ヘリコプタブレードの翼端形状の数値解析的研究

青 山 剛 史

1

ヘリコプタブレードの翼端形状の数値解析的研究

指導教官 河内啓二 教授　　学生 97063 青山剛史

1992 年 12 月 21 日

目次

記号表

a : 音速

a_0 : コニング角

a_1 : 縦のフラップ角

AR : アスペクト比

b : ブレード枚数

b_1 : 横のフラップ角

C : ブレードのコード長

$C^0, C^\pm$: 特性曲線

C_d : 2次元の抗力係数

C_l : 2次元の揚力係数

C_{l_α} : 2次元の揚力傾斜

C_n : 2次元の垂直力係数

C_H : 抗力係数

C_p : 圧力係数

C_Q : トルク係数, $Q/[\rho\pi R^2(R\Omega)^2 R]$

C_T : 推力係数, $T/[\rho\pi R^2(R\Omega)^2]$

DT : 計算の時間刻み幅

e : 単位体積当たりのエネルギー

f : 等価抵抗面積あるいは音源の分布する閉曲面

H : ヘヴィサイド関数

I : ブレードのヒンジ回りの慣性能率

j, k, l : ξ, η, ζ方向の格子点番号

n : タイムステップの番号

k : 乱流運動エネルギー

l : 混合長

M_T : 回転速度の翼端マッハ数

M_∞ : 前進飛行速度のマッハ数

p : 静圧

Pr : プラントル数

Pr_l : 層流のプラントル数

Pr_t：乱流のプラントル数

Q：トルク

r：回転中心からの半径方向位置

r_{peak}：ある方位角位置で$\Delta(-C_p)_{peak}$の生ずる半径方向位置

r_{range}：ある方位角位置で$\Delta(-C_p)$ の存在する半径方向の幅

R：ブレード半径、気体定数あるいはリーマン不変量

Re：ブレード半径と一様流音速を基準としたレイノルズ数

Re_c：コード長と翼端回転速度を基準としたレイノルズ数

$(r/R)_0$：ブレード翼端の形状変更を始める無次元半径位置

s：壁からの距離

S：エントロピ、スパン長あるいはブレード一本の面積

T：推力あるいは温度

t：時間

u, v, w：それぞれ x, y, z方向の速度

u', v', w'：それぞれ x', y', z'方向の速度

$\overline{u}$：$u \cos \Omega t + v \sin \Omega t$

$\overline{v}$：$-u \sin \Omega t + v \cos \Omega t$

$\overline{w}$：w

U, V, W：それぞれξ, η, ζ方向の反変速度

V_0：前進速度（一様流速度）

W_t：全重量

x, y, z：静止座標系あるいはブレード固定の回転座標系

x', y', z'：ブレード固定の回転座標系

α：2次元翼素の幾何迎角あるいは有効迎角

α_q：シャフトの傾き角

β：フラッピング角

δ：ディラックのデルタ関数

δ_{ij}：クロネッカーのデルタ

$\Delta(-C_p)$：衝撃波前後の$-C_p$の差

$\Delta(-C_p)_{peak}$：ある方位角位置での$\Delta(-C_p)$ のピーク値

$\Delta(C_Q/\sigma)$：$[(C_Q/\sigma) - (C_Q/\sigma)_0]/(C_Q/\sigma)_0$

$\Delta(C_Q/\sigma)_f$：$[(C_Q/\sigma)_f - (C_Q/\sigma)_{f0}]/(C_Q/\sigma)_{f0}$

$\Delta(C_Q/\sigma)_p : [(C_Q/\sigma)_p - (C_Q/\sigma)_{p0}]/(C_Q/\sigma)_{p0}$

$\Delta(C_T/\sigma) : [(C_T/\sigma) - (C_T/\sigma)_0]/(C_T/\sigma)_0$

ϵ : エネルギー散逸率

γ : 比熱比あるいはロック・ナンバ

Γ : 循環の強さ

θ_c : コレクティブピッチ角

θ_w : ねじり下げ角

λ : インフローレシオ

Λ : 後退角

μ : 前進比あるいは粘性係数

μ_l : 分子粘性係数

μ_t : 乱流渦粘性係数

ν_t : 乱流動粘性係数

ρ : 密度

σ : ソリディティ, $bS/\pi R^2$

τ : 分子応力あるいは観測点に時刻 t に達する音波の発生した時刻

τ_{ij} : 応力テンソル

ϕ : 微小擾乱ポテンシャル関数

Φ : 完全ポテンシャル関数

ψ : 方位角

ω : 渦度

Ω : ロータの回転角速度

ξ, η, ζ : 計算空間での座標系

添字

C : コード (Chord)

f : 摩擦 (Friction)

p : 圧力 (Pressure)

T : 翼端 (Tip)

w : 壁 (Wall)

∞ : 一様流

Chapter 1

序論

我が国においては、保有民間航空機数に対してヘリコプタの占める割合が、ICAO加盟国の中でも群を抜いている。確かに企業の節税対策によるヘリコプタの購入にその一因があり、バブルの崩壊後増加傾向も頭打ちであることは否定できないが、我が国においてヘリコプタが重要な役割を果たしていることは、衆目の一致するところである。また冷戦の終結により、ヘリコプタの役割も軍事から民間にその重点が移行しつつあるのが世界的な流れである [1]。こうした傾向を鑑みて、ヘリコプタがより広く民間の交通機関として活用されるために解決すべき重要な課題として、高速化が挙げられる。

まず、ヘリコプタの速度を鉄道のそれと比較してみる。在来の新幹線は、時速約200 [km/h] のスピードをもって、東京-大阪間を約 3 時間で結んでいるが、平成 4 年に運行開始となった新型の『のぞみ』は、その時速を 270 [km/h] と大きくスピードアップした。さらに、平成 6 年に運行開始予定の次世代新幹線は、時速 350 [km/h] になる予定である。従来から我が国とドイツ・フランスの間には、熾烈な鉄道の速度記録競争が演じられているが、これで TGV を抜いて世界記録を樹立することになる。今回のスピードアップの陰には、もちろん記録樹立の面子のようなものも多分に感じられるが、1994 年夏に予定されている関西新空港の開港に伴って航空機の需要が増加し、鉄道への客足が遠のくのではないかという JR 側の思惑が起因になっていることは明白である。このように鉄道がますます高速化されている状況の中で、ヘリコプタは従来その経済的最高速度が 240 ～ 260 [km/h] であるといわれてきた。従って、ヘリコプタが交通機関として生き残っていくためには、高速化の問題を避けて通るわけにはいかない。

このようにヘリコプタの最高速度が制限されるのは、高速前進飛行するヘリコプ

タの前進側（方位角$\psi = 90°$の周辺）で衝撃波が生じ、また後退側（方位角$\psi = 270°$の周辺）ではストールが生じて、抵抗の増大や振動を生みだし、コントロールを困難にするからである。ただし方位角は、ロータの回転中心を原点、機体のテイル方向を0°として、ロータの回転方向に測られる。しかし、最近複合材技術の発展等によって、半径方向に翼型の変化するブレードの使用、先進的な翼型の開発、あるいはブレード翼端の平面形の工夫などによってこの2つの問題を軽減する試みがなされ、1986年にはFig.1.1(a)のBERP(British Experimental Rotor Program)ブレード[2]を取り付けたWestlandのLynxが400[km/h]の速度記録を樹立した。Fig.1.1(b)のLynx HAS. Mk2[3]はRoyal Navyの対潜水艦用バージョンで、記録を出した機体そのものではないが、それに非常に近いものである。図より機体そのものは伝統的な形状であることから、ヘリコプタの高速化を図るに当たっては、ブレードの翼端形状を工夫することが非常に有効な方法であると考えられる。

上の事実からも、ヘリコプタのブレード翼端を解析することが重要であるのは明らかであるが、回転翼の実験は固定翼よりはるかに困難で莫大なコストがかかるため、BERPの出現以前、1970年代からCFD(Computational Fluid Dynamics)による各種計算法によって、ブレード翼端周りの遷音速流の研究が行われ、現在に到っている。この分野は、世界のヘリコプタ研究者の注目を集めているため、アメリカ、フランス、イギリス、ドイツ、日本など主要各国で研究が行われているが、主な研究機関としては、NASA、US Army、ONERA、McDonnell Douglas社、Georgia Institute of Technology等が挙げられる。またこの分野の研究を総括した論文としては文献[4][5][6][7]が挙げられ、その他総括的な論文としては、ONERAでの研究をまとめた文献[8]やMcDonnell Douglas社での研究をまとめた文献[9]がある。そして、用いられている解析法は、扱う基礎方程式に着目すると

- 定常遷音速微小擾乱ポテンシャル方程式
- 非定常遷音速微小擾乱ポテンシャル方程式
- 定常完全ポテンシャル方程式
- 非定常完全ポテンシャル方程式
- 定常オイラー方程式
- 非定常オイラー方程式
- 定常NS方程式

のように発展してきており、代表的な研究者と研究の行われた年代についてはTable 1.1に示した。ここで煩雑さを避けるため、解析法発展の経緯に関する詳しい解説は第2章に譲る。

上にも述べたように、解析法は現在定常のNSが解けるところまで発展してきたが、ヘリコプタメーカーの現場では、依然としてポテンシャルコードが使われている。またどの研究機関でも解析法の開発に手いっぱいで、オイラーやNSを用いた方法の特徴を生かして、実際のデザインの指針を得るには到っていない。そこで本研究においては、高速ヘリコプタのブレードをデザインするに当たっての指針を得るために、オイラー及びNSを用いて以下の目的で研究を行った。

(1) ヘリコプタの前進飛行時には、先にもふれたように、前進側で非定常的に生じる衝撃波（ダイナミックショック）と後退側で非定常的に生じるストール（ダイナミックストール）が問題となる。この内、後者に関しては、ブレード面積を増加させることで比較的容易に回避できるという指摘[10]もあり、また計算では2次元のダイナミックストールさえ満足に捉えることができない現状を考えると、ヘリコプタの後退側で生じる3次元的なダイナミックストールを数値的に解析するのは時期尚早であろう。一方前者は、抵抗発散(drag divergence)の原因となり、これが起こると断面抵抗パワーの急激な増加を招いてしまう。従って、前進側で起こるダイナミックショックの挙動を把握することは、抵抗発散を避ける上で非常に重要である。そして、抵抗発散のマッハ数が上がれば回転速度を速くできるので、全方位角位置で揚力係数を下げることができ、結果的に後退側のストールの発生をも抑えることができる。しかるに、翼端平面形がダイナミックショックに及ぼす影響を解析した例としては、ポテンシャル方程式を用いて数種類の翼端形状を対象としたもの[11][12]などがある程度で、衝撃波の解析に適したオイラー方程式を用いて、詳細に解析を行った例はない。そこで本研究においては、ダイナミックショックを正確に捉えるために、オイラー方程式を非定常的に解く解析法を確立し、翼端平面形がダイナミックショックに及ぼす影響を、詳細かつ定量的に把握するために、数多くの形状を対象としてパラメトリックスタディを行い、ブレードデザインの指針を得ることを第1の目的とした。

(2) ヘリコプタの高速化はもちろん重要であるが、高速化のための翼端形状変更は、固定翼機にないヘリコプタの利点であるホバリングに支障がないよう行うべきである。そこで、高速化のための形状変更が、ホバリング性能に及ぼす影響を

知ることが必要になってくるが、抗力のうち誘導抗力は翼端渦が、また摩擦抗力は境界層が捉えられていないと正確には見積もれない。そこでこれらを捉えるために、支配方程式として Navier-Stokes 方程式 (NS) を用いた解析法を確立し、翼端平面形がホバリング性能に及ぼす影響を把握して、ブレードデザインの指針を得ることを第2の目的とした。

(3) また従来から騒音は、ヘリコプタが民間で広く用いられる際の大きな障害となってきたが、ヘリコプタが高速飛行すると、ハイスピードインパルシブノイズ (High Speed Impulsive Noise, HSI Noise) と呼ばれる衝撃音が発生し、ひとたびそれが発生すると、他の全ての音源に卓越する。そこで、高速飛行のための翼端形状変更が、この HSI ノイズに及ぼす影響を知る必要がある。しかし、HSI ノイズは線形理論の範囲の波動方程式ではうまく見積もることができないので、本研究で開発した CFD とキルヒホッフ法を組み合わせるという、最近用いられるようになった方法でこれを解析して、ブレードデザインの指針を得ることを第3の目的とした。

本論文の構成に関して述べると、第2章において、ヘリコプタロータに関する数値解析法の発展について詳しく解説し、本研究の位置づけについて述べる。また第3章、第4章、第5章では、それぞれ上の目的 (1)(2)(3) で述べた解析を行うために、そこで用いた解析法の解説、解析法を検証するための実験値との比較及び解析結果の考察を行う。そして第6章では、3～5章で得られた結論をまとめ、最後に今後の課題について述べる。

Chapter 2

ヘリコプタロータに関する数値解析法の歩みと本研究の位置づけ

ヘリコプタの空気力を算出する方法としては、従来から非圧縮性ポテンシャル方程式（ラプラス方程式）の積分解を基礎に置く揚力線理論などが用いられていたが、プラントルグラワート則などで圧縮性の影響を考慮しようとする試みは、この法則が遷音速領域で実験値をうまく予測できないため、あまり効果を見せていない。また風洞試験に頼る方法は、3次元性の強い流れ場の解析には不適当であるし、対象がデータのある形状のみに限られてしまう。従って、遷音速領域におけるヘリコプタブレードの翼端形状に関する研究では、CFD が用いられることが多い。ヘリコプタブレード周りの流れは、3次元的で遠心力やコリオリ力の影響を受けるため、CFD では3次元回転座標系で記述された支配方程式を解くことが一般的である。そこで、以下にこの分野の CFD を用いた解析法の発展について解説し、そのような研究動向の中における本研究の位置づけについて述べる。

2.1 遷音速微小擾乱ポテンシャル方程式

ヘリコプタロータの遷音速流に関する研究は、1970 年に NASA と US Army の共同研究という形で始まり、その直後に NASA で固定翼の CFD が発展したため、それに触発されて 1972 年に Caradonna と Isom[13] が、定常の遷音速微小擾乱ポテンシャル方程式 (TSD) を緩和法 (relaxation method) で解いた。これが遷音速ロータの CFD の先駆的研究である。彼らはブレード固定回転座標系で記述した以下の定

常微小擾乱ポテンシャル方程式を解いた。

$$\Omega x\boldsymbol{r} \cdot \nabla(\Omega x\boldsymbol{r} \cdot \nabla\phi) - 2\nabla\phi \cdot \nabla(\Omega x\boldsymbol{r} \cdot \nabla\phi) + \nabla\phi \cdot \nabla[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2] = a^2\nabla^2\phi \tag{2.1}$$

ここで、局所音速 a はベルヌーイの式によって

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1)[-(\Omega x\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2] \tag{2.2}$$

と表される。式 (2.1) を式 (2.2) に代入し、スカラー形式で表すと

$$\begin{aligned} & [(\Omega y)^2 - a_\infty^2 + (\gamma+1)\Omega y\phi_x - (\gamma-1)\Omega x\phi_y + \phi_x^2 + \frac{\gamma-1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)]\phi_{xx} \\ + & [(\Omega x)^2 - a_\infty^2 - (\gamma+1)\Omega x\phi_y + (\gamma-1)\Omega y\phi_x + \phi_y^2 + \frac{\gamma-1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)]\phi_{yy} \\ + & [-a_\infty^2 + (\gamma-1)\Omega y\phi_x - (\gamma-1)\Omega x\phi_y + \phi_z^2 + \frac{\gamma-1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)]\phi_{zz} \\ - & [2\Omega^2 xy + 2\Omega x\phi_x - 2\Omega y\phi_y - 2\phi_x\phi_y]\phi_{xy} \\ + & 2\Omega\phi_z(y\phi_{xz} - x\phi_{yz}) + 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} + 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} - \Omega^2 x\phi_x - \Omega^2 y\phi_y = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

となる。ちなみに、式 (2.3) を a_∞^2 で割って $a_\infty \to \infty$ とすれば、非圧縮の微小擾乱ポテンシャル方程式、即ちラプラス方程式

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \tag{2.4}$$

が得られ、式 (2.3) から非線形項を落とせば、亜音速・超音速での微小擾乱ポテンシャル方程式

$$\begin{aligned} & [(\Omega y)^2 - a_\infty^2]\phi_{xx} + [(\Omega x)^2 - a_\infty^2]\phi_{yy} - a_\infty^2\phi_{zz} - 2\Omega^2 xy\phi_{xy} \\ - & \Omega^2 x\phi_x - \Omega^2 y\phi_y = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

が得られる。ブレード先端の速度が遷音速であるときには、Ωy がほぼ a_∞ に等しいことから、ブレード先端付近では以下の式が支配方程式となる。

$$\begin{aligned} & [a_\infty^2 - (\Omega y)^2 - (\gamma+1)\Omega y\phi_x]\phi_{xx} + a_\infty^2\phi_{yy} + a_\infty^2\phi_{zz} + 2\Omega^2 xy\phi_{xy} \\ + & \Omega^2 x\phi_x + \Omega^2 y\phi_y = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

最終的には、これをさらに適当な仮定の下で無次元化して解くことになる。その式の導出の際に、矩形の翼端形状が仮定されているので、翌 1973 年には Ballhaus と Caradonna[14] が非矩形翼への拡張を行った。

以上は定常の支配方程式を扱っていたが、1975 年に Caradnna と Isom[15] が非定常への拡張を行った。非定常の遷音速ポテンシャル方程式は

$$\phi_{tt} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla\nabla\phi \cdot \boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V} \cdot \nabla\phi_t - \Omega x\boldsymbol{V} \cdot \nabla\phi$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\phi_t + 2\boldsymbol{V}\cdot\nabla\nabla\phi\cdot\nabla\phi \\
&= \quad \{a_\infty^2 - (\gamma-1)[\phi_t + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2]\}\nabla^2\phi
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

と表される。ここで $\nabla\phi$が微小であることから

$$
\begin{aligned}
&\phi_{tt} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\nabla\phi\cdot\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi_t + 2\boldsymbol{V}\cdot\nabla\nabla\phi\cdot\nabla\phi \\
&= \quad [a_\infty^2 - (\gamma-1)\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi]\nabla^2\phi
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

のような簡略化を行い、さらに適当な仮定の下にスカラー形式で表すと

$$
\begin{aligned}
&\phi_{tt} + 2(\Omega y + V\cos\Omega t)\phi_{xt} - (\Omega x + V\sin\Omega t)\phi_{yt} \\
= \quad & [a_\infty^2 - (\Omega y + V\cos\Omega t)^2 - (\gamma+1)(\Omega y + V\cos\Omega t)\phi_x \\
- \quad & (\gamma-1)(\Omega x + V\sin\Omega t)\phi_y]\phi_{xx} \\
+ \quad & [2(\Omega x + V\sin\Omega t)(\Omega y + V\cos\Omega t) + 2(\Omega x + V\sin\Omega t)\phi_x \\
- \quad & 2(\Omega y + V\cos\Omega t)\phi_y]\phi_{xy} \\
+ \quad & [a_\infty^2 - (\Omega x + V\sin\Omega t)^2 - (\gamma-1)(\Omega x + V\cos\Omega t)\phi_x \\
+ \quad & (\gamma+1)(\Omega x + V\sin\Omega t)\phi_y]\phi_{yy} \\
- \quad & 2(\Omega y + V\sin\Omega t)\phi_z\phi_{xz} + 2(\Omega x + V\sin\Omega t)\phi_z\phi_{yz} \\
- \quad & [a_\infty^2 - (\gamma-1)(\Omega y + V\cos\Omega t)\phi_x + (\gamma-1)(\Omega x + V\sin\Omega t)]\phi_{zz}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

となる。ここでϕ_{tt}の項を無視しても、BVI(Blade Vortex Interaction) など高周波の現象以外はほとんど捉えることができるのでこれを落とし、さらに微小項を落として適当な無次元化を行うと、時間微分項はϕ_{xt}のみになる。もしその式のϕ_{xt}の項を落とせば、時間 t は係数のみに現れることになるので、時間履歴を含まない解、即ち準定常の解が得られることになる。Caradonna と Isom は時間微分項としてϕ_{xt}のみを含む式を、加速過緩和法 (successive over-relaxation method) で解いた。しかし、この解法は非定常には適さなかったので、同年 Ballhaus と Steger[16] は TSD を時間線形化し、反復計算を避けることに成功した。さらに 1978 年には、Caradonna と Philippe[17] が AF 法を用いてより効率のよい方法で解いた。これらの他にも、遷音速微小擾乱ポテンシャル方程式を用いた代表的な研究として、文献 [18][19] などが挙げられる。

以上遷音速微小擾乱ポテンシャル方程式について述べたが、この方程式は微小擾乱の仮定そのものに既に近似が入っているのはもちろん、この仮定ゆえに質量は保存されるが衝撃波を通して運動量が保存しないという問題がある。そこで、必然的

に支配方程式は完全ポテンシャルへと発展していった。

2.2 完全ポテンシャル方程式

完全ポテンシャル方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\Phi_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\Phi_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\Phi_z)=0 \tag{2.10}$$

のような形を持つ。ただし、密度は以下のベルヌーイの式から求められる。

$$\rho=[1+\frac{\gamma-1}{2}(M_\infty^2-2\Phi_t-\Phi_x^2-\Phi_y^2-\Phi_z^2)]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{2.11}$$

ヘリコプタロータの解析に完全ポテンシャル方程式を用いたのは、1979 年の Arieli と Tauber[20] が最初で、その支配方程式は非保存型で定常のものであった。このとき開発されたコードは ROT22 と名付けられており、使いやすいコードであるため、準定常解析にしか使えないにもかかわらず、現在までのところヘリコプタメーカーの現場で最も広く用いられているものである。また Chang[21] は、1984 年に準定常の非保存型完全ポテンシャル方程式を解き、翌年にはこれを非定常に拡張した [22]。以上は非保存型の方程式を扱っていたが、衝撃波での質量保存が保証されないという欠点があったため、1986 年に Strawn[23] は Steger[24] の開発したアルゴリズムを用いて、非定常の保存型完全ポテンシャル方程式を解いた。

しかし、元来速度ポテンシャルの存在は、エントロピの生成がないという条件の下で導かれるため、ポテンシャル方程式では、例えば次式で表されるような垂直衝撃波によるエントロピの増加が生ずる現象を正確に捉えることはできない。

$$\frac{\Delta S}{R}=ln\{[1+\frac{2\gamma}{(\gamma+1)}(M_1^2-1)]^{\frac{-1}{\gamma-1}}[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}\} \tag{2.12}$$

ただし上式で Rは気体定数、M_1は衝撃波直前のマッハ数、ΔSが生成されるエントロピである。そこで、例えば Bridgeman[25] らは

$$\rho=\rho_i e^{-\Delta S/R} \tag{2.13}$$

のような非等エントロピ的密度ρを、衝撃波の発生する部分にのみ導入している。ここで、ρ_iは等エントロピ的な密度である。この式は定常の時にしか成立しないが、非定常現象に適用しても、そこそこよい結果を与えると言われている。しかし、強い衝撃波の生ずる流れ場及び渦の影響が大きな流れ場を解析するには、等エントロピの仮定を用いずに導かれるオイラー方程式を解かなければならない。

以上の他にも、完全ポテンシャル方程式を用いた代表的な研究として、文献[26][27][28][29][30]などが挙げられる。

2.3 オイラー方程式

ヘリコプタブレードの解析にオイラー方程式を適用した研究は、その数値解法によって、主に差分法[31][32][33][34][35][36]と有限体積法[37][38][39][40][41][42][43][44][45][46]の2つに分けられる。差分法のスキームは、本研究でも用いているBeam-Warming法を基礎としたものが主流であり、一方有限体積法は、オイラー方程式の積分形表示されたものを離散化して解く方法である。また、最近は精度を高めるため、TVD(Total Variation Diminishing)を用いた解析[31][36][42]が行われるようになってきている。前進飛行時の解析を行うため非定常に拡張する際には、ニュートン法(Newton iterative method)やルンゲ・クッタ法(Runge-Kutta method)が適用されている。以下では、後に本方法の計算結果との比較を行うとき比較対象とするため、Agarwalら[37]の解析法を解説する。

有限体積法は、ブレード固定回転座標系(x, y, z)におけるオイラー方程式の積分形表示

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int_V W dV + \int\!\!\int_{\partial S} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} dS - \Omega \int\!\!\int_{\partial S} zW(\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) dS \\
+\ & \Omega \int\!\!\int_{\partial S} xW(\hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) dS = \int\!\!\int\!\!\int_V G dV
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

を基礎方程式とする。ここでVは表面∂Sに囲まれた検査体積、$\hat{\boldsymbol{n}}$は面素dSに垂直な外向きの単位ベクトル、$(\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z)$は$(x, y, z)$座標系の基本ベクトル、$\Omega$は回転角速度である。また

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}, \\
\vec{\boldsymbol{F}} &= F_x \hat{\boldsymbol{e}}_x + F_y \hat{\boldsymbol{e}}_y + F_z \hat{\boldsymbol{e}}_z
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uh \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vh \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_y + \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wh \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_z \tag{2.15}
$$

である。そして、計算領域をサブスクリプト (i,j,k) で表される 6 面体のセルに分割し、その中心で変数の値がわかるとすれば、式 (2.14) から以下の離散化された式を得る。

$$
\frac{d}{dt}(J_{ijk}W_{ijk}) + P_{ijk} + Q_{ijk} + R_{ijk} = J_{ijk}G_{ijk} \tag{2.16}
$$

ここで J_{ijk} はセルの体積、P_{ijk}はセルから出る正味の絶対流束、Q_{ijk} と R_{ijk} はセルから出る回転の流束を表す。次に式 (2.16) を

$$
\frac{d}{dt}(J_{ijk}W_{ijk}) + \mathbf{F}_{ijk} = 0 \tag{2.17}
$$

と書き換え、偶数番目の点と奇数番目の点で分離した振動解が生じたり、衝撃波や澱み点付近の極端な圧力勾配を含む領域で振動したりするのを防ぐため、人工粘性項 D_{ijk} を加えると

$$
\frac{d}{dt}(J_{ijk}W_{ijk}) + \mathbf{F}_{ijk} - D_{ijk} = 0 \tag{2.18}
$$

を得る。D_{ijk} としては、Jameson[47] の方法に従って、個々の点での圧力勾配に依存する係数を持つ、2 次と 4 次の微分項をミックスした粘性項を用いている。また定常解を求める場合は、解が時間刻みΔt に依存しないので、収束を早めるために局所クーラン数に基づいた各セルでの局所時間刻みを使い、また非定常解を求める場合には、時間刻みΔt を

$$
\Delta t \leq \min_{ijk}(\Delta t_l) \tag{2.19}
$$

とし、時間方向の積分は 4 次のルンゲ・クッタスキームで行っている。即ち式 (2.18) を

$$
\frac{dW}{dt} + \frac{1}{J}[\mathbf{F}(W) - D(W)] = 0 \tag{2.20}
$$

と書き換えれば、n 番目の時間ステップでの解 W^n から次の解 W^{n+1} を求めるには

$$
\begin{aligned}
W^{(0)} &= W^n \\
W^{(1)} &= W^{(0)} - \frac{\Delta t}{8J}[\mathbf{F}(W^{(0)}) - D(W^{(0)})] \\
W^{(2)} &= W^{(0)} - \frac{\Delta t}{6J}[\mathbf{F}(W^{(1)}) - D(W^{(0)})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W^{(3)} &= W^{(0)} - \frac{\Delta t}{4J}[\mathbf{F}(W^{(2)}) - D(W^{(0)})] && (2.21)\\
W^{(4)} &= W^{(0)} - \frac{\Delta t}{2J}[\mathbf{F}(W^{(3)}) - D(W^{(0)})] \\
W^{n+1} &= W^{(4)} && (2.22)
\end{aligned}
$$

の計算を行えばよいことになる。このスキームは、4 次の時間精度を持ち、クーラン数が $2\sqrt{2}$以下で安定である。また、演算量を減らすため、人工粘性項は最初のステージでの値のままに凍結する。以上が有限体積法の概略である。この方法は滑らかでない格子にも適用でき、陽解法であるため大規模な行列の反転を必要としないため、格子生成法や陰解法の効率的なアルゴリズムが開発される以前はよく用いられていたが、一般的に差分法より空間精度が悪いという難点がある。

次にオイラー一般について述べると、つい最近まで『オイラーはエントロピの勾配や渦度を許すが、ヘリコプタブレード上の圧力分布を予測する場合、高マッハ数での解や前縁渦の影響する解以外では完全ポテンシャルと大きく変わらない上、一桁上のオーダーのコストがかかるため、完全ポテンシャルの使える範囲では、結果だけから考えればオイラーを使う必然性がない。従ってオイラーの主な利点は、ポテンシャルと異なり、形式が NS に類似しているので、コードを NS に拡張する際有利なことである』[48] と言われていた。しかしオイラーを TVD 差分法で解くことにより、ポテンシャル方程式では不可能だった鋭い衝撃波の捕獲が可能となった上、計算時間についていえば、現時点ですでにオイラーの定常計算（ホバリング）は航空宇宙技術研究所のベクトル計算機 VP2600 を用いた場合、5 分で収束解を得ることができ、また非定常計算（前進飛行）でも 1 周に約 30 分程の計算時間しか要しない。また計算機の能力は日々向上しているので、オイラーとポテンシャルの計算時間を云々するのは無意味になってきている。

ちなみに、富士通が今年 9 月 10 日に発表した VPP500 シリーズは、シリコンに代わる次世代素子として注目されているガリウムひ素 LSI を初めて本格採用することによって、355 ギガフロップスの世界最高速を達成した。日立の HITAC3000 シリーズの持つ従来の記録 32 ギガフロップスに比較すると、実に 10 倍以上の処理能力を持つことになる。ただし VPP500 はひとつ当り 1.6 ギガフロップスの演算装置を最大 222 台接続することによって上の能力を実現している。

しかし、ことヘリコプタの解析に限っていえば、特にホバリングやブレードボルテックスインタラクションのように後流渦が流れ場に大きく影響する状況においては、オイラーでも力不足である。なぜなら、オイラーは渦を捉え対流させることも

ができるが、粘性がないため正確な渦現象をモデル化していないからである。またオイラーは境界層を捉えることができないので、摩擦抵抗も見積もることができないし、前進飛行時の後退側で起こるダイナミックストールに対しても無力である。また遷音速では、境界層の存在が衝撃波の強さや位置に影響を与え、また逆に衝撃波が境界層を厚くするなどの相互干渉が起こるので、NS を用いることが望ましい。以上のような理由で、ヘリコプタの数値的解析法は最終的に NS へと発展していく。

2.4 NS 方程式

NS を適用した研究も、その数値解法によって、オイラー同様主に差分法 [48][49][52] と有限体積法 [50][51][53] の 2 つに分けられ、これらはともにオイラー方程式を解くために開発されたコードに、粘性項を付加することによって得られている。

ただし、すべて定常即ちホバリングを対象としており、現在の計算機の計算速度の制約から、まだ NS の非定常計算には到っていない。また第 4 章でも詳しく述べるが、NS を解く際には乱流のモデル化が必要で、現在のところヘリコプタの計算には主に 0 方程式モデルが用いられている [48][50][51][52][53] が、乱流の性質をより正確にモデル化できる 2 方程式モデルも用いられるようになってきている [49][52] 。

しかし、NS は莫大な計算時間を要するため、オイラーに比べて格段にコストがかかるという欠点がある。一般的には粘性項が 25 % の計算時間増加につながる [48] といわれているが、NS 計算のつらいところは粘性項の付加だけにあるのではなく、境界層を捉えるために、最小格子幅を非常に小さく取らなければならない点にもある。これは格子点数の増加を意味するとともに、非定常計算の際、安定性を確保するために時間ステップを非常に小さくしなければならないことをも意味する。ちなみに本研究で用いている NS の最小格子幅は、オイラーで用いているそれの $1/10^5$ なので、格子点数が同じなら、単純に考えても同じ方位角分計算を進めるのに 10^5 倍時間がかかってしまうことになる。従って、現時点ではヘリコプタの解析で NS の非定常計算を行うのは困難である。

2.5 本研究の位置づけ

以上ヘリコプタの数値解析的研究の歩みと現状について述べてきたが、この分野では、現在までのところ解析法の確立及びその高精度化に重点が置かれており、確立されたオイラーや NS を解く解析法が、実際のブレードを作るに当たって、その

デザインに指針を与えるには到っていない。

そこで本研究においては、第1章で述べた目的の下に解析を行ったわけだが、まず目的 (1) を達成するためには、前進側で非定常的に発生する衝撃波を正確に捉える必要がある。そこで、支配方程式としてオイラーを選び、人工粘性項の付加なしに安定に計算を進め、衝撃波を鋭く捉えることのできる TVD で差分化し、ニュートン法を適用して非定常的に解く方法を用いた。また、ヘリコプタ特有の後流の影響を考慮するため、トリム解析や誘導速度算出法とのカップルを行った。

次に目的 (2) の解析を行うためには、ヘリコプタ特有の後流や境界層を捉える必要があるため、支配方程式として NS を選んだ。ホバリング時に多大な影響を及ぼす後流を考慮するためには、局所循環法 (Local Circulation Method, LCM) や渦理論 (Vortex Lattice Method) などといった、ラプラス方程式の範囲の理論とのカップルを行った。また、乱流モデルとしては $(q-\omega)$ 2 方程式モデルを選んだが、これは第 4 章でも述べるように、0 方程式モデルより乱流の物理的性質を正確に表現している。このモデルは、既にヘリコプタロータと同じ回転翼である ATP (Advanced Turboprop) で、その有効性が確かめられている [54][55] が、ヘリコプタに適用されたのは初めてである。また現時点では手が付けられていないが、近い将来ヘリコプタ前進飛行時の後退側で起こるダイナミックストールを解析する際にも、力を発揮すると思われる。従って、ここで 2 方程式モデルがホバリング時の解析に使えることが示されればその意義は大きい。

最後に目的 (3) の解析を行うためには、HSI ノイズの主要な部分を占める、衝撃波に起因する騒音を正確に捉える必要があるため、CFD としては、オイラー方程式を TVD で解く方法を用いた。従来この分野の研究には、ポテンシャル方程式を解く方法が用いられてきたが、本方法はこれに比べて衝撃波を捉える能力に優れているため、HSI ノイズの解析に適している。

Chapter 3

前進飛行時のダイナミックショックに及ぼす翼端形状の影響

ここでは、第1章で述べた目的 (1) の解析を行うために、まずその解析法を解説し、次に実験値や他の解析法との比較によって結果の検証を行い、最後にヘリコプタブレードの翼端形状が、前進飛行時の前進側で生じるダイナミックショックにどのような影響を及ぼすかを解析する。

3.1 非定常オイラー方程式の解法

3.1.1 支配方程式

静止座標系 (x, y, z) における3次元非定常オイラー方程式は、以下のように表される。

$$\partial_t Q + \partial_x E + \partial_y F + \partial_z G = 0 \tag{3.1}$$

ただし

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

であり、∂_tなどは$\partial/\partial t$ を表す。ここで、ρは密度、u, v, wはそれぞれ x, y, z軸方向の速度、e は単位体積当たりのエネルギー、p は圧力で

$$p = (\gamma - 1)[e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)] \tag{3.3}$$

と表される。またすべての量は無次元化されており、長さ (L)、質量 (M)、時間 (T) の無次元化はそれぞれ R, $\rho_\infty R^3$, R/a_∞で行っている。ただし Rはブレード半径、a は音速、また添字 ∞ は一様流での値を意味する。式の導出は文献 [56] などに詳しい。これを Fig.3.1 のブレード固定回転座標系 (x', y', z') に変換すると、以下のようになる。

$$\partial_t Q' + \partial_{x'} E' + \partial_{y'} F' + \partial_{z'} G' + H' = 0 \tag{3.4}$$

ただし

$$Q' = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\overline{u} \\ \rho\overline{v} \\ \rho\overline{w} \\ e \end{bmatrix}, \quad E' = \begin{bmatrix} \rho u' \\ \rho u'\overline{u} + p \\ \rho u'\overline{v} \\ \rho u'\overline{w} \\ (e+p)u' - \Omega y' p \end{bmatrix}, \quad F' = \begin{bmatrix} \rho v' \\ \rho v'\overline{u} \\ \rho v'\overline{v} + p \\ \rho v'\overline{w} \\ (e+p)v' + \Omega x' p \end{bmatrix},$$

$$G' = \begin{bmatrix} \rho w' \\ \rho w'\overline{u} \\ \rho w'\overline{v} \\ \rho w'\overline{w} + p \\ (e+p)w' \end{bmatrix}, \quad H' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho\Omega\overline{v} \\ \rho\Omega\overline{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

である。ここでΩは回転角速度、$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ は

$$\overline{u} = u\cos\Omega t + v\sin\Omega t, \quad \overline{v} = -u\sin\Omega t + v\cos\Omega t, \quad \overline{w} = w, \tag{3.6}$$

のように、静止座標系 (x, y, z) における速度成分 (u, v, w) を回転座標系に変換したものであり、x', y', z'軸方向の速度 (u', v', w') は

$$u' = \overline{u} + \Omega y', \quad v' = \overline{v} - \Omega x', \quad w' = \overline{w}, \tag{3.7}$$

と表される。これを任意の格子形状において計算が可能になるように、Fig.3.1 の一般曲線座標系 (ξ, η, ζ) に変換すると、最終的に以下の式を得る。

$$\partial_t \widehat{Q} + \partial_\xi \widehat{E} + \partial_\eta \widehat{F} + \partial_\zeta \widehat{G} + \widehat{H} = 0 \tag{3.8}$$

ただし

$$\widehat{Q} = J^{-1} Q = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\overline{u} \\ \rho\overline{v} \\ \rho\overline{w} \\ e \end{bmatrix},$$

$$\widehat{E} = J^{-1}(\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F + \xi_z G) = J^{-1}\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho\overline{u}U + \xi_x p \\ \rho\overline{v}U + \xi_y p \\ \rho\overline{w}U + \xi_z p \\ (e+p)U - \xi_t' p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{F} = J^{-1}(\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F + \eta_z G) = J^{-1}\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho\overline{u}V + \eta_x p \\ \rho\overline{v}V + \eta_y p \\ \rho\overline{w}V + \eta_z p \\ (e+p)V - \eta_t' p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{G} = J^{-1}(\zeta_t Q + \zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G) = J^{-1}\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho\overline{u}W + \zeta_x p \\ \rho\overline{v}W + \zeta_y p \\ \rho\overline{w}W + \zeta_z p \\ (e+p)W - \zeta_t' p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{H} = J^{-1}H = J^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -\rho\Omega\overline{v} \\ \rho\Omega\overline{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

であり、ヤコビアン J は

$$J^{-1} = x_\xi(y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - z_\xi y_\zeta) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) \tag{3.10}$$

反変速度 U, V, W は

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \tag{3.11}$$

で表される。また、$\xi_t', \eta_t', \zeta_t'$ は

$$\begin{aligned} \xi_t' &= \xi_t + \Omega y \xi_x - \Omega x \xi_y \\ \eta_t' &= \eta_t + \Omega y \eta_x - \Omega x \eta_y \\ \zeta_t' &= \zeta_t + \Omega y \zeta_x - \Omega x \zeta_y \end{aligned} \tag{3.12}$$

であり、メトリックの関係式は連鎖法則より導かれ、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\xi_t &= -x_t\xi_x - y_t\xi_y - z_t\xi_z \\
\xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) \\
\xi_y &= J(z_\eta x_\zeta - x_\eta z_\zeta) \\
\xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta) \\
\eta_t &= -x_t\eta_x - y_t\eta_y - z_t\eta_z \\
\eta_x &= J(z_\xi y_\zeta - y_\xi z_\zeta) \\
\eta_y &= J(x_\xi z_\zeta - z_\xi x_\zeta) \\
\eta_z &= J(y_\xi x_\zeta - x_\xi y_\zeta) \\
\zeta_t &= -x_t\zeta_x - y_t\zeta_y - z_t\zeta_z \\
\zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) \\
\zeta_y &= J(z_\xi x_\eta - x_\xi z_\eta) \\
\zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで、$'$は省略した。また、以降$\hat{}$は省略する。

3.1.2 効率化された Beam-Warming 法

定常のオイラー方程式は、亜音速領域で楕円型の偏微分方程式、超音速領域では双曲型のそれになり、両者の解法が異なるため、特にここで扱っているような遷音速流れを解析する場合にはやっかいになる。そこで、通常遷音速流れの定常解析では、亜音速・超音速にかかわらず双曲型である非定常オイラー方程式を時間発展的手法で解いて、収束した解を定常解とみなす方法が取られる。また定常の NS は楕円型、非定常の NS は放物型となるが、圧縮性の効果が大きい領域では粘性項の影響が小さいため、NS も非定常オイラー方程式に粘性項を付加し、上記の手法で解いている。上記の時間発展的手法の中で、最も一般的に用いられているものが Beam-Warming 法で、本研究においてもこれを基礎にしているため、まず Beam-Warming 法について解説を加える。

式 (3.8) の時間微分項の差分化は、オイラー陰差分と呼ばれる一次精度の後退差分、即ち

$$\partial_t Q^{n+1} = \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{3.14}$$

で行い、$\partial_\xi E$などを時間 $n+1$ で見積る陰解法を用いると、式 (3.8) は

$$\frac{Q^{n+1}-Q^n}{\Delta t} + \partial_\xi E^{n+1} + \partial_\eta F^{n+1} + \partial_\zeta G^{n+1} + H^{n+1} = 0 \tag{3.15}$$

となる。次に $\partial_\xi E$ などの空間微分の項は、E^{n+1} が Q^{n+1} の非線形関数であることから、反復解法を避けるために、以下のように線形化する。

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= E^n + (\frac{\partial E}{\partial t})^n \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= E^n + (\frac{\partial E}{\partial Q})^n (\frac{\partial Q}{\partial t})^n \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &\equiv E^n + A^n (\frac{\partial Q}{\partial t})^n \Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \tag{3.16}$$

この操作により、時間精度は 2 次のオーダーまで落ちることになる。これらを式 (3.15) に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} & [I + \Delta t(\partial_\xi A^n + \partial_\eta B^n + \partial_\zeta C^n + D^n)]\Delta Q^n \\ = & -\Delta t[\partial_\xi E^n + \partial_\eta F^n + \partial_\zeta G^n + H^n] \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。ここで

$$\Delta Q^n = Q^{n+1} - Q^n \tag{3.18}$$

である。また式 (3.17) の A, B, C, Dはヤコビ行列で、以下のように表される。

$$\begin{aligned} & A, B, C \\ = & \begin{bmatrix} \kappa_t & \kappa_x & \kappa_y & \kappa_z & 0 \\ \kappa_x\phi^2 - u\theta & \kappa_t + \theta - c_2\kappa_x u & \kappa_y u - c_1\kappa_x v & \kappa_z u - c_1\kappa_x w & c_1\kappa_x \\ \kappa_y\phi^2 - v\theta & \kappa_x v - c_1\kappa_y u & \kappa_t + \theta - c_2\kappa_y v & \kappa_z v - c_1\kappa_y w & c_1\kappa_y \\ \kappa_z\phi^2 - w\theta & \kappa_x w - c_1\kappa_z u & \kappa_z w - c_1\kappa_z v & \kappa_t + \theta - c_2\kappa_z w & c_1\kappa_z \\ \theta(\phi^2 - \psi^2) & \kappa_x\psi^2 - c_1 u\theta & \kappa_y\psi^2 - c_1 v\theta & \kappa_z\psi^2 - c_1 w\theta & \kappa_t + \gamma\theta \end{bmatrix} \\ & D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ただし

$$c_1 = \gamma - 1$$
$$c_2 = \gamma - 2$$

$$
\begin{aligned}
\theta &= \kappa_x u + \kappa_z w \\
\phi^2 &= \frac{1}{2}(\gamma - 1)(u^2 + v^2 + w^2) \\
\psi^2 &= \frac{\gamma e}{\rho} - \phi^2
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

であり、κは A, B, Cに対してそれぞれξ, η, ζを表す。

空間の微分については、中心差分を用いれば

$$
\partial_\xi E^n = \frac{E^n_{j+1} - E^n_{j-1}}{2\Delta\xi} \tag{3.21}
$$

となり、空間に関して 2 次の精度が保たれ

$$
\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1 \tag{3.22}
$$

ととれば、式 (3.17) は

$$
\begin{aligned}
&[I + \Delta t(\delta_\xi A^n + \delta_\eta B^n + \delta_\zeta C^n + D^n)]\Delta Q^n \\
&= -\Delta t[\delta_\xi E^n + \delta_\eta F^n + \delta_\zeta G^n + H^n]
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

と表される。ただし例えばδ_ξの定義は

$$
\delta_\xi E^n = \frac{E^n_{j+1} - E^n_{j-1}}{2} \tag{3.24}
$$

である。簡単のため

$$
[I + \Delta t(\delta_\xi A^n + \delta_\eta B^n + \delta_\zeta C^n + D^n)] \equiv LHS \tag{3.25}
$$

$$
[\delta_\xi E^n + \delta_\eta F^n + \delta_\zeta G^n + H^n] \equiv RHS \tag{3.26}
$$

とすれば、式 (3.23) は

$$
LHS\Delta Q^n = -\Delta t RHS \tag{3.27}
$$

と書ける。この形はデルタ形式と呼ばれ、未知量が ΔQ^n になっている。時間を進め $\Delta Q^n \approx 0$ になったら定常状態であるとみなし、Q^{n+1}を求める定常解であるとする方法がいわゆる時間発展法 (Time Marching) である。いま扱っている方程式が 3 次元であるため、式 (3.27) で ΔQ^n を求めるためには、大規模な行列の反転を行う必要がある。そこでこれを避けるため、以下のような Beam と Warming[57] による近似因子化 (Approximate Factrization) の概念を用いる。

$$
[I + \Delta t(A + B)] \approx [I + \Delta t A][I + \Delta t B] + O(\Delta t^2) \tag{3.28}
$$

これにより

$$
\begin{aligned}
LHS &= [I + \Delta t\delta_\xi A^n][I + \Delta t\delta_\eta B^n][I + \Delta t\delta_\zeta C^n][I + \Delta t D^n] \\
&\equiv L_\xi L_\eta L_\zeta L_D
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

と変形され、計算はブロック 3 重対角行列の反転になり、かなり演算量を減らすことができる。さらに

$$
A = T_\xi \Lambda_\xi T_\xi^{-1} \tag{3.30}
$$

のような、Pulliam と Chaussee[58] の対角化を用いると

$$
\begin{aligned}
L_\xi &= [I + \Delta t\delta_\xi A] \\
&= [I + \Delta t\delta_\xi (T_\xi \Lambda_\xi T_\xi^{-1})] \\
&= T_\xi [I + \Delta t\delta_\xi \Lambda_\xi] T_\xi^{-1} + O(\Delta t)
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

と変形され、結局式 (3.23) は

$$
\begin{aligned}
&T_\xi[I + \Delta t\delta_\xi \Lambda_\xi^n]T_\xi^{-1} T_\eta [I + \Delta t\delta_\eta \Lambda_\eta^n] T_\eta^{-1} T_\zeta [I + \Delta t\delta_\zeta \Lambda_\zeta^n] T_\zeta^{-1} [I + \Delta t D^n]\Delta Q^n \\
&= -\Delta t RHS
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

となる。ただし、この操作により時間精度は 1 次まで落ちてしまう。ここで$\Lambda_\xi, \Lambda_\eta, \Lambda_\zeta$ はそれぞれ A, B, Cの固有値を対角成分とする

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\xi &= diag[U, U, U, U + a|\nabla_\xi|, U - a|\nabla_\xi|], \\
\Lambda_\eta &= diag[V, V, V, V + a|\nabla_\eta|, V - a|\nabla_\eta|], \\
\Lambda_\zeta &= diag[W, W, W, W + a|\nabla_\zeta|, W - a|\nabla_\zeta|]
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

のような行列で、固有ベクトルの列からなる T_ξ, T_η, T_ζとその逆行列 $T_\xi^{-1}, T_\eta^{-1}, T_\zeta^{-1}$ は以下のようになる。

$$
T_\kappa =
\begin{bmatrix}
\tilde{\kappa_x} & \tilde{\kappa_y} & \tilde{\kappa_z} & \alpha & \alpha \\
\tilde{\kappa_x} u & \tilde{\kappa_y} u - \tilde{\kappa_z}\rho & \tilde{\kappa_z} u + \tilde{\kappa_y}\rho & \alpha(u + a\tilde{\kappa_x}) & \alpha(u - a\tilde{\kappa_x}) \\
\tilde{\kappa_x} v + \tilde{\kappa_z}\rho & \tilde{\kappa_y} v & \tilde{\kappa_z} v - \tilde{\kappa_x}\rho & \alpha(v + a\tilde{\kappa_y}) & \alpha(v - a\tilde{\kappa_y}) \\
\tilde{\kappa_x} w - \tilde{\kappa_y}\rho & \tilde{\kappa_y} w + \tilde{\kappa_x}\rho & \tilde{\kappa_z} w & \alpha(w + a\tilde{\kappa_z}) & \alpha(w - a\tilde{\kappa_z}) \\
T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55}
\end{bmatrix} \tag{3.34}
$$

$$
T_\kappa^{-1} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
T'_{11} & \tilde{\kappa_x} u c_2 & \tilde{\kappa_x} v c_2 + \frac{\tilde{\kappa_z}}{\rho} & \tilde{\kappa_x} w c_2 - \frac{\tilde{\kappa_y}}{\rho} & -\tilde{\kappa_x} c_2 \\
T'_{21} & \tilde{\kappa_y} u c_2 - \frac{\tilde{\kappa_z}}{\rho} & \tilde{\kappa_y} v c_2 & \tilde{\kappa_y} w c_2 + \frac{\tilde{\kappa_x}}{\rho} & -\tilde{\kappa_y} c_2 \\
T'_{31} & \tilde{\kappa_z} u c_2 + \frac{\tilde{\kappa_y}}{\rho} & \tilde{\kappa_z} v c_2 - \frac{\tilde{\kappa_x}}{\rho} & \tilde{\kappa_z} w c_2 & -\tilde{\kappa_z} c_2 \\
\beta c_4 & \beta(a\tilde{\kappa_x} - u c_1) & \beta(a\tilde{\kappa_y} - v c_1) & \beta(a\tilde{\kappa_z} - w c_1) & \beta c_1 \\
\beta c_5 & -\beta(a\tilde{\kappa_x} + u c_1) & -\beta(a\tilde{\kappa_y} + v c_1) & -\beta(a\tilde{\kappa_z} + w c_1) & \beta c_1
\end{bmatrix} \tag{3.35}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
T_{51} &= \frac{\phi^2}{\gamma-1}\tilde{\kappa_x} + \rho(\tilde{\kappa_z} v - \tilde{\kappa_y} w) \\
T_{52} &= \frac{\phi^2}{\gamma-1}\tilde{\kappa_y} + \rho(\tilde{\kappa_x} w - \tilde{\kappa_z} u) \\
T_{53} &= \frac{\phi^2}{\gamma-1}\tilde{\kappa_z} + \rho(\tilde{\kappa_y} u - \tilde{\kappa_x} v) \\
T_{54} &= \frac{\phi^2 + a^2}{\gamma-1} + a\theta \\
T_{55} &= \frac{\phi^2 + a^2}{\gamma-1} - a\theta \\
\alpha &= \frac{\rho}{\sqrt{2}}a \\
\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho}a \\
\theta &= \tilde{\kappa_x} u + \tilde{\kappa_y} v + \tilde{\kappa_z} w \\
\phi &= \sqrt{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)} \\
\tilde{\kappa_x} &= \frac{\kappa_x}{\nabla\kappa} \\
\tilde{\kappa_y} &= \frac{\kappa_y}{\nabla\kappa} \\
\tilde{\kappa_z} &= \frac{\kappa_z}{\nabla\kappa} \\
c_1 &= \gamma - 1 \\
c_2 &= \frac{\gamma-1}{a^2} \\
c_3 &= 1 - \frac{\phi^2}{a^2} \\
c_4 &= \phi^2 - a\theta \\
c_5 &= \phi^2 + a\theta \\
T'_{11} &= \tilde{\kappa_x} c_3 + \frac{\tilde{\kappa_y} w - \tilde{\kappa_z} v}{\rho} \\
T'_{21} &= \tilde{\kappa_y} c_3 + \frac{\tilde{\kappa_z} u - \tilde{\kappa_x} w}{\rho}
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

$$T'_{31} = \tilde{\kappa_z} c_3 + \frac{\tilde{\kappa_x} v - \tilde{\kappa_y} w}{\rho}$$

であり、κはξ, η, ζを表す。ここで、散逸機構のないオイラー方程式を安定に解くために、両辺に数値拡散項 $d_\xi, d_\eta, d_\zeta, d_e$を加え

$$\begin{aligned} L_1 &= [I + \Delta t(\delta_\xi \Lambda_\xi + d_\xi)^n] \\ L_2 &= [I + \Delta t(\delta_\eta \Lambda_\eta + d_\eta)^n] \\ L_3 &= [I + \Delta t(\delta_\zeta \Lambda_\zeta + d_\zeta)^n] \\ N &= T_\xi^{-1} T_\eta \\ P &= T_\eta^{-1} T_\zeta \end{aligned} \tag{3.37}$$

とおけば、式 (3.32) は

$$T_\xi L_1 N L_2 P L_3 T_\zeta^{-1} L_D \Delta Q^n = -\Delta t(RHS + d_e) \tag{3.38}$$

と書ける。ここで d_ξ, d_η, d_ζ は 2 次の、d_eは 4 次の数値拡散項 [57] であり、その形はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} d_\xi &= -\varepsilon_i J^{-1}(\nabla_\xi \Delta_\xi) J \\ d_\eta &= -\varepsilon_i J^{-1}(\nabla_\eta \Delta_\eta) J \\ d_\zeta &= -\varepsilon_i J^{-1}(\nabla_\zeta \Delta_\zeta) J \\ d_e &= \varepsilon_e J^{-1}[(\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2 + (\nabla_\zeta \Delta_\zeta)^2] J Q^n \end{aligned} \tag{3.39}$$

ただし

$$\begin{aligned} (\nabla_x \Delta_x) u_i &= u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ (\nabla_x \Delta_x)^2 u_i &= u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2} \end{aligned} \tag{3.40}$$

であり、ε_i及びε_eは $O(1)$ の定数で、$\varepsilon_i = 2\varepsilon_e$と選ばれる。あとは順次行列の反転を行えば、$\Delta Q^n$ を求めることができる。さらに、定常解を求める場合には、時間刻み Δt は一定である必要がないので、各格子点でなるべく大きなΔt を取れるように最適化する、局所時間刻みの手法 (Locally variable time step)[59] を用いて計算を加速させる。具体的には、計算空間でのクーラン数 (Courant number) CFL を

$$CFL = \Delta t \ max\{U + a|\nabla\xi|,\ \ V + a|\nabla\eta|,\ \ W + a|\nabla\zeta|\} \tag{3.41}$$

のように定義し、各格子点でこの値が一定になるように、格子点ごとの時間刻み $\Delta t_{j,k,l}$ を

$$\Delta t_{j,k,l} = \frac{CFL}{max\{U + a|\nabla\xi|,\ \ V + a|\nabla\eta|,\ \ W + a|\nabla\zeta|\}_{j,k,l}} \tag{3.42}$$

と定める。以上が効率化された Beam-Warming 法である。

3.1.3 風上化

効率化された Beam-Warming 法は、右辺の離散化に 2 次精度の中心差分 + 数値拡散という形を用いているので、数値拡散に起因する問題が残り、衝撃波を鋭く捉えることができない。そこで、数値拡散なしで鋭い衝撃波を捉えることができる TVD の概念を導入する。

元来、オイラー方程式のような非線形方程式には、Neumann のフーリエ級数に基づく安定性解析では不十分である。それに対し、TVD はもとは Harten [60] によって出された一次元の双曲型保存方程式

$$q_t + f_x = 0 \tag{3.43}$$

に対する安定性の概念で、時間ステップ n での q の変動量の総和 TV (Total Variation) を

$$TV(q^n) = \Sigma|q^n_{j+1} - q^n_j| = \Sigma|\Delta_{j+\frac{1}{2}} q^n| \tag{3.44}$$

と定義したとき

$$TV(q^{n+1}) \leq TV(q^n) \tag{3.45}$$

であることを TV 安定であるという。ここではこの概念を用いた Chakraverthy-Osher [61] の TVD スキームを用いて、右辺の風上化をはかっている。

即ち、TVD を用いて離散化した右辺を

$$RHS = (\hat{E}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{E}_{j-\frac{1}{2}}) + (\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}) + (\hat{G}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{G}_{j-\frac{1}{2}}) \tag{3.46}$$

と書き、$\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ がメトリックの関数でもあることから

$$\hat{E}, \hat{F}, \hat{G} = \hat{f}(Q, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) \equiv \hat{f}(Q, N) \tag{3.47}$$

とおけば、まず各方向の 1 次精度数値流束は

$$h_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[f(Q_m, N_{m+\frac{1}{2}}) + f(Q_{m+\frac{1}{2}}, N_{m+\frac{1}{2}}) - (df^+_{m+\frac{1}{2}} - df^-_{m+\frac{1}{2}})] \tag{3.48}$$

となる。ここで

$$df^{\pm}_{m+\frac{1}{2}} = J^{-1}_{m+\frac{1}{2}} R_{m+\frac{1}{2}} \Lambda^{\pm}_{m+\frac{1}{2}} L_{m+\frac{1}{2}} \Delta_{m+\frac{1}{2}} JQ \tag{3.49}$$

であり、対角化のための行列 R と L にはそれぞれ、式 (3.34) の T_κ と式 (3.35) の T_κ^{-1} を用いる。従って Λ_κ は式 (3.33) となる。ただし

$$\Delta_{m+\frac{1}{2}} JQ = (JQ)_{m+1} - (JQ)_m \tag{3.50}$$

であり、また U, V, W, R, L など求めるに当たっては

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho} &= c_1\rho_m + c_2\rho_{m+1} \\
\overline{u} &= c_1 u_m + c_2 u_{m+1} \\
\overline{v} &= c_1 v_m + c_2 v_{m+1} \\
\overline{w} &= c_1 w_m + c_2 w_{m+1} \\
\overline{h} &= c_1 h_m + c_2 h_{m+1} \\
\overline{a} &= \sqrt{(\gamma - 1)[\overline{h} - \frac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2)]}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

のような Roe[62] の平均化から得られた値を用いる。ただし

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\sqrt{\rho_m}}{\sqrt{\rho_m} + \sqrt{\rho_{m+1}}} \\
c_2 &= \frac{\sqrt{\rho_{m+1}}}{\sqrt{\rho_m} + \sqrt{\rho_{m+1}}}
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

である。そして $n = m + \frac{1}{2}$とすれば、各方向の高精度数値流束は以下の式で表される。

$$
\hat{f}_n^{(2)} = h_n - \frac{\phi}{2}[\widetilde{df}^{-}_{n+1}] - \frac{1-\phi}{2}[\widetilde{\widetilde{df}}^{-}_{n}] + \frac{1-\phi}{2}[\widetilde{df}^{+}_{n}] + \frac{\phi}{2}[\widetilde{\widetilde{df}}^{+}_{n+1}] \tag{3.53}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\widetilde{df}^{-}_{n+1} &= J_n^{-1} \sum_i \lambda_n^{i-} minmod(\alpha_{n+1}^i, \beta\alpha_n^i) r_n^i \\
\widetilde{\widetilde{df}}^{-}_{n} &= J_n^{-1} \sum_i \lambda_n^{i-} minmod(\alpha_n^i, \beta\alpha_{n+1}^i) r_n^i \\
\widetilde{df}^{+}_{n} &= J_n^{-1} \sum_i \lambda_n^{i+} minmod(\alpha_n^i, \beta\alpha_{n-1}^i) r_n^i \\
\widetilde{\widetilde{df}}^{+}_{n-1} &= J_n^{-1} \sum_i \lambda_n^{i+} minmod(\alpha_{n-1}^i, \beta\alpha_n^i) r_n^i
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

であり、また

$$
\alpha_n^i = l_n^i \Delta_n J Q \tag{3.55}
$$

である。ここで r^iと l^iはそれぞれ Rの列ベクトル、L の行ベクトルであり、ϕとβはそれぞれ 1/3, 4 とした。Chakravarthy ら [61] の用いた式 (3.54) の $minmod$ 関数は、TVD 性を保つため 1 次精度数値流束以外の部分の働きを抑える流束制限関数 (flux limiter) で

$$
minmod(x, y) = sign(x) \cdot max[0, min\{|x|, y\, sign(x)\}] \tag{3.56}
$$

によって定義される。

一方、左辺は計算時間の短縮化から、効率化された Beam-Warming 法の左辺の形を風上化するために、Steger と Warming[63] の流束分離による風上差分法を適用する。例えば式 (3.32) の

$$[I + \Delta t(\delta_\xi \Lambda_\xi)] \equiv L_1' \tag{3.57}$$

を考える。まずΛ_ξを

$$\Lambda_\xi = \Lambda_\xi^+ + \Lambda_\xi^- \tag{3.58}$$

のように固有値の符号によって分解し、1 次精度の風上差分をとると

$$L_1' = [I + \Delta t(\nabla_\xi \Lambda_\xi^+ + \Delta_\xi \Lambda_\xi^-)] \tag{3.59}$$

となり、これを展開すると

$$L_1' = [-\Delta t(\Lambda_{j-1}^+) + D_j + \Delta t(\Lambda_{j+1}^-)] \tag{3.60}$$

と表される。ここで

$$D_j = I + \Delta t(|\Lambda|_j) \tag{3.61}$$

である。これを Obayashi ら [64] の方法によって

$$L_1' = [-\Delta t(\Lambda_{j-1}^+) + D_j][I - D_j^{-1}\Delta t(-\Lambda_{j+1}^-)] \tag{3.62}$$

のように下三角行列と上三角行列の積に分解すれば、行列の反転は容易に行える。

3.1.4 非定常計算法

前述の定常計算法は、局所時間刻みの手法を取り去っても時間に関して一次の精度しかもち得ないため、非定常現象を解明するのに用いるのは不適当である。従って、何らかの方法によって時間精度を上げる必要があるが、ここではニュートン法 [65] を用いた。即ち定常計算のスキームを

$$LHS(Q^{n+1} - Q^n) = -\Delta t RHS \tag{3.63}$$

と書けば、非定常計算のスキームは

$$LHS^m(Q^{m+1} - Q^m) = -\Delta t(\frac{Q^m - Q^n}{\Delta t} + RHS^m) \tag{3.64}$$

と表されることになる。ここで m はニュートン法の反復回数を表す。

具体的な計算法としては、まず方位角 ψ が 90° の位置で計算を開始し、そこでの定常解を出発点として徐々にブレードを回転させ、何周かの後に解が周期的になった時点で、それを収束解とすることにより非定常の計算を行う。各方位角位置でのニュートン法の反復回数は、4 回程度で十分であり、計算ケースによって異なるが、方位角方向の分割数は約 1000 とした。また$\psi = 90°$から計算を開始した場合、もちろん計算開始時点の$\psi = 90°$における解を、一周分進んだ$\psi = 90° + 360°$における解と比較すると一致しないが、$\psi = 180°$における解を$\psi = 180° + 360°$での解と比較すると一致しており、このことから$\psi = 180°$以降では周期解が得られていることがわかる。そこで本計算においては、例えば前進側$\psi = 90°$の解としては、$\psi = 450°$における解を用いている。このように周期解が得られる様子は、Fig.3.2 で明らかである。この図は、非定常計算を行っている最中のロータ推力の収束状況を表す。横軸の角度は、推力を算出する際に行う一周積分を始める方位角位置で、例えば横軸の値が$\psi = 100°$であるということは、$\psi = 100°$から$\psi = 460°$までの積分によって C_T/σ を算出していることを意味する。C_Tは推力係数で、ソリディティσについては 4.6.1 節で述べる。図より横軸 180°のあたりで C_T/σが一定値に収まっているので、方位角 180°以降では収束解が得られていることがわかる。

3.1.5 格子生成法

数値計算における実際の計算は、格子幅が各方向とも 1 である計算空間で行われるわけだが、2 次元の場合を例にとると、この計算空間から物理空間への変換は解析的な式でなく、計算領域上の一点対物理格子上の一点という直接的な対応で表される。即ち

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= x(\xi_i, \eta_j) \\ y_{i,j} &= y(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \tag{3.65}$$

となる。この $(x_{i,j}, y_{i,j})$ を決める手続きが格子生成と呼ばれるものであり、格子形状が解に及ぼす影響はかなり大きいので、格子生成法は非常に重要である。まず、格子には以下のような性質が要求される。

- 滑らかであること
- なるべく直交していること
- 解が急激に変化する所に集中していること

そして格子生成法としては、主に次の3つが挙げられる。

(a) 等角写像による方法

(b) 偏微分方程式による方法

(c) 代数的方法

(a) は2次元の物理平面を $z = x + iy$、計算平面を$\zeta = \xi + i\eta$と表し、等角写像によって計算領域を物理領域に射影する方法である。これによって得られる格子は滑らかであり直交性を持っているが、格子をある部分に集中させることが困難で、また軸対称のもの以外は3次元に拡張しにくいという欠点がある。(b) は楕円型、放物型、双曲型の偏微分方程式を解くことによって格子点を得る方法である。例えば2次元の楕円型偏微分方程式なら

$$\nabla^2\xi(x,y) = P(x,y)$$
$$\nabla^2\eta(x,y) = Q(x,y) \tag{3.66}$$

を境界条件のもとに解くことになり、PとQを適当に選んで格子幅をコントロールする。この方法によって得られる格子は滑らかであるが、計算時間がかかる上、格子点の配置のコントロールに熟練が必要である。(c) は境界上に格子点を配置し、それを結ぶ線上に格子の集中化、直交化、平滑化の操作をしながら格子点を補間していくという方法である。これによって得られる格子は、直交性や滑らかさを多少欠くが、格子点配置のコントロールが容易で、計算も楽であるという利点がある。また、ヘリコプタブレードは比較的シンプルな形状であるため、(c) の欠点があまり災いしない。そこで今回はこの方法を用いた。

ヘリコプタロータ周りの流れを解くとき、複雑な後流の領域を直接扱うためには、ロータ全体のみならず後流の領域をも覆う格子が望ましく、Chen[40] らによる Fig.3.3 のような格子を用いた計算例も報告されている。しかし、格子間隔が大きくなると渦の減衰も激しくなるので、このような格子を使うためには膨大な数の格子点が必要となり、計算時間やメモリーを考えると実用的ではない。ちなみにこの形状の NS 計算では、最小格子幅が高々5×10^{-5}コード（本研究の NS 計算では 1×10^{-7}コード）で、筆者の経験からすればこの格子幅では境界層を正確に捉えるには不十分であるにもかかわらず、ξ,η,ζ方向にそれぞれ 217,61,71（本研究の NS 計算ではそれぞれ 105,51,27）もの格子点を必要としている。しかし、これでもヘリコプタの複雑な後流渦を捉えるには程遠いであろう。また前進飛行時には、周期境界条件 (periodic boundary condition) を使うことができないという問題が生ずる。そこで本研究では、Fig.3.1 のように 1 本のブレードのみを覆う格子を用いた。このような格子は、この分野ではよく用いられているものであり、上にも述べたように、利点はメモリーと計算時間を大幅に節約できることで、欠点は後流の影響を他の方法で求めなければならないことである。

実際の格子生成は、ブレードに垂直な 2 次元の格子を半径方向に積み重ねることによって行っているが、その 2 次元断面の格子形状は、後流部分に格子を集めることができるという利点から、C 型を用いた。翼のない所では、厚み 0 の翼まわりに C 型格子を作ってそれを積み重ねており、ブレード翼端部では、急激に翼厚が 0 になって翼端渦に悪影響を及ぼすことを避けるため、円弧状に徐々に翼厚が 0 になるよう配慮している。また半径方向に 2 次元格子を積み重ねる際、ブレード先端付近で精度よく計算ができるよう、その部分で格子が指数関数的に細かくなるようにした。座標軸のとり方は、Fig.3.1 に示すように、(x, y, z) と同様 (ξ, η, ζ) が右手系をなすように

ξ軸 ： 翼のまわりに下面、前縁、上面とまわる方向

η軸 ： 翼表面から遠ざかる方向

ζ軸 ： 翼端から翼根に向かう方向

とした。格子点数はξ方向に 105 点（翼面上は 77 点）、η方向に 41 点、ζ方向に 27 点（翼面上は 19 点）である。格子の領域は以下のように

遠方境界 ： 翼から約 7 コード

流出境界 ： 後縁から約 7 コード

外側境界 ： 翼端から約 4 コード

内側境界 ： 翼端から約 5 コード

で、最小格子幅は

翼表面のη方向 ： 0.01 コード

翼端のζ方向 ： ζの正の方向に 0.03 コード、ζの負の方向に 0.3 コード

とした。結果的に得られた格子形状は Fig.3.4 のようになる。

3.1.6 境界条件

境界は Fig.3.5 のように

(1) 遠方境界 ($\eta = \eta_{max}$)

(2) 内側境界 ($\zeta = \zeta_{max}$)

(3) 外側境界 ($\zeta = 1$)

(4) 流出境界 ($\xi = 1, \xi_{max}$)

(5) ブレード表面 ($\eta = 1$)

(6) ウェイク・カット ($\eta = 1$)

(7) ブレードの延長部分の境界 ($\eta = 1$)

の 7 種類である。境界では条件を課して、密度、3 軸方向の速度、エネルギーの 5 つの値を決めるわけだが、以下にそれぞれの境界の取り扱いについて述べる。

(1) 遠方境界

境界に垂直な 1 次元流れに、リーマン不変量 (Riemann invariant)[66] の概念を導入する。Fig.3.6 の外側境界で$\partial(\ )/\partial\overline{y} \to 0$ を仮定すると、以下の特性方程式が得られる。即ち C^0($d\overline{x}/dt = \overline{u}$の線) に沿って

$$\frac{dS}{dt} = 0, \qquad \frac{d\overline{v}}{dt} = 0 \tag{3.67}$$

$C^{\pm}$($d\overline{x}/dt = \overline{u} \pm a$ の線) に沿って

$$\frac{d\overline{u}}{dt} \pm \frac{1}{\rho a}\frac{dp}{dt} = 0 \tag{3.68}$$

ここで Sはエントロピ、a は局所音速、$\overline{u}, \overline{v}$は$\overline{x}, \overline{y}$座標での速度である。エントロピは $S = \ln(p/\rho)$ で定義される。局所的に等エントロピを仮定すると、式 (3.68) は

$$\frac{dR^{\pm}}{dt} = 0 \tag{3.69}$$

となる。ただし $R^{\pm}$はリーマン不変量で、以下の式によって定義される。

$$R^{\pm} = \overline{u} \pm \frac{2a}{\gamma - 1} \tag{3.70}$$

また $C^{\pm}$は特性曲線と呼ばれている。実際の境界条件に適用する際には次のようになる。即ち Fig.3.7 のように、亜音速 ($\overline{u} < a$) の流出境界 ($\overline{u} > 0$) では$\overline{u} > 0$, $\overline{u} + a >$

0, $\overline{u}-a<0$であることより、時間t_nからt_{n+1}に向かう3本の直線$C^0, C^{\pm}$の内、C^0とC^+が正でC^-が負になる。従って、C^0に沿うSと$\overline{v}$及びC^+に沿うR^+は計算領域の内側の値を用い、C^-に沿うR^-は外側の値を用いることになる。同様の考え方から亜音速 $(\overline{u}<a)$ の流入境界 $(\overline{u}<0)$ ではR^+に計算領域の内側の値を用い、$R^-, \overline{v}, \overline{s}$に外側の値を用いることになる。また超音速 $(\overline{u}>a)$ の場合、流出境界 $(\overline{u}>0)$ ではすべての値に内側の値を、流入境界 $(\overline{u}<0)$ ではすべての値に外側の値を用いることになる。内側の値を用いる時は内点から0次外挿で求め、外側の値を用いる時は一様流の値にする。こうして求まった$R^{\pm}$から

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \frac{1}{2}(R^+ + R^-) \\ a &= \frac{\gamma-1}{4}(R^+ - R^-) \end{aligned} \tag{3.71}$$

として$\overline{u}$とaが得られる。ただし回転座標系に乗っているので、一様流の流入する方向は時々刻々変化していくことになる。

(2) 内側境界

この境界は、3次元性の強い翼端からかなり離れているので、ここではほぼ2次元性が成り立っているとみて、内点からの0次外挿で諸量を求める。例えば密度を例にとれば

$$\rho_{j,k,l_{max}} = \rho_{j,k,l_{max}-1} \tag{3.72}$$

となる。この際1次外挿

$$\rho_{j,k,l_{max}} = 2\rho_{j,k,l_{max}-1} - \rho_{j,k,l_{max}-2} \tag{3.73}$$

や2次外挿

$$\rho_{j,k,l_{max}} = 3\rho_{j,k,l_{max}-1} - 3\rho_{j,k,l_{max}-2} + \rho_{j,k,l_{max}-3} \tag{3.74}$$

など高次の外挿はかえって解を発散に導く傾向がある。ただしj,k,lはそれぞれξ,η,ζ方向の格子点番号を表す。

(3) 外側境界

(1)と同様に扱う。

(4) 流出境界

圧力のみ一様流の値に固定し、他は内点からの外挿で求める。

(5) ブレード表面

流れが翼面に沿うという条件を課す。即ち、翼は$\eta = 0$の面なので、η軸に沿う方向の速度である反変速度Vを0にすることによって3軸方向の速度を求める。具体的には正規化した反変速度$\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}$を表す式

$$
\begin{aligned}
\widehat{U} &= (\xi_t + \xi_x \overline{u} + \xi_y \overline{v} + \xi_z \overline{w}) / \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \\
\widehat{V} &= (\eta_t + \eta_x \overline{u} + \eta_y \overline{v} + \eta_z \overline{w}) / \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2} \\
\widehat{W} &= (\zeta_t + \zeta_x \overline{u} + \zeta_y \overline{v} + \zeta_z \overline{w}) / \sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \\ \overline{w} \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix}
\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y & \zeta_y \xi_z - \zeta_z \xi_y & \xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y \\
\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z & \zeta_z \xi_x - \zeta_x \xi_z & \xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y \\
\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x & \zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x & \xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y
\end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix}
\widehat{U} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} - \xi_t \\
-\eta_t \\
\widehat{W} \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} - \zeta_t
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

として速度を求めている。この際U, Wには1次外挿を用いる。密度は内点より1次外挿で求め、圧力は翼に垂直な方向の運動量保存式から得られる圧力方程式を以下のように解く。

一般座標系で記述されたオイラー方程式の中で、ξ 方向の運動量保存式を取り出すと以下のようになる。

$$
u_\tau + (\rho u U + \xi_x p)_\xi + (\rho u V + \eta_x p)_\eta + (\rho u W + \zeta_x p)_\zeta + (-\rho \Omega v) = 0 \tag{3.77}
$$

これを変形すると

$$
u_\tau + \rho U u_\xi + \rho V u_\eta + \rho W u_\zeta + \xi_x p_\xi + \eta_x p_\eta + \zeta_x p_\zeta - \rho \Omega v = 0 \tag{3.78}
$$

を得る。η 方向、ζ 方向もそれぞれ同様に考えると、以下のようになる。

$$
v_\tau + \rho U v_\xi + \rho V v_\eta + \rho W v_\zeta + \xi_y p_\xi + \eta_y p_\eta + \zeta_y p_\zeta + \rho \Omega u = 0 \tag{3.79}
$$

$$
w_\tau + \rho U w_\xi + \rho V w_\eta + \rho W w_\zeta + \xi_z p_\xi + \eta_z p_\eta + \zeta_z p_\zeta = 0 \tag{3.80}
$$

ここで、まず定常を仮定して$(3.78) \times \eta_x + (3.78) \times \eta_y + (3.78) \times \eta_z$を計算する。次に、翼面上での式を考えるため、未知数 p を p_1 と書き換え、$V = 0$ とすれば、以

下の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y+\xi_z\eta_z)p_{1\xi}+(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)p_{1\eta}\\
&+(\eta_x\zeta_x+\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z)p_{1\zeta}\\
&=-\rho U(\eta_x u_\xi+\eta_y v_\xi+\eta_z w_\xi)-\rho W(\eta_x u_\zeta+\eta_y v_\zeta+\eta_z w_\zeta)\\
&-\rho\Omega(-\eta_x v+\eta_y u) \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

いま簡単のため

$$
\begin{aligned}
a &= \xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y+\xi_z\eta_z\\
b &= \eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2 \qquad (3.82)\\
c &= \eta_x\zeta_x+\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z \qquad (3.83)
\end{aligned}
$$

とし

$$
\begin{aligned}
&-\rho U(\eta_x u_\xi+\eta_y v_\xi+\eta_z w_\xi)-\rho W(\eta_x u_\zeta+\eta_y v_\zeta+\eta_z w_\zeta)\\
&-\rho\Omega(-\eta_x v+\eta_y u)\equiv RHS \qquad (3.84)
\end{aligned}
$$

と置けば、式 (3.81) は

$$ap_{1\xi}+bp_{1\eta}+cp_{1\zeta}=RHS \qquad (3.85)$$

となる。ここで、$k=2,3$ での p の値をそれぞれ p_2,p_3 と書けば

$$p_{1\eta}=\frac{-3p_1+4p_2-p_3}{2\Delta\eta} \qquad (3.86)$$

と近似できる。式 (3.86) を式 (3.85) に代入し、両辺に$-2\Delta\eta/3b$ をかけると

$$(1-\frac{2a\Delta\eta}{3b}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{2c\Delta\eta}{3b}\frac{\partial}{\partial\zeta})p_1=-\frac{2\Delta\eta}{3}RHS+\frac{1}{3}(4p_2-p_3) \qquad (3.87)$$

となる。いま $\Delta\eta(a/b)\ll 1,\ \Delta\eta(c/b)\ll 1$ なので、この式を近似因子化すると

$$(1-\frac{2a}{3b}\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\xi})(1-\frac{2c}{3b}\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\zeta})p_1=\frac{1}{3}(-\frac{2\Delta\eta}{b}RHS+4p_2-p_3) \qquad (3.88)$$

を得る。ここで

$$(1-\frac{2c}{3b}\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\zeta})p_1\equiv p_1^\star \qquad (3.89)$$

と置けば、式 (3.88) は

$$
\begin{aligned}
(3-\frac{2a}{b}\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\xi})p_1^\star &= -\frac{2}{b}\Delta\eta RHS+4p_2-p_3\\
&\equiv RHS^\star \qquad (3.90)
\end{aligned}
$$

となる。ξ 方向の微分に中心差分を用い、簡単のため p_1^* を p と書けば

$$(3p_j - \frac{2a}{b}\Delta\eta\frac{p_{j+1}-p_{j-1}}{2\Delta\xi}) = RHS^* \tag{3.91}$$

即ち

$$(\frac{a\Delta\eta}{b\Delta\xi}p_{j-1} + 3p_j + \frac{-a\Delta\eta}{b\Delta\xi}p_{j+1}) = RHS^* \tag{3.92}$$

が得られ、これを3重対角行列の反転を行うアルゴリズムで解くことになる。同様な方法をもう一度繰り返すと、最終的に p_1 が得られる。

揚力がない場合は以上で十分だが、揚力がある場合には、例えば Fig.3.1 のように、翼端渦と内側の渦シートが縮流しながら、それぞれ異なった速さでロータ面から遠ざかっていくという、ヘリコプタ特有の複雑な後流が存在する。ここで用いている格子は、後流すべてを包み込んでいるわけではないので、格子外の後流の影響を外部条件として入れなければならない。本研究では、ブレード上の半径方向の誘導速度分布を数値計算以外の方法で求め、それをブレード上の境界条件として導入することによって、この影響を入れている。この導入法は 4.4 節に詳しく述べる。

(6) ウェイク・カット

諸量は上下点の平均で定める。例えば密度を例にとれば、ウェイク・カット部分の値 $\rho_{j,1,l}$ と $\rho_{jmax-j+1,1,l}$ はともに、$(\rho_{j,2,l} + \rho_{jmax-j+1,2,l})/2$ で求める。

(7) ブレードの延長部の境界

(6) と同様上下点の平均で求める。

3.1.7 後流の影響の計算法

境界条件のところでも述べたように、今回用いた差分法の手法では、限られた領域で計算を行うために、後流の影響をブレード上の誘導速度という形で、外部条件として導入している。前進飛行時には、まずその飛行状態でのコントロールインプットを求める必要があるので、最初にトリム計算を行ってコントロールインプットを算出し、これを用いて誘導速度の計算を行う。

トリム計算の解説

トリム計算は、与えられる情報量によって、どの程度詳細な計算を行うべきか決まってくるが、ここでは、後で述べる実験値との比較の際与えられる値が、推力係

数 C_T、前進速度 V_0、回転角速度Ω なので、以下のような簡単なトリム計算 [67] を行っている。

まずロータ迎角 α を

$$\alpha = -\frac{(1/2)\rho V_0^2 f}{C_T[\rho\pi R^2(\Omega R)^2]} \tag{3.93}$$

と仮定して計算を開始する。ここで fは等価抵抗面積である。次に重量 W_t と前進比μを

$$\begin{aligned} W_t &= C_T[\rho\pi R^2(\Omega R)^2] \\ \mu &= \frac{V_0\cos\alpha}{\Omega R} \end{aligned} \tag{3.94}$$

から求め

$$\lambda = \mu\tan\alpha - \frac{(1/2)C_T}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}} \tag{3.95}$$

の式を用いて収束するまで反復計算を行うことによって、インフローレシオ λ を求める。この値を用いて、コレクティブピッチ角 θ、コニング角 a_0、縦のフラップ角 a_1、横のフラップ角 b_1 を

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(2C_T/a\sigma)-(1/2)\lambda}{(1/3)+(1/2)\mu^2} \\ a_0 &= \frac{1}{2}\gamma[\frac{\theta}{4}(1+\mu^2)+\frac{\lambda}{3}] \\ a_1 &= \frac{1}{1-(1/2)\mu^2}[\mu(\frac{8}{3}\theta+2\lambda)] \\ b_1 &= \frac{1}{1+(1/2)\mu^2}\cdot\frac{4}{3}\mu a_0 \end{aligned} \tag{3.96}$$

から算出する。ここでγはロック・ナンバ (Lock number) と呼ばれる量であり

$$\gamma = \frac{\rho C_{l_\alpha} C R^4}{I} \tag{3.97}$$

と定義される。ただし C_{l_α}は 2 次元揚力傾斜、Iはブレードのヒンジ回りの慣性能率である。ロック・ナンバは、ブレード形状を考えて 10 と仮定した。そして抗力係数 C_H を

$$C_H = \frac{a\sigma}{2}(\frac{\delta\mu}{2a}+\frac{1}{3}\theta a_1-\frac{1}{2}\mu\lambda\theta+\frac{3}{4}\lambda a_1+\frac{1}{4}\mu a_1^2-\frac{1}{6}a_0 b_1+\frac{1}{4}\mu a_0^2) \tag{3.98}$$

で求め

$$a_1' = \tan^{-1}(\frac{C_H}{C_T}) \tag{3.99}$$

からロータ合力の方向を定めて、最終的なロータ迎角を以下の式から求める。

$$\alpha = -\frac{(1/2)\rho V_0^2 f}{W_t} - a_1' \tag{3.100}$$

以上の操作を α が収束するまで行い、トリム状態での諸量を得る。

誘導速度計算の解説

Drees の Downwash model[68] によれば、前進飛行時に方位角ψ、無次元半径位置r/Rでの翼素の有効迎角αは

$$\alpha(\frac{r}{R},\psi) = \theta_c + \theta_w(\frac{r}{R} - 0.75) + c_1 + c_2 + c_3 \tag{3.101}$$

となる。ここでθ_cは $r/R = 0.75$ でのコレクティブピッチ角、θ_wはねじり下げ角であり、c_1, c_2, c_3はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} c_1 &= \tan^{-1}\frac{V_0 \sin\alpha_q \cos\beta}{\Omega r + V_0 \cos\alpha_q \sin\psi} \\ c_2 &= \tan^{-1}\frac{-r\Omega(d\beta/d\psi) - V_0\cos\alpha_q\cos\psi\sin\beta}{\Omega r + V_0\cos\alpha_q\sin\psi} \\ c_3 &= \tan^{-1}\frac{-V_i\cos\beta}{\Omega r + V_0\cos\alpha_q\sin\psi} \end{aligned} \tag{3.102}$$

ただし、Vは一様流速度、α_qはシャフトの傾き角で、フラッピング角βは先に求めたa_0, a_1, b_1を用いて

$$\beta = a_0 - a_1\cos\psi - b_1\sin\psi \tag{3.103}$$

と表される。また V_iは

$$V_i = V_{im} + V_{ic}\frac{r}{R}\cos\psi - V_{is}\frac{r}{R}\sin\psi \tag{3.104}$$

と書かれ、式 (3.104) 中の V_{im}, V_{ic}, V_{is}はそれぞれ

$$\begin{aligned} V_{im} &= \frac{1}{1-(3/2)\mu_x^2}\frac{V_{i0}^2}{V_x} \\ V_{ic} &= \frac{4}{3}V_{im}(1-1.8\mu_x^2) \\ V_{is} &= 2\mu_x V_{im} \end{aligned} \tag{3.105}$$

の形を持ち、さらに式 (3.105) 中の V_{i0}, V_x, μ_xはそれぞれ

$$\begin{aligned} V_{i0}^2 &= \frac{C_T(\Omega R)^2}{2} \\ V_x &= V_0\cos\alpha_q \\ \mu_x &= \frac{V_x}{\Omega R} \end{aligned} \tag{3.106}$$

と表される。このモデルは、誘導速度をロータ半径の 1/2 と 3/4 の位置で求めて、他の位置での値はこの 2 点からの内挿及び外挿で求めており、翼端渦などの影響を

含まない非常に簡単なものである。しかし前進飛行時には、ホバリング時に比較して誘導速度がブレード荷重に及ぼす影響は格段に小さいため、この程度の簡単なモデルでもそこそこの結果を得ることができる。

3.2 解析法の検証（実験値との比較）

遷音速ロータの翼端形状に関する実験 [69][70][71][72][73] は、1970 年代から既に行われていたが、これらは数値計算の結果を検証するために行われた実験ではないので、ブレードコード方向の圧力分布などといった流れ場の詳細な情報については、計測が行われておらず、数値計算の検証に供し得る実験は、最近になって行われるようになった。しかしヘリコプタの場合、ブレードのアスペクト比が大きくコードが小さいため、実機のロータあるいはそれの縮小モデルで実験を行った場合、コード方向に圧力孔を十分あけることが困難な上、弾性変形もかなり大きくなってしまう。そこで通常、数値計算の結果を検証するために行われる実験は、実機に比べてかなりアスペクト比が小さく（6 ～ 7 程度）、弾性変形も起こしにくい材料で作ったモデルロータで行われている。ただし、回転するものの表面の圧力分布を計測するのは基本的に困難なので、使える実験データは数少なく、我が国ではヘリコプタブレードの翼面上圧力分布の計測は行われていない。ここでは解析法の有効性を検証するために、数少ない実験結果を集めて、できるだけ幅広く実験値との比較を行った。特に無揚力のケースは、後流の影響を入れずに済むので、差分法コード単体の検証となるため、3 つの異なる研究機関で行われた実験と比較した。比較対象に選んだ実験は以下の 4 つである。

(1) NASA で行われたアスペクト比 7 、翼型 NACA0012 、ねじり無しのモデルロータに対する実験 [74] で、実験条件は Table 3.1 のケース (1)-(a) と (1)-(b) に示す。

(2) AFDD(Army Aeroflightdynamics Directorate) で行われたアスペクト比 7.125 、翼型 NACA0012 、ねじり無しのモデルロータに対する実験 [25] で、実験条件は Table 3.1 のケース (2) に示す。

(3) ONERA(Office National d'Etudes et de Recherches Aèrospatiales) で行われたねじり無しのモデルロータに対する実験 [75] で、その幾何形状は Fig.3.8 に示した 2 通りである。翼型は NACA00XX シリーズで、翼厚は Fig.3.8 に示した。

ただし、その半径方向変化は線形的である。形状 (A) に対する実験条件は Table 3.1 のケース (3)-(A)-(a) ～ (d) に、形状 (B) に対する実験条件は Table 3.1 のケース (3)-(B)-(a) ～ (c) に示す。

(4) ONERA で行われたモデルロータに対する実験 [11] で、その幾何形状を Fig.3.9 に示した。ブレード枚数は 3 枚で、翼型は Aerospatial profile SA13106 ～ 13112 である。Fig.3.9(b) に SA13109 の断面形を、Table 3.2 にその翼型データ [76] を示した。ロータの自由度はフラッピングとリードラグの 2 つで、コレクティブピッチの制御はできるが、サイクリックピッチの制御はできない。またモデルは、金属性の梁とカーボンファイバーのスキンを用いて、できるだけリジッドに作ってある。実験条件は Table 3.1 のケース (4) に示す。

Fig.3.10(a)(b) は、それぞれケース (1)-(a) と (1)-(b) のブレード翼面上圧力分布の実験値と計算結果を比較した図である。ここで C_p は

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty (V_0 \sin\psi + \Omega r)^2} \tag{3.107}$$

によって求めた。図より、計算結果は両ケースともどの方位角位置においても実験値との一致が良好である。衝撃波の生じる方位角では、衝撃波の位置と強さに多少ずれが見られるものの、流入速度の最大になる $\psi = 90°$ を過ぎても衝撃波が減衰せず、$\psi = 120°$ においてもかなり強い衝撃波が生じているなどの非定常効果が捉えられており、本方法が前進側のダイナミックショックを解析するのに有効なものであることが示された。

Fig.3.11 はケース (2) の結果である。このケースでは、半径方向の圧力計測位置が 2 ケ所あり、どちらの半径位置でもケース (1) と同様のことが言えるので、本方法が半径方向の位置にかかわらず実験値をよく予測することが示された。

Fig.3.12 はケース (3)-(A)-(a) の、Fig.3.13 はケース (3)-(A)-(b) ～ (d) の結果である。衝撃波の生じないケース (3)-(A)-(a) では、$\psi = 60°,\ 90°,\ 120°$ のどの方位角位置でも実験値との一致は非常によい。また衝撃波の生じるケース (3)-(A)-(b) ～ (d) では、計測点の制約のため $\psi = 90°$ のみの比較であるが、こちらも実験値との一致は非常によい。従って、コード及び翼厚が半径方向に変化するブレード形状に対しても、本方法でブレード翼面上の圧力分布を十分予測できることが示された。

Fig.3.14 はケース (3)-(B)-(a) の、Fig.3.15 はケース (3)-(B)-(b)(c) の結果である。形状 (B) の実験では振動が生じたため、実験値が不安定であるのも原因して、形状 (A) のようによい一致は見られないが、まずまず傾向は捉えていると言える。

Fig.3.16 はケース (4) の結果である。ここで実験に用いられたモデルロータは、アスペクト比が小さいにもかかわらず大きなねじり下げを持っているため、これにブレード上の誘導速度を与える境界条件を適用すると、かなり不安定な計算を強いられることになり、発散を招きがちである。そこでこれを避けるため、ここでは 4.4 章で述べる TYPE2 の境界条件を用いた。ただし、前進飛行時には各方位角位置で誘導速度が異なるため、時間ステップを進める毎に計算格子が動くことになる。この際、格子全体を動かすと遠方境界の位置がずれて好ましくないので、遠方境界は固定し、ブレード表面上の格子を有効迎角に見合うようにずらす方法を取った。また、境界以外の点に関しては、始めから計算し直すと計算時間がかかってしまうので、Moving Grid の手法 [77] を用いた。この手法に関しては Appendix A を参照されたい。こうして得られた結果は、誘導速度の算出に非常に簡単な方法を用いているにもかかわらず、実験値をよく予測しており、本方法は前進飛行時で揚力がある場合にも適用できることが示された。

3.3 BERP 状翼端形状の実験との比較

実験との比較を行う前に、まず BERP 翼端について多少解説を加える。1986 年 8 月 11 日、Westland の Army Lynx(G-LYNX) は、400.87 km/h の速度で旧ソ連の A-10(Mil Mi-24) が持っていた世界記録を塗り変えた。このときの前進側翼端マッハ数は 0.977 、前進比は 0.5 であった。この速度を達成するために、胴体に数多くの細かい改良がなされたが、基本的な胴体形状は Fig.1.1(b) のように伝統的はもので、高速化のキーポイントとなったのはやはりメインロータの改良であった。Westland と UK Ministry of Defence の共同研究である British Experimental Rotor Program (BERP) で開発されたこのロータは、Fig.3.17(a) のように、65 %から 85 %の間に 12 %厚でキャンバーを持つ RAE9645 を、85 %から外側にはキャンバーを持つ薄翼の RAE9634 を用いている。RAE9645 はピッチングモーメントを小さく抑えたまま高揚力状態でよい L/D 特性を示し、かつ高マッハ数でもなかなかよい L/D 特性を示す翼型である。また RAE9634 は騒音に難があるものの、高マッハ数で非常によい L/D 特性を示す翼型である。このような先進的翼型の使用が速度記録樹立の重要な要素であるのはもちろんだが、BERP 翼端の最も注目すべき斬新さはその翼端平面形にある。この平面形の空気力学的特徴は、Fig.3.17(b) に示されるようなものであり、大きな後退角によって前進側での衝撃波を遅らせ、また翼端面積の増加に

よって後退側での迎角を下げてストールを抑えた上、推力も上げている。さらに前縁のノッチは、内側から外側に進行する剥離を抑える働きをし、ブレード先端の極度に大きな後退角は、Fig.3.17(c) のように高迎角でストールを遅らせる安定な渦を作っている。このように BERP 形状のコンセプトは、主に後退側に焦点を当てて考案されたものであるが、世界記録を出したときの前進側翼端マッハ数が 0.977 に達し、この状態に耐えて飛行できたことを考えれば、当然前進側での衝撃波発生をかなり抑えていることが予想される。

BERP 形状に対して、前進飛行時にそのブレード翼面上圧力分布が測定された例はないので、ここでは川崎重工 (KHI) から提供された、BERP 状の平面形をもつ供試体に対する、非回転時の実験データとの比較を行った。Fig.3.18(a) は供試体の平面形と座標系及び圧力孔の位置を示し、Table 3.3 は平面形と翼厚分布のデータを示す。また翼型は遷音速での性能に着目して開発されたもので、その形状を Fig.3.18(b) に示した。BERP の平面形は翼端でコード長が 0 になっているが、数値計算を行う際の格子は、計算を安定に進めるため、便宜上翼端でコード長を 0 にせず、僅かにコード長を持たせている。実験は Fig.3.18(a) の供試体を風洞壁に取り付けて行われた。比較対象とした実験条件を以下に示す。

(a) $\theta_c = -0.55,\quad M_\infty = 0.6$ [ケース (a)]

(b) $\theta_c = 4.37,\quad M_\infty = 0.898$ [ケース (b)]

Fig.3.19(a)(b) は、それぞれケース (a)(b) の翼面上圧力分布の実験値と計算結果を比較した図である。図中の S はスパンの長さで、x 軸 y 軸は Fig.3.18(a) のようにとった。亜音速のケース (a) では、コード方向及び前縁スパン方向の圧力分布は実験値とよい一致を見せているが、後縁スパン方向の一致はよくない。後縁の場合、計算ではまさに後縁そのものの位置で結果を得られるが、実験では圧力孔の関係上尖った後縁そのもので結果を得ることはできない。これが不一致の原因であろう。

また遷音速のケース (b) では、上と同様の理由で後縁スパン方向の一致がよくない。さらに計算では衝撃波の位置を実験より多少下流に予測している。しかし、これは供試体の前縁ノッチが風洞壁に非常に近い所に配置されている上、反射板を使っていないので、実験結果がかなり壁の影響を受けていることも一因であると考えられる。以上より複雑な形状の翼端に対しても、本方法はその翼面上圧力分布を予測できることがわかった。

3.4 他の解析法との比較

Fig.3.20 は、本方法も含めて各種解析法で得られた前進飛行時のブレード翼面上圧力分布を、ケース (1)-(a) の実験値と比較したものである。図中の FDR 、TFAR2 、FPR 、RFS2 、GTE3 は欧米で用いられている代表的な計算コードの名称で、それぞれ以下の方程式を解くものである。

- FDR ・・・非定常非保存型微小擾乱ポテンシャル
- TFAR2 ・・・非定常非保存型完全ポテンシャル
- FPR ・・・非定常保存型完全ポテンシャル
- RFS2 ・・・非定常保存型完全ポテンシャル
- GTE3 ・・・非定常オイラー

図より、$\psi = 30°$ ではどれも大差ないが、強いて言えば FDR 、TFAR2 、FPR が実験値をあまりよく予測していない。また $\psi = 150°$ では FDR 、TFAR2 、RFS2 が実験値をあまりよく予測していない。ただこの方位角で FPR がよい結果を与えているのは偶然であると著者が述べている。従って、$\psi = 30°, 150°$ ともによい結果を与えているのは GTE3 と本方法のみである。$\psi = 90°$ では、ポテンシャル方程式がエントロピ変化を許さず強い衝撃波を捉えられないので、FDR 、TFAR2 、FPR 、RFS2 から得られる衝撃波は鈍っている。また GTE3 はオイラーであるにもかかわらず、ほとんどポテンシャルと同様の結果しか与えていないのに対して、本方法は TVD の使用によって、人工的な粘性項を付加することなしに衝撃波を鋭く捉えているので、実験値との一致もよい。

従って本方法は、他の代表的な解法に比べて、前進側の衝撃波を解析するのに適していると言える。

3.5 時間精度の問題

ここで用いている効率化された Beam-Warming 法を基礎とする方法は、元来非定常のオイラー方程式を解くものなので、ニュートン法を用いて時間精度を上げなくても、局所時間刻みを取り去って時間刻みを小さくすれば、結果的に時間精度が上がって非定常の計算ができる。そこで、ニュートン法を用いた場合とそうでない場

合の両者について、その時間刻み幅が解に及ぼす影響を調べ、ニュートン法を用いることの利点を述べる。

Fig.3.21 は、時間刻み DT がケース (1)-(a) のブレード翼面上圧力分布に及ぼす影響を調べたものである。図より、ニュートン法を用いた場合は、DT を 0.01 にすれば十分収束した解が得られることがわかり、またニュートン法を用いない場合は、DT を 0.001 にすれば十分収束した解が得られることがわかる。ここで、ニュートン法は各タイムステップ当たり 4 回の反復計算を行っているため、それを用いない場合に比べて 1 タイムステップ当たり約 2.9 倍の時間がかかるので、それを考慮すると、同じ解を得るためにニュートン法を用いれば、約 3.4 倍速く結果を得られることになる。オイラー方程式を用いてヘリコプタの非定常計算を行う場合には、計算時間がかかるため、この時間節約は非常に意義のあることと言える。

3.6 アスペクト比の影響

3.2 節でも理由を述べたように、比較に用いた実験値はすべて、アスペクト比が実機に比べてかなり小さいモデルロータで得られたものであった。しかし、実際のヘリコプタブレードのアスペクト比は 20 程度であるため、ここでは実機に適用するときの目安を得る目的で、アスペクト比が前進飛行時のブレード上圧力分布に及ぼす影響を調べた。結果を Fig.3.22(a) に示す。計算条件はケース (1)-(a) であり、アスペクト比はロータ半径を固定し、ブレードコードを増減することによって変えた。図より、翼端から遠いところではアスペクト比の違いが圧力分布に及ぼす影響は小さいが、翼端に近いところではアスペクト比の違いが圧力分布に大きな変化を及ぼし、とくに衝撃波は、アスペクト比が大きくなることによって相対的に下流側にずれ、強まることがわかる。また見方を変えれば、これは翼端部でコード長を増加させると、衝撃波を弱められることを意味する。

この現象は翼端の 3 次元効果によるもので、例えばアスペクト比が 7 のブレードで 0.95Rの位置は翼端から約 0.35 コード離れているが、アスペクト比 30 のブレードで 0.95R位置は翼端から約 1.5 コードとなり、アスペクト比 7 のブレードにおける方がはるかに翼端、即ち翼厚が 0 になる部分に近いため、その影響で衝撃波も弱まっている。

この現象をさらによく把握するために、アスペクト比 10 と 20 の矩形ブレードを、回転させずにマッハ数 0.9 の一様流中に置いた条件で計算を行ったところ、Fig.3.22(b)(1)

のようなブレード翼面上等マッハ線図が得られた。この2つのブレードのコード方向圧力分布を、翼端から回転中心向きに4コード、2コード、0.5コードの各半径位置で比較すると、Fig.3.22(b)(2)のように、その圧力分布は一致し、矩形ブレードにおける3次元効果の意味が明確になった。

3.7 前進飛行時のダイナミックショックに及ぼす翼端形状の影響

前進飛行時に前進側で非定常的に生じる衝撃波の性質を知ることは、抵抗発散を避け、ヘリコプタの高速前進飛行を可能にする上で重要である。そこで、様々な形状変更が、ダイナミックショックにいかなる影響を及ぼすか定量的に調べた。従来から圧縮性の影響を調べる指標として、各半径位置での局所マッハ数の最大値がよく用いられているが、この値は衝撃波の強さとの相関が必ずしもよくないので、ここでは衝撃波の様子を直接的に知るため、その強さを表す指標として、Fig.3.23で定義した$\Delta(-C_p)$を用いた。ただしC_pは

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty (V_0 + \Omega R)^2} \tag{3.108}$$

によって求めた。計算に用いたブレードは、ねじりのないアスペクト比7のブレードで、翼端の形状を変更しても、常に断面の翼型は全半径位置でNACA0012を保つようにした。またヘリコプタの前進飛行時、前進側では有効迎角が非常に小さいため、ここでの計算はすべて迎角0°で行った。ただし、翼型が対象形であるため、迎角0°とは揚力がないことを意味する。

3.7.1 矩形翼端の場合

矩形のブレードに対して、3.2節で実験値との比較を行った際に用いたケース(1)-(a)の条件($M_\infty = 0.21,\ M_T = 0.7,\ \mu = 0.3$)で$\Delta(-C_p)$を調べたところ、Fig.3.24(1)の結果を得た。図は衝撃波の生ずる$\psi = 50° \sim 150°$までの$\Delta(-C_p)$の変化を10°おきに表示したもので、煩雑さを避けるために、Fig.3.24(1)(a)では$\psi = 50° \sim 100°$までを、Fig.3.24(1)(b)では$\psi = 100° \sim 150°$までを図示してある。図においてグラフの線が切れている部分は、そこではFig.3.23で定義できるような急激な圧力回復が生じていないことを示している。図の解釈を以下の3つの値に着目して行ってみる。

- $\Delta(-C_p)_{peak}$ ：ある方位角位置での$\Delta(-C_p)$のピーク値
- r_{peak} ：ある方位角位置での$\Delta(-C_p)$のピーク値を与える半径位置

- r_{range} ：ある方位角位置での$\Delta(-C_p)$ の半径方向への広がり

これらの値の概念図は Fig.3.24(2) に示した。まず$\Delta(-C_p)_{peak}$ について述べると、$\psi = 100°$付近まで増加し、それ以降減少していく。次に r_{peak}は、$\psi = 50°$で 0.97R 付近にあったものが、方位角の増加とともに翼根側に移動し、$\psi = 110°$付近で最も翼根側に達し、その後再び翼端側に移動する。最後に r_{range}であるが、$\psi = 120°$付近まで増加し、それ以降急激に減少していく。従ってどの値も極値（$\Delta(-C_p)_{peak}$と r_{range}の最大値、及び r_{peak}の最小値）は流入速度が最も大きくなる$\psi = 90°$を過ぎてから生じ、その極値を与える方位角位置に位相差がある。

次に非定常性の度合いが$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べるために、以下の 3 ケースについて比較を行い、Fig.3.24(3) の結果を得た。

(a) $M_\infty = 0.31,\ \ M_T = 0.6,\ \ \mu \approx 0.52$

(b) $M_\infty = 0.21,\ \ M_T = 0.7,\ \ \mu = 0.3$

(c) $M_\infty = 0.11,\ \ M_T = 0.8,\ \ \mu \approx 0.14$

また Fig.3.25 は、上記の条件でのブレード翼面上等マッハ線図である。(b) のケースは 3.2 節のケース (1)-(a) で、(a)(c) はともに前進側$\psi = 90°$での翼端マッハ数 $(M_\infty + M_T)$ が (b) と同様 0.91 になるよう、機体の前進速度とブレード回転数を変化させて計算したケースである。ケース (a) は Lynx が世界最高速の記録を樹立した作動状態、即ち $M_\infty = 0.326, M_T = 0.651, \mu = 0.5$ に近い状態である。Fig.3.24(3) においては、煩雑さを避けるために、方位角位置$\psi = 60°,\ 90°,\ 120°$のみで比較を行った。3 ケースの比較を行うと、(c)(b)(a) の順に方位角位置間の差が顕著になっている。これは

$$M_n(r/R, \psi) = M_\infty \sin\psi + M_T(r/R) \tag{3.109}$$

で定義される、任意の位置での 2 次元翼素に平行な速度成分のマッハ数 M_nが、Fig.3.26 (a)(b) のようにケース (c)(b)(a) の順に非定常性を増している、即ち方位角位置による M_nの値の変化が増しているからである。また Fig.3.26(d) のように、$\psi = 60°$では翼端付近で (a)(b)(c) の順に M_nの値が大きくなっているので、この順に多少$\Delta(-C_p)_{peak}$も大きくなっている。しかし Fig.3.26(c) のように、$\psi = 90°$では全半径位置で (c)(b)(a) の順に M_nの値が大きくなっているので、この順に$\Delta(-C_p)_{peak}$も大きくなっており、また r_{range}も大きくなっている。そして$\psi = 120°$では、M_nの様子が$\psi = 60°$と同じであるにもかかわらず、$\psi = 90°$で生じた強い衝撃波が残っている

ために、$\Delta(-C_p)_{peak}$は (c)(b)(a) の順に大きくなっており、また r_{range}も大きくなっている。

以上より、前進側での衝撃波発生とその発達及び消滅は非常に非定常的な現象であり、この計算例では、M_nが増加する側 ($\psi = 0° \sim 90°$) で、ほぼ M_nの強さから$\Delta(-C_p)$の様子が準定常的に説明できるのに対して、M_nが減少する側 ($\psi = 90° \sim 180°$) では、ヒステリシスの強い現象が生じ、準定常的には説明できないことがわかった。また、同じ前進側翼端マッハ数の条件でも、非定常性の度合いによって衝撃波の様子がかなり異なることもわかった。

3.7.2 先進的平面形の影響

ここでは、先進的翼端平面形として Fig.3.18(a) に示した KHI の BERP 状翼端形状と ONERA の開発した Fig.3.27 のような平面形を持つ PF2[11] を選び、それらが矩形翼端に比べて、前進側でどの程度衝撃波を弱めているかを知るために、ケース (a)(b) の両条件で比較を行った。これらの他に、先進的平面形としては、文献 [78][79][80] の形状なども挙げられる。ただし、ここで計算対象としているブレードは、平面形の影響だけを調べるために、全半径位置にわたって断面翼型を NACA0012 にしているので、実際の BERP や PF2 と異なっており、以下ではこれらを BERP 状翼端及び PF2 状翼端と呼ぶ。

Fig.3.28(1) の (a) と (b) はそれぞれ、前述のケース (a)(b) における BERP 状翼端のブレード翼面上等マッハ線図である。矩形翼端では先のすべての条件（ケース (a)(b)(c) ）で、方位角$\psi = 60° \sim 120°$の範囲において衝撃波が観察されたが、この形状では、ケース (a)(b) とも衝撃波が発生していない。従って、この形状に関しては、$\Delta(-C_p)$ のグラフは描けない。従来 BERP ブレードは、斬新な平面形で主に後退側の失速を抑え、先進的な薄翼を翼端に使用することで、前進側での衝撃波の発生を抑えると考えられてきたが、ここでの計算はどの半径位置にも NACA0012 を用いているので、平面形の工夫のみで衝撃波の発生をここまで抑えられることが明らかになった。従って、BERP ブレードの平面形は、従来考えられてきた後退側だけに効果があるのではなく、前進側でも極めて有利な形状であることがわかった。

一方 PF2 のアイデアは、1970 年 ONERA で行われた実験にその端を発している。この実験は、先端前縁が放物線状の後退角を持つアスペクト比 6 のブレードを風洞壁に取り付けて、非回転の状態でその翼端形状の空力的性質を調べたもので、その結果、前縁の放物線状後退角は翼端でかなり圧力のピークを抑えられることがわかっ

た。そこで、PF2 には 0.95R より翼端側に放物線状の前縁後退角が用いられている。Fig.3.28(2) の (a) と (b) はそれぞれ、ケース (a)(b) での PF2 状翼端のブレード翼面上等マッハ線図である。図に示されたように、PF2 状翼端は BERP 状翼端程ではないが、かなり衝撃波の発生が抑えられており、その様子は Fig.3.29(a)(b) をそれぞれ Fig.3.24(3) の (a)(b) と比較することによって定量的に把握できる。

BERP や PF2 のような先進的ブレード翼端平面形状は、かなり複雑な形状を持っているが、これらが後退角やテーパなどといった基本的な形状の組み合わせで形作られているとみて、以下にその各要素ともいえる基本的な形状が、ダイナミックショックの発生と発達に及ぼす影響を調べ、先進的翼端平面形の性質を把握する基礎とし、さらに今後のブレードデザインの指針とする。

3.7.3 前進角及び後退角の影響

Fig.3.30(a)(b) はそれぞれ、ケース (a)(b) の計算条件で前進角が$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、前進角 20°、前進角を付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.80, 0.85, 0.90, 0.95 の 4 つである。前進角を付けると、前進角のある部分の翼素は、一様流に対して幾何的に前進角の分だけ方位角が増加したことになり、衝撃波の発生消滅もその分だけ早まる。従って、Fig.3.30(b) の左端の図を Fig.3.24(3)(b) と比較すると明かなように、$\Delta(-C_p)_{peak}$は$\psi = 60°$で矩形より大きく、$\psi = 120°$で矩形より小さくなっている。また r_{peak}についていえば、$\psi = 60°$で矩形より翼根側に移動しており、$\psi = 120°$では、矩形において$\psi = 90°$より翼根側であるのに対して、$\psi = 90°$ より翼端側にずれている。さらに r_{range}については、$\psi = 60°$で矩形より大きくなっており、$\psi = 120°$では小さくなっている。衝撃波の発生する半径位置については、Fig.3.31 のブレード翼面上等マッハ線図でも明かである。そして Fig.3.30(b) の残りの図より、これらの傾向は $(r/R)_0$が小さいほど（後退角を付け始める位置を翼端から遠ざけるほど）顕著であることがわかる。逆に言えば、$(r/R)_0$が大きくなると前進角の付いた翼素の領域が小さくなるので、矩形翼端の性質に近づく。またケース (a) の計算条件で得られた Fig.3.30(a) と Fig.3.30(b) を比較すると、衝撃波の発生消滅が矩形に比べて早まる傾向は、非定常性が増すとより顕著に現れることがわかる。

以上のことから、矩形より衝撃波を弱めるためには、前進角を付け始める位置をかなり翼端から離れた位置にする必要があり、ねじりモーメントの増加が予想されることから、構造的に考えて実用的であるとはいえない。

次に後退角について述べる。Fig.3.32(a)(b) はそれぞれ、ケース (a)(b) の計算条件で後退角が$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、後退角 20°、後退角を付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.80, 0.85, 0.90, 0.95 の 4 つである。後進角を付けると、後退角のある部分の翼素は、一様流に対して幾何的に後退角の分だけ方位角が減少したことになり、衝撃波の発生消滅もその分だけ遅くなる。従って、Fig.3.32(b) の左端の図に示されているように、$\psi = 60°$では衝撃波が発生せず、$\Delta(-C_p)_{peak}$は$\psi = 120°$で$\psi = 90°$よりかなり大きくなっていることがわかる。またこの図を Fig.3.24(3)(b) の矩形に対する結果と比較した場合、$\Delta(-C_p)_{peak}$は$\psi = 90°$で矩形より小さくなっており、$\psi = 120°$では矩形より大きくなっている。また r_{peak}は$\psi = 90°, 120°$ともに矩形より翼端側に移動しており、r_{range}は$\psi = 90°, 120°$ともに矩形より小さくなっている。衝撃波の発生する半径位置については、Fig.3.33 のブレード翼面上等マッハ線図でも明かである。さらにこの図で、$(r/R)_0$が 0.85, 0.90, 0.95 の$\psi = 90°$を見ると、r_{peak}が後退角を付け始める位置 $(r/R)_0$を避けるパターンをとり、これは Fig.3.31 で $(r/R)_0$が 0.85 と 0.90 の$\psi = 90°$において、衝撃波のピークが前進角を付け始める位置に引きつけられているのと対称的である。そして Fig.3.32(b) の右端以外の図では、$\Delta(-C_p)$ の様子はこの 3 つの翼端形状で大差ないが、右端の図では他と全く傾向が異なり、$\psi = 120°$で$\Delta(-C_p)_{peak}$が減少しているものの、r_{range}が大きくなっている。0.95R という位置は、矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置（このケースでは 0.90R 付近）を越えており、先にも述べたが、後退角では r_{peak}が $(r/R)_0$を避けるパターンをとるため、$(r/R)_0 = 0.95$ では他と異なり、r_{peak}が $(r/R)_0$より小さくなるため、この突然の傾向変化に到っていると思われる。以上より、ねじりモーメントのことも考慮すれば、矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置（このケースでは 0.90R 付近）辺りから後退角を付けるのが最も有利であるといえる。また$\Delta(-C_p)$ の様子をケース (a) の計算条件で得られた Fig.3.32(a) と Fig.3.32(b) を比較すると、衝撃波の発生消滅が矩形に比べて遅くなる傾向は、非定常性が増すとさらに顕著になることがわかる。ただし Fig.3.32(a) では、突然傾向の変わる性質が $(r/R)_0 = 0.90$ で多少現れているが、これはケース (a) の条件下で矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置が、ケース (b) のときよりも多少翼根側にあることに起因すると思われる。さらに後退角に関しては、その値を 40°にした形状についてもケース (b) の条件で計算を行い、Fig.3.34 の結果を得た。この図から、$\psi = 90°$での衝撃波はほぼ消え、$\psi = 120°$でも最先端付近に多少残る程度であることがわかる。また傾向の変わる $(r/R)_0 = 0.95$ では、r_{range}が大きくなるもの

の、120°で$\Delta(-C_p)_{peak}$は小さくなり、矩形と比べたときの形状変更の程度を考えると、ブレード先端付近を大きく後退させるだけで、矩形に比べてかなり衝撃波を弱められることがわかる。従ってこの形状もかなり有効だと言える。

以上のことより、ねじりモーメントも考慮すれば、矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置辺りから後退角を付けることが、衝撃波の発生と発達を抑えるのに有効であることがわかった。ただし、矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置は、作動条件によって多少ずれるが、Fig.3.24(3) よりその値はほぼ 0.90R であると考えてよい。またブレード先端付近に大きな後退角を付けるだけでも、かなり衝撃波を抑えられることが示された。

3.7.4 一定でない後退角の影響

後退角が衝撃波発生を遅らせるのなら、流入速度の大きくなる翼端に向かって後退角を大きくすればよいのではないかという考えが浮かぶのは当然であろう。そこで、ここでは BERP にも用いられている発想、即ち回転速度の成分の内、前縁に垂直なものが半径位置によらず一定になるように後退角を付けた場合について調べた。この形状では、無次元半径位置 $x(=r/R)$ における後退角Λは以下の式で決まる。

$$\cos\Lambda = \frac{\cos\Lambda_T}{x} \tag{3.110}$$

ただし、Λ_Tはブレード先端での後退角の値であり、x が $\cos\Lambda_T$のとき後退角は 0°となる。従って後退角を付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.80, 0.85, 0.90, 0.95 のとき、後退角の半径方向分布は Fig.3.35(a) のようになる。またその翼端形状は Fig.3.35(b) のようになり、翼先端での後退角はそれぞれ 36.87°, 31.79°, 25.84°, 18.19°となる。

Fig.3.36(a)(b) はそれぞれ、ケース (a)(b) における $(r/R)_0 = 0.80$ 及び 0.90 の $\Delta(-C_p)$ で、Fig.3.37 はブレード上等マッハ線図である。Fig.3.35(b) の $(r/R)_0 = 0.80$ では翼先端の後退角が 36.87°、$(r/R)_0 = 0.90$ では 25.84° であるが、後退角の平均値はそれぞれ約 25.2°と 17.4°となり、20°から大きく外れてはいないので、一定の後退角 20°を持つブレードの結果である Fig.3.32(a)(b) の $(r/R)_0 = 0.80$ 及び 0.90 と Fig.3.36(a)(b) の $(r/R)_0 = 0.80$ 及び 0.90 を比較してみると、劇的ではないがかなり改善が見られる。従って、翼端に向かって後退角が徐々に増加する翼端形状は、衝撃波の発生及び発達を抑えるのに有効であると言える。

3.7.5 逆テーパ及び順テーパの影響

Fig.3.38(a)(b) はそれぞれケース (a)(b) の計算条件で、逆テーパが$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものであり、Fig.3.39 はケース (b) のブレード上等マッハ線図である。ここで計算した形状は、テーパ比 1.3 、テーパを付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.80, 0.85, 0.90, 0.95 の 4 つである。ただし、テーパを付けても 1/4 弦線が直線を保つようにした。Fig.3.38(b) の左端の図を Fig.3.24(3)(b) と比較すると、逆テーパによってブレード先端でコード長が増加していることから、3.6 節で述べた翼端での 3 次元効果のため、$\Delta(-C_p)_{peak}$はどの方位角位置でも減少している。しかし、前進角や後退角で見られた r_{peak}や r_{range}の変化は現れていない。また Fig.3.38(b) の残りの図より、付け始めの位置 $(r/R)_0$の増加とともに、どの方位角位置でも多少$\Delta(-C_p)_{peak}$が増加していることがわかる。またケース (a) の条件で得られた Fig.3.38(a) より、計算条件が変わっても同様の傾向が現れているといえる。

以上のことから、矩形より衝撃波を弱めるためには、逆テーパを付け始める位置をかなり翼端から離れた位置にする必要があり、面積の増加をまねくことになる。

次に順テーパについて述べる。Fig.3.40(a)(b) はそれぞれケース (a)(b) の計算条件で、順テーパが$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、テーパ比 0.7 、テーパを付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.80, 0.85, 0.90, 0.95 の 4 つである。Fig.3.40(b) の左端の図を Fig.3.24(3)(b) と比較すると、順テーパによりブレード先端でコード長が減少していることから、3.6 節で述べた翼端での 3 次元効果のため、$\Delta(-C_p)_{peak}$はどの方位角位置でも増加している。また r_{range}に目立った変化はないが、r_{peak}は僅かに翼端側にずれており、これは Fig.3.41 のブレード上等マッハ線図からもわかる。そして Fig.3.40(b) の残りの図より、$(r/R)_0$が小さい程（矩形よりコード長の短い領域が大きい程）、どの方位角位置でも$\Delta(-C_p)_{peak}$は大きくなっている。またケース (a) の条件で得られた Fig.3.40(a) より、計算条件が変わっても同様の傾向が現れているといえる。さらに、順テーパに関してはそのテーパ比を 0.4 にした形状についても、ケース (b) の条件で計算を行い、Fig.3.42 の結果を得た。これらの形状ではブレード先端のコード長がさらに短くなっているため、Fig.3.42 の左端の図を見ると、$\Delta(-C_p)_{peak}$はどの方位角位置でも非常に大きくなり、r_{peak}もかなり翼端側に移動している。また残りの図より、Fig.3.40(b) と同様 $(r/R)_0$が大きくなる程、どの方位角位置でも$\Delta(-C_p)_{peak}$は小さくなっている。

以上より、順テーパは衝撃波を抑える目的においては付けない方がよいことがわかる。

3.7.6 前縁及び後縁突起の影響

ここでは、BERP の平面形で用いられている前縁ノッチの影響を把握するために、前縁突起、後縁突起及び前後縁突起について調べた。

Fig.3.43(a) は、ケース (b) の計算条件で前縁のみに突起を付けた場合、それが $\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、突起の大きさが 0.3C 、突起位置が $0.85R$, $0.90R$, $0.95R$の 3 つで、その形状は図中にも示した。Fig.3.43(a) より、前縁突起を付けることによって、ブレード先端のコード長が矩形と同じ値に保たれたまま、結果的に翼端付近の前縁に前進角と後退角が付き、突起部分のコード長が長くなるため、3 つの形状すべてで$\psi = 90°$において$\Delta(-C_p)_{peak}$は矩形より減少している。また前進角と後退角の組み合わせであるため、通常の後退角のように衝撃波の発達が遅れて、$\psi = 120°$の$\Delta(-C_p)_{peak}$が$\psi = 90°$より大きくなるような現象は起こらない。また通常の後退角に比べて、ねじりモーメントもあまり増加させないと思われるので有利である。次に 3 つの形状を比較する。0.90R に突起を付けた場合、結果的に矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置を境に、翼根側前縁に前進角を、翼端側前縁に後退角を付けることになり、さらに衝撃波のピークが現れる半径位置のコード長が長くなるため、衝撃波を抑えるのに非常に大きな効果が見られる。また 0.95R に突起を付けた場合、上で述べた半径位置を過ぎているため、通常の後退角でも見られた突然の傾向変化が生じ、$\Delta(-C_p)_{peak}$は大幅に減少するものの、r_{range}がかなり大きくなる。

Fig.3.43(b) は、ケース (b) の計算条件で後縁のみに突起を付けた場合、それが $\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、突起の大きさが 0.3C 、突起位置が $0.85R$, $0.90R$, $0.95R$の 3 つで、その形状は図中にも示した。Fig.3.43(b) より、後縁突起の場合も 3 形状ともどの方位角位置においても、矩形より$\Delta(-C_p)_{peak}$を減少させているが、前縁突起ほど効果的ではないことがわかる。また前縁突起に見られた傾向の激変もない。

Fig.3.43(c) は、ケース (b) の計算条件で前縁後縁の両方に突起を付けた場合、それが$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、突起の大きさが前縁後縁とも 0.3C 、突起位置が $0.85R$, $0.90R$, $0.95R$の 3 つで、その形状は図中にも示した。Fig.3.43(c) より、前後縁突起は前縁突起と似た傾向を呈しており、後縁突起が加わる分前縁突起よりさらにピーク値を下げていることがわかる

以上のことから、衝撃波の強さに焦点を当てたとき、突起を付けると結果的に前縁あるいは後縁に前進角及び後退角が付き、突起部分のコード長が長くなるため、

衝撃波が弱まることがわかった。とくに矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置に突起を持っていくと、最も衝撃波の強い位置で衝撃波を分断することができるので大きな効果が期待できる。また突起を効果的に付けるためには、流れの流入してくる前縁に付けることが重要であると言える。

3.7.7　前縁及び後縁のみの形状変更の影響

BERP や PF2 など先進型の平面形は、前縁及び後縁をそれぞれ異なったコンセプトで変形しているため、ここでは前縁のみ後縁のみに後退角を付けてその効果を把握する。

まず Fig.3.44(a) は、ケース (b) の計算条件で前縁のみに後退角を付けた場合、それが$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、後退角が 20°、後退角を付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.85, 0.90, 0.95 の 3 つである。Fig.3.44(a) を通常の後退角の結果である Fig.3.32(b) と比較すると、前縁後退角が結果的に翼端に順テーパを付けることになるため、3 つの形状のどの方位角位置でも、$\Delta(-C_p)_{peak}$ は大きくなっている。また後退角が前縁のみであるために、$(r/R)_0 = 0.85,\ 0.90$ では$\psi = 60°$の衝撃波が消えていない。ただし $(r/R)_0 = 0.95$ で傾向が変わるのは通常の後退角と似ている。

また Fig.3.44(b) は、ケース (b) の計算条件で後縁のみに後退角を付けた場合、それが$\Delta(-C_p)$ に及ぼす影響を調べたものである。ここで計算した形状は、後退角が 20°、後退角を付け始める位置 $(r/R)_0$が 0.85, 0.90, 0.95 の 3 つである。Fig.3.44(b) を通常の後退角の結果である Fig.3.32(b) と比較すると、後縁後退角は結果的に翼端に逆テーパを付けることになるため、3 つの形状のどの方位角位置でも、$\Delta(-C_p)_{peak}$ は小さくなっている。しかしグラフ全体の様子は矩形に似ており、後退角の影響はあまり現れていない。

従って、形状変更は前縁に着目してなされるべきで、後縁の変更は、前縁の変更が結果的にコード長を短くするなどの弊害を生じさせないよう、2 次的になされるべきである。

以上のような結果をもとにもう一度 BERP や PF2 を見直してみると、次のようなことがわかる。

<u>**BERP について**</u>

内側から外側に進行する剥離を抑えるために考案された前縁のノッチによって、前

縁に突起が生じるので衝撃波が弱まる上、この突起と後縁の小さな後退角が、コード長を小さくすることなしに前縁に十分な後退角を付ける余地を確保している。とくにブレード先端付近では、コード長が小さくなることによって本来なら衝撃波が生ずるはずであるが、もとは高迎角でストールを遅らせる安定な渦を作る目的のために考案された極度な後退角が、これを抑える働きをしている。ちなみにノッチの付け始め部分を、矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置に配置し、先端付近の後退角をさらに大きくするために、BERP 状翼端を半径方向に圧縮したものを翼端に付けると、Fig.3.45(a) のように、元のもの (Fig.3.45(b)) よりさらに超音速領域（図のハッチを施した部分）が減り、逆に BERP 状翼端を半径方向に膨張させたものを翼端に付けると、変形量が大きいにもかかわらず、Fig.3.45(c) のように超音速領域は元とあまり変わらない。また Fig.3.46(a)(b) は、それぞれ BERP 状翼端の元の形状と縮めた形状のブレード翼面上流線であり、計算条件は $M_T = 0.91, \mu = 0.0, \theta_c = 0°$ である。図より、前縁ノッチの部分と先端前縁の極度な後退角の部分で流線の変形が激しく、とくに縮めた形状でそれが顕著であることがわかる。計算条件が無揚力なので、翼端渦の巻き上がりによる流線の変化は見られない。

以上より、形状のコンセプトのみならず、付け始めの位置も重要であることが明らかとなった。また、このような効果を手軽に計算できることからも、本方法はブレードデザインの指針を与える方法として有効であると言える。

PF2 について

BERP のように前縁の突起はないが、後退角の付け始め位置を矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置に配置することで、衝撃波の発生を抑えている。そしてこれをさらに効果的にするために、BERP と同様前縁には 2 段階の後退角が使用されており、先端側の後退角はブレード先端でできるだけ大きな後退角が取れるよう放物線状になっている。さらにこれら前縁後退角によってコード長が小さくなるのを防ぐために、後縁には単純な後退角が用いられている。しかし、PF2 における最先端付近の後退角は、BERP に比べて小さいため、BERP ほどきれいに衝撃波の発生を抑えられていないので、この部分に改良の余地があると思われる。

Chapter 4

ホバリング性能に及ぼす翼端形状の影響

4.1 Navier-Stokes 方程式の解法

ここでは、第1章で述べた目的 (2) の解析を行うために、まずその解析法を解説し、次に実験値との比較によって結果の検証を行い、最後にヘリコプタブレードの翼端形状が、ホバリング性能にどのような影響を及ぼすかを解析する。

4.1.1 支配方程式

Fig.3.1 のブレード固定回転座標系 (x', y', z') で記述した時間平均 Navier-Stokes 方程式は、式 (3.4) の右辺に粘性項が加わったもので、以下のようになる。ここで簡単のため' は省略した。

$$\partial_t Q + \partial_x E + \partial_y F + \partial_z G + H = \frac{1}{Re}(\partial_x R + \partial_y S + \partial_z T) \tag{4.1}$$

ただし、Re はロータ半径と翼端速度を基準とたレイノルズ数であり、R, S, T は

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ R_5 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ S_5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ T_5 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

と表される。ここで

$$R_5 = \tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w + \frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)} a^2_{,x}$$

$$S_5 = \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)}a^2_{,y}$$
$$T_5 = \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w + \frac{\mu}{Pr(\gamma-1)}a^2_{,z} \tag{4.3}$$

である。また応力テンソルτ_{ij}は渦粘性の仮定から

$$\tau_{ij} = (\mu_l + \mu_t)(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}u_{k,k}) \tag{4.4}$$

となる。ここで式 (4.3) の$,x$ などは偏微分を表す。また式 (4.4) のδ_{ij}はクロネッカーのデルタであり、粘性係数μは分子粘性係数μ_lと乱流渦粘性係数μ_t の和で表される。ただしμ_lはサザーランドの公式 (Sutherland's law)

$$\mu_l = \mu_\infty(\frac{T}{T_\infty})^{\frac{3}{2}}\frac{1+110.4/T_\infty}{T/T_\infty + 110.4/T_\infty} \tag{4.5}$$

から求め、μ_tは乱流モデルから求める。プラントル数 Prは、層流プラントル数 Pr_l と乱流プラントル数 Pr_tによって

$$\frac{\mu}{Pr} = \frac{\mu_l}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \tag{4.6}$$

と表される。ただし Pr_lと Pr_tには、慣例に従って定数 0.72 と 0.9 を用いる。ここでμ, τ, Tの無次元化はそれぞれμ_∞, $\mu_\infty a_\infty R$, a^2_∞で行っている。

式 (4.1) を一般曲線座標系に変換すると以下の式を得る。

$$\partial_t\hat{Q} + \partial_\xi\hat{E} + \partial_\eta\hat{F} + \partial_\zeta\hat{G} + \hat{H} = \frac{1}{Re}(\partial_x\hat{R} + \partial_y\hat{S} + \partial_z\hat{T}) \tag{4.7}$$

ただし

$$\hat{R},\hat{S},\hat{T} = \frac{\kappa_x}{J}R + \frac{\kappa_y}{J}S + \frac{\kappa_z}{J}T = \frac{\mu}{J}\begin{bmatrix}0\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

であり、ここで

$$\begin{aligned}
V_2 &= (\frac{4}{3}\kappa_x\xi_x + \kappa_y\xi_y + \kappa_z\xi_z)u_\xi + (\frac{4}{3}\kappa_x\eta_x + \kappa_y\eta_y + \kappa_z\eta_z)u_\eta \\
&+ (\frac{4}{3}\kappa_x\zeta_x + \kappa_y\zeta_y + \kappa_z\zeta_z)u_\zeta \\
&+ (-\frac{2}{3}\kappa_x\xi_y + \kappa_y\xi_x)v_\xi + (-\frac{2}{3}\kappa_x\eta_y + \kappa_y\eta_x)v_\eta + (-\frac{2}{3}\kappa_x\zeta_y + \kappa_y\zeta_x)v_\zeta \\
&+ (-\frac{2}{3}\kappa_x\xi_z + \kappa_y\xi_x)w_\xi + (-\frac{2}{3}\kappa_x\eta_z + \kappa_y\eta_x)w_\eta + (-\frac{2}{3}\kappa_x\zeta_z + \kappa_y\zeta_x)w_\zeta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_3 &= (-\frac{2}{3}\kappa_y\xi_x + \kappa_x\xi_y)u_\xi + (-\frac{2}{3}\kappa_y\eta_x + \kappa_x\eta_y)u_\eta + (-\frac{2}{3}\kappa_y\zeta_x + \kappa_x\zeta_y)u_\zeta \\
&+ (\kappa_x\xi_x + \frac{4}{3}\kappa_y\xi_y + \kappa_z\xi_z)v_\xi + (\kappa_x\eta_x + \frac{4}{3}\kappa_y\eta_y + \kappa_z\eta_z)v_\eta \\
&+ (\kappa_x\zeta_x + \frac{4}{3}\kappa_y\zeta_y + \kappa_z\zeta_z)v_\zeta \\
&+ (-\frac{2}{3}\kappa_y\xi_z + \kappa_z\xi_y)w_\xi + (-\frac{2}{3}\kappa_y\eta_z + \kappa_z\eta_y)w_\eta + (-\frac{2}{3}\kappa_y\zeta_z + \kappa_z\zeta_y)w_\zeta \\
V_4 &= (-\frac{2}{3}\kappa_z\xi_x + \kappa_x\xi_z)u_\xi + (-\frac{2}{3}\kappa_z\eta_x + \kappa_x\eta_z)u_\eta + (-\frac{2}{3}\kappa_z\zeta_x + \kappa_x\zeta_z)u_\zeta \\
&+ (-\frac{2}{3}\kappa_z\xi_y + \kappa_y\xi_z)v_\xi + (-\frac{2}{3}\kappa_z\eta_y + \kappa_y\eta_z)v_\eta + (-\frac{2}{3}\kappa_z\zeta_y + \kappa_y\zeta_z)v_\zeta \\
&+ (\kappa_x\xi_x + \kappa_y\xi_y + \frac{4}{3}\kappa_z\xi_z)w_\xi + (\kappa_x\eta_x + \kappa_y\eta_y + \frac{4}{3}\kappa_z\eta_z)w_\eta \\
&+ (\kappa_x\zeta_x + \kappa_y\zeta_y + \frac{4}{3}\kappa_z\zeta_z)w_\zeta \\
V_5 &= V_2u + V_3v + V_4w \\
&+ \frac{1}{Pr(\gamma-1)}[(\nabla\kappa\cdot\nabla\xi)a_\xi^2 + (\nabla\kappa\cdot\nabla\eta)a_\eta^2 + (\nabla\kappa\cdot\nabla\zeta)a_\zeta^2] \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

である。κは R, S, Tに対してそれぞれξ, η, ζを意味する。

4.1.2 差分化

ここでは陰解法を用いているため、R, S, Tは時間ステップ $n+1$ で評価するが、式 (3.16) と同様に線形化を行い、簡単のため R, S, Tのヤコビ行列 L, M, Nとしては

$$
L, M, N = \mu J^{-1}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & \alpha_1(1/\rho)_\kappa & \alpha_2(1/\rho)_\kappa & \alpha_3(1/\rho)_\kappa & 0 \\
m_{31} & \alpha_2(1/\rho)_\kappa & \alpha_4(1/\rho)_\kappa & \alpha_5(1/\rho)_\kappa & 0 \\
m_{41} & \alpha_3(1/\rho)_\kappa & \alpha_5(1/\rho)_\kappa & \alpha_6(1/\rho)_\kappa & 0 \\
m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & \alpha_0(\frac{1}{\rho})_\kappa
\end{bmatrix} J \qquad (4.10)
$$

のような交差微分を含まないものを用いる。ここで

$$
\begin{aligned}
m_{21} &= -\alpha_1(\frac{u}{\rho})_\kappa - \alpha_2(\frac{v}{\rho})_\kappa - \alpha_3(\frac{w}{\rho})_\kappa \\
m_{31} &= -\alpha_2(\frac{u}{\rho})_\kappa - \alpha_4(\frac{v}{\rho})_\kappa - \alpha_5(\frac{w}{\rho})_\kappa \\
m_{41} &= -\alpha_3(\frac{u}{\rho})_\kappa - \alpha_5(\frac{v}{\rho})_\kappa - \alpha_6(\frac{w}{\rho})_\kappa \\
m_{51} &= \alpha_0[-(\frac{e}{\rho^2}) + \frac{u^2+v^2+w^2}{\rho}]_\kappa \\
&- \alpha_1(\frac{u^2}{\rho})_\kappa - \alpha_4(\frac{v^2}{\rho})_\kappa - \alpha_6(\frac{w^2}{\rho})_\kappa
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \alpha_2(\frac{uv}{\rho})_\kappa - \alpha_3(\frac{uw}{\rho})_\kappa - \alpha_5(\frac{vw}{\rho})_\kappa \\
m_{52} &= -\alpha_0(\frac{u}{\rho})_\kappa - m_{21} \\
m_{53} &= -\alpha_0(\frac{v}{\rho})_\kappa - m_{31} \\
m_{54} &= -\alpha_0(\frac{w}{\rho})_\kappa - m_{41}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{\gamma}{Pr}(\nabla\kappa\cdot\nabla\kappa) \\
\alpha_1 &= \frac{4}{3}\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 \\
\alpha_4 &= \kappa_x^2 + \frac{4}{3}\kappa_y^2 + \kappa_z^2 \\
\alpha_6 &= \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \frac{4}{3}\kappa_z^2 \\
\alpha_2 &= \frac{1}{3}\kappa_x\kappa_y \\
\alpha_3 &= \frac{1}{3}\kappa_x\kappa_z \\
\alpha_5 &= \frac{1}{3}\kappa_y\kappa_z
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

である。ただしκは L, M, N に対してそれぞれξ, η, ζを意味する。

L, M, N については対角化が困難なので、例えば L については、最大の固有値

$$
\nu_\xi = \frac{\gamma\mu(\nabla\xi\cdot\nabla\xi)}{\rho Pr} \tag{4.13}
$$

を式 (3.31) の $[I + \Delta t\delta_\xi\Lambda_\xi]$ に加え、

$$
[I + \Delta t(\delta_\xi\Lambda_\xi - \frac{1}{Re}\delta_{\xi\xi}\nu_\xi I)] \equiv L_1 \tag{4.14}
$$

として簡略化している。ただし、$\delta_{\xi\xi}$には 3 点差分を用いて、左辺の 3 重対角性を保っている。

4.1.3 乱流モデル

乱流現象は流体塊の不規則な運動によって生じる。乱れの運動エネルギーは、エネルギーカスケードと呼ばれる機構、即ち大きな渦が小さな渦を引き伸ばすことによって順次小さな渦にエネルギーを伝えるという機構によって伝達され、渦が最小のスケールになった段階で粘性によって散逸され熱になる。この乱れの最小長さスケールも、分子運動の長さのスケールに比べるとはるかに大きいので、乱流は連続

体として扱え、非定常3次元の Navier-Stokes 方程式を解くことによって解明することができると考えられている。NS を直接的に解こうとする、いわゆるダイレクトシミュレーションも最近行われているが、極めて小さな空間的及び時間的最小スケールを持つ乱流を解明するには、多大な計算時間とメモリーを要し、現在の計算機の能力では不十分である。また、工学で興味があるのは、乱流の瞬間的振舞いではなく統計的平均値である。従って、速度や圧力を時間平均値とそのまわりの揺らぎに分け、これを NS に代入し、時間平均をとることによって基礎方程式を得る。これが式 (4.1) の3次元時間平均（レイノルズ平均）Navier-Stokes 方程式であり、この方程式は非圧縮の場合レイノルズ方程式と呼ばれる。式 (4.1) には NS の非線形項に由来するレイノルズ応力（ Reynolds stress ）項が生ずる。この新たな未知数の出現によって、未知数に対する方程式の数が不足する。これを補うためにＮＳを操作すると、平均流線に沿うレイノルズ応力の変化率を表す輸送方程式を得ることができるが、この方程式は新たなる高次の未知数を含み、結局方程式を閉じることはできない。そこで経験式を導入し、未知数と方程式の数を合わせて解けるようにすることが必要になる。これが乱流のモデル化であり、以上の問題を乱流の完結問題（ closure problem ）と呼ぶ。

乱流モデルは、方程式をどの時点で閉じるかによって、乱流粘性モデル（ eddy viscosity model ）と応力方程式モデル（ stress equation model ）の2つに分けられる。前者は、Boussinesq の考えに従って、レイノルズ応力を平均流と関係づけ、式 (4.1) の段階で閉じるものであり、後者は、レイノルズ応力を輸送方程式を解くことによって求めるものである。応力方程式モデルは、理論的な観点からみて、現在のところ最も一般性のあるモデルである。これは、乱流モデルを適用することのできない、異方性の強い複雑な乱流にも用いることがでる。しかし、工学上十分有効な手段となるには、乱流粘性モデルに比較した場合の圧倒的な計算時間の増加や、数値計算上の適合性の悪さといった問題点を克服しなければならない。そこで本研究では、乱流モデルとして乱流粘性モデルを用いている。このモデルでは、レイノルズ応力$-\overline{uv}$を

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \tag{4.15}$$

のように表現する。ν_t は Boussinesq が提案した乱流動粘性係数である。層流においては、分子応力 τ が

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \tag{4.16}$$

と表されるニュートンの摩擦法則が成り立つが、式 (4.15) は要するに乱れのエネル

ギー散逸を、分子粘性による散逸と類似なものとみなす仮定から導かれるものである。ν_t は (長さ)×(速度) の次元を持つ量であるが、Prandtl が混合長仮説を出す以前までは、単なる物性値として扱われていた。Prandtl は乱流の特性長さとして、仮説的に混合長 lを導入することによって

$$\nu_t = l^2 \frac{\partial U}{\partial y} \tag{4.17}$$

と表した。混合長とは気体分子運動論でいう平均自由行程のようなもので、ある流体塊が初めの運動量を保って移動する距離のことである。このモデルは lを代数式によって与え、乱流量の輸送方程式を用いないので、0 方程式モデル（zero-equation model）と呼ばれている。0 方程式モデルの中では Cebeci-Smith[81] のモデルが最も整備されており、経験式によって低レイノルズ数効果・遷移・圧縮性・圧力勾配・表面曲率等の影響を組み込んであるので、管内流・3 次元流・非定常流などに適用が可能である。このように、本来なら乱れエネルギーの局所平衡が成り立つ所でのみ物理的妥当性を持つ 0 方程式モデルは、その制限を越えた流れでもある程度良い計算結果を与えており、簡単で数値計算上の適合性も良いので、頻繁に用いられている。しかし、0 方程式モデルは壁に垂直な方向の変化のみに着目しているので、適用は境界層流れに限られ、上流履歴や乱流拡散効果を表し得ない。従って、大きな剥離を伴う流れに対しては無力である。また代数的長さスケールは、ステップ流れのように壁からの距離が明確に定義できない流れや、複雑な剥離流では求めるのが困難であり、これによってモデルの一般性及び簡潔性が著しく損なわれている。

0 方程式モデルでは、ν_t を平均流のみから決めていたが、本来ならこれは乱流量から決めるべきである。Prandtl-Kolmogoroff の乱流粘性公式によれば、ν_t は乱れの特性速度と特性長さを用いて

$$\nu_t = C\sqrt{k}l \tag{4.18}$$

と表される。ここで、k のみ輸送方程式から求め、l は代数式で与えるのが 1 方程式モデル、k も l も共に輸送方程式から求めるのが 2 方程式モデルである。1 方程式モデルは、依然として代数的に長さスケールを決める必要があるので、得られる結果は 0 方程式モデルとあまり変わらない。従って 1 方程式モデルは、0 方程式モデルから 2 方程式モデルへ移行する過程での過渡的なものとみなされている。また 1 方程式モデルは、結果的に対流項と拡散項を非局所化したものであると言える。

2 方程式モデルには様々なバリエーションがあるが、乱流運動エネルギー k とエネルギー散逸率 ε の輸送方程式を解く $(k-\varepsilon)$ 2 方程式モデル [82] が最もよく検証

されている。ここで

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \tag{4.19}$$

である。しかしこのモデルには数値的安定性に多少問題があるので、Coakely[83] は変数に

$$q = \sqrt{k}, \quad \omega = \frac{\varepsilon}{k} \tag{4.20}$$

のような変換を施し、数値的安定性に優れた $(q-\omega)$ 2 方程式モデルを考案した。このモデルは、まだ適用例が少ないので検証が不十分であるが、ヘリコプタロータと同じ回転翼である ATP への適用で成功した事実 [54][55] 及びその安定性に注目して、本研究ではこれを用いた。2 方程式モデルは、計算時間がかかる点や数値計算上の適合性からいうと、0 方程式モデルや 1 方程式モデルに劣るが、生成・消滅・対流・拡散という乱流の 4 つの基本的効果を同時に考慮できるので、これをもって初めて乱流を物理的に正当に扱うことが可能になった。さらにこのモデルは、等方性の仮定のもとに導かれているにもかかわらず、複雑な非等方性の流れを含む剥離流にも、比較的よく適用できることが確かめられている。従って、近い将来後退側のダイナミックストールを解析する際にも力を発揮するであろう。

ここで Coakley の $(q-\omega)$ 2 方程式モデルについて解説する。このモデルは、以下のような q と ω についての偏微分方程式を解く。

$$\frac{\partial Q_t}{\partial t} + \frac{\partial F_{ti}}{\partial \xi_i} = Re^{-1}\frac{\partial S_{ti}}{\partial \xi_i} + H_t \tag{4.21}$$

ただし

$$Q_t = J^{-1}\begin{bmatrix} \rho q \\ \rho\omega \end{bmatrix}, \quad F_{ti} = J^{-1}\begin{bmatrix} \rho q U_i \\ \rho\omega U_i \end{bmatrix}, \quad S_{ti} = J^{-1}\begin{bmatrix} (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_q}) g_{ij}\frac{\partial q}{\partial \xi_i} \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}) g_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

$$H_t = J^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(C_\mu f_\mu \frac{S}{\omega^2} - \frac{2D}{3\omega} - 1)\rho\omega q \\ [C_1(C_\mu \frac{S}{\omega^2} - \frac{2D}{3\omega}) - C_2]\rho\omega^2 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

であり

$$\mu_t = C_\mu f_\mu Re\frac{\rho q^2}{\omega}, \quad f_\mu = 1 - exp(-\alpha R), \quad R = \frac{\mu q s}{\rho} Re \tag{4.24}$$

である。ここで s は壁からの距離を表し、また $g_{ij} = \nabla\xi_i \cdot \nabla\xi_j$ である。速度場 D と strain rate invariant S は以下のように表される。

$$D = u_{k,k}\ , \quad S = (u_{i,j} + u_{j,i})u_{i,j} - \frac{2}{3}D^2 \tag{4.25}$$

ここで使った定数の値は

$$C_1 = 0.405 f_\mu + 0.045, \quad C_2 = 0.92, \ C_\mu = 0.09, \tag{4.26}$$

$$\alpha = 0.0065,\ \sigma_q = 1.0,\ \sigma_\omega = 1.3 \tag{4.27}$$

である。式 (4.21) は NS を解く場合と同様の手法で解く。

4.1.4 格子生成法

翼端の形状をかえた場合のロータの性能を比較するためには、ブレード 1 本に働く空気力を知る必要がある。しかし、前進飛行時の解析では、ブレードの途中で打ち切った格子を用いていたので、ここでは内側境界を回転中心の位置まで伸ばし、ブレードのカットアウトも考えて、15 % 半径位置より内側では翼の厚みを 0 にしている。格子が半径方向に大きくなったので、ζ 方向の格子点数は 30 に増やした。また NS では、境界層を捉えるために格子点をブレード表面近くに集中させる必要があるので、η 方向の最小格子幅を 1.0×10^{-7} とし、この方向の格子点数は 51 とした。最小格子幅が 1.0×10^{-7} と非常に小さいため、NS では倍精度計算が必要となる。

4.1.5 境界条件

非定常オイラーの解法のところで述べた境界条件との相違点は、翼面上の境界条件のみで、残りはすべて 3.1.6 節と同じ方法で扱う。NS は粘性を含むため、ブレード翼面上では速度を 0 にしている。従って、ブレード上の誘導速度を境界条件として入れることはできないので、誘導速度から得られる誘導迎角をあらかじめ幾何学的ピッチ角から差し引いて格子を作成することにより、近似的に後流の影響を入れている。結果的に、幾何学的ピッチ角を変更してしまうことになるが、ホバリング時にはよほど回転速度を上げないかぎり、誘導迎角の半径方向変化は小さいので、大きな問題とはならない。この問題に関しては 4.4 節で述べる。

4.1.6 後流の影響の計算法

ホバリングの場合、後流渦は流れ去らずにいつまでもロータ周辺に残っているので、前進飛行時に比べてこの影響が大きい。従ってここでは、前進飛行時の解析法で述べた Drees のモデルのように簡単なものではなく、局所循環法 (Local Circulation Method, LCM) を用いてブレード上の誘導速度を算出している。

LCM に関しては文献 [84] に詳しいので、ここでは今回変更した点についてのみ解説する。LCM が亜音速域で回転翼の空気力をかなりよく見積もることは、既に数多くのアプリケーションで示されているが、圧縮性の影響する作動条件に適用する際

には、何らかの方法でこの影響を入れる必要がある。ここでは、遷音速領域で測定された2次元翼型 (NACA0012) の $C_n - \alpha$ と $C_d - C_n$ のチャート [85] を用いることによって、それを考慮した。ここで垂直力係数 C_n は

$$C_n = C_l \cos\alpha + C_d \sin\alpha$$

で定義されるので、結果的に C_l は

$$C_l = \frac{C_n}{\cos\alpha} - C_d \tan\alpha$$

から求められる。具体的な圧縮性の入れ方は次の通りである。即ち C_l を求めるに当たっては、各半径位置での流入速度のマッハ数における $dC_l/d\alpha$ によってコントロール・ポイントをずらし、クッタ・ジューコフスキーの定理を使う。また C_d は、その C_l の値を用いて $C_l - C_d$ のチャートから求める。

以上の方法で得られる誘導速度を、ブレード上の境界条件として入れるときには、安定性の観点及び渦がそばを通過することによって生ずる誘導速度のコード方向変化が小さいと考えられることから、それを平均化し、コード方向に一定であるとしている。

4.2 解析法の検証（実験値との比較）

比較対象として選んだ実験データは、1980 年に Caradonna と Tung[86] が Army Aeromechanics Laboratory のホバー用実験設備で得たものである。ロータはリジッドで 2 枚のブレードを持ち、直径は 2.286 m 、アスペクト比は 6 である。このアスペクト比は、圧力計測用の装置が設置できる空間を確保した上で、最もレイノルズ数を大きくするように選ばれている。ブレードはねじりのない矩形のもので、断面は NACA0012 である。比較を行ったのは Table 4.1 の 3 ケースであり、ケース (a)(b)(c) はそれぞれ亜音速で揚力無し、亜音速で揚力有り、遷音速で揚力有りの状態に相当する。通常ヘリコプタがホバリングで遷音速に達することはないが、将来的に NS で前進飛行時の前進側を解析する際の目安を得るために、ここではケース (c) の比較も行った。ここで、実験で用いられているレイノルズ数は、代表速度に翼端回転速度 ΩR を、代表長さにコード長 C をとっているので

$$Re_C = \frac{\rho_\infty (\Omega R) C}{\mu_\infty} \tag{4.28}$$

と表されるが、本方法では速度と長さの無次元化をそれぞれ a_∞ と R で行っているので、レイノルズ数は

$$Re = \frac{\rho_\infty a_\infty R}{\mu_\infty} \tag{4.29}$$

と表される。従って、Re は Re_C を用いて

$$Re = \frac{Re_C}{C\Omega / a_\infty} \tag{4.30}$$

と表されることになる。

Fig.4.1 にブレード翼面上圧力分布の比較結果を示す。ケース (a) は揚力の無い場合なので、後流の補正を必要としないため、差分法のコード単体の検証となる。Fig.4.1(a) より、このケースで実験値と非常によい一致を見せているので、本方法がホバリング時に十分精度よく翼厚の効果を見積れることが示された。(b),(c) のケースでは揚力が有るため、ブレード翼面上の誘導速度を算出して、格子生成の際、誘導迎角として考慮している。ここで誘導速度を算出する際、局所循環法を推力係数インプットモードで使用した。即ち、実験条件の幾何迎角 8°のままで計算を行うと、Table 4.2 に示した推力係数 C_T の実験値を過大評価してしまうため、逆に実験でわかっている C_T が得られるような幾何迎角を求め、その値を用いて計算を行うことを意味し、これはこの分野で一般的に用いられている方法である。

Fig.4.1(b) より、本解析法は亜音速で揚力がある場合にも実験値とよい一致を見せている。またこのケースでは、オイラーや Baldwin-Lomax[87] の 0 方程式乱流モデル（ Appendix B 参照）を用いた NS との比較も行ったが、それらと比べると、ブレード翼面上圧力分布に関しては有意な差が見られなかった。図中においては、実線がオイラー、点線が 0 方程式モデルを用いた NS 、破線が本方法である。ただし、剥離などの起こらない通常のホバリング状態ではこの結果も容易に予想でき、逆にオイラーや 0 方程式モデルを用いた NS と近い結果が得られたことが、本方法の検証にもなる。またこの条件における本方法の意味は、摩擦抵抗や翼端渦を他の方法より正確に捉えられることにある。ちなみに、この条件で得られた翼端付近の 2 次元断面における等マッハ線図を、オイラーと本方法で比較すると、Fig.4.2 のように、オイラーでは捉えられない境界層を、本方法が捉えているのがわかる。また本方法を用いると、Fig.4.3 のようにロールアップする翼端渦とそれより速く落ちていく内側の渦シートというヘリコプタ独特の後流も捉えることができる。Fig.4.1(c) より、本解析法は $r/R = 0.96$ と 0.89 で衝撃波の強さを過小評価しているが、衝撃波の生ずる位置に関しては、他の方法より実験値をよく予測している。衝撃波の強さは、

誘導迎角の見積もりいかんによって改善の可能性があるが、衝撃波の位置はより本質的であって、誘導迎角の影響をあまり受けないため、衝撃波の位置をよく予測している本方法は、衝撃波の生ずる条件に適用する場合にも、有効な方法であると言える。

4.3 他の解析法との比較

ここでは、有限体積法を用いた Agarwal ら [53] の結果との比較を行い、結果を Fig.4.4 に示した。Agarwal らは、本方法と類似の格子を使い、乱流モデルとしては Baldwin-Lomax の 0 方程式乱流モデルを、また格子外の渦の影響を見積もる方法としてはフリーウェイクを用いている。Fig.4.4(a) より、本方法は外部条件の入らないケース (a) で Agarwal らよりも実験値との一致がよい。この差異は、有限体積法が差分法に比べて精度を上げにくいことに起因すると考えられる。また Fig.4.4(b) より、ケース (b) では大きな差は見られないが、Fig.4.4(c) より、ケース (c) では本方法の方がかなりよく衝撃波の位置や強さを予測している。この差異は主に、TVD を使用するか否かに起因すると考えられる。以上より、ここでも本方法の有効性が確認された。

4.4 境界条件の影響

Fig.4.5 は、境界条件の扱い方によるブレード上圧力分布の相違を調べたもので、図中の実線、点線、破線に相当する TYPE 1,2,3 はそれぞれ以下の扱い方を意味する。

- 格子生成の際ブレードの迎角を 0° にし、有効迎角と等価な鉛直方向速度を翼面上境界条件として与える [TYPE 1]
- 誘導速度から得られる誘導迎角をあらかじめブレードの幾何学的ピッチ角から差し引いて格子を作成し、ブレード上には通常の条件（オイラーではスリップ条件、NS では速度 0 ）を課す [TYPE 2]
- 幾何学的ピッチ角はコレクティブピッチ角のままにし、誘導速度の鉛直成分を翼面上境界条件として与える [TYPE 3]

TYPE 1 は、一度格子を作成すれば、計算条件が変わっても格子を切り直す必要がないという利点があるが、本来の幾何形状と異なるものを計算することになるため

物理的に問題がある。TYPE 2 は、収束が速く安定な計算が可能であるが、誘導迎角の半径方向変化が大きいと、幾何形状がねじれることになる。TYPE 3 は、物理的に最も妥当であるが、収束が遅くまた不安定である。4.1.5 節でも述べたように、3 つの内 NS に適用可能なのは TYPE 2 のみである。ここではこれらが解に及ぼす影響を知るために、2 つの飛行条件に対して、3 つの境界条件でオイラーの計算を行い、ブレード翼面上圧力分布に及ぼす影響を比較した。Fig.4.5 より、どちらの飛行条件でも TYPE 1 は翼端で、TYPE 3 はミッドスパンで実験値との一致が悪く、TYPE 2 はちょうど両者の中間的性質を示している。従って、特に通常のホバリング状態に近いケース (b) で推力やトルクを推定するのに、TYPE 2 の方法を用いるのは妥当であると思われ、NS に TYPE 2 の方法で後流の影響を入れることの根拠が得られた。

4.5 後流計算の影響

本研究では、ホバリング時における後流の影響を代表するブレード上の誘導速度を算出するに当たっては、LCM を用いている。そこで、これが妥当であるか調べるために、他の方法で算出した誘導速度を用いて行った計算結果と比較した。Fig.4.6 はその結果で、図中の VLM は文献 [88] にも詳しいが、ここではヘリコプタ用にいくつか変更を加えたので、Appendix C に詳細を示した。また Constant は、誘導迎角を半径方向に一定にすることを指し、これは Agarwal らが用いている方法である。彼らがフリーウェイクのコードで計算したところによると、回転速度にかかわらず誘導速度の半径方向分布ははぼ一定値になり、コレクティブピッチ角が 8° の場合には、その一定値は 3.8° となる。Fig.4.6 より、VLM は翼端側で、Constant はミッドスパンで実験値との間に大きなずれをみせているが、LCM はほぼどの半径位置でも実験値とよく一致している。さらに LCM は、VLM やフリーウェイクに比べてかなり短い時間で結果を得ることができるので、非常に有効な方法であるといえる。ちなみに VLM の計算時間が、航空宇宙技術研究所のスカラーコンピュータ FACOM M 780 で約 5 分程度であるのに対して、LCM の計算時間は約 20 秒である。ところで、LCM の与える半径方向誘導迎角分布は Fig.4.7 に示す通りで、ケース (b) では、Agarwal らが用いているような一定値ではなく、少し右下がりの傾向があり、これが Fig.4.6 のように VLM やフリーウェイクよりよい結果を与える原因になっている。また、回転速度が大きくなると、半径方向の変化も大きくなることが見て取れ

る。形状変更に関して言うと、後退角は付け始め位置前後で矩形に比べて誘導迎角を小さくし、翼先端では逆に大きくする。テーパは付け始め位置から先端までずっと、矩形より小さな誘導迎角を与える。

4.6 ホバリング性能に及ぼす翼端形状の影響

計算はすべて、通常のホバリング状態に近いケース (b) ($\theta_c = 8°$, $M_T = 0.44$, $Re_c = 2.0 \times 10^6$) で行った。計算に用いたブレードは、ねじりのないアスペクト比 6 のブレードで、翼端の形状を変更しても、常に断面の翼型は全半径位置で NACA0012 を保った。またテーパを付けても 1/4 弦線が直線になるようにした。

4.6.1 前進角及び後退角の影響

ここで選んだ形状は、0.85R から前進角 20°、後退角 20°, 40° を持つ 3 つで、その形状が推力係数 C_T やトルク係数 C_Q に及ぼす影響を調べた。ただし後にテーパの影響を調べる際、ブレード面積の増減を考慮するため、推力係数やトルク係数そのものでなく、それらをソリディティσで割った値を用いた。ここでソリディティは

$$\sigma = \frac{bS}{\pi R^2} \tag{4.31}$$

と定義され、ロータのディスク面積に対する全ブレード面積の比を表す。ただし、b はブレード枚数、Sはブレード一本の面積、Rはロータ半径である。矩形ブレードの場合、ブレード面積は Rとコード長 Cの積で表されるが、ここでは翼端の変形による面積の増減も考慮に入れるため、あえてブレード一本の面積 Sを用いてσを表した。

Fig.4.8(a)(b) は、それぞれ前進角及び後退角が推力係数とトルク係数に及ぼす影響を表す。縦軸の$\Delta(C_T/\sigma)$, $\Delta(C_Q/\sigma)$, $\Delta(C_Q/\sigma)_p$, $\Delta(C_Q/\sigma)_f$は、それぞれ以下の式で定義する。

$$\begin{aligned}
\Delta(C_T/\sigma) &= \frac{(C_T/\sigma) - (C_T/\sigma)_0}{(C_T/\sigma)_0} \\
\Delta(C_Q/\sigma) &= \frac{(C_Q/\sigma) - (C_Q/\sigma)_0}{(C_Q/\sigma)_0} \\
\Delta(C_Q/\sigma)_p &= \frac{(C_Q/\sigma)_p - (C_Q/\sigma)_{p0}}{(C_Q/\sigma)_{p0}} \\
\Delta(C_Q/\sigma)_f &= \frac{(C_Q/\sigma)_f - (C_Q/\sigma)_{f0}}{(C_Q/\sigma)_{f0}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ただし添字の 0 は矩形での値を、p はトルクの内圧力抵抗に抗する部分を、f は摩擦抵抗に抗する部分を表す。従って

$$C_Q/\sigma = (C_Q/\sigma)_p + (C_Q/\sigma)_f \tag{4.33}$$

である。式 (4.32) より、$\Delta(C_T/\sigma)$ は変更した形状で得られる (C_T/σ) が、矩形で得られる (C_T/σ) に対してどの程度増減するかの割合を表し、$\Delta(C_Q/\sigma)$ や$\Delta(C_Q/\sigma)_p$、$\Delta(C_Q/\sigma)_f$も同様で、変更した形状で得られる (C_Q/σ) 及び $(C_Q/\sigma)_p$、$(C_Q/\sigma)_f$がそれぞれ矩形で得られる (C_Q/σ) 及び $(C_Q/\sigma)_p$、$(C_Q/\sigma)_f$に対してどの程度増減するかの割合を表す。また図で負の後退角は前進角を意味する。

Fig.4.8(a) より、$\Delta(C_T/\sigma)$ は後退角を大きくすればする程大きく、逆に前進角を大きくすればする程小さくなり、ほぼ線形的傾向を示している。ただし、40°の後退角でも矩形との差は 3 %程度なので、前進角及び後退角が$\Delta(C_T/\sigma)$ に及ぼす影響はあまり大きくない。

Fig.4.8(b) より、$\Delta(C_Q/\sigma)_p$及び$\Delta(C_Q/\sigma)_f$に関しても上と同様の傾向が現れており、後退角を付けても矩形と面積が変わらないのでトルクの変化が小さい。従って、結果的に前進角及び後退角が$\Delta(C_Q/\sigma)$ に及ぼす影響もあまり大きくない。

Fig.4.9 は、ブレード翼面上の等摩擦力線図で、図より前進角、後退角ともに付け始め位置で摩擦力を小さくし、摩擦力の大きな部分を 2 つに分断しているが、摩擦力を積分した結果である Fig.4.8(b) の$\Delta(C_Q/\sigma)_f$を見ると、40°の後退角を付けても矩形との差は 2 %程度で、あまり大きな変化はない。

Fig.4.10 は、NS で計算したケース (b) の条件下での、矩形ブレードと後退角付きブレード（ 0.95R から 40°の後退角）の翼面上流線である。図より、両形状とも先端付近で翼端渦の巻き上がりによる流線の変化が見られ、一方、遠心力の影響は流線に現れる程大きくはないことがわかる。

以上よりまとめれば、通常のホバリング状態では、後退角を付けると矩形に比べてトルクは増加するものの推力をかせげ、逆に前進角を付けると推力は減少するもののトルクを減じることができるが、推力、トルクともに矩形との差は小さい。

4.6.2 順テーパ及び逆テーパの影響

ここで選んだ形状は、0.85R からテーパ比 0.4, 0.7, 1.3 を持つ 3 つで、その形状が推力係数 C_Tやトルク係数 C_Qに及ぼす影響を調べた。Fig.4.11(a) より、順テーパを付けると$\Delta(C_T/\sigma)$ は多少小さくなっており、逆テーパを付けるとほんの僅かに大

きくなっている。テーパによって面積の増減する効果は、ソリディティσで割ることによって補正されているが、翼端はかなり推力をかせぐ部分であるため、そこで面積を増減させることが、この結果を与えていると思われる。

また$\Delta(C_Q/\sigma)$についていえば、Fig.4.11(b)より、$\Delta(C_Q/\sigma)_p$及び$\Delta(C_Q/\sigma)_f$がともに、順テーパによって線形的に減少し、逆テーパによって線形的に増加しているため、結果的に$\Delta(C_Q/\sigma)$も同様の傾向を見せている。$\Delta(C_Q/\sigma)_p$と$\Delta(C_Q/\sigma)_f$のそれぞれについて考えてみると、$\Delta(C_Q/\sigma)_p$の変化は順テーパによって翼端渦が弱まり結果的に誘導抵抗が減少していること、及び逆テーパによって翼端渦が強まり結果的に誘導抵抗が増加していることから起こっていると思われる。ちなみに、ブレード先端の後縁から1コード後方での翼端渦中心の渦度は、テーパ比0.4の形状で矩形に比べて2.3 %減少している。またFig.4.12より、逆テーパ及び順テーパはともに付け始め位置で摩擦力を小さくしており、摩擦力の大きくなる翼端部で面積が増減していることから、Fig.4.11(b)のように$\Delta(C_Q/\sigma)_f$の変化は大きい。

まとめれば、通常のホバリング状態では、順テーパを付けると矩形に比べて僅かに推力を下げるもののトルクは大幅に減少でき、逆テーパを付けると推力をほんの僅かかせぐもののトルクを大幅に増加させてしまうと言える。

4.6.3 先進的平面形の影響

先進的平面形であるBERP状翼端とPF2状翼端について、上と同じ条件でホバリング性能を比較したところ、Table 4.3の結果を得た。BERP形状に対しては、非回転の計算条件でNSを用いて行われた解析[89]はあるが、本研究のような回転時の解析は例がない。ただし、ここで計算対象としているブレードのアスペクト比が6であるため、PF2の平面形は厳密にいえば、前縁の放物線部分の形状がFig.3.27と多少異なる。

Table 4.3より、BERP状翼端を矩形と比較すると、C_T/σは21.3 %も減少している。また$(C_Q/\sigma)_p$に関していえば、先端付近のコード長が非常に小さいことから、翼端渦が弱まっているので24.6 %減少しており、$(C_Q/\sigma)_f$に関しては、面積増加の割に摩擦力の増加が大きくない（面積増加分の補正をしないC_Qは、矩形より2.8 %しか増加していない）ので11.8 %減少している。その結果C_Q/σは、矩形に比べて18.2 %の減少となっている。以上よりBERP状翼端は、ホバリング時のトルクをかなり減少させるものの、推力を大きく下げてしまうことがわかった。

一方PF2状翼端を矩形と比較すると、C_T/σに関しては、矩形とほとんど差が見

られない。また $(C_Q/\sigma)_p$に関していえば、先端付近にテーパが付いていることから、翼端渦が弱まっているので 4.4 %減少しており、$(C_Q/\sigma)_f$に関しては、摩擦力の大きくなる翼端で面積が僅かに減少しているため 2.2 % 減少している。その結果 C_Q/σは、矩形に比べて 3.3 %と僅かに減少している。以上より PF2 状翼端は、ホバリング時の性能において、矩形との間に有意な差を見せないことがわかった。

Fig.4.13 は、C_Q/σに対して $(C_Q/\sigma)_p$と $(C_Q/\sigma)_f$の占める割合を、各種形状に関して示したもので、矩形の C_Q/σを 100 とした。また図中の SWEEP は 0.85R から 40° の後退角を付けたもので、TAPER は 0.85R からテーパ比 0.4 のテーパを付けたものである。図より、どの形状でも $(C_Q/\sigma)_p$と $(C_Q/\sigma)_f$の占める割合はほぼ半々であり、全体への寄与が同程度であることがわかる。

4.6.4 翼素理論で求めた摩擦トルクとの比較

本方法の利点として、3 次元的で複雑な形状に対しても摩擦抗力を得ることができる点が挙げられるが、その結果が 2 次元的な考え方、即ち翼素理論で算出した摩擦抗力とどの程度差があるか知るために、ここで両者の比較を行った。Table 4.4 がその結果で、括弧内は上段下段それぞれに矩形の $(C_Q)_f$に対する割合を表す。また誤差とは、NS の結果を正しいと仮定して、翼素理論で得られた結果の誤差を計算したものである。ここで翼素理論の計算は、以下のような式で行った。

$$
\begin{aligned}
(C_Q)_f &= \frac{\int_0^R dQ}{\rho\pi R^2(\Omega R)^2 R} \\
&= \frac{\int_0^R b[\rho(\Omega r)^2/2] r C(r) C_{d0} dr}{\rho\pi R^2(\Omega R)^2 R} \\
&= \frac{\sigma C_{d0}}{2}\frac{\int_0^R C(r) r^3 dr}{C R^4}
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

式中の $C(r)$ は半径位置 rの関数として与えられるコード長、C_{d0}はブレード断面の抗力係数で、ヘリコプタでは通常 0.0125 を用いることが多いので、ここでもこの値を採用した。表より、どの形状に対しても翼素理論は NS の結果の 1.5 倍近い値を出している。ただし、計算対象が通常のヘリコプタと異なり、アスペクト比の小さなブレードなので、C_{d0}として 0.0125 を用いることに問題があるため、NACA0012 に関して知られている、幾何迎角αと C_{d0}の関係

$$
C_{d0} = 0.0087 - 0.00216\alpha + 0.4\alpha^2 \tag{4.35}
$$

に Table 4.2 の結果である$\alpha = 6.05°$を代入して求めた C_{d0}を用いると、Table 4.4 の矩形の誤差は 36.6 %まで落ちる。しかし、依然として大きな差があり、この原因と

しては、NS が与える $(C_Q)_f$ が不十分であること、翼素理論の与える C_{d0} に圧力抵抗の一部が入っていること、翼素理論を 3 次元性の大きな対象に適用するのに無理があることなどが考えられる。さらに、翼端形状の変更が摩擦トルクに及ぼす影響についていえば、翼素理論は、テーパを持つブレードの摩擦トルクが矩形の 80 数パーセントになることはほぼ正しく予測しているが、ブレードを 2 次元的に扱っているため、後退角の影響は原理上全く見積もることはできない。以上より、ブレード翼端形状の解析のように、対象の 3 次元性が強い場合には、翼素理論では不十分であることがわかる。

4.6.5 オイラーの結果との比較

NS の計算は、オイラーに比較するとかなり計算時間がかかるので、数多くの形状を調べる場合、オイラーである程度の目安を得るのが得策である。従って、ここではオイラーがどの程度の結果を与えるか知るために、NS で得られた結果との比較を行った。ただし、オイラーで得られるのは $\Delta(C_T/\sigma)$ と $\Delta(C_Q/\sigma)_p$ のみであるため、比較はこの 2 つについて行った。

Fig.4.14 と 4.15 より、どのグラフでもオイラーと NS の見せる傾向は似ており、定性的傾向だけならオイラーでもほぼ捉えられることがわかる。定量的には、後退角が推力に及ぼす影響についてのみほぼ一致しているが、その他はすべてオイラーが形状変更による影響を過大に評価している。これはオイラーが粘性を含まない渦しか表し得ないことに起因すると思われる。

4.6.6 オイラーによるパラメトリックスタディ

4.6.5 節の結果を頭に入れた上で、異なる作動条件（ $M_T = 0.44$, 0.794, 0.877 の 3 条件）において、後退角やテーパなどを付け始める位置及び付ける量を変えたとき、推力やトルクがどう影響を受けるか定性的に知るために、オイラーを用いてパラメトリックスタディを行い、Fig.4.16 ∼ 19 の結果を得た。

まず Fig.4.16 より、後退角はどの回転速度においても内側から大きく付けるほど $\Delta(C_T/\sigma)$ を大きくできる傾向があり、これは回転速度にあまり影響を受けない。また前進角はどの回転速度においても、だいたい内側から大きく付けるほど $\Delta(C_T/\sigma)$ を小さくしてしまう傾向があり、これは回転速度にあまり大きな影響は受けない。

次に Fig.4.17 より、後退角は亜音速 ($M_T = 0.44$) 及び高亜音速 ($M_T = 0.794$) では、内側から大きく付けるほど $\Delta(C_Q/\sigma)_p$ が大きくなってしまう傾向があるが、遷音

速 ($M_T = 0.877$) では、衝撃波が発生するため傾向が激変し、矩形に比べて衝撃波発生を抑えることのできる後退角は、それを付けることによって$\Delta(C_Q/\sigma)_p$を下げていることがわかる。また前進角は、亜音速及び高亜音速で、内側から大きく付けるほど$\Delta(C_Q/\sigma)_p$を小さくする傾向があり、遷音速で0.95Rから付けたものに、矩形より$\Delta(C_Q/\sigma)_p$が大きくなるという傾向の変化が僅かに見られるものの、前進角は後退角ほど衝撃波の発生を抑えることはできないので、遷音速になっても傾向の激変は見られない。

Fig.4.18より、テーパを内側から大きく付けたものほど、回転速度の影響を大きく受け、0.85Rから付けたものは、遷音速で$\Delta(C_T/\sigma)$が正に転ずる。逆テーパは内側から付けるほど$\Delta(C_T/\sigma)$の値が小さく、回転速度にほとんど影響されない。

次にFig.4.19より、順テーパは亜音速において、内側から大きく付けるほど$\Delta(C_Q/\sigma)_p$を小さくしているが、回転速度の増加とともに傾向が変わり、$M_T = 0.794$においてはちょうど付け始め位置に影響を受けない状況を呈しているが、さらに回転速度が上がって遷音速になると、順テーパを内側から大きく付けるほど衝撃波を強めてしまうため、亜音速と全く逆の傾向を示している。また逆テーパは、亜音速で内側から大きく付けるほど$\Delta(C_Q/\sigma)_p$を大きくしてしまう傾向があるが、回転速度の増加とともに傾向が変わり、遷音速においては逆テーパを内側から大きく付けるほど衝撃波が弱まることから、亜音速と全く逆の傾向を示している。従って、順テーパ・逆テーパともに、内側から大きく付けるほど、回転速度の影響を大きく受けることがわかる。

Chapter 5

HSIノイズに及ぼす翼端形状の影響

ここでは、第1章で述べた目的(3)の解析を行うために、まずその解析法を解説し、次に実験値との比較によって結果の検証を行い、最後にヘリコプタが高速飛行する際に生ずるハイスピードインパルシブノイズ(High Speed Impulsive Noise, HSI Noise)が、ブレードの翼端形状によってどのような影響を受けるかを解析する。

5.1 解析法

ヘリコプタのロータ騒音は単極子(monopole)、双極子(dipole)、4極子(quadrupole)の3つに分解できる。ここで単極子と双極子はそれぞれ排除音、荷重音とも呼ばれており、ともに物体表面から発せられる音で、排除音は翼厚、荷重音はブレード表面上の圧力による音である。また、4極子は流体の乱れに起因する音で、流体中に分布している。ブレードの速度が亜音速のときは、単極子と双極子が卓越するが、ブレードの速度が高速になるにつれ4極子の影響が卓越し、バタバタと聞こえるHSIノイズが発生する。単極子と双極子は線形理論の範囲で扱うことが可能であったが、4極子はFfowcs WilliamsとHawkings [90]が、回転翼に対する波動方程式の中に、非線形な4極子の項を付加したことによって初めて扱えるようになった。しかし、この4極子の項を正確に積分することは難しく、実際にこの方法を用いた計算結果[91]は実験値に対して過大な予測値を与えている。

そこで最近、波動方程式を用いることなしに、CFDで直接音圧を求めるという方法[92]も報告されており、音源に近い場所での音圧に関してはよい結果を与えている。しかし、観測者の位置が音源から遠い場合には、遠方まで十分な精度を保つために莫大な数の格子点を必要とし、現在のところ有効な方法とは言い難い。一方

Purcell ら [93][94] 及び Isom ら [95] は、CFD とキルヒホッフの波動方程式 (Kirchhoff equation) を組み合わせた方法を用いて成功を納めている。この方法は、ブレード近傍で CFD を用いて音圧を計算し、CFD の計算領域内にある閉曲面を考え、この曲面上に分布する音源の伝播を、キルヒホッフの波動方程式で計算するというものである。

本研究においては、ブレード翼端形状が HSI ノイズに及ぼす影響を解析するため、これと類似の方法、即ち CFD と拡張されたキルヒホッフの波動方程式を組み合わせる方法を採用した。具体的には、まず第 3 章で述べた方法でヘリコプタロータ周りの流れ場を求める。次に CFD の計算格子の範囲内に衝撃波などの非線形現象をすべて含む閉領域を作って、CFD の結果からその表面上での圧力及び圧力勾配を求める。そしてこれを音源として、拡張されたキルヒホッフの波動方程式を積分することによって、観測者位置での音圧を求める。先に述べた Purcell や Isom らは、CFD コードとして FPR（完全ポテンシャルを基礎方程式とする計算コード）を用いており、とくにここで問題としているような、高速回転するロータの解析においては、等エントロピーの仮定が問題になってくる。それに対して本研究においては、3.4 節でも衝撃波捕獲の能力を確かめた、オイラー方程式に基づく方法を用いているので、HSI ノイズの解析には、Purcell や Isom らの方法より適していると思われる。

5.1.1 CFD の解法

解法は第 3 章で述べたもので、過去の騒音測定の実験が主にホバリング状態で行われてきたため、ここでは実験ケースを対象として、定常解（ホバリング状態）を求める方法を用いている。

格子は第 3 章で用いたものと異なり、Fig.5.1 のように 2 次元断面が O 型のものを用いた。なぜなら、波動方程式の境界条件を与える閉曲面の形状をできるだけ簡単にし、かつ余計な誤差が入る余地をなくすため、オイラーの格子上で与えられる解を補間なしで直接使えるようにするためである。また、対象としている実験データが無揚力の状態での HSI ノイズであるため、特に後流部分に格子を集中させる必要がない上、ブレード外の流れ場も正確に知る必要があるためかなりの格子点を使用するので、格子点数が節約できる O 型格子の使用が有効である。ここで格子点数は、ξ, η, ζ方向にそれぞれ 79,50,90 である。また、高速ロータの HSI ノイズ予測には、ブレード上に生ずる衝撃波の強さ及び形状が重要であることはよく知られているが、最近の研究 [96] でも強調されているように、ブレード外に放出された擾乱の

形状、特に回転面内での曲率も重要であり、この曲率が大きいと、回転面内での HSI ノイズは小さくなる。従って、2 次元格子を x 軸方向に積み重ねるとき、ブレード延長部の格子が集中した部分で、ブレード外に放出された擾乱をトレースし、これを精度よく捉えために、Fig.5.2 のように後方に曲がった格子を用いた。

境界条件についていえば、2 次元断面に O 型を用いたので流出境界がなくなるが、他は 3.1.6 節と同様に扱う。

5.1.2 拡張されたキルヒホッフの波動方程式の解法

音源が任意の運動をする場合に拡張されたキルヒホッフの波動方程式は、以下のような形になる。

$$
\begin{aligned}
&(\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p) \cdot H(f) \\
&= -(\hat{p_n} + \frac{1}{a_\infty} M_n \hat{p_t})\delta(f) - \frac{1}{a_\infty}\frac{\partial}{\partial t}[M_n \hat{p}\delta(f)] - \nabla \cdot [\hat{p}\boldsymbol{n}\delta(f)]
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

ここで、$f = 0$ は音源の分布する閉曲面（$f < 0$ が外部、$f > 0$ が内部）である。また、圧力 p は観測点の位置$\boldsymbol{x}$及び観測点での時刻 t の関数であり

$$
\begin{aligned}
\hat{p} &= \lim_{f \to +0} p(\boldsymbol{x}, t) \\
\hat{p_n} &= \nabla \hat{p} \cdot \nabla f \\
M_n &= \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\
\hat{p_t} &= \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \\
\boldsymbol{n} &= \nabla f
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

である。そして H はヘヴィサイド関数、δは Dirac のデルタ関数である。式 (5.1) を Green の定理を用いて積分形式に書き換えれば、以下の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&p(\boldsymbol{x}, t) \cdot H(f) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int G^0\{-(\hat{p_n} + \frac{1}{a_\infty} M_n \hat{p_t})\delta(f) \\
&-\frac{1}{a_\infty}\frac{\partial}{\partial t}[M_n \hat{p}\delta(f)] - \nabla \cdot [\hat{p}\boldsymbol{n}\delta(f)]\} dy
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

ここで自由空間の Green 関数 G^0 は以下のように表される。

$$
G^0(\boldsymbol{y}, \tau | \boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi r}\delta(g) \tag{5.4}
$$

ただし

$$g = \tau - t + \frac{R}{c} \tag{5.5}$$

である。ここで y は音源位置、r は音源と観測点との距離、τ は観測点に時刻 t に達する音波の発生した時刻である。境界条件を与える閉曲面は、Fig.5.3 の薄いハッチを施した部分で、半径 3 コードの円を底面とする円筒形である。また、この曲面のブレード半径方向の長さは 1.1R で、これは衝撃波など非線形の現象をすべて閉曲面内に含むように、かつあまり広げ過ぎて CFD の精度が落ちる領域まで含んでしまわないように選んだものである。拡張されたキルヒホッフの波動方程式を積分して観測点での音圧を求める際には、神尾 [97] の開発した計算コードを用いた。

5.2 実験値との比較

ヘリコプタの HSI ノイズは非局所化 (delocalization) と呼ばれる現象に大きく影響されると言われている [91]。この非局所化とは、ブレード翼端部分に生ずる超音速領域が、ブレード外の超音速領域（ブレード上の観測者から見たとき、見かけ上超音速で動いているように見える領域で、ホバリング状態では円筒形になる）とつながる現象を指し、このときブレードの作る衝撃波が遠方まで広がって大きな衝撃音になるといわれている。

従って、ここでは Table 5.1 に示すように、非局所化の起こるケースと起こらないケースの 2 つの条件で計算を行い、実験値 [98] との比較を行った。ただし実験値の制約から、観測者位置は回転面内のみである。また実験に用いられたロータは、Table 5.2 に示すような 1/7 UH-1H モデルロータである。

結果を Fig.5.4 に示す。図中の計算法 3 が本方法による計算結果で、これを実験値と比較すると、ケース (a) では音圧のネガティブピークをやや過小評価しているが、ネガティブピークを与える時刻を中心に、左右対称に近い波形を示す特徴をよく捉えている。一方ケース (b) では、ネガティブピークの一致が非常に良好である上、のこぎりの歯状の左右非対称な波形を示す特徴をよく捉えている。またネガティブピーク後の急激な圧力回復に対しても、その傾向を捉えている。

図中の計算法 1 は、4 極子の項を含まない FW-H(Ffowcs Williams and Hawkings の波動方程式) の計算結果であり、計算法 2 は、Schmitz ら [91] による 4 極子の項を含む FW-H の計算結果である。計算法 1 と本方法とを比較すると、4 極子騒音の影響も含んでいる本方法の結果は、計算法 1 の結果より格段によく実験値を予測し

ている。とくに非局所化の起こるケース (b) で、その差は歴然としている。また計算法2と本方法は、ともに4極子騒音の影響を含んでいるが、計算法2では4極子の項を積分することによってその影響を入れ、本方法ではオイラー方程式を解いた結果を境界条件として用いることによってその影響を入れているという違いがある。結果的には、とくに非局所化の起こるケース (b) で、計算法2が音圧のネガティブピークを過大評価しており、4極子の正確な積分が困難であることを表している。

従って、HSI ノイズの解析においては、4極子騒音の影響を精度よく見積もる必要があることがわかる。また本方法を用いた場合、オイラー方程式を解いて得られる音圧を音源としているため、単極子、双極子、4極子個々の騒音の全騒音における寄与を知ることはできないが、4極子を含む FW-H に比べて、HSI ノイズを予測する能力に優れていると言える。

Fig.5.5 は、ブレード固定回転座標系から見たブレード周辺の等マッハ線図で、ハッチを施した部分が超音速領域である。Fig.5.5(b) では、ブレード翼端部分に生ずる超音速領域がブレード外の超音速領域とつながる、いわゆる非局所化の現象が起こっていることがわかる。

5.3 HSI ノイズに及ぼす翼端形状の影響

HSI ノイズに及ぼす翼端形状の影響を解析した例としては、文献 [99][94] が挙げられる。しかし、前者は波動方程式とのカップルを行わず、完全ポテンシャル方程式のみを用いて、2、3の形状に対して、そのブレード近傍の圧力変動を考察するにとどまっており、また後者は、完全ポテンシャル方程式と波動方程式のカップルは行っているが、DART と名付けられた特殊な形状のみを対象とするにとどまっている。そこで本研究においては、矩形以外に8つの形状について、系統的に解析を行った。

5.3.1 前進角及び後退角の影響

ここでは、前進角及び後退角が音圧に及ぼす影響を調べ、その結果を Fig.5.6 に、ブレード周辺の等マッハ線図を Fig.5.7(1) ~ (3) に示した。計算は Table 5.3 の3つの形状について行った。後退角を付け始める位置 $(r/R)_0$ を 0.858 としたのは、後で述べる BERP 状翼端と条件を同じにするためである。

Fig.5.7(1) より、前進角を付けるとブレード上に強い衝撃波が生じるものの、その

位置がブレード先端から離れた位置であることから、影響がブレード外に伸びるときには、その強さもかなり弱まっている。また前進角を付けると、矩形に比べてブレード外に放出される擾乱の曲率が小さくなる、即ち回転面内でブレードの進行方向に対して後方に曲がる度合いが小さくなるため、HSI ノイズが大きくなる。これらの兼ね合いで音圧のネガティブピークが決まり、Fig.5.6 よりケース (a)(b) のどちらの条件でも、この形状ではネガティブピークの絶対値が矩形のものより小さくなっている。

また Fig.5.7(2)(3) より、後退角は大きく取ればそれだけ衝撃波が弱まるが、矩形と比較した場合、衝撃波の生じる位置がブレード先端に移動するため、かなり強い影響がブレード外に伸びる。また後退角を付けると、矩形に比べてブレード外に放出される擾乱の曲率が大きくなる、即ち回転面内でブレードの進行方向に対して後方に曲がる度合いが大きくなるため、HSI ノイズは小さくなる。これらの兼ね合いで音圧のネガティブピークが決まり、Fig.5.6 より、Sweep-B ではネガティブピークの絶対値は、ケース (a) で矩形のものより大きくなっており、ケース (b) では矩形とほぼ同じ値になっている。また Sweep-C では、ケース (a)(b) のどちらの条件でもネガティブピークの絶対値は矩形のものより小さくなっている。

以上より、前進角は HSI ノイズのネガティブピークの絶対値を小さくするのに有利であり、一方後退角で効果を上げるためには、その後退角を 20° より大きく取る必要があることがわかった。

5.3.2 逆テーパ及び順テーパの影響

ここでは逆テーパ及び順テーパが音圧に及ぼす影響を調べ、その結果を Fig.5.8 に、ブレード周辺の等マッハ線図を Fig.5.9(1) ~ (3) に示した。計算は Table 5.4 の 3 つの形状について行った。

Fig.5.9(1) より、逆テーパを付けると矩形に比べて衝撃波は弱まり、生ずる位置も翼根側にずれる。しかし、逆テーパではブレード面積が増加する上、この計算では翼型を NACA0012 に保つため翼厚も増してしまい、これに起因する排除音が増大する。結果的にネガティブピークの絶対値は、Fig.5.8 のようにケース (a)(b) のどちらの条件でも矩形より大きくなっている。

また Fig.5.9(2)(3) より、順テーパを付けると矩形に比べて衝撃波は強まり、生ずる位置も翼端側にずれる。しかし、順テーパではブレード面積も翼厚も減少するので、これに起因する排除音が減少する。結果的にネガティブピークの絶対値は、Fig.5.8

のようにケース (a)(b) のどちらの条件でも矩形より小さくなっており、その傾向はテーパ比が小さい程顕著である。

以上より、逆テーパはHSIノイズのネガティブピークの絶対値を大きくしてしまい、順テーパは小さくすることがわかった。

5.3.3 BERP状翼端の影響

ここでは、3.3節で述べたBERP状翼端が音圧に及ぼす影響を調べ、その結果をFig.5.10に、ブレード周辺の等マッハ線図をFig.5.11に示した。BERP状翼端では、ブレード面積および翼厚が増加するにもかかわらず、Fig.5.11(b) のようにケース (b) でも非局所化が起こらないほど衝撃波を弱めているので、結果的にFig.5.10のように、ネガティブピークの絶対値は矩形に比べて小さくなっている。そしてこの傾向はケース (b) で顕著である。

従って、BERP状翼端はHSIノイズのネガティブピークの絶対値を小さくするのに有効で、その効果は翼端マッハ数が大きいほど発揮されやすいことがわかった。

5.3.4 PF2状翼端の影響

ここでは3.7.2節で述べた、PF2状翼端が音圧に及ぼす影響を調べ、その結果をFig.5.12に、ブレード周辺の等マッハ線図をFig.5.13に示した。ただし、ここで計算対象としているブレードのアスペクト比が13.71であるため、PF2の平面形は厳密にいえば、前縁の後退角部分の形状がFig.3.27と多少異なる。

この形状は、結果的に後退角と順テーパが合わさった効果を持ち、Fig.5.12のように、どちらのケースでもネガティブピークの絶対値は、矩形に比べて小さくなっている。とくにブレード面積と翼厚の減少から、排除音の減少が起こるので、ケース (a) ではBERP状翼端以上の効果を見せている。しかし、BERP状翼端ほど衝撃波を弱めないことから、ケース (b) ではBERP状翼端よりネガティブピークの絶対値は大きくなっている。

従ってPF2状翼端は、非局所化の起こるケースでも起こらないケースでも矩形に比べてHSIノイズのネガティブピークの絶対値を小さくする。またBERP状翼端と比較すると、強い衝撃波が発生する状況ではBERP状翼端に劣り、そうでない場合は優ることがわかった。

Chapter 6

結論

(1) 本研究において、ヘリコプタが前進飛行する際に、その前進側で非定常的に生じるダイナミックショックを解析する方法を確立した。この方法は、オイラー方程式をTVDで差分化し、ニュートン法を用いて非定常的に解くもので、ヘリコプタ特有の後流の影響は、トリム計算を経て得られるブレード上の誘導速度を、ブレード上境界条件として入れることによって導入している。この方法に関して以下のことがわかった。

- 欧米で得られたいくつかの実験結果との比較によって、この方法が揚力の有無にかかわらず、前進側のブレード翼面上圧力分布をよく予測することが示された。
- 非回転時の実験ではあるが、川崎重工で行われたBERP状ブレードの実験との比較によって、本方法が複雑な翼端形状にも適用できることが示された。
- 欧米で用いられている代表的な計算コードとの比較によって、本方法がそれらのコードより、前進側で生じるダイナミックショックを正確に捉えることが示された。
- 非定常計算を行う際、時間精度を上げる手段として本方法が用いているニュートン法が、計算時間節約の上で非常に有効であることが示された。
- 実機への適用を考えて、アスペクト比がダイナミックショックに及ぼす影響を調べたところ、アスペクト比を増すと、翼端の3次元効果によって、翼端で発生する衝撃波が下流側にずれて強くなることがわかった。

(2) 上の方法を用いて、ブレード翼端形状が、前進側で非定常的に生じるダイナミッ

クショックにどのような影響を及ぼすか解析したところ、以下のことがわかった。

- 矩形ブレードの場合、高速前進飛行時の衝撃波は、ほぼ$\psi = 50°$付近で発生し150°付近で消滅する。その間、衝撃波の強さのピーク値$\Delta(-C_p)_{peak}$は、$\psi = 100°$付近まで増加し、それ以降は減少する。また衝撃波の強さのピーク値を与える半径位置r_{peak}は、$\psi = 110°$まで翼根側に移動し、それ以降は翼端側に移動する。そして衝撃波の発生する半径方向の幅r_{range}は、$\psi = 120°$まで増加し、それ以降は急激に減少していく。従って$\Delta(-C_p)_{peak}$, r_{range}, r_{peak}の極値はどれも、流入速度が最も大きくなる$\psi = 90°$を過ぎてから生じ、その極値を与える方位角位置に位相差がある。
- 同じ前進側翼端マッハ数の条件でも、前進比の値によって非定常性が異なるため、ダイナミックショックの様子もかなり異なる。
- BERP状翼端は、矩形でかなり強い衝撃波が発生する条件下で、高性能な薄翼を用いることなしに全く衝撃波の発生を抑えており、本研究によって、衝撃波を抑える上での平面形の重要性が認識された。
- ONERAのPF2状翼端は、BERP状翼端ほど複雑な形状変更をせずに、かなり衝撃波の発生を抑えている。
- 衝撃波を抑える目的で前進角を使う場合、付け始める位置をかなり翼端から離れた位置にする必要があり、ねじりモーメントを考慮するとあまり有効ではない。
- 矩形において衝撃波のピークが現れる半径位置から大きな後退角を付けることが、衝撃波を抑えるのに有効である。
- ブレード先端付近に大きな後退角を付けるだけで、矩形からの変更量が少ないにもかかわらず、かなり衝撃波を抑えられる。
- 翼端に向かって徐々に後退角の増加する形状は、通常の後退角に比べて劇的に衝撃波を弱めるわけではないが、改善が見られ有効である。
- 衝撃波を抑える目的で逆テーパを使う場合、付け始める位置をかなり翼端から離れた位置にする必要があり、ブレード面積の増加をまねく。
- 順テーパは、衝撃波を抑える目的においては付けない方がよい。
- 突起は、付けた部分のコード長を長くし、付けた位置の前後に前進角及び後退角を生み出すため、衝撃波を弱める効果が大きく、とくに矩形におい

て衝撃波のピークが現れる半径位置の前縁に突起を付けると、大きな効果が期待できる上、ねじりモーメントを考慮すると通常の後退角より有利である。

- 形状変更は前縁に着目してなされるべきで、後縁の変更は、前縁の変更が結果的にコード長を短くするなどの弊害を生じさせないよう、2次的になされるべきものと考えてよい。

(3) 本研究において、ヘリコプタのホバリング状態を解析する方法を確立した。この方法は、NS 方程式を TVD で差分化し、乱流モデルとして $(q-\omega)$ 2方程式モデルを用いたもので、ホバリング時にとくに重要になってくるヘリコプタ特有の後流の影響は、LCM によって得られるブレード上の誘導速度を、ブレード上境界条件として入れることによって導入している。この解析法に関して以下のことがわかった。

- 実験結果との比較によって、この方法が揚力の有無にかかわらず、亜音速、遷音速の両条件下でブレード翼面上圧力分布をよく予測することが示された。
- 本方法と同様の格子を用いている代表的な計算コードとの比較によって、本方法がそのコードよりホバリング時のブレード翼面上圧力分布をよく予測することが示された。
- ホバリング時の推力やトルクを推定するのに、本方法で用いているブレード上境界条件が妥当であることが示された。
- 後流の影響を表すブレード上誘導速度の算出方法を比較したところ、LCM は VLM やフリーウェイクに比べてかなり計算時間が短いにもかかわらずよい結果を与えるので、非常に有効な方法であるといえる。

(4) 上の方法を用いて、ブレード翼端形状がホバリング時の性能にどのような影響を及ぼすか解析したところ、以下のことがわかった。

- 通常のホバリング状態では、後退角を付けると矩形に比べてトルクは増加するものの推力をかせげ、逆に前進角を付けると推力は減少するもののトルクを減じることができる。だが、矩形に対する増減の割合は、どちらの形状でも小さい。

- 通常のホバリング状態では、順テーパを付けると矩形に比べて僅かに推力を下げるもののトルクは大幅に減少でき、逆テーパを付けると推力をほんの僅かかせぐもののトルクを大幅に増加させてしまう。
- BERP 状翼端は、ホバリング時のトルクをかなり減少させるものの、推力を大きく下げてしまう。
- PF2 状翼端は、ホバリング時の性能において、矩形との間に有意な差を見せない。
- ブレード翼端形状の解析のように、対象の 3 次元性が強い場合には、翼素理論では不十分である。
- ブレード翼端形状がホバリング時の性能に及ぼす影響は、推力及び圧力抵抗に抗するトルクに関していえば、その定性的傾向だけならオイラーでも捉えることができる。
- オイラーを用いたパラメトリックスタディにより、回転速度を変えたり、後退角やテーパなどを付け始める位置及び付ける量を変えたとき、推力やトルクがどのような影響を受けるか定性的に知ることができた。

(5) 本研究で確立した、ヘリコプタロータを数値的に解析する方法でブレード周りの流れ場を計算し、それを拡張されたキルヒホッフの波動方程式の境界条件として用いることによって、回転面上の観測点における HSI ノイズに及ぼす翼端形状の影響を調べたところ、以下のことがわかった。

- この方法で得た結果を実験値と比較したところ、非局所化の起こる場合にも起こらない場合にも、HSI ノイズの波形をよく予測することが示された。
- 前進角は、HSI ノイズのネガティブピークの絶対値を小さくするのに有効であり、一方後退角で効果を上げるためには、その後退角を大きく取る必要がある。
- 逆テーパは、HSI ノイズのネガティブピークの絶対値を大きくしてしまい、また順テーパは小さくする。
- BERP 状翼端は、HSI ノイズのネガティブピークの絶対値を小さくするのに有効で、その効果は翼端マッハ数が大きいほど発揮されやすい。
- PF2 状翼端は、非局所化の起こる場合も起こらない場合も、矩形に比べて HSI ノイズのネガティブピークの絶対値を小さくする。また BERP 状翼端

と比較すると、強い衝撃波が発生する状況ではBERP状翼端に劣り、そうでない場合は優ることがわかった。

今後の課題としては、以下のことが挙げられる。

- 本研究においては、簡単のため後流の影響をブレード上の誘導速度で代表させていた。そしてこの誘導速度は、ラプラス方程式の範囲の理論で求めていた。しかし、理想的にはCFDのみで閉じた計算を行うことが望ましく、それを可能にするためには、ヘリコプタ特有の複雑な後流を捉える必要がある。そこで、格子点数の激増をまねかずに渦の減衰を抑えるため、格子点を効率よく渦度の高い位置に配置できる解適合格子や重合格子などを適用すること。
- ヘリコプタ特有のバタバタというスラップ音の原因となるBVI(Blade Vortex Interaction)を、実際のヘリコプタの作動条件に近い3次元的な状態で解析すること。
- 後退側のダイナミックストールを解析するため、NSの非定常計算を効率よく行える方法を開発すること。
- 後退側のダイナミックストールを解析するため、大規模な剥離にも適用可能な乱流モデルを考案すること。
- 回転部分と非回転部分を有する、ヘリコプタ全機周りの解析を可能とする方法を開発すること。
- 弾性変形も考慮したヘリコプタブレードの数値解析法を確立すること。
- 高速前進飛行時の騒音解析を行うこと。
- NSを用いて、粘性がヘリコプタ騒音に及ぼす影響を解析すること。
- 回転面上のみならず、より現実的な観測点での騒音解析を行うこと。

謝辞

本研究を進めるに当たり、東京大学河内啓二教授に始終懇切な御指導を頂きました。教授には研究面にとどまらず、常日頃から理解と援助を賜りました。

航空宇宙技術研究所飛行実験部齊藤茂飛行試験研究室長には、修士、博士課程を通して公私にわたり御指導、御鞭撻を頂きました。また本論文の完成は、渡部勲技官をはじめ、河内研究室の皆様の支援と寛容に負うところが多く、修士２年の神尾純一氏には、騒音の計算をするに当たって、多大な協力をして頂きました。ここに深く感謝致します。

川崎重工業株式会社岐阜技術研究所吉田憲司係長には、実験結果を提供して頂くに当たり、大変お世話になりました。

本研究は、上記の皆様の御指導と御協力によって遂行し得たものであることを銘記し、ここに心から感謝の意を表したいと思います。

青山剛史

平成４年１２月２１日

参考文献

[1] Vuillet,A., *The High Speed Helicopter,* Presented at the 18th European Rotorcraft Forum, Avignon, France, September, 15-18, 1992.

[2] Perry,F.J., *Aerodynamics of the Helicopter World Speed Record,* 43rd Annual National Forum of the American Helicopter Society, May, 1987.

[3] Jane's All the World's Aircraft,1986-1987.

[4] Caradonna,F.X. and Tung,C., *A Review of Current Finite Difference Rotor Flow Methods,* Proceedings of the 42th Annual Forum of the American Helicopter Society, pp.967-983, Washington,D.C., June 1986.

[5] Caradonna,F.X. and McCroskey,W.J., *The Development of CFD Methods for Rotor Applications.*

[6] McCroskey,W.J. and Baeder,J.D., *Some Recent Advances in Computational Aerodynamics for Helicopter Applications,* International Symposium on Computational Fluid Dynamics, September 1985.

[7] McCroskey,W.J., *Some Rotorcraft Applications of Computational Fluid Dynamics,* NASA TM 100066, March 1988.

[8] Desopper,A. Lafon,P., Ceroni,P. and Philippe,J.J., *Ten Years of Rotor Studies at ONERA,* Presented at the 42nd Annual National Forum of the American Helicopter Society, Washington,D.C., June 2-4, 1986.

[9] Janakiram,R.D. Hassan,A.A. and Agarwal,R.K., *Rotorcraft Computational Fluid Dynamics - Recent Developments at Mcdonnell Douglas,* 14th European Rotorcraft Forum, Paper No.16, September 1988.

[10] Edited by Nixon,D., *Unsteady Transonic Aerodynamics,* Progress in Astronautics and Aeronautics Volume 120, AIAA, 1989.

[11] Philippe,J.J. and Chattot,J.J., *Experimental and Theoretical Studies on Helicopter Blade Tips at ONERA,* ONERA TP 1980-96, September 1980.

[12] Scott,M.,Sigl,D. and Strawn,R., *Computational and Experimental Evaluation of Helicopter Rotor Tips for High Speed Forward Flight,* AIAA Paper 89-1845, June 1989.

[13] Caradonna,F.X. and Isom,M.P., *Subsonic and Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades,* AIAA Journal, Vol.10, No.12, pp 1606-1612, December, 1972.

[14] Ballhaus,W.F. and Caradonna,F.X., *The Effect of Planform Shape on the Transonic Flow Past Rotor Tips,* Aerodynamics of Rotary Wings, AGARD CP-111, Feb. 1973.

[15] Caradonna,F.X. and Isom,M.P., *Numerical Calculation of Unsteady Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades,* AIAA Journal, Vol.14, No.4,1976.

[16] Ballhaus,W.F. and Steger,J.L., *Implicit Approximate Factorization Schemes for the Low-Frequency Transonic Equation,* NASA TM X-73082, Nov. 1975.

[17] Caradonna,F.X. and Philippe,J.J., *The Flow over a Helicopter Blade Tip in the Transonic Regime,* Vertica, vol.2, 1978.

[18] Isom,M.P., *Unsteady Subsonic and Transonic Potential Flow Over Helicopter Rotor Blades,* NASA Contractor Report, October 1974.

[19] Tung,C., Caradonna,F.X., Boxwell,D.A. and Johnson,W.R., *The Prediction of Transonic Flow on Advancing Rotors,* Presented at the 40th Annual Forum of the American Helicopter Society, Arlington VA, May, 16-18, 1984.

[20] Arieli,R. and Tauber,M.E., *Computation of Subsonic and Transonic Flow about Lifting Rotor Blades,* AIAA Paper 79-1667.

[21] Chang,I.C., *Transonic Flow Analysis for Rotors Part I, Three Dimensional, Quasi-Steady, Full-Potential Calculation,* NASA TP-2375, 1984.

[22] Chang,I.C., *Transonic Flow Analysis for Rotors Part I, Three Dimensional, Unsteady, Full-Potential Calculation,* NASA TP-2375, 1985.

[23] Strawn,R.C. and Caradonna,F.X., *Conservative Full-Potential Model for Unsteady Transonic Rotor Flows,* AIAA Paper 86-0079, February 1986.

[24] Steger,J.L. and Caradonna,F.X., *A Conservative Implicit Finite Difference Algorithm for the Unsteady Transonic Full Potential Equation,* AIAA Paper 80-1368, 1980.

[25] Bridgeman,J.O., Strawn,R.C. and Caradonna,F.X., *An Entropy and Viscosity Corrected Potential Method for Rotor Performance Prediction,* Presented at the 44th Annual Forum of the American Helicopter Society, Washington,D.C., June 16-18, 1988.

[26] Chang,I.C. and Tung,C., *Numerical Solution of the Full-Potential Equation for Rotors and Oblique Wings Using a New Wake Model,* AIAA Paper 85-0268.

[27] Egolf,T.A. and Sparks,S.P., *Hovering Rotor Airload Prediction Using a Full-Potential Flow Analysis with Realistic Wake Geometry,* Proceedings of the 41th Annual Form of the AHS, May, 1985.

[28] Sankar,N.L. and Prichard,D.S., *Solution of the Transonic Flow Past Rotor Blades Using the Conservative Full-Potential Equations,* AIAA Paper 85-5012, October 1985.

[29] Arieli,R. and Tauber,M.E., *Computation of Transonic Flow about Helicopter Rotor Blades,* AIAA Journal Vol.24 No.5, April 1986.

[30] Egolf,T.A., *A Full Potential Rotor Analysis With Wake Influence Using An Inner-Outer Domain Technique,* The 42nd Annual Forum of the AHS, June 1986.

[31] Aoyama,T., Kawachi,K. and Saito,S., *Unsteady Calculation for Flowfield of Helicopter Rotor with Various Tip Shape,* 18th European Rotorcraft Forum, Paper No. B03, September 1992.

[32] Sankar,N.L. and Tung,C., *Unsteady Euler Calculations of Rotor Blades in Forward Flight,* Presentation at the NASA Ames Research Center, August 1984.

[33] Sankar,N.L. Wake,B.E. and Lekoudis,S.G., *Solution of the Unsteady Euler Equations for Fixed and Rotor Wing Configurations,* AIAA Paper 85-0120, January 1985.

[34] Sankar,N.L. and Tung,C., *Euler Calculations for Rotor Configurations in Unsteady Forward Flight,* Proceedings of the 42th Annual National Forum of the AHS,1986.

[35] Sankar,N.L., Wake,B.E. and Lekoudis,S.G., *Solution of the Unsteady Euler Equations for Fixed and Rotor Wing Configurations,* J.Aircraft Vol.23, No.4, April 1986.

[36] 青山剛史, 河内啓二, 齊藤茂, ホバリング・ロータに及ぼす翼端形状の影響, 第7回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 1989.

[37] Agarwal,R.K. and Deese,J.E., *Euler Calculation for Flowfield of a Helicopter Rotor in Hover,* AIAA Paper 86-1782.

[38] Agarwal,R.K. and Deese,J.E., *"An Euler Solver for Calculating the Flowfield of a Helicopter Rotor in Hover and Forward Flight,* AIAA Paper 87-1427.

[39] Chang,I.C. and Tung,C., *Transonic Flow Analysis for Rotors Part 3 - Three Dimensional, Quasi-steady Euler Calculation,* NASA TP-2375, 1990.

[40] Chen,C.L. and McCroskey,W.J., *Numerical Simulation of Helicopter Multi-Bladed Rotor Flow,* AIAA Paper 88-0046, January 1988.

[41] Chen,C.L., McCroskey,W.J. and Ying,S.X., *Euler Solution of Multiblade Rotor Flow,* Vertica Vol.12, No.3, pp. 303-313, 1988.

[42] Chen,C.L. McCroskey,W.J. and Obayashi,S., *Numerical Solutions of Forward-Flight Rotor Flow Using an Upwind Method,* AIAA Paper 89-1846.

[43] Kramer,E. Hertel,J. and Wagner,S., *Computation of Subsonic and Transonic Helicopter Rotor Flow Using Euler Equations,* Vertica Vol.12, No.3, pp.279-291, 1988.

[44] Kroll,N., *Computation of the Flow Fields of Propellers and Hovering Rotors Using Euler Equations,* 12th European Rotorcraft Forum, Paper No.28, September, 1986.

[45] Roberts,T.W. and Murman,E.M., *Solution Method for a Hovering Helicopter Using the Euler Equations,* AIAA Paper 85-0436, Taiwan, December 1985.

[46] Roberts,T.W. and Murman,E.M., *Euler Solution for the Flow Around a Hovering Helicopter Rotor,* AIAA Paper 86-1784, 1986.

[47] Jameson,A., Schmidt,W. and Turkel,E., *Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes,* AIAA Paper 81-1259, 1981.

[48] Wake,B.E. and Sankar,L.N., *Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Flow About a Rotor Blade,* Journal of the American Helicopter Society, April, 1989.

[49] Aoyama,T., Saito,S. and Kawachi,K., *Navier-Stokes Analysis of Blade Tip Shape in Hover,* 16th European Rotorcraft Forum, September 1990.

[50] Srinivasan,G.R. and McCroskey,W.J., *Navier-Stokes Calculations of Hovering Rotor Flowfields,* Journal of Aircraft Vol.25, No.10, 1988.

[51] Srinivasan,G.R., Baeder,J.D., Obayashi,S. and McCroskey,W.J., *Flowfield of a Lifting Hovering Rotor - a Navier-Stokes Simulation,* 16th European Rotorcraft Forum, September 1990.

[52] 青山剛史, 河内啓二, 齊藤茂, ホバリング・ロータ周りの流れの粘性解析, 第 8 回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 1990.

[53] Agarwal,R.K. and Deese,J.E., *Navier-Stokes Calculations of the Flowfield of a Helicopter Rotor in Hover,* AIAA Paper 88-0106.

[54] Matuo,Y.,Saito,S.,Arakawa,C. and Kobayashi,H., *Navier-Stokes Simulations Around a Propfan Using Higher-Order Upwind Schemes,* AIAA Paper 89-2699, 1989.

[55] 松尾裕一, 博士論文, 1989.

[56] Anderson,D.A.,Tannehill,J.C. and Pletcher,R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer,* Hemisphere Publishing Corporation, 1984.

[57] Beam,R.M. and Warming,R.M., *An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Laws,* Journal of Computational Physics, Vol.22, 1976.

[58] Pulliam,T.H. and Chaussee,D.S., *A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm,* Journal of Computational Physics, Vol. 39, 1981.

[59] Pulliam,T.H. and Steger,J.L., *Recent Improvement in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithm,* AIAA Paper 85-0360, 1985.

[60] Harten,A., *High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,* Journal of Computational Physics, Vol.49, 1983, pp.357-393.

[61] Chakravarthy,S.R. and Osher,S., *A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,* AIAA Paper 85-0363.

[62] Roe,P.L., *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes,* Journal of Computational Physics, Vol.43, 1981.

[63] Steger,J.L.and Warming,R.F., *Flux Vector Splitting of Inviscid Gasdynamic Equation with Application to Finite-Difference Methods,* Journal of computational Physics, Vol.40, 1981, pp.263-293.

[64] Obayashi,S. and Fujii,K., *Computation of Three-Dimensional Viscous Transonic Flows with the LU Factored Scheme,* AIAA Paper 85-1510, 1985.

[65] Rai,M.M., *Unsteady Three-Dimensional Navier-Stokes Simulations of Turbine Rotor-Stator Interaction,* AIAA Paper 87-2058, San Diego, June 1987.

[66] Thomas,J.L. and Salas,M.D., *Far-Field Boundary Conditions for Transonic Lifting Solutions to the Euler Equations,* AIAA Paper 85-0020, January, 1985.

[67] 加藤寛一郎, 今永勇生, ヘリコプタ入門, 東京大学出版会, 1985.

[68] Caradonna,F.X., Tung,C. and Desopper,A., *Finite Difference Modeling of Rotor Flows Including Wake Effects,* 8th European Rotorcraft Forum, August 1982.

[69] Balch,D.T., *Full-Scale Wind Tunnel Tests of a Modern Helicopter Main Rotor Correlation with Model Rotor Test Data and with Theory,* Presented at the 34th

Annual National Forum of the American Helicopter Society, Washington,D.C., May 1978.

[70] Rabbott,Jr,J.P. and Niebanck,C.F., *Experimental Effects of Tip Shape on Rotor Control Loads,* AHS Annual Forum, No.78-61, Washington,D.C., May 1978.

[71] Stroub,R.H., *Full-Scale Wind Tunnel Tests of a Modern Helicopter Main Rotor - Investigation of Tip Mach Number Effects and Comparison of Four Tip Shapes,* AHS Annual Forum, No.78-61, Washington,D.C., May 1978.

[72] Stroub,R.H., Rabbott,Jr.J.P. and Niebanck,C.F., *Rotor Blade Tip Shape Effects on Performance and Control Loads From Full-Scale Wind Tunnel Testing,* Journal of the AHS, October 1979.

[73] McVeigh,M.A. and McHugh,F.J., *Influence of Tip Shape, Chord, Blade Number, and Airfoil on Advanced Rotor Performance,* 38th Annual Forum of the AHS, May 1982.

[74] Caradonna,F.X., Laub,G.H., and Tung,C., *An Experimental Investigation of the Parallel Blade-Vortex Interaction,* 10th European Rotorcraft Forum, Paper 4, 1984.

[75] Caradonna,F.X. and Philippe,J.J., *The Flow over a Helicopter Blade Tip in the Transonic Regime,* 2nd European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, September 1976.

[76] *US Army Helicopter Design Datcom,* Vol.1 Airfoils, Boeing Doc. N ° 0210-1197-1, May 1976.

[77] Nakamichi,J., *A Verification of Unsteady Navier-Stokes Solutions Around Oscillating Airfoils,* NASA TM 88341, September 1986.

[78] Spivey,W.A. and Morehouse,G.G., *New Insights into the Design of Swept-Tip Rotor Blades,* AHS Annual Forum, Washington,D.C., June 1970.

[79] Riley,M.J. and Miller,J.V., *Pressure Distributions on a Helicopter Swept Tip from Flight tests and from Calculations,* AIAA Paper No.9, September 1983.

[80] Riley,M.J., *Measurement of the Performance of a Helicopter Swept Tip Rotor in Flight,* 12th European Rotorcraft Forum, September 1986.

[81] Cebeci,T and Smith,A.M.O., *Analysis of Turbulent Boundary Layers,* Academic Press, 1974.

[82] Launder,B.E. and Spalding,D.B., *Mathematical Models of Turbulence,* Academic Press, 1974.

[83] Coakley,T.J., *Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations,* AIAA Paper 83-1693.

[84] Azuma,A. Nasu,K. and Hayashi,T., *An Extension of the Local Momentum Theory to the Rotors Operating in a Twist Flow Field,* Vertica, Vol.7, No.1, 1983.

[85] Harris,C.D., *Two-dimensional Aero-dynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel,* NASA TM 81927, April, 1981.

[86] Caradonna,F.X. and Tung,C., *Experimental and Analytical studies of a Model Helicopter Rotor in Hover,* 6th European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, September, 1980.

[87] Baldwin,B. and Lomax,H., *Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows,* AIAA Paper 78-257, 1978.

[88] 齊藤茂, 久保田弘敏, 回転翼まわりの三次元流れの数値解析, ターボ機械第 13 巻第 11 号, 1985.

[89] Duque,E.P.N., *A Numerical Analysis of the British Experimental Rotor Program Blade,* Presented at the 45nd Annual Forum of the American Helicopter Society, Boston, Mass., May 1989.

[90] Ffowcs,J.E. and Hawkings,D.L., *Sound Generation by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion,* Philosophical Trans. of the Royal Society of London, Series A, Vol.264, 1969.

[91] Schmitz,F.H. and Yu,Y.H., *Transonic Rotor Noise - Theoretical and Experimental Comparisons,* Vertica, Vol., 1981.

[92] Baeder,J.D., *Euler Solution to Nonlinear Acoustics of Non-Lifting Hovering Rotor Blades,* 16th European Rotorcraft Forum, September 1990.

[93] Purcell,T.W., *A Computational and Experimental Study of High-Speed Impulsive Noise From a Rotating Cylinder,* AIAA Paper 87-0253, Reno, Nevada, January 1987.

[94] Purcell,T., *A Prediction of High-Speed Rotor Noise,* AIAA Paper 89-1132, San Antonio, TX, April 1989.

[95] Isom,M., Purcell,T.W. and Strawn,R.C., *Geometrical Acoustics and Transonic Helicopter Sound,* AIAA Paper 87-2748, Sunnyvale, California, October 1987.

[96] Prieur,J, *Importance of an Accurate Prediction of Shock Curvature for High-Speed Rotor Noise,* Journal of the AHS, January 1992.

[97] 神尾純一, 河内啓二, 齊藤茂, 青山剛史, 遷音速ロータ騒音の計算, 第6回数値流体力学シンポジウム論文集, 1992.

[98] Boxwell,D.A., Yu,Y.H. and Schmitz,F.H., *Hovering Impulsive Noise : Some Measured and Calculated Results,* Vertica Vol.3, 1979.

[99] Tauber,M.E., *Computerized Aerodynamic Design of a Transonically "QUIET" Blade,* Presented at the 40th Annual Forum of the American Helicopter Society, Crystal City Virginia, May, 16-18, 1984.

[100] Weissinger,J., *Uber die Auftriebsverteilung von Pfeilflugeln,* Forsch. Deutsch. Lufo. 13, 1942.

[101] 河内啓二, 航空機力学特論講義ノート, 1987.

[102] Castles,Jr.W. and Leeuw,J.H.D., *The Normal Component of the Induced Velocity in the Vicinity of a Lifting Rotor and Some Examples of Its Application,* NACA Report 1184, 1954.

Appendix A

Moving-Grid の解説

Moving Grid Method の手法は、CFD を振動翼の空気力の計算や弾性変形を含む翼の空気力の計算に適用する際に、しばしば用いられる手法である。この手法では、2 次元を例にとると、ある時刻での格子点 $(x^n_{i,j}, y^n_{i,j})$ を用いて、次の時刻での格子点 $(x^{n+1}_{i,j}, y^{n+1}_{i,j})$ を以下のような式によって求める。

$$\begin{aligned} x^{n+1}_{i,j} &= x^n_{i,j} + \Delta x_{i,j} \\ y^{n+1}_{i,j} &= y^n_{i,j} + \Delta y_{i,j} \end{aligned} \qquad \text{(A.1)}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Delta x_{i,j} &= \Delta x_i \sqrt{1-(\eta^\star)^2} \\ \Delta y_{i,j} &= \Delta y_i \sqrt{1-(\eta^\star)^2} \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

であり、Δx_i と Δy_i は $\eta = 0$ 、即ち翼面上（C 型格子では、翼後縁から伸びるウェイク・カットの部分も含む）での格子点の変化分を表し、$\eta^\star$ は以下のような関数である。

$$\eta^\star = \begin{cases} 0 & ; \quad \eta \le \eta_0 \\ \frac{\eta - \eta_0}{\eta_{max} - \eta_0} & ; \quad \eta > \eta_0 \end{cases}$$

ただし、η_0 は 0 から η_{max} までの間の値をとり、ここではη_{max}の 0.7 倍としている。

この手法によって格子点は簡単に求まるが、メトリックは計算し直す必要がある。その際、定常計算では $\xi_t, \eta_t, \zeta_t,$ など時間微分に関するものは 0 となっていたが、非定常計算では

$$\begin{aligned} \xi_t &= -x_t \xi_x - y_t \xi_y - z_t \xi_z \\ \eta_t &= -x_t \eta_x - y_t \eta_y - z_t \eta_z \end{aligned} \qquad \text{(A.3)}$$

$$\zeta_t = -x_t\zeta_x - y_t\zeta_y - z_t\zeta_z$$

などとして考慮しなければならない。

Appendix B

Baldwin-Lomax モデルの解説

Baldwin-Lomax による代数モデルは、Cebeci-Smith の壁境界層モデルを改良したもので、境界層外端の位置を直接求める必要がない。乱流粘性係数μ_tを求める際には、乱流境界層をレイノルズ応力が運動量交換に重要な役割を果たす内層 (inner layer) と乱れの発生が小さい外層 (outer layer) に分けて、それぞれの層でμ_tを求め、常に小さい方の値を使うことによって内層と外層を切り替える。

まず内層の渦粘性係数は以下の式で求める。

$$(\mu_t)_{inner} = \rho l^2 |\omega| Re \tag{B.1}$$

ここで渦度 $|\omega|$ と混合距離 lはそれぞれ

$$|\omega| = \sqrt{(u_y - v_x)^2 + (v_z - w_y)^2 + (w_x - u_z)^2} \tag{B.2}$$

$$l = \kappa s \{1 - \exp(\frac{-s^+}{A^+})\} \tag{B.3}$$

と表される。ただし$\kappa = 0.4$、$A^+ = 26$ で、s は壁からの距離、s^+は以下の式で与えられる。

$$s^+ = \frac{s\sqrt{\rho_w \tau_w Re}}{\mu_w} \tag{B.4}$$

ここで、添字の wは壁での値を意味し

$$\tau_w = \mu_w |\omega|_w \tag{B.5}$$

である。

また Clauser によれば、外層では渦粘性は一定なので、以下の式で外層の渦粘性係数を求める。

$$(\mu_t)_{outer} = \rho K C_{cp} F_{wake} F_{Kleb} Re \tag{B.6}$$

ただし

$$F_{wake} = \begin{cases} s_{max}F_{max} & \text{at boundary} \\ C_{wk}s_{max}\frac{V_{DIF}^2}{F_{max}} & \text{at wake} \end{cases} \tag{B.7}$$

であり、関数 F は

$$F(s) = \begin{cases} s|\omega|\{1-\exp\left(\frac{-s^+}{A^+}\right)\} & \text{at boundary} \\ s|\omega| & \text{at wake} \end{cases} \tag{B.8}$$

で表される。ここで $K = 0.0168$ 、$C_{cp} = 1.6$ 、$C_{wk} = 0.25$ とした。また

$$V_{DIF}^2 = V_{max}^2 - V_{min}^2 \tag{B.9}$$

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \tag{B.10}$$

であり、乱流の間欠性を表す Klebanoff の因子 F_{Kleb} は

$$F_{Kleb} = [1 + 5.5(C_{Kleb}\frac{s}{s_{max}})^6]^{-1} \tag{B.11}$$

と表される。ただし $C_{Kleb} = 0.3$ とした。内層から外層への切り換えは

$$\mu_t = min[(\mu_t)_{inner}, (\mu_t)_{outer}] \tag{B.12}$$

で行う。

Appendix C

VLM の解説

ここで用いたパネル法は揚力面理論に基づいたものであり、ヘリコプタで特に重要になってくる後流渦の形状としては、実験結果に基づいたプレスクライブド・ウェイクのモデルを用いている。また、ここでは非粘性流れを仮定しているが、圧縮性に関してはプラントル・グラワート則を用いることによって考慮している。計算は大きく分けて以下の5つの手順に従って進められる。

(1) ブレード面を四角形のパネルに分割し、ねじり・テーパ・後退角などを考えて幾何形状を決定する。

(2) 各パネルをそれぞれ強さの異なる螺旋形馬蹄渦で代表させる。

(3) 各パネル上のコントロール・ポイントでの全ての渦による誘導速度をビオ・サバールの法則により求める。

(4) 一様流速度と誘導速度の和である合成速度が、コントロール・ポイントでパネル面に沿うという境界条件で、各パネルの循環の強さを求める。

(5) 各束縛渦の中点に働く空気力を、クッタ・ジューコフスキーの定理で求める。

以下に上記5項目の解説を行う。

C.1 ブレードの幾何形状

まず各軸を以下のように定めた、ブレード固定の回転座標系を考える。

x 軸：ブレードの半径方向で、翼根から翼端に向かう向きを正とする

y 軸：ブレードのコード方向で、前縁から後縁に向かう向きを正とする

z 軸：x, y両軸に直交し、右手系をなす向きを正とする

ただし、ブレードの回転中心を原点とした。次にブレードを半径方向に N_r 個、コード方向に N_c 個に分割する。この際、コード方向は等分割にするが、半径方向は cos 関数に従って翼端側と翼根側でパネルが細かくなるようにする。この分割法はヘリコプタの計算によく用いられている。また、ねじり角・テーパ・後退角は 1/4 弦線で定義する。

本解析では、主に圧縮性の影響がでてくる程度の回転速度を考えているので、高亜音速では各パネル毎にプラントル・グラワートの法則が成り立つとして、この影響を入れることを考えた。具体的には i 番目のパネルの後退角をΛ_iとすれば、$\overrightarrow{I_i}$ ($= \overrightarrow{L_iT_i}$)とその中点 BV_iでの幾何学的速度 v_{GBVi}とのなす角は$\pi/2 - \Lambda_i$なので

$$\overrightarrow{v_{GBVi}} \cdot \overrightarrow{I_i} = |\overrightarrow{v_{GBVi}}| \cdot |\overrightarrow{I_i}| \cos(\frac{\pi}{2} - \Lambda_i) \tag{C.1}$$

より

$$\Lambda_i = \sin^{-1}(\frac{\overrightarrow{v_{GBVi}} \cdot \overrightarrow{I_i}}{|\overrightarrow{v_{GBVi}}| \cdot |\overrightarrow{I_i}|}) \tag{C.2}$$

となる。ここで局所マッハ数を

$$M_i = \frac{|\overrightarrow{v_{GBVi}}|}{a_0} \tag{C.3}$$

とすれば、プラントル・グラワートの法則より

$$\mu_i = (1 - M_i^2 \cos^2 \Lambda_i) \tag{C.4}$$

で決まるμ_iを用いて、各パネルをコード方向に $1/\mu_i$倍することによって、圧縮性の影響を入れることができる。ただし a_0は音速である。従って、全コード長は$\sum_i(1/\mu_i)/N_c$倍となるので、スパン方向の分割線を$\sum_i(1/\mu_i)/N_c$倍してコード方向に N_c等分し、新たなパネル形状を設定する。

ただしヘリコプタの場合、各半径位置によって流入速度が異なるため、半径位置によってコード長の伸びにかなり差ができ、特に遷音速では翼端部分がかなりの速度に達するため、この方法を用いると、翼端部分の変形が大きくなり、重要な翼端渦などの幾何形状に影響を及ぼすので、よい結果を得ることはできない。

C.2 各パネルの渦を表す螺旋形馬蹄渦

ホバリング状態を考えれば、ブレードに固定した回転座標系から見ると、流れは定常的になり、また循環の時間的変化によって放出される放出渦 (shed-vortex) はな

いので、各パネルを Fig.C.1 のように以下の 3 つの部分からなる螺旋系馬蹄渦で代表することができる。

(A) パネルの 1/4 弦線上にあるバウンド・ボルテックス (bound-vortex)

(B) バウンド・ボルテックスの両端からブレード後縁まで伸びる直線的なトレーリング・ボルテックス (trailing-vortex)

(C) ブレード後縁から無限遠まで続く曲線状のトレーリング・ボルテックス

Weissinger[100] によれば、翼を代表する循環Γの渦を 1/4 弦線に置き、ピッチ角を α とした場合

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi l} \tag{C.5}$$

で表される誘導速度 w が $v_0 sin\alpha$ となる点の位置 l を求めると

$$l = \frac{\Gamma}{2\pi v_0 \alpha} = \frac{v_0 c C_l}{2}\frac{1}{2\pi v_0 \alpha} \tag{C.6}$$

となる。ここで、揚力傾斜を 2π とし

$$C_l = 2\pi\alpha \tag{C.7}$$

を上式に代入すれば

$$l = \frac{c}{2} \tag{C.8}$$

を得ることができる。従って、前縁から 3/4 コードの所にコントロール・ポイントを取ることと、揚力傾斜に 2π を用いることが等価であることになる。これを各パネルに適用し、コントロール・ポイントはパネルの 3/4 弦線の中点に置き、空気力はバウンド・ボルテックスの中点で計算する。

(C) の部分の形状については、以下の 3 つのモデルが考えられる。

(a) ヘリカル・ウェイク (helical wake)

(b) プレスクライブド・ウェイク (prescribed wake)

(c) フリー・ウェイク (free wake)

ヘリカル・ウェイク [88] とは、後流渦が各半径位置でのディスプレースメント速度と一様流速度の合成速度によって、螺旋形に落ちて行くとするモデルである。しかしこのモデルは、内側の渦シートとロール・アップした外側の翼端渦が縮流しなが

ら落ちて行くという、実際のヘリコプタ後流形状とはかなり異なるため、推力やトルクを精度よく見積もることができない。

そこで、実際の後流形状を実験から求め、それを実験式としてまとめることによってヘリカル・ウェイクの欠点を補ったものが、プレスクライブド・ウェイクと呼ばれるモデルである。このモデルの中でよく使われるものに、以下の3つがある。

- Kocurek and Tangler Wake
- Landgrebe Wake
- Kocurek, Berkowitz and Harris Wake

ここでは、比較的低アスペクト比のブレードを計算対象としていることから、低アスペクト比でも適用可能な Kocurek, Berkowitz and Harris Wake (K.B.H.Wake)[101] を用いた。

一例として、半径 $1.143[m]$ 、コード長 $0.1905[m]$ 、アスペクト比 6.0 、ピッチ角 8°、回転角速度 $1250[rpm]$ という条件で計算した場合、推力係数の実験値が 4.6×10^{-3} であるのに対して、ヘリカル・ウェイクを用いた計算では 7.8×10^{-3} 、プレスクライブド・ウェイクを用いた計算では 5.9×10^{-3} であった。従って、ホバリングのように渦が流れ去らずにブレード付近に留まって、流れ場に大きな影響を与える場合、ウェイクのモデルがいかに重要かがわかる。

以下に、おおまかな概念図が Fig.C.2 のように表される K.B.H.Wake の実験式を示す。

$$\frac{Z}{R} = \begin{cases} K_1\phi & (\phi \leq \frac{2\pi}{b}) \\ K_1(\frac{2\pi}{b}) + K_2(\phi - \frac{2\pi}{b}) & (\phi < \frac{2\pi}{b}) \end{cases} \tag{C.9}$$

$$\frac{r}{R} = K_4 + (1 - K_4)exp(-K_3\phi) \tag{C.10}$$

ただし、翼端渦では

$$\begin{aligned} K_1 &= -1.06[(\frac{b}{2\pi})^{0.5}(\frac{\Gamma_{tv}}{R^2\Omega})]^{0.8} \\ K_2 &= -0.813[(\frac{b}{2\pi})(\frac{\Gamma_{tv}}{R^2\Omega})]^{0.5} \\ K_3 &= 3.25[(\frac{b}{2\pi})(\frac{\Gamma_{tv}}{R^2\Omega})]^{0.5} \\ K_4 &= 0.78 \end{aligned} \tag{C.11}$$

渦シートの外側では

$$K_1 = -2.2\frac{\sqrt{C_T}}{2}$$

$$K_2 = -2.7\frac{\sqrt{C_T}}{2} \tag{C.12}$$

内側では

$$\begin{aligned} K_1 &= 0 \\ K_2 &= [(\frac{\theta_t}{128})(0.45\theta_t + 18)]\frac{\sqrt{C_T}}{2} \end{aligned} \tag{C.13}$$

である。ここで、Z はブレードから下方に取った座標系での位置、r は半径方向の位置、R はブレード半径、ϕ は回転角、b はブレード枚数、Ω は回転角速度、Γ_{tv} は翼端渦の強さ、そして C_T は推力係数を表す。また、Γ_{tv} は Fig.C.3 より

$$\begin{aligned} \Gamma_{tv} &= (\Gamma_1 - \Gamma_2) + (\Gamma_2 - \Gamma_3) + \cdots\cdots + (\Gamma_{n-1} - \Gamma_n) + \Gamma_n \\ &= \Gamma_1 \\ &= \Gamma_{max} \end{aligned} \tag{C.14}$$

なので、ブレード上の循環の最大値と等しくなる。縮流の仕方は渦シートでも翼端渦でも同じだが、吹き下ろしは内側だけなので、翼端渦は渦シートより落ちる速度が遅い。先に半径方向のパネル分割は cos 関数に従うと述べたが、このモデルを適用する場合は、渦シートになる部分と翼端渦としてロール・アップしていく部分の境目でもパネルが細かくなるように、境目から内側と外側に分けて、両者を cos 関数によって再分割している。この操作によっても、推力係数の予測に多少の改善が見られる。

最後にフリー・ウェイクだが、まずブレード後縁から放出されるトレーリング・ボルテックスをフィラメントに分ける。そして、すべてのフィラメントについて、それぞれ他の渦から誘導される速度を求め、それに基づいて渦を動かし、再配置された状態で、また誘導速度を求めて渦を動かすという操作を収束するまで繰り返し、渦位置を決めるという手法である。この方法は、セルフコンシステントな渦位置が求められるという利点はあるものの、常に渦同士の接近による発散の危険が伴うので、これを回避するためのノウハウを知る必要がある上、多大な計算時間を要するという欠点がある。

以上 3 つのモデルの中で、本解析においてはプレスクライブド・ウェイクを用いた。

C.3 コントロール・ポイントでの誘導速度

まず Fig.C.1 の、k番目のブレードの i 番目のパネルを代表する渦の循環の強さを $\Gamma_{i,k}$とする。こうすると、考えているブレードの j番目のパネルのコントロールポイント C_jに誘導される速度はビオ・サバールの法則から計算でき、それは先の 3 種類（(A) ~ (B)）の渦による誘導速度の重ね合わせとなる。以下に、その計算法を述べる。まず、束縛渦$\overrightarrow{L_{i,k}T_{i,k}}$による誘導速度$\overrightarrow{V_{Bi,j,k}}$を

$$\frac{\overrightarrow{V_{Bi,j,k}}}{R\Omega} = \frac{\Gamma_{i,k}}{4\pi R}\frac{1}{R\Omega}[\ F_{uBi,j,k}\ ,\ \ F_{vBi,j,k}\ ,\ \ F_{wBi,j,k}\ ]^T \tag{C.15}$$

と書く。ここで、$F_{uBi,j,k}, F_{vBi,j,k}, F_{wBi,j,k}$はそれぞれ x, y, z 方向の影響係数であり

$$[\ F_{uBi,j,k}\ ,\ \ F_{vBi,j,k}\ ,\ \ F_{wBi,j,k}\ ]^T = I_{Bi,j,k}\overrightarrow{L_{i,k}T_{i,k}} \times \overrightarrow{L_{i,k}C_j} \tag{C.16}$$

と表される。上式で用いた記号については以下に示す。

$$I_{Bi,j,k} = \frac{1}{a_Bc_B - b_B^2}[\frac{(a_B + b_B)}{\sqrt{a_B + 2b_B + c_B}} - \frac{b_B}{\sqrt{c_B}}] \tag{C.17}$$

ただし

$$\begin{aligned}
a_B &= (X_{Ti,k} - X_{Li,k})^2 + (Y_{Ti,k} - Y_{Li,k})^2 + (Z_{Ti,k} - Z_{Li,k})^2 \\
b_B &= (X_{Ti,k} - X_{Li,k})(X_{Li,k} - X_{Cj}) + (Y_{Ti,k} - Y_{Li,k})(Y_{Li,k} - Y_{Cj}) \\
&+ (Z_{Ti,k} - Z_{Li,k})(Z_{Li,k} - Z_{Cj}) \\
c_B &= (X_{Cj} - X_{Li,k})^2 + (Y_{Cj} - Y_{Li,k})^2 + (Z_{Cj} - Z_{Li,k})^2
\end{aligned} \tag{C.18}$$

であり、ここで

$$\begin{aligned}
L_{i,k} &= (X_{Li,k}, Y_{Li,k}, Z_{Li,k}) \\
T_{i,k} &= (X_{Ti,k}, Y_{Ti,k}, Z_{Ti,k}) \\
C_j &= (X_{Cj}, Y_{Cj}, Z_{Cj})
\end{aligned} \tag{C.19}$$

である。

また、直線的なトレーリングボルテックス$\overrightarrow{TL_{i,k}L_{i,k}}$と$\overrightarrow{T_{i,k}TT_{i,k}}$による誘導速度$\overrightarrow{V_{Li,j,k}}$と$\overrightarrow{V_{Ti,j,k}}$もそれぞれ

$$\frac{\overrightarrow{V_{Li,j,k}}}{R\Omega} = \frac{\Gamma_{i,k}}{4\pi R}\frac{1}{R\Omega}[\ F_{uLi,j,k}\ ,\ \ F_{vLi,j,k}\ ,\ \ F_{wLi,j,k}\ ]^T \tag{C.20}$$

$$\frac{\overrightarrow{V_{Ti,j,k}}}{R\Omega} = \frac{\Gamma_{i,k}}{4\pi R}\frac{1}{R\Omega}[\ F_{uTi,j,k}\ ,\ \ F_{vTi,j,k}\ ,\ \ F_{wTi,j,k}\ ]^T \tag{C.21}$$

と表される。影響係数の求め方は先と同様である。

最後に、後縁から無限に続くトレーリングボルテックスによる誘導速度$\overrightarrow{V_{HTi,j,k}}$も同じく

$$\frac{\overrightarrow{V_{HTi,j,k}}}{R\Omega} = \frac{\Gamma_{i,k}}{4\pi R}\frac{1}{R\Omega}[\ F_{uHTi,j,k}\ ,\ \ F_{vHTi,j,k}\ ,\ \ F_{wHTi,j,k}\ ]^T \tag{C.22}$$

と表される。この場合は、無限遠まで続く螺旋形の渦をある長さで打ち切り、それを有限個のフィラメントに分割して、個々のフィラメントからの影響係数の和として影響係数を求める。ここでは計算時間節約のため螺旋形の渦は 6 周で打ち切り、それ以降は近似的に円筒渦であるとしてその影響係数を求めている。例えば底面が、原点を中心とし xy平面内にある単位円で、z軸の正の方向にまっすぐ無限遠まで続く円筒を考えると、この円筒渦が点 $P(x', y', z')$ に誘導する z方向の速度 vは

$$v = C_F\frac{b\Gamma}{2\pi R\sqrt{C_T/2}} \tag{C.23}$$

で与えられる [102] ので、影響係数 F_Fは

$$F_F = \frac{4\pi Rv}{\Gamma} = C_F\frac{2b}{\sqrt{C_T/2}} \tag{C.24}$$

となる。ただし、C_Fは以下の式で表される。

$$C_F = \frac{z'^2}{4(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{C.25}$$

C.4 各パネルでの循環の強さの決定法

コントロールポイント C_jでのパネルの法線ベクトルを$\boldsymbol{n}_{Cj}$、誘導速度$\overrightarrow{V_{Ij}}$と幾何学的速度$\overrightarrow{V_{Gj}}$の合成速度を$\overrightarrow{V_{Cj}}$とすれば、C_jで流れがパネル面に沿うという条件より

$$\overrightarrow{V_{Cj}} \cdot \boldsymbol{n}_{Cj} = 0 \tag{C.26}$$

となる。$\overrightarrow{V_{Cj}}$は

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{V_{Cj}}}{R\Omega} &= \frac{\overrightarrow{V_{Ij}} + \overrightarrow{V_{Gj}}}{R\Omega} \\ &= [\ \sum_i^m(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega})F_{uij} - r_{C_j}sin\gamma_{C_j}\ ,\ \ \sum_i^m(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega})F_{vij} - r_{C_j}cos\gamma_{C_j}\ , \\ &\quad\ \sum_i^m(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega})F_{wij}]^T\end{aligned} \tag{C.27}$$

と表される。ただし、mはパネルの総数、Γ_iはi番目のパネルの循環、r_{C_j}は原点から点C_jまでの距離、γ_{C_j}は点C_jの位置ベクトルがx軸となす角度、そして$F_{uij}, F_{vij}, F_{wij}$は、それぞれ$i$番目のパネルにおける各軸方向の影響係数の総和である。またブレード面を

$$Z = f(x,y) \tag{C.28}$$

と定義すれば

$$\boldsymbol{n}_{Cj} = grad[Z - f(x,y)]_{C_j} = [\ -(\frac{\partial f}{\partial x})_{C_j}\ ,\ \ -(\frac{\partial f}{\partial y})_{C_j}\ ,\ \ 1\ ]^T \tag{C.29}$$

となるので、式 (C.26) に代入して

$$\begin{aligned}&[\sum_i^m(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega})F_{uij} - r_{C_j}\sin\gamma_{C_j}](\frac{\partial f}{\partial x})_{C_j} + [\sum_i^m(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega})F_{vij} + r_{C_j}\cos\gamma_{C_j}](\frac{\partial f}{\partial y})_{C_j}\\ &= \sum_i^m(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega})F_{wij}\end{aligned} \tag{C.30}$$

を得る。これを

$$\sum_i^m A_{ji}(\frac{\Gamma_i}{4\pi R^2\Omega}) = B_j \qquad j = 1,2,\cdots,m \tag{C.31}$$

$$\begin{aligned}A_{ji} &= F_{uij}(\frac{\partial f}{\partial x})_{C_j} + F_{vij}(\frac{\partial f}{\partial y})_{C_j} - F_{wij}\\ B_j &= r_{C_j}[\sin\gamma_{C_j}(\frac{\partial f}{\partial x})_{C_j} - \cos\gamma_{C_j}(\frac{\partial f}{\partial y})_{C_j}]\end{aligned} \tag{C.32}$$

と書けば、式 (C.31) は$\Gamma_i/4\pi R^2\Omega$を未知数とする m 次元連立方程式となり、これを解くことによってΓ_iが決まる。

C.5 空気力の計算法

i番目のパネルに働く空気力$\overrightarrow{F_i}$は、クッタ・ジューコフスキーの定理より

$$\overrightarrow{F_i} = \rho\overrightarrow{V_{BVi}} \times \Gamma_i\overrightarrow{L_iT_i} \tag{C.33}$$

となる。ここで、$\overrightarrow{V_{BVi}}$は束縛渦L_iT_iの中点BV_iでの誘導速度$\overrightarrow{V_{IBVi}} = (u_{IBVi}, v_{IBVi}, w_{IBVi})$と幾何学的速度$\overrightarrow{W_{IBVi}}$の合成速度であり、上式を成分で書くと

$$\begin{aligned}F_{xi} &= \rho\Gamma_i[(v_{IBVi} + \hat{r}_{BVi}\Omega cos\gamma_{BVi})(\hat{Z}_{Ti} - \hat{Z}_{Li}) - w_{IBVi}(\hat{Y}_{Ti} - \hat{Y}_{Li})]\\ F_{yi} &= \rho\Gamma_i[-(v_{IBVi} - \hat{r}_{BVi}\Omega sin\gamma_{BVi})(\hat{Z}_{Ti} - \hat{Z}_{Li}) - w_{IBVi}(\widehat{X}_{Ti} - \widehat{X}_{Li})]\\ F_{zi} &= \rho\Gamma_i[(v_{IBVi} - \hat{r}_{BVi}\Omega sin\gamma_{BVi})(\hat{Y}_{Ti} - \hat{Y}_{Li})\\ &- (v_{IBVi} + \hat{r}_{BVi}\Omega cos\gamma_{BVi})(\widehat{X}_{Ti} - \widehat{X}_{Li})]\end{aligned} \tag{C.34}$$

を得る。ただし、r_{BVi}は原点から点 BVi までの距離、γ_{BVi}は点 BVi の位置ベクトルが x 軸となす角度であり、$\hat{}$ は有次元量を表す。こうして求まった$\overrightarrow{F_i}$を、推力成分とトルク成分に分解し、考えているブレードの全パネルについて足し合わせれば、ブレード 1 本当りの推力、トルクが求まる。これにブレード b 枚数をかければ

$$
\begin{aligned}
T &= -b\sum_{i}^{m} F_{zi} \\
Q &= b\sum_{i}^{m}(F_{yi}cos\gamma_{BVi} - F_{xi}sin\gamma_{BVi})\hat{r}_{BVi}
\end{aligned}
\qquad (C.35)
$$

のように、ロータ全体の推力 T とトルク Q が求まる。推力係数 C_Tとトルク係数 C_Qは

$$
\begin{aligned}
C_T &= \frac{T}{\rho\pi R^2(R\Omega)^2} \\
C_Q &= \frac{Q}{\rho\pi R^2(R\Omega)^2 R}
\end{aligned}
\qquad (C.36)
$$

のように定義した。