等圧力線

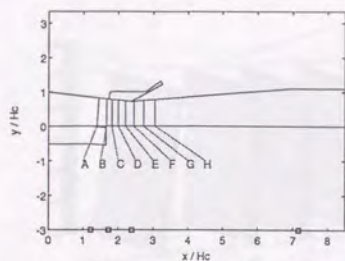


図 77：yz 断面の位置

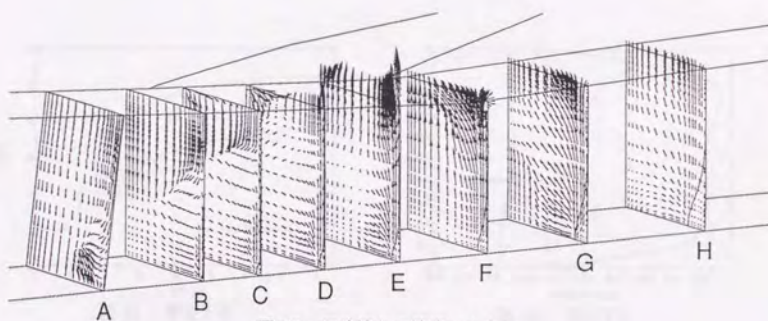


図 78：二次流れの速度ベクトル

各図の右下を斜めに走る曲線よりも角側は逆流領域

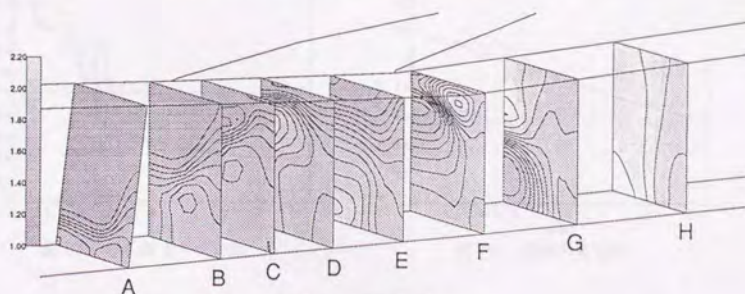


図 79：静圧分布

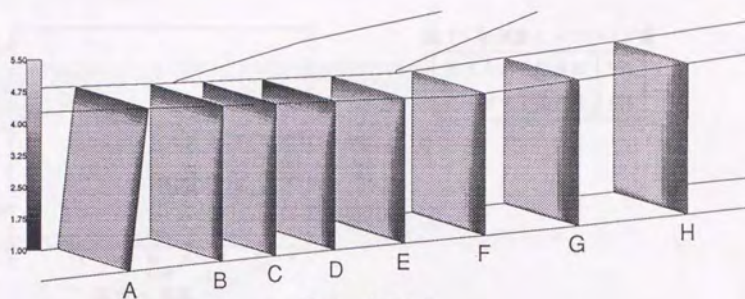


図 80：全圧分布

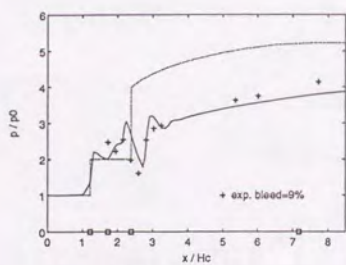


図 81：静圧分布

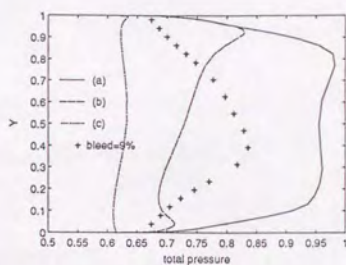


図 82：全圧分布

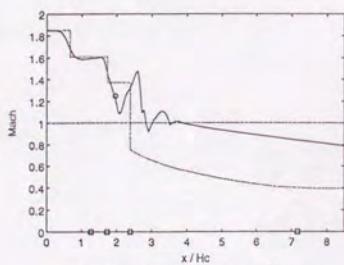


図 83：中心線上マッハ数

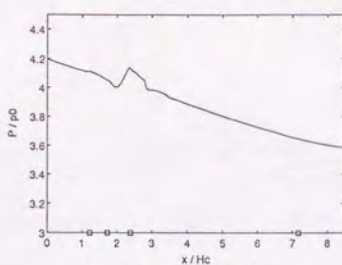


図 84：流量平均全圧

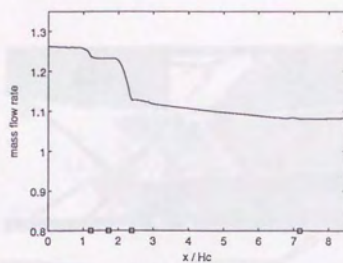


図 85：流量

表 7：抽気量とスピレージ量

カウルからの洩れ	2%
キャビティ抽気量	8%

各計算と実験の比較

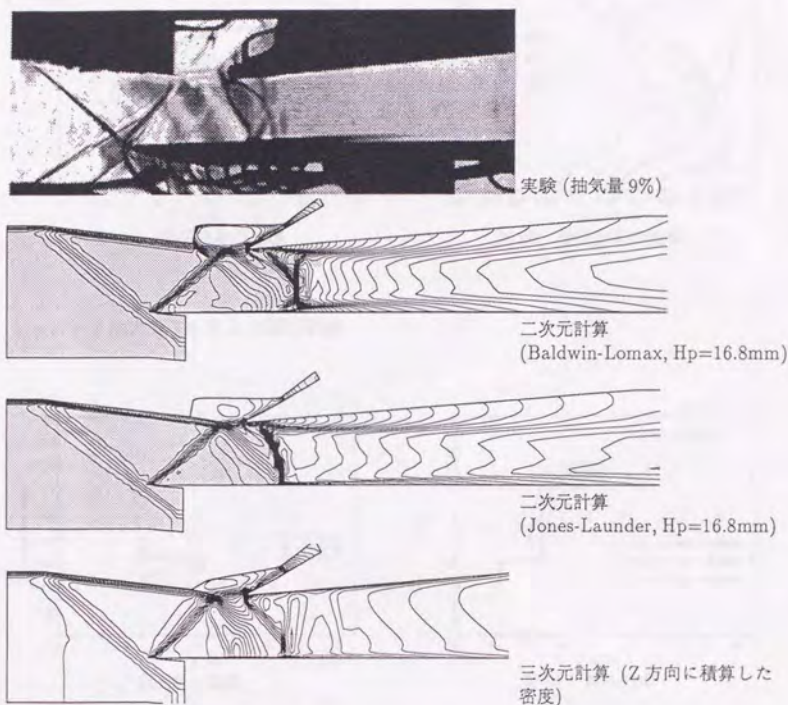


図 86：流れ場の比較

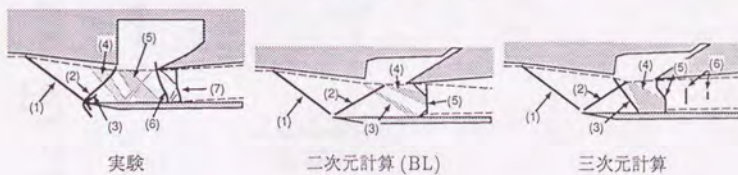


図 87：模式図の比較 (再掲)

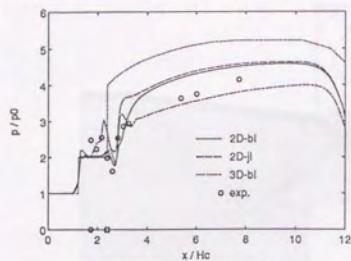


図 88：静圧分布の比較

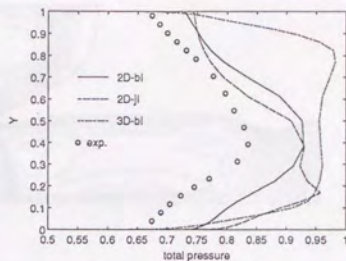


図 89：全圧分布の比較

キャビティ抽気条件を変えた試行計算

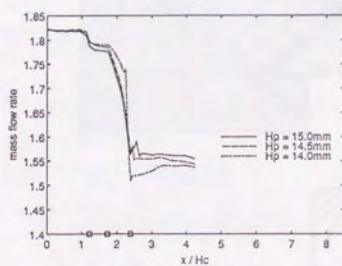


図 90：流量

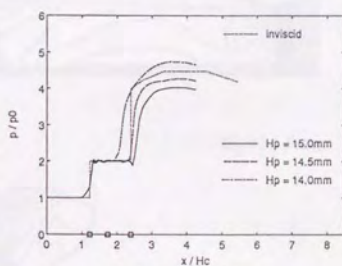


図 91：静圧分布

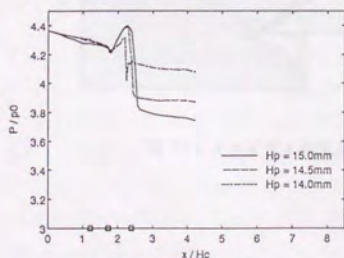
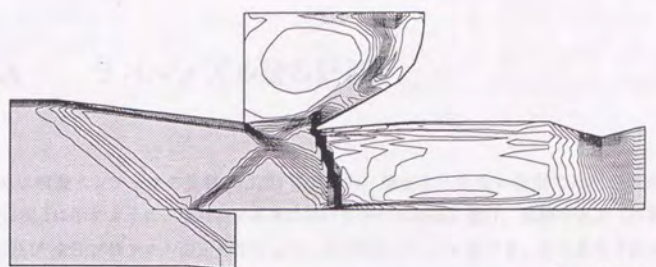
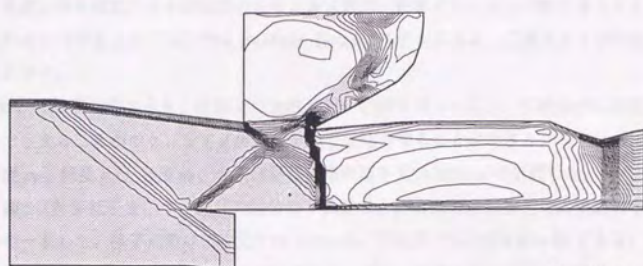


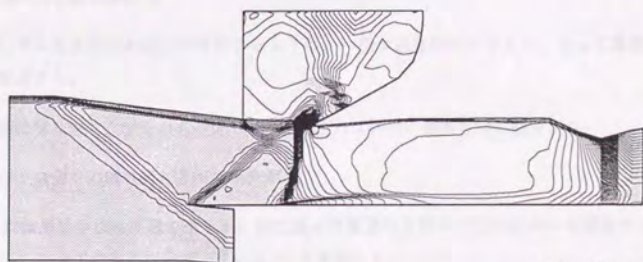
図 92：流路平均全圧



$H_p=15.0\text{mm}$



$H_p=14.5\text{mm}$



$H_p=14.0\text{mm}$

図 93：キャビティ抽気条件を変えた試行計算 (Jones-Launder)

付録 A ラバルノズル流の計算

村上らは模擬インテークの実験(5.1節)に先立ち、模型を入れない状態で風洞の検定を行なった。検定は図1に示すように、ラバルノズルに続けて平行流路部を設け、流路中央面(対称面)上で壁面静圧及び全圧プロファイル測定を行なった。この検定データに基づき、同じ条件で乱流モデルを用いた計算を行ない、その結果を模擬インテークの計算の入口境界条件として用いた。また、整流胴の圧力、温度、から推定される測定部のレイノルズ数が、計算のレイノルズ数と合うことを確認することも目的の一つであった。ここでは Baldwin-Lomax モデルによる、二次元および三次元計算の結果を簡単に示す。

行なわれた風洞検定のうち、計算との比較に用いた例を表1に示す。実験条件は整流胴内の温度と圧力とで与えることができ、レイノルズ数を若干変化させることができる。レイノルズ数は、整流胴内の密度 ρ_0 、粘度 μ_0 、音速 a_0 、および平行流路の高さ $L_0=35\text{mm}$ で定義した。

図2, 図3に計算格子を示す。流れの対称性を仮定し、計算領域は二次元では流路の半分、三次元では四分の一とした。格子点数は二次元では 100×40 、三次元では $100 \times 40 \times 40$ である。三次元の格子は二次元の格子を z 方向に積み重ねただけである。また、乱流モデルが正しく働くように壁面近傍に格子を集めた。計算条件は

- 入口では整流胴内の全圧が保存するように、一様な速度分布を与えた。従って境界層はここから発達する。
- 壁面は滑り無し。すなわち速度0、密度、圧力は壁面に垂直方向の微分が0。
- 出口では全ての値の流れ方向の微分が0。

とした。数値解析手法は同様であるが、粘性項は薄層近似を用いて流れ方向の空間微分項($\frac{\partial}{\partial x}$)を省略した。さらに全ての交差微分項($\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$ など)も省略した。

図4(A),(B)は二次元計算のマッハ数の等高線である。(B)を見るとノズル出口から出る弱い膨張波、圧縮波により、マッハ数に小さなムラが有るのがわかる。このムラが出ないようなノズルを設計することは高度な技術を要するが、数値解析にはその一助となる可能性がある[93]。一方、図5は三次元計算の結果で、流れに垂直な各断面でのマッハ数分布である。角部のマッハ数分布(特に $x=10\text{mm}$)に歪みがあるが、これにはノズルの形状や乱流モデルの角部での扱いの影響が考えられる。しかし角部から少し離れると二次元的の良い境界層となる。角部の計算結果については実験データが無い場合の妥当性の検討は不可能であった。

図 6(A) にマッハ数の x 方向の変化をノズルのプロフィールと共に示している。図 (B) はその拡大図である。実験結果のマッハ数は整流胴全圧と壁面静圧とを用いて等エントロピー変化を仮定して求めたものである。図中 inviscid は非粘性計算を行なった結果であり、これからわかるように、このノズルは設計マッハ数が 2.0 であった。しかしながら境界層の影響によって実際にはマッハ数が下がっている。このため模擬インテークの実験では入口マッハ数を 1.85 とした。また図 7(A),(B) は、壁面静圧の x 方向の変化である。整流胴全圧で無次元化してある。これらの結果は概して三次元計算の方が実験と良く合っている。マッハ数や静圧はこの場合 境界層厚さに影響されて変化するものと考えられる。この実験のような正方流路では同じ厚さの境界層でも、静圧などに対しては、三次元計算では二次元計算の二倍の影響が出る。このような理由から計算結果は妥当なものと考えられる。

図 8 はピトー圧分布で、縦軸は整流胴全圧で無次元化した圧力、横軸は壁面からの距離である。超音速流れでの全圧管での測定では、プローブの前方に離脱衝撃波が生じるため測定された値 (ピトー圧) は全圧から衝撃波損失を引いたものに相当する。本来はレイリーのピトー管公式 [51] を用いて実験で求めたピトー圧から全圧を算出すべきなのであるが、ニュートン反復を必要とし面倒なのでここでは逆に計算で求めた全圧から衝撃波損失を引いてピトー圧を求めて比較している。境界層内は二次元、三次元ともに似たような結果で、境界層厚さとそのプロファイルともかなり良く合っている。主流のピトー圧はなぜか二次元計算の方が実験と良く合っている。

最後に図 9 は排除厚さ δ^* 、図 10 は運動量厚さ θ の x 方向変化である。それぞれ以下の式で求めた。

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty}\right) dy, \quad \theta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

添字 ∞ は各断面の境界層外端での値を示す。排除厚さは二次元計算も三次元計算も実験とかなり合っている、運動量厚さは三次元計算が良く一致している。

以上より、ラバルノズルおよびそれに続く正方形ダクトの計算結果はほぼ妥当と思われたので、この結果のラバルノズル出口部分の分布を模擬インテークの入口境界条件として用いることとした。

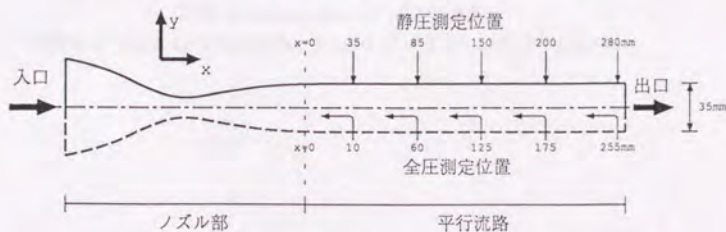


図 1: 超音速風洞検定

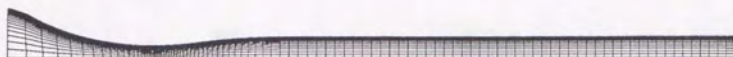
図 2 : 二次元計算格子 格子点数は 100×40 図 3 : 三次元計算格子 格子点数は $100 \times 40 \times 40$

表 1 : 超音速風洞検定の実験条件

$P_0(\text{kgf/cm}^2)$	$\rho_0(\text{kg/m}^3)$	$\mu_0(\text{Pa} \cdot \text{s})$	$a_0(\text{m/s})$	$\text{Re}(= \rho_0 a_0 L_0 / \mu_0)$
4	2.61	2.74×10^{-5}	459	1.5×10^6
6	3.94			2.3×10^6
8	5.21			3.1×10^6

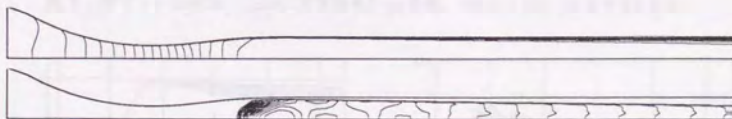


図 4 : 等マッハ数線図

二次元 Baldwin-Lomax モデルによる結果。

上の図は $M=0$ から 1.9 まで 0.1 刻み。下の図は $M=1.9$ から 1.985 まで 0.005 刻み。

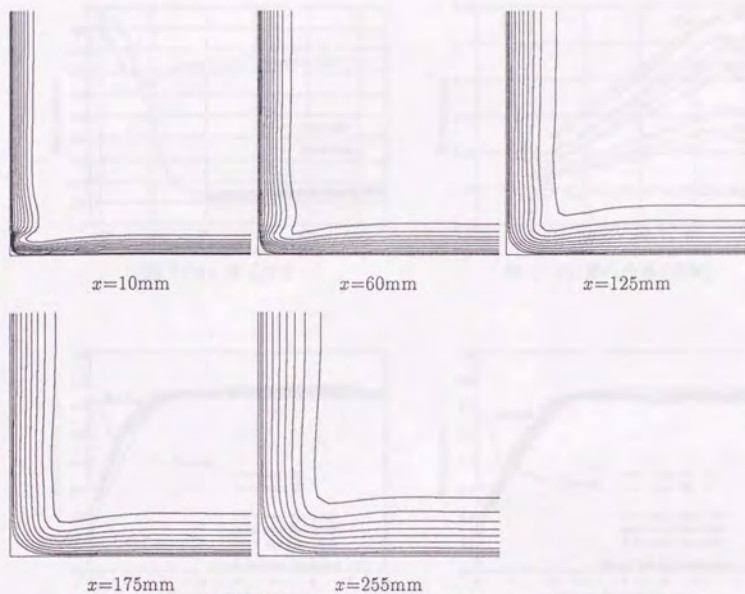


図 5 : 等マッハ数線図 三次元計算結果の yz 断面。 $M=1.0$ から 1.9 まで 0.1 刻み。

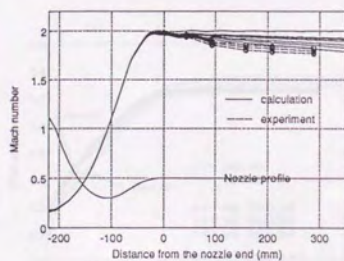


図 6 (A): マッハ数分布

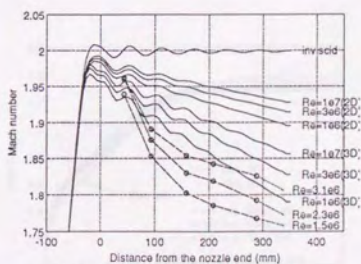


図 6 (B): マッハ数分布 (詳細)

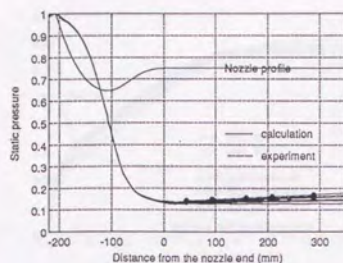


図 7 (A): 静圧分布

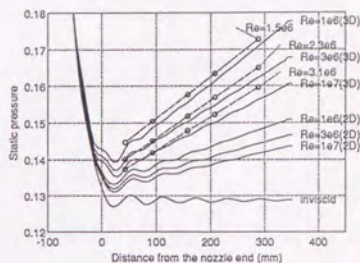


図 7 (B): 静圧分布 (詳細)

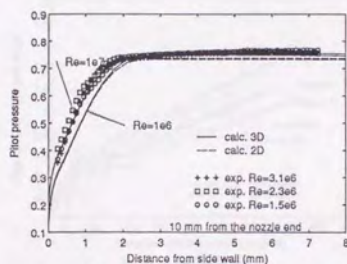


図 8 (A): ピトー圧分布

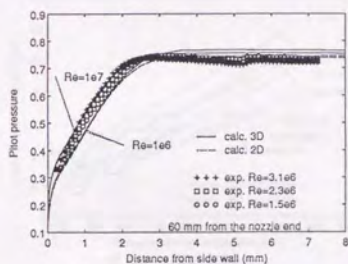


図 8 (B): ピトー圧分布

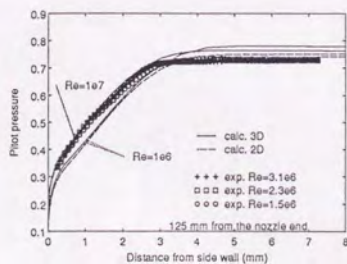


図 8 (C): ピトー圧分布

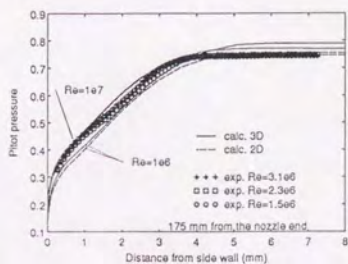


図 8 (D): ピトー圧分布

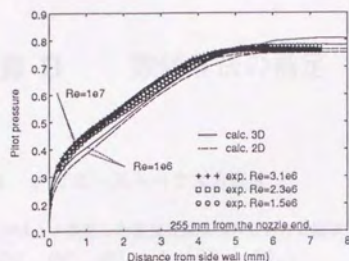


図 8 (E): ピトー圧分布

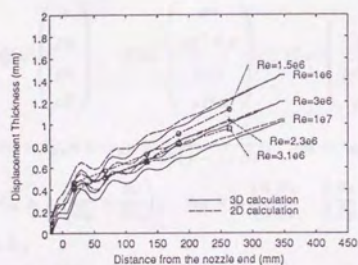


図 9 : 排除厚さ

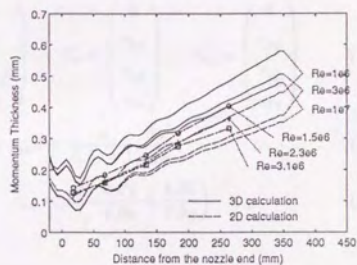


図 10 : 運動量厚さ

付録 B 数値解法の補足

B.1 ナビエ・ストークス方程式

ベクトル表記した直交直線座標系における無次元化された二次元のナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} \right) \quad (\text{B.1})$$

である。ただし、

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Hv \end{pmatrix}, \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ m_1 \end{pmatrix}, \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$m_1 = \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial x}, \quad m_2 = \tau_{xy}u + \tau_{yy}v + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial y} \quad (\text{B.3})$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{B.4})$$

である。

三次元では、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Hv \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho Hw \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ m_1 \end{pmatrix}, \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ m_2 \end{pmatrix}, \quad H_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ m_3 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial x} \quad (\text{B.7})$$

$$m_2 = \tau_{xy}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial y}$$

$$m_3 = \tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \tau_{zz}w + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

である。ここで z 方向の流束ベクトル H と、全エンタルピ H とが同じ記号になってしまったが、記号の都合上致し方なく、また誤解の恐れも少ないと思われることから、御容赦願いたい。

B.2 座標変換

物理空間内の一般曲線座標系を生成するには、解析的手法、代数的手法などがある。複雑な形状に対応するために今日では代数的手法が用いられることが多い。解析的手法の方が滑らかな格子が得られるが、複雑な形状に対応しにくい。代数的手法は直接的に格子を格子をコントロールして作ることができるので、複雑な形状にも対応しやすい反面、滑らかな格子が得にくい。さて代数的手法で得られた格子の計量 $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$ は次のようにして求める。

まず座標変換の写像を次のように表す。

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

偏微分を添字で表すことにすると、例えば $x_\xi \equiv \frac{\partial x}{\partial \xi}$ は

$$x_\xi(i, j) = \frac{x(i+1, j) - x(i-1, j)}{2} \quad (\text{B.10})$$

で得られる。しかし式 (B.9) の逆変換 $\xi = \xi(x, y, z)$ などを行なうことは一般には困難なため、 ξ_x などは直接計算できない。そこで微分の連鎖法則

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

を用いて、式 (B.9) の両辺を微分すると

$$1 = \xi_x x_\xi + \eta_x x_\eta + \zeta_x x_\zeta$$

$$0 = \xi_x y_\xi + \eta_x y_\eta + \zeta_x y_\zeta$$

⋮

などとなり、まとめると、

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix}^{-1} \\ = J \begin{pmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi \\ z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta & z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta & z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi \\ x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta & x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

が得られる。ただし、

$$J = 1 / \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix} \\ = (x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi)^{-1} \quad (\text{B.13})$$

である。二次元では、

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{pmatrix} \\ J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (\text{B.14})$$

である。

ここでメトリックの物理的意味を確認しておく。まず二次元の場合、例えば x_ξ はその定義 (式 B.10) より、物理空間での ξ 方向の隣りの格子点までの距離の x 成分だから、

- ベクトル $\begin{pmatrix} x_\xi \\ y_\xi \end{pmatrix}$ は ξ 方向の格子線に接する方向で、長さは ξ 方向の格子点間隔。
- ベクトル $\begin{pmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{pmatrix}$ は η 方向の格子線に接する方向で、長さは η 方向の格子点間隔。

ヤコビアンは格子の面積の逆数である。

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix}} = \frac{1}{(\text{格子面積})}$$

また、反変ベクトルは

- ベクトル $\frac{1}{J} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\eta \\ -x_\eta \end{pmatrix}$ は η 方向の格子線に直交し、長さは η 方向の格子点間隔。
- ベクトル $\frac{1}{J} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_\xi \\ x_\xi \end{pmatrix}$ は ξ 方向の格子線に直交し、長さは ξ 方向の格子点間隔。

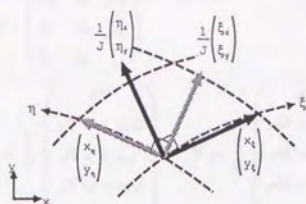


図 1: メトリックの物理的意味

となる。これらの関係を図示すると図 1 の様になる。

三次元の場合はヤコビアン J は格子体積の逆数で、

- ベクトル $\begin{pmatrix} x_\xi \\ y_\xi \\ z_\xi \end{pmatrix}$ は ξ 方向の格子線に接する方向で、長さは ξ 方向の格子点間隔。
- ベクトル $\frac{1}{J} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix}$ は $\eta\zeta$ 平面に直交し、長さは $\eta\zeta$ 平面の格子面積に等しい。

などとなる。

B.3 一般座標系ナビエ・ストークス方程式

三次元の場合のみ示す。二次元では z, ζ, w, W に関する項を無視すればよい。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_v}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$(U \ V \ W) = (u \ v \ w) \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$U = u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z, \quad V = u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z, \quad W = u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z$$

U, V, W は反変速度と呼ばれる。

$$(\widehat{F}, \widehat{G}, \widehat{H}) = (F, G, H) \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\widehat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U u + \xi_x p \\ \rho U v + \xi_y p \\ \rho U w + \xi_z p \\ \rho U H \end{pmatrix}, \quad \widehat{G} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V u + \eta_x p \\ \rho V v + \eta_y p \\ \rho V w + \eta_z p \\ \rho V H \end{pmatrix}, \quad \widehat{H} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho W \\ \rho W u + \zeta_x p \\ \rho W v + \zeta_y p \\ \rho W w + \zeta_z p \\ \rho W H \end{pmatrix}$$

$$(\widehat{F}_v, \widehat{G}_v, \widehat{H}_v) = (F_v, G_v, H_v) \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\widehat{F}_v = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{xz} + \xi_y \tau_{yz} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x m_1 + \xi_y m_2 + \xi_z m_3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{G}_v = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{xz} + \eta_y \tau_{yz} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x m_1 + \eta_y m_2 + \eta_z m_3 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{H}_v = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{xy} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{xz} + \zeta_y \tau_{yz} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x m_1 + \zeta_y m_2 + \zeta_z m_3 \end{pmatrix}$$

以下はデカルト座標系の剪断応力 (式 B.4) に微分の連鎖法則 (式 B.11) を代入しただけである。

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) u - \frac{2}{3} \left(\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) v - \frac{2}{3} \left(\xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) w \right) \quad (\text{B.20})$$

⋮

$$\tau_{xy} = \mu \left(\left(\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) u + \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) v \right)$$

⋮

$$m_1 = \tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)} \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) a^2$$

⋮

ここでも各項の物理的意味を確認して置くと、

- \widehat{Q} は (格子体積) $\times Q$ だからセル内に含まれる保存量の総量を表す。
- 反変速度 U は

$$\frac{U}{J} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

であるから、格子断面を横切る ξ 方向の体積流量にあたる。

- \hat{F} は $\eta\zeta$ 面を通過する流束

であり、式 (B.15) が曲線格子上で保存則を表していることが容易に理解できる。

B.4 ヤコビ行列

ここでは、ヤコビ行列

$$\hat{A} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}}, \quad \hat{B} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{Q}}, \quad \hat{C} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{Q}}, \quad \hat{A}_v = \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \hat{Q}}, \quad \hat{B}_v = \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \hat{Q}}, \quad \hat{C}_v = \frac{\partial \hat{H}_v}{\partial \hat{Q}} \quad (\text{B.21})$$

を求める。始めにデカルト座標系でのヤコビ行列を求め、それを一般座標系でのヤコビ行列に座標変換する。

まずデカルト座標系でのヤコビ行列

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q}, \quad B = \frac{\partial G}{\partial Q}, \quad C = \frac{\partial H}{\partial Q}, \quad A_v = \frac{\partial F_v}{\partial Q}, \quad B_v = \frac{\partial G_v}{\partial Q}, \quad C_v = \frac{\partial H_v}{\partial Q} \quad (\text{B.22})$$

を求める。例えば A の要素 A_{ij} は、 F の要素を F_j 、 Q の要素を Q_j と書くと

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial Q_j}$$

で得られる。計算の手順は、二次元を例にとると、まず

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ n \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

とし、 F, F_v の各項を、 ρ, m, n, ϵ を用いて書き直す。そののち各成分を偏微分し、結果を再び ρ, u, v, E を用いて書き直せばよい。この導出は単純だが長い面倒な計算となる。詳細は例えば Hirsch[53] の 16.2.1 を参照して頂くとして、結果は二次元の場合、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma-1)uV^2 & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(V^2 + 2u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -\gamma v E + (\gamma-1)vV^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(V^2 + 2v^2) & \gamma v \end{pmatrix}$$

ただし $V^2 = u^2 + v^2$ である。三次元の場合は、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{\gamma-1}{2}V^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -u[\gamma E - (\gamma-1)V^2] & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(V^2 + 2u^2) & -(\gamma-1)uv & -(\gamma-1)uw & \gamma u \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -v^2 + \frac{\gamma-1}{2}V^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -v[\gamma E - (\gamma-1)V^2] & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(V^2 + 2v^2) & -(\gamma-1)vw & \gamma v \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -w^2 + \frac{\gamma-1}{2}V^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & (3-\gamma)w & \gamma-1 \\ -w[\gamma E - (\gamma-1)V^2] & -(\gamma-1)uw & -(\gamma-1)vw & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(V^2 + 2w^2) & \gamma w \end{pmatrix}$$

ただし $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ である。粘性項のヤコビ行列は、例えば二次元の場合、

$$A_v = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{\rho} + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{v}{\rho} & \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho} & -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{\rho} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho} & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & \frac{\gamma}{Pr}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

ただし

$$m_1 = -\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{\rho} + \frac{2u}{3\rho}\frac{\partial}{\partial y}v + \frac{2}{3}u\frac{\partial}{\partial y}\frac{v}{\rho} - \frac{v}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}u - v\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{\rho} \\ + \frac{\gamma}{Pr}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-E + u^2 + v^2}{\rho}\right)$$

$$m_2 = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{\rho} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\frac{v}{\rho} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho} - \frac{\gamma}{Pr}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{\rho}$$

$$m_3 = -\frac{2}{3}u\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{\rho} - \frac{\gamma}{Pr}\frac{\partial}{\partial y}\frac{v}{\rho}$$

などとなる。

次に以上で求めたヤコビ行列を一般座標系に変換する。対流項ヤコビ行列 \hat{A} を例にとると、

$$\hat{A} \equiv \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}} = \frac{\partial Q}{\partial \hat{Q}} \frac{\partial \hat{F}}{\partial Q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \hat{Q}} = J, \quad \hat{F} \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} F_i$$

であるから、

$$\hat{A} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial F_i}{\partial Q}, \quad \text{つまり} \quad \hat{A} = \xi_x A + \xi_y B + \xi_z C \quad (\text{B.26})$$

である。単純だが長く面倒な計算の末、以下のような形にまとめることができる [59]。

先ず対流項ヤコビ行列は二次元の場合、

$$\hat{A} \text{ または } \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & k_x & k_y & 0 \\ -u\theta + k_x\phi^2 & \theta - (\gamma-2)k_x u & k_y u - (\gamma-1)k_x v & (\gamma-1)k_x \\ -v\theta + k_y\phi^2 & k_x v - (\gamma-1)k_y u & \theta - (\gamma-2)k_y v & (\gamma-1)k_y \\ \theta(2\phi^2 - \gamma E) & k_x(\gamma E - \phi^2) - (\gamma-1)u\theta & k_y(\gamma E - \phi^2) - (\gamma-1)v\theta & \gamma\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

ただし、

$$\theta = k_x u + k_y v$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(u^2 + v^2)$$

$$\hat{A} \text{ の場合 } k = \xi, \quad \hat{B} \text{ の場合 } k = \eta$$

また、三次元では

$$\hat{A} \text{ または } \hat{B} \text{ または } \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & k_x & k_y & 0 & 0 & 0 \\ -u\theta + k_x \phi^2 & \theta - (\gamma - 2)k_x u & k_y u - (\gamma - 1)k_x v & 0 & 0 & 0 \\ -v\theta + k_y \phi^2 & k_x v - (\gamma - 1)k_y u & \theta - (\gamma - 2)k_y v & 0 & 0 & 0 \\ -w\theta + k_z \phi^2 & k_x w - (\gamma - 1)k_z u & k_y w - (\gamma - 1)k_z v & 0 & 0 & 0 \\ \theta(2\phi^2 - \gamma E) & k_x(\gamma E - \phi^2) - (\gamma - 1)u\theta & k_y(\gamma E - \phi^2) - (\gamma - 1)v\theta & 0 & 0 & 0 \\ k_x u - (\gamma - 1)k_x w & (\gamma - 1)k_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x v - (\gamma - 1)k_y w & (\gamma - 1)k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta - (\gamma - 2)k_z w & (\gamma - 1)k_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_x(\gamma E - \phi^2) - (\gamma - 1)w\theta & \gamma\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

ただし、

$$\theta = k_x u + k_y v + k_z w$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(u^2 + v^2 + w^2)$$

$$\hat{A} \text{ の場合 } k = \xi, \quad \hat{B} \text{ の場合 } k = \eta, \quad \hat{C} \text{ の場合 } k = \zeta$$

となる。粘性項のヤコビ行列は二次元では

$$\hat{A}_v \text{ または } \hat{B}_v = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{\rho} & \alpha_3 \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_3 \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{\rho} & \alpha_2 \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ \beta_3 & -\beta_1 - \alpha_4 \frac{\partial}{\partial k} \frac{u}{\rho} & -\beta_2 - \alpha_4 \frac{\partial}{\partial k} \frac{v}{\rho} & \alpha_4 \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}k_x^2 + k_y^2$$

$$\alpha_2 = k_x^2 + \frac{4}{3}k_y^2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}k_x k_y$$

$$\alpha_4 = \frac{\gamma}{Pr}(k_x^2 + k_y^2)$$

$$\beta_1 = -\alpha_1 \frac{\partial}{\partial k} \frac{u}{\rho} - \alpha_3 \frac{\partial}{\partial k} \frac{v}{\rho}$$

$$\beta_2 = -\alpha_3 \frac{\partial}{\partial k} \frac{u}{\rho} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial k} \frac{v}{\rho}$$

$$\beta_3 = -\alpha_1 \frac{\partial u^2}{\partial k \rho} - 2\alpha_3 \frac{\partial uv}{\partial k \rho} - \alpha_2 \frac{\partial v^2}{\partial k \rho} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{-E + u^2 + v^2}{\rho} \right)$$

\hat{A} の場合 $k = \xi$, \hat{B} の場合 $k = \eta$

となる。三次元では

$$\mu \begin{pmatrix} \hat{A}_v \text{ または } \hat{B}_v \text{ または } \hat{C}_v = \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & \alpha_4 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & \alpha_5 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & 0 \\ \beta_2 & \alpha_4 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & \alpha_2 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & \alpha_6 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & 0 \\ \beta_3 & \alpha_5 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & \alpha_6 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & \alpha_3 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} & 0 \\ \beta_4 & \beta_1 - \alpha_0 \frac{\partial u}{\partial k \rho} & \beta_2 - \alpha_0 \frac{\partial v}{\partial k \rho} & \beta_3 - \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial k \rho} & \alpha_0 \frac{\partial 1}{\partial k \rho} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

$$\alpha_0 = \frac{\gamma}{Pr} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{3} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\alpha_2 = k_x^2 + \frac{4}{3} k_y^2 + k_z^2$$

$$\alpha_3 = k_x^2 + k_y^2 + \frac{4}{3} k_z^2$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{3} k_x k_y$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{3} k_x k_z$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{3} k_y k_z$$

$$\beta_1 = -\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial k \rho} - \alpha_4 \frac{\partial v}{\partial k \rho} - \alpha_5 \frac{\partial w}{\partial k \rho}$$

$$\beta_2 = -\alpha_4 \frac{\partial u}{\partial k \rho} - \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial k \rho} - \alpha_6 \frac{\partial w}{\partial k \rho}$$

$$\beta_3 = -\alpha_5 \frac{\partial u}{\partial k \rho} - \alpha_6 \frac{\partial v}{\partial k \rho} - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial k \rho}$$

$$\beta_4 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{-E + u^2 + v^2 + w^2}{\rho} \right)$$

$$-\alpha_1 \frac{\partial u^2}{\partial k \rho} - \alpha_2 \frac{\partial v^2}{\partial k \rho} - \alpha_3 \frac{\partial w^2}{\partial k \rho} - \alpha_4 \frac{\partial uv}{\partial k \rho} - \alpha_5 \frac{\partial uw}{\partial k \rho} - \alpha_6 \frac{\partial vw}{\partial k \rho}$$

B.5 対角化

まず対角化の手順を示す。非粘性ナビエ・ストークス方程式は双曲型方程式であり、それゆえ対流項ヤコビ行列（ここでは例として ξ 方向のヤコビ行列 \hat{A} を用いる。）は実固有値 λ を（三次元では）五つ持ち、対応する固有ベクトルは互いに一次独立である。固有値は特性方程式

$$|\lambda I - \hat{A}| = 0$$

を解くことで得られる。しかしこのままでは計算が煩雑なため、原始変数

$$V = (\rho, u, v, w, p)^T$$

に対する (原始形式) ナビエ・ストークス方程式の対流項やコピ行列

$$\tilde{A} = M^{-1} \hat{A} M$$

の固有値、固有ベクトルを求め、それを保存形式に変換するという手順を踏むと容易になる。ただし M は原始形式・保存形式間の変換行列で

$$M \equiv \frac{\partial Q}{\partial V}$$

と定義される [53]。詳細は Warming と Beam[60] や Hirsch[53] を参照して頂くとしてここでは概要を述べる。

特性方程式 $|\lambda I - \tilde{A}| = 0$ の解は、特性速度 $u, u + a, u - a$ と \tilde{A} の座標方向 (ξ 方向) の計量との内積であり、

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = U$$

$$\lambda_4 = U + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}$$

$$\lambda_5 = U - a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}$$

である。 i 番目の固有値 λ_i に対する右固有ベクトル r^i は

$$\tilde{A} r^i = \lambda_i r^i$$

を解いて求められる。 r^i は列ベクトルである。固有ベクトルには定数倍の任意性があるが、本研究では Warming と Beam[60] の例に従った。

得られた列ベクトル r^i を横に並べた行列を

$$R = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5), \quad \text{また} \quad \Lambda_\xi = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

とすると

$$\tilde{A} R = \Lambda_\xi R$$

となる。固有ベクトルは一次独立であるから R には逆行列が存在して、

$$R^{-1} \tilde{A} R = \Lambda_\xi$$

となる。最後に保存形式に変換して、

$$R^{-1} M^{-1} \hat{A} M R = \Lambda_\xi, \quad T_\xi = M R, \quad T_\xi^{-1} = R^{-1} M^{-1}$$

以上で、対角化のための行列 T_ξ, T_ξ^{-1} が得られた。

$$\Lambda_\xi = T_\xi^{-1} \tilde{A} T_\xi$$

次に行列 T_ξ, T_ξ^{-1} の成分表示を示す [61]。まず二次元の場合の対角化は、

$$\Lambda_{\xi} = \begin{pmatrix} \lambda_{\xi 1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_{\xi 2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_{\xi 3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{\xi 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & U & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

a は音速、 Λ_{η} も同様である。

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha \\ u & \tilde{k}_y \rho & \alpha(u + \tilde{k}_x a) & \alpha(u - \tilde{k}_x a) \\ v & -\tilde{k}_x \rho & \alpha(v + \tilde{k}_y a) & \alpha(v - \tilde{k}_y a) \\ \frac{\phi^2}{\gamma-1} & \rho(\tilde{k}_y u - \tilde{k}_x v) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{\gamma-1} + a\theta\right) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{\gamma-1} - a\theta\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

$$T_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi^2/a^2 & (\gamma-1)u/a^2 & (\gamma-1)v/a^2 & -(\gamma-1)/a^2 \\ -(\tilde{k}_y u - \tilde{k}_x v)/\rho & \tilde{k}_y/\rho & -\tilde{k}_x/\rho & 0 \\ \beta(\phi^2 - a\theta) & \beta(\tilde{k}_x a - (\gamma-1)u) & \beta(\tilde{k}_y a - (\gamma-1)v) & \beta(\gamma-1) \\ \beta(\phi^2 + a\theta) & -\beta(\tilde{k}_x a + (\gamma-1)u) & -\beta(\tilde{k}_y a + (\gamma-1)v) & \beta(\gamma-1) \end{pmatrix} \quad (\text{B.33})$$

$$\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{2}a}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}\rho a}, \quad \theta = \tilde{k}_x u + \tilde{k}_y v, \quad \phi^2 = \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2)$$

$$\tilde{k}_x = \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2}, \quad k = \xi \text{ または } \eta$$

$$N \equiv T_{\xi}^{-1} T_{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -d & d \\ 0 & d & b & c \\ 0 & -d & c & b \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & -d \\ 0 & -d & b & c \\ 0 & d & c & b \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

$$a = \tilde{\xi}_x \tilde{\eta}_y + \tilde{\xi}_y \tilde{\eta}_x, \quad b = \frac{1}{2}(1+a), \quad c = \frac{1}{2}(1-a), \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\xi}_x \tilde{\eta}_y - \tilde{\xi}_y \tilde{\eta}_x)$$

三次元の場合の対角化は、

$$\Lambda_{\xi} = \begin{pmatrix} \lambda_{\xi 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_{\xi 2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_{\xi 3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{\xi 4} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{\xi 5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & U & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & U & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & U - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

$\Lambda_\eta, \Lambda_\zeta$ も同様である。

$$T_k = \begin{pmatrix} \bar{k}_x & \bar{k}_y & \bar{k}_z \\ \bar{k}_x u & \bar{k}_y u - \bar{k}_z \rho & \bar{k}_z u + k_y \rho \\ \bar{k}_x v + \bar{k}_z \rho & \bar{k}_y v & \bar{k}_z v - k_z \rho \\ \bar{k}_x w - \bar{k}_y \rho & \bar{k}_y w + \bar{k}_z \rho & \bar{k}_z w \\ \frac{\bar{k}_x \phi^2}{\gamma-1} + \rho(\bar{k}_z v - \bar{k}_y w) & \frac{\bar{k}_y \phi^2}{\gamma-1} + \rho(\bar{k}_x w - \bar{k}_z u) & \frac{\bar{k}_z \phi^2}{\gamma-1} + \rho(\bar{k}_y u - \bar{k}_x v) \\ \alpha & \alpha & \\ \alpha(u + \bar{k}_x a) & \alpha(u - \bar{k}_x a) & \\ \alpha(v + \bar{k}_y a) & \alpha(v - \bar{k}_y a) & \\ \alpha(w + \bar{k}_z a) & \alpha(w - \bar{k}_z a) & \\ \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{\gamma-1} + a\theta\right) & \alpha\left(\frac{\phi^2 + a^2}{\gamma-1} - a\theta\right) & \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

$$T_k^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{k}_x(1 - \phi^2/a^2) - (\bar{k}_z v - \bar{k}_y w)/\rho & \bar{k}_x(\gamma-1)u/a^2 \\ \bar{k}_y(1 - \phi^2/a^2) - (\bar{k}_x w - \bar{k}_z u)/\rho & -\bar{k}_z/\rho + \bar{k}_x(\gamma-1)u/a^2 \\ \bar{k}_z(1 - \phi^2/a^2) - (\bar{k}_y u - \bar{k}_x v)/\rho & \bar{k}_y/\rho + \bar{k}_z(\gamma-1)u/a^2 \\ \beta(\phi^2 - a\theta) & \beta(\bar{k}_x a - (\gamma-1)u) \\ \beta(\phi^2 + a\theta) & -\beta(\bar{k}_x a + (\gamma-1)u) \\ \bar{k}_x/\rho + \bar{k}_z(\gamma-1)v/a^2 & -\bar{k}_y/\rho + \bar{k}_x(\gamma-1)w/a^2 & -\bar{k}_x(\gamma-1)/a^2 \\ \bar{k}_y(\gamma-1)v/a^2 & \bar{k}_x/\rho + \bar{k}_y(\gamma-1)w/a^2 & -\bar{k}_y(\gamma-1)/a^2 \\ -\bar{k}_x/\rho + \bar{k}_z(\gamma-1)v/a^2 & \bar{k}_z(\gamma-1)w/a^2 & -\bar{k}_z(\gamma-1)/a^2 \\ \beta(\bar{k}_y a - (\gamma-1)v) & \beta(\bar{k}_z a - (\gamma-1)w) & \beta(\gamma-1) \\ -\beta(\bar{k}_y a + (\gamma-1)v) & -\beta(\bar{k}_z a + (\gamma-1)w) & \beta(\gamma-1) \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

$$\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{2}a}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}\rho a}, \quad \theta = \bar{k}_x u + \bar{k}_y v + \bar{k}_z w, \quad \phi^2 = \frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2 + v^2 + w^2)$$

$$\bar{k}_x = \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad k = \xi \text{ または } \eta \text{ または } \zeta$$

$$N_1 \text{ または } N_2 \equiv T_k^{-1} T_l = \begin{pmatrix} a & b & c & -d/\sqrt{2} & d/\sqrt{2} \\ -b & a & d & c/\sqrt{2} & -c/\sqrt{2} \\ -c & -d & a & -b/\sqrt{2} & b/\sqrt{2} \\ d/\sqrt{2} & -c/\sqrt{2} & b/\sqrt{2} & (1+a)/2 & (1-a)/2 \\ -d/\sqrt{2} & c/\sqrt{2} & -b/\sqrt{2} & (1-a)/2 & (1+a)/2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

$$a = \bar{k}_x \bar{l}_x + \bar{k}_y \bar{l}_y + \bar{k}_z \bar{l}_z, \quad b = \bar{k}_x \bar{l}_y - \bar{k}_y \bar{l}_x, \quad c = \bar{k}_x \bar{l}_z - \bar{k}_z \bar{l}_x, \quad d = \bar{k}_y \bar{l}_z - \bar{k}_z \bar{l}_y$$

B.6 Roe の近似リーマン解法

Roe[69] は、ある定数行列 $\tilde{A}(Q_L, Q_R)$ を用いた線形方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

にリーマン問題の初期値 (式 3.63) の厳密解がリーマン問題の近似解となるような定数行列 \tilde{A} を導いた。彼は \tilde{A} を求めるに際し次の条件を課した。

- (1) \tilde{A} は Q から F への線形写像である。
- (2) $\tilde{A}(Q, Q) = A(Q) \equiv \frac{\partial F(Q)}{\partial Q}$ を満たす。
- (3) あらゆる Q_L, Q_R に対し、 $\tilde{A}(Q, Q) \times (Q_L - Q_R) = F(Q_L) - F(Q_R)$ を厳密に満たす。
- (4) \tilde{A} の固有ベクトルが互いに一次独立である。

これらの条件のうち (1), (2) を満たすようにすることは容易であるし、(4) も簡単に確かめることができる。問題は (3) である。 F が Q の非線形関数であるため、単純な $\frac{1}{2}\{A(Q_L) + A(Q_R)\}$ や $A(\frac{1}{2}(Q_L + Q_R))$ などは (3) を満たさない。(3) はこれを用いた数値解法が保存則を満たすための条件であり、大変重要である。そこで彼は (3) を満たす行列を以下のようにして導いた。

Roe はまず、 $y = f(x)$ という関数が媒介変数 t を用いて $y = y(t)$, $x = x(t)$ と表すと判りやすくなる場合があると同様に、パラメータベクトル

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \\ \sqrt{\rho} v \\ \sqrt{\rho} w \\ \sqrt{\rho} H \end{pmatrix}$$

を用いて $Q = Q(W)$, $F = F(W)$ と表すと問題が容易になることを見出した。このとき Q と F は次のようになる。

$$Q = \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 \\ w_1 w_4 \\ \frac{w_1 w_5}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}(w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 w_5 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} w_2^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}(w_3^2 + w_4^2) \\ w_2 w_3 \\ w_2 w_4 \\ w_2 w_4 \end{pmatrix}$$

また、 Q, F の W に対するヤコビ行列を B, C と定義すると

$$B = \frac{\partial Q}{\partial W} = \begin{pmatrix} 2w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ w_3 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\ w_4 & 0 & 0 & w_1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma} w_5 & \frac{\gamma-1}{\gamma} w_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma} w_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma} w_4 & \frac{1}{\gamma} w_1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}w_5 & \frac{\gamma+1}{\gamma}w_2 & -\frac{\gamma-1}{\gamma}w_3 & -\frac{\gamma-1}{\gamma}w_4 & \frac{\gamma-1}{\gamma}w_1 \\ 0 & w_3 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & w_4 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & w_5 & 0 & 0 & w_2 \end{pmatrix}$$

となる。

さて、 Q と F の要素は W の要素の 2 次式で表されており、 Q , F は W の 2 次同次関数である。よって、

$$Q = \frac{1}{2}BW, \quad F = \frac{1}{2}CW$$

が成り立つ。また一般にスカラー量 a_R, b_R, a_L, b_L の間には

$$\begin{aligned} a_R^2 - a_L^2 &= (a_R + a_L)(a_R - a_L) \\ a_R b_R - a_L b_L &= \frac{1}{2}(a_R + a_L)(b_R - b_L) + \frac{1}{2}(b_R + b_L)(a_R - a_L) \end{aligned}$$

が成り立つことなどから、厳密に

$$\begin{aligned} Q_R - Q_L &= \frac{1}{2}(B_R + B_L)(W_R - W_L) \\ F_R - F_L &= \frac{1}{2}(C_R + C_L)(W_R - W_L) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\tilde{B} \equiv \frac{1}{2}(B_R + B_L), \quad \tilde{C} \equiv \frac{1}{2}(C_R + C_L)$$

と定義すると

$$F_R - F_L = \tilde{C}\tilde{B}^{-1}(Q_R - Q_L)$$

が成り立ち、 $\tilde{C}\tilde{B}^{-1}$ が (3) の条件を満たす定数行列であることが判る。よって、

$$\tilde{A} = \tilde{C}\tilde{B}^{-1}$$

\tilde{B} , \tilde{C} は w_i に関する単純な算術平均で求めたことから考えて、 Q_L , Q_R から \tilde{A} を計算するには、 Q_L , Q_R の二つの状態の ρ, u, v, w, H から、密度の平方根 $\sqrt{\rho}$ を加重して平均した状態の $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{H}$ を作り、そのヤコビ行列を求めれば良い。なお、この平均演算を「Roe の平均化」と呼ぶ。すなわち、

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{\sqrt{\rho_L}\rho_L + \sqrt{\rho_R}\rho_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ &\vdots \\ \tilde{H} &= \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \end{aligned} \tag{B.39}$$

の $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{H}$ を式 (B.27) または式 (B.28) に代入すれば良い。なお、この行列 \tilde{A} が条件 (1), (2), (4) を満たすことは明らかである。

