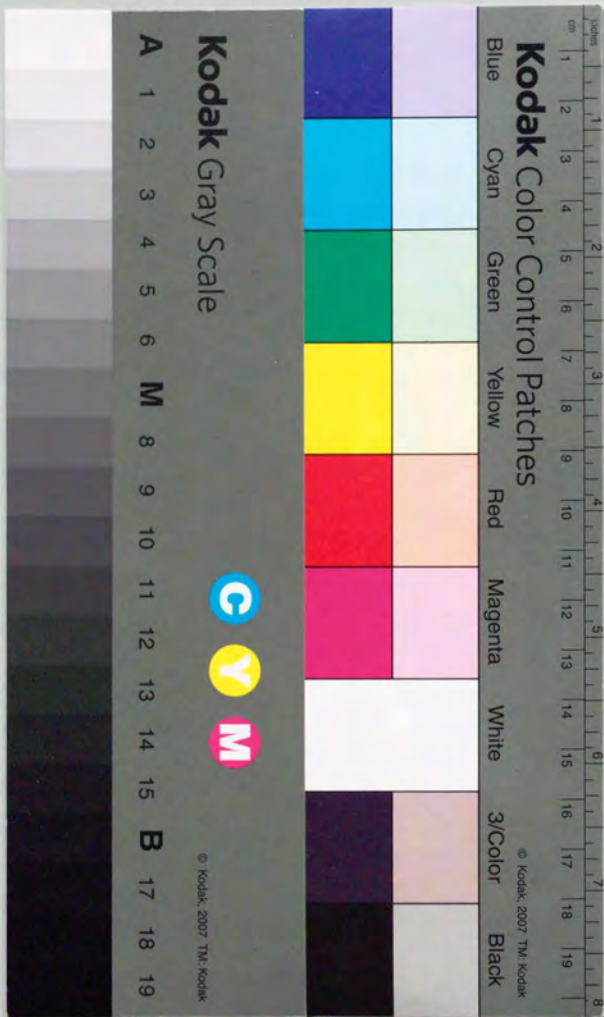


回転球殻ブシネスク対流
～ 赤道加速に関する考察

平成5年12月 博士(理学)申請

東京大学大学院 理学系研究科
地球惑星物理学専攻

竹 広 真 一



①

学位論文

《 Boussinesq convection in rotating
spherical shells : a study on the
equatorial superrotation 》

回転球殻ブシネスク対流
～赤道加速に関する考察

平成 5 年 12 月 博士(理学) 申請

東京大学大学院理学系研究科

地球惑星物理学専攻

竹広 真一

目次

要旨	vi
1 はじめに	1
2 支配方程式と問題へのアプローチ	5
2.1 支配方程式	5
2.1.1 ポテンシャルによる速度場の表現	8
2.1.2 境界条件	9
2.2 問題へのアプローチ	10
3 対流の臨界モード	11
3.1 これまでの研究	11
3.2 臨界モードの計算結果	15
3.3 臨界モードの性質	20
3.3.1 対流セルの伝播性質	20
3.3.2 対流柱の傾き～回転が速い場合	22
4 平均東西風生成～回転の遅い場合	24
4.1 以前の研究と問題点	24
4.2 平均東西風と平均子午面場～計算結果	29
4.3 各非線形項が引き起こす平均子午面場	33
4.4 線型応答問題	41
4.4.1 線型応答問題の定式化	41
4.4.2 強制項がない場合の性質	42
4.4.3 強制に対する定常応答解	43
4.4.4 数値計算との比較	45
4.5 まとめ	50
5 平均東西風生成～回転の速い場合	51
5.1 以前の研究と問題点	51
5.2 平均東西風と平均子午面場～計算結果	53

5.3 各非線形項が引き起こす平均子午面場	55
5.4 まとめ	59
6 結論および議論	60
謝辞	64
A ブシネスク球殻モデルの記述	65
A.1 基礎方程式	65
A.1.1 基礎方程式	65
A.1.2 境界条件	68
A.2 水平離散化	69
A.2.1 スペクトル展開	69
A.2.2 非線形項	70
A.2.3 方程式のスペクトル表現	72
A.3 鉛直離散化	74
A.3.1 レベルのとりかた	74
A.3.2 鉛直境界条件	75
A.4 線型解析	77
B 平板間の対流と球殻対流の対応	79
C 平均東西風分布一覧	81

図目次

1.1 太陽、外惑星の東西風分布	2
1.2 高速回転球殻の対流により引き起こされる東西風の模式図	3
2.1 考える系の模式図	6
3.1 Busse(1970b) で得られた臨界モードの模式図	12
3.2 $T-P$ 面上での対流の臨界モードの分類	13
3.3 高回転する球殻中に生じる対流の臨界モードの構造	14
3.4 回転が遅い場合の対流の臨界モード	16
3.5 回転が速い場合の対流の臨界モード(球殻厚)	17
3.6 回転が速い場合の対流の臨界モード(球殻薄)	18
3.7 対流の臨界波数と振動数の符号	19
3.8 対流セル構造の模式図とその伝播メカニズム	21
3.9 ロスビー波としてとらえた対流柱の傾斜	23
4.1 レイノルズストレスによる西風生成の模式図(回転小)	26
4.2 臨界モードの上端境界での水平風速場(回転小)	26
4.3 子午面循環による角運動量輸送の模式図	27
4.4 対流が引き起こす平均子午面場(回転小)	29
4.5 対流が引き起こす平均東西風(回転小)	30
4.6 対流が引き起こす平均子午面場(回転小, 球殻厚)	31
4.7 対流が引き起こす平均東西風(回転小, 球殻厚)	32
4.8 対流の臨界モードの非線形効果(回転小)	34
4.9 各非線形効果によって引き起こされる平均子午面場(回転小)	35
4.10 各非線形効果によって引き起こされる平均東西風(回転小)	37
4.11 対流の臨界モードの非線形効果(回転小, 球殻厚)	38
4.12 各非線形効果によって引き起こされる平均子午面場(回転小, 球殻厚)	39
4.13 各非線形効果によって引き起こされる平均東西風(回転小, 球殻厚)	40
4.14 線型応答モデルの模式図	42
4.15 東西加速によって引き起こされる東西風の模式図	44
4.16 東西加速に対する応答のバランスの模式図	46
4.17 球殻モデルと線型応答モデルの対応	47

4.18	臨界レイリー数と遷移レイリー数の比較	48
4.19	対流によって引き起こされた平均東西風 ($T = 10, 10^3$)	49
5.1	高速回転の下での対流セルの傾き (Busse 1983b)	52
5.2	対流が引き起こす平均子午面場 (回転大, 球殻厚)	53
5.3	対流が引き起こす平均東西風 (回転大, 球殻厚)	54
5.4	対流の臨界モードの非線形効果 (回転大, 球殻厚)	55
5.5	各非線形効果によって引き起こされる平均子午面場 (回転大, 球殻厚)	56
5.6	各非線形効果によって引き起こされる平均東西風 (回転大, 球殻厚)	58
5.7	対流が引き起こす平均東西風 (回転大, 球殻薄)	59
6.1	$T-P$ 面上での赤道外側境界の風向のダイアグラム	62
C.1	東西風分布図凡例	81
C.2	$T-P$ 面上での平均東西風分布 ($\eta = 0.3$)	82
C.3	$T-P$ 面上での平均東西風分布 ($\eta = 0.4$)	83
C.4	$T-P$ 面上での平均東西風分布 ($\eta = 0.5$)	84
C.5	$T-P$ 面上での平均東西風分布 ($\eta = 0.6$)	85
C.6	$T-P$ 面上での平均東西風分布 ($\eta = 0.7$)	86
C.7	$T-P$ 面上での平均東西風分布 ($\eta = 0.8$)	87

表目次

B.1	平板間対流の臨界値と球殻対流の臨界値の比較	80
-----	-----------------------	----

要旨

太陽および外惑星の赤道での風向を整理する観点から、一様内部熱源により駆動される回転球殻中の対流運動により引き起こされる平均子午面場を広いパラメータ範囲に渡って弱非線形的に求めた。計算したパラメータ範囲はブランドル数 P が $0.01 \leq P \leq 10^2$ 、テイラー数 T が $10^0 \leq T \leq 10^7$ 、球殻の内径外径比 η が $0.3 \leq \eta \leq 0.8$ である。

弱非線形計算の第1段階として臨界モードを数值的に計算し、その性質について物理的な解釈を与えた。求めた対流の臨界モードは球殻の厚さによらず回転が遅い時には西向き、速い時には東向きに伝播する性質を持つ。このことは回転系での渦柱の伸縮、すなわちロスビー波の伝播メカニズムによって解釈することができる。回転が遅い場合には臨界モードが球殻に沿う渦の構造を持つものに対して、回転が速い場合には回転軸方向に伸ばされた渦が外壁でゆがめられる構造であるため、子午面風が渦の回転軸方向の伸縮に関して正反対の構造になり伝播方向が逆向きになる。また、回転が速い時に現れる回転軸方向に伸びた対流セルの外側への傾斜もロスビー波の伝播性質を通して理解できる。

次に、得られた臨界モードを方程式の非線形項に代入し、対流が引き起こす平均子午面場を計算した。回転が遅い場合に得られた平均東西風は、ブランドル数を大きくすると赤道外側境界で西風から東風に転ずる傾向が見られる。このことは、レイノルズストレスによる角運動量輸送と平均子午面循環による輸送の相対的な強さの変化により説明される。ブランドル数が小さい場合に得られた平均東西風の赤道外側境界での風向は、対流運動のレイノルズストレスによる角運動量輸送により定まる。これに対して、ブランドル数が大きい場合には、熱起因の子午面循環による角運動量輸送により定まり赤道東風となる。一方、赤道風向の球殻の厚さに対する依存性は、球殻が厚いほど東風になりやすい傾向が見られる。このことは、球殻が厚い場合には運動量輸送による加速に対して反対向きの東西風が引き起こされる状態の発現によるものである。不安定成層流体の強制に対する線型応答問題を解いた結果から、強制の南北および鉛直波数 l, m だけで定まるレイリー数 $R_l(l, m) \equiv \frac{(l^2 + m^2)^3}{l^2}$ よりも臨界レイリー数が大きい場合に加速に対して反対向きの東西風が生じることが示される。また、このような状態が実現する理由は、コリオリ力により誘起される子午面循環が熱的不安定に助けられて東西風を逆向きにするまでに強くなるからである。

回転が速い場合に得られた平均東西風には回転が遅い場合と同様のブランドル数依存性が現れ、ブランドル数が大きいと赤道外側境界で西風から東風に転ずる傾向が見られる。しかしながら、球殻の厚さに対する依存性は見られない。その理由は、対流の臨界モードが回転軸方向に伸びた構造であるために、そのレイノルズストレスによる東西加速の分布が回転軸方向に一樣となっていることにある。その結果、子午面循環が引き起こされないので加速に対して反対向きの東西風が生成されない。

最後に求めた対流の引き起こす平均東西風の赤道外側境界における風向きを $T-P$ 面上に整理した。一様内部熱源により駆動される大気循環は必ずしも赤道西風とはならない。赤道東風になるのはブランドル数が大きい場合、あるいは回転が小さく球殻が厚い場合である。

第1章

はじめに

図1は表面の様子の動きを追って得られた太陽および外惑星の風速分布である。これらの天体のうち、太陽、木星、土星の風速分布の特徴としてあげられてきたことの一つに赤道での風が西風となっていること、すなわち赤道が自転速度よりも速く回転していることがあげられる。赤道上端は天体において回転軸から最も離れた位置であるので単純に角運動量を保存的に運ぶと東風になるはずのところであり、西風を生成するには何らかの加速機構が存在しなければならない。このことから赤道での西風を「赤道加速」と称し、加速のメカニズムについて議論がなされてきた。

先の天体の中で最も古くからその風速分布が知られていたのは太陽である。1863年 Carrington は黒点の動きから緯度別の回転周期を見積もり、赤道での回転速度が最も速いことを発見した。太陽については特にこの現象を「差分回転」と呼び、その生成機構に関して様々な説が提唱された。その多くが非等方な粘性や緯度方向の温度傾度などの仮定の下での説明であった中で、球状の幾何学的形状と回転の効果だけで差分回転を説明できることを主張したのが Busse(1970a)であった。彼は一様な内部熱源分布を持つ回転球殻内のブシネスク流体の対流運動を回転の効果で撰動とする漸近理論により考察し、球殻内に生じる対流運動が赤道方向に運動量を輸送し、赤道で最も回転速度が速くなることを示した。この成果を基礎として、太陽内部の大気運動を表現するモデルが回転球殻内の流体運動に磁場との相互作用を加えたダイナモモデルへと進んでいった (Glatzmaier, 1987)。

人工衛星観測以前に風速分布が知られていた他の一つの天体は木星である。Chapman(1969)は19世紀終りからの斑点模様を観測を整理し、その期間の木星の風速分布の変動を調べた。その結果の風速分布には赤道で最も速く自転している特徴が定期的に見られた。その後、ボイジャー人工衛星による惑星探査によって木星の表面の詳細なパターンが得られるようになった。可視画像に見られる雲の動きの変動が激しいにも関わらず、得られた緯度別の東西風速分布は以前の地上観測同様赤道で定期的に西風のジェット構造が見られた (Ingersoll et

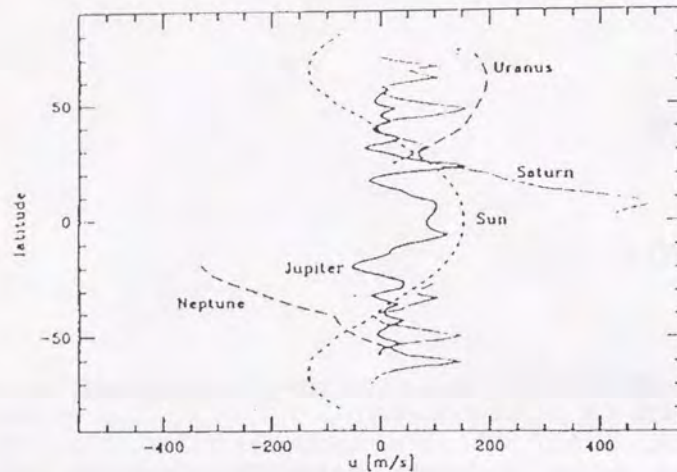


図 1.1: 太陽, 外惑星の東西風分布 (Dowling and Spiegel, 1990).

al. 1981). さらにボイジャーが土星にまで達すると, その観測結果から, 土星にも赤道で定常的に西風のジェット構造が見られ, しかもそのジェットの風速および幅は木星よりも大きいものであることが知られるようになった (Smith *et al.* 1981).

木星, 土星は内部熱源を持っていることが観測により知られていた (Hanel *et al.* 1983) その内部の大気運動は熱源により駆動されていると想像され, 大気運動のモデルとして一様内部熱源を伴う回転球殻内のプシネスク流体の運動が考えられた (Busse, 1976, 1983a, b). しかしながら, それによって記述が試みられた木星および土星大気の特徴はむしろ東西方向のバンド構造であり, 木星の赤道加速に関する議論はあまり見られない. にもかかわらず, 木星および土星のバンド構造の定性的説明を試みた Busse (1983a, b) には赤道加速の生成維持機構が含まれている. 彼らは回転球殻内のプシネスク流体の対流運動を回転が速い場合について漸近理論により考察し, 回転軸方向に伸びた対流セルが運動量を球殻内側から外側へと輸送する性質を持つことを示した. 木星および土星のバンド構造の説明のために彼らが考えた, 回転軸から離れる方向に幾重にも出現する対流セルの (図 1.2) の中で, 最も外側のものが赤道加速を引き起こしている.

このように, 太陽, 木星および土星の風速分布は「赤道加速」が特徴的であり, 一様内部熱源

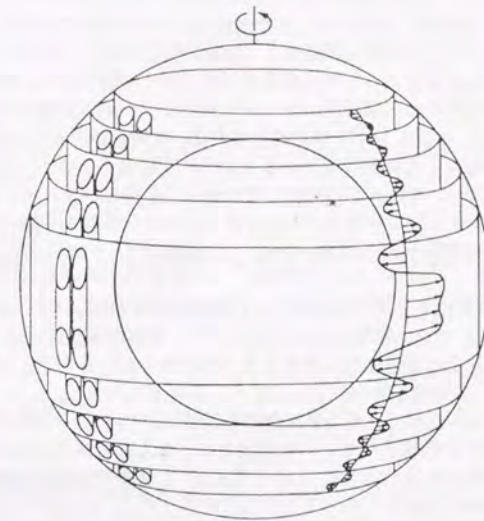


図 1.2: 高速回転球殻の対流により引き起こされる東西風の模式図 (Busse 1983a).

により駆動される回転球殻内の対流運動の性質によりこの現象の記述に成功していた. これらの観測および理論は一見「赤道加速」現象が内部熱源により駆動される大気循環の共通の特徴であるように思われる. しかしながら, やはり内部熱源を持つ海王星では (Prial, *et al.*), その東西風速分布が赤道で強い東風を示す傾向にあることが近年のボイジャー人工衛星の観測により知られるようになった (Hammel *et al.*, 1989, 図 1). このことは, 内部熱源を持つ大気循環が必ずしも赤道西風とはならないことを意味しており, 先の赤道加速の理論を見直す必要がある. すなわち, 先の赤道加速の説明に用いた一様内部熱源を持つ回転球殻対流モデルによって, 海王星のような赤道で東風となる場合が記述できるか否かを調べなければならない. 記述できるのならば, どのような場合に赤道で西風あるいは東風となるのか, その風向きはどのようなメカニズムで決まるのかを引き続く疑問として上がってくる.

そこで本研究は, 外惑星の赤道での風向の多様性, および赤道加速のメカニズムを理解することを目的として, 一様熱源により引き起こされる回転球殻中のプシネスク流体の対流を対流が引き起こす東西風の赤道での風向に注目して調べることを行なう. 系統的に対流の性質および引き起こされる東西風を求めメカニズムを議論することを, これまで扱われて

きたよりも広いパラメータ範囲で行なう。その際、実際の惑星大気のパラメータには取って代わらない。広いパラメータ空間における系の状態および力学的バランスの「地図」を描き、そのパラメータ依存性を理解することを目指す。同様の意味で本研究では対流を表現できる最も簡単なブシネスク近似を採用する。実際の惑星大気は、それらをパラメータ空間の地図上に位置付けることによってその多様性を統一的に理解できると期待される。本来、回転球殻対流は惑星大気への応用に限らずマントルやコアの流体運動など地球科学に登場する基本的問題である。しかしながら解析的な取り扱いが難しいために、古くから研究されてきているにもかかわらず全体的な描像がまとめられずに至っている。数値的な取り扱いが可能になってきた今日、改めてこの問題に取り組み広範囲のパラメータについて整理することが、惑星大気をマントルやコアなどを含めてより広い視野から統一的に理解することに大きく貢献すると期待する。

また、本研究では平均東西風を求める手法として数値的な弱非線形計算による方法を選ぶことにする。その理由の一つは、数値的に広いパラメータ範囲を系統的に調べることにある。非線形計算による方法では定常状態に達するまでの時間を前もって知ることができないために、数値計算に要する時間が場合によって長くなるおそれがある。もう一つの理由は、非線形時間積分計算などに比べてメカニズムを整理、理解しやすいことである。そもそも弱非線形解析は系の基本的な非線形バランスの描像を与えるものであり、非線形な系の力学解析を行なう際の必須事項のほゞである。しかしながら、これまでの非線形計算による研究の多さに比べると弱非線形計算を行なったものはほとんどなく、その調べられたパラメータ範囲も限られたものである。したがって回転球殻対流の弱非線形的な振舞いの知識は漸近展開の結果から得られるものだけであり、しかもそれらは非常に限定されたパラメータ範囲でしか適用可能でない。本研究により広いパラメータ範囲での弱非線形描像が整理され、さらなる非線形時間積分計算の結果の解釈と理解に大きく寄与するものと期待される。

第2章では考える系と問題を解く方法を説明する。第3章では対流の臨界モードについて議論する。その後、第4章にて回転が遅い場合、第5章にて回転が速い場合と分けて対流が引き起こす平均東西風および平均子午面場について議論する。第6章がまとめである。

第2章

支配方程式と問題へのアプローチ

2.1 支配方程式

図2.1のような角速度 Ω で回転する半径 r_i, r_o の球に挟まれたブシネスク流体の運動を考える。支配方程式は回転系のブシネスク流体の式である。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla \pi + \alpha g T + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + Q \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

ただし \mathbf{k} は回転軸方向の単位ベクトルである。 \mathbf{v}, T, π はそれぞれ速度、温度、圧力であり、(2.1) が運動方程式、(2.2) が温度の式、(2.3) が連続の式である。 g は重力加速度ベクトルであり、密度がほぼ一様な物質の自己重力を考えることにする。簡単のため回転の効果による非球対称な成分は無視する。

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{r} \quad (2.4)$$

ここで \mathbf{r} は球殻の中心を原点とする位置ベクトルであり、 γ は定数である。

基本場として一様熱源分布 Q_0 の下での静止状態を選ぶ。基本場の温度分布は

$$\bar{T}(r) = \frac{1}{2} \beta r^2 + C, \quad (2.5)$$

ただし $\beta \equiv \frac{1}{3} \frac{Q_0}{\kappa}$, C は定数である¹.

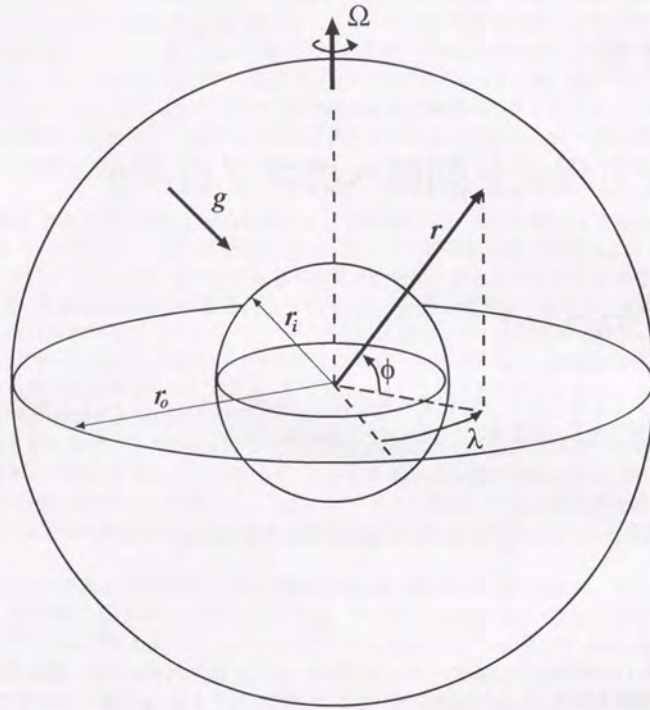


図 2.1: 考える系の模式図.

この基本場に対する擾乱の式に対して、長さのスケールを球殻の厚さ d , 時間スケールを熱拡散時間 d^2/κ , 速度を κ/d , 温度を基本場の温度傾度を用いて βd^2 , 圧力を $\kappa\nu/d^2$ とスケールリングすると、方程式は次のようになる。

¹熱拡散方程式を許容する温度分布には C'/r の不定性が残っているが、後の数学的簡便さのため $C' = 0$ の分布を選ぶことにする。

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right] + \tau k \times v = -\nabla \pi + R\theta r + \nabla^2 v, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \theta = v \cdot r + \nabla^2 \theta, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (2.8)$$

ここで v, π, θ は無次元化された速度, 圧力, 温度擾乱を表す. R はレイリー数, τ はテイラー数 T の平方根, P はプランドル数であり, 以下のように定義される.

$$R \equiv \frac{\alpha \beta \gamma d^6}{\kappa \nu}, \quad \tau \equiv \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P \equiv \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.9)$$

加えて系に現れる重要なパラメーターとして内径外径比 $\eta \equiv r_i/r_o$ が存在する.

方程式を緯度経度座標で表すと λ を経度, φ を緯度, r を動径座標として,

$$P^{-1} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u + \frac{uw}{r} - \frac{uv \tan \varphi}{r} \right] - \tau v \sin \varphi + \tau w \cos \varphi = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda, \quad (2.10)$$

$$P^{-1} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \frac{vw}{r} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} \right] + \tau u \sin \varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + F_\varphi, \quad (2.11)$$

$$P^{-1} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \nabla w - \frac{u^2 + v^2}{r} \right] - \tau u \cos \varphi = -\frac{\partial \pi}{\partial r} + Rr\theta + F_r, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \theta = rw + \nabla^2 \theta, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) = 0, \quad (2.14)$$

ただし, u, v, w はそれぞれ速度の東西, 南北, 鉛直成分であり,

$$v \cdot \nabla = \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

である. $F_\lambda, F_\varphi, F_r$ は粘性項であり, 具体的な表現は次の通りである.

$$F_\lambda \equiv \nabla^2 u + \frac{2}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{2 \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{u}{r^2 \cos^2 \varphi}, \quad (2.15)$$

$$F_\varphi \equiv \nabla^2 v + \frac{2 \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2 \cos^2 \varphi}, \quad (2.16)$$

$$F_r \equiv \nabla^2 w - \frac{2}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{2}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) - \frac{2w}{r^2}. \quad (2.17)$$

2.1.1 ポテンシャルによる速度場の表現

実際に数値計算に用いる方程式系は非圧縮速度場をトロイダル, ポロイダルポテンシャル ψ, ϕ を用いて表し, 圧力を消去しておく. ポテンシャルで非発散速度場を表すと

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r}), \quad (2.18)$$

である. 運動方程式 (2.6) に $\mathbf{r} \cdot \nabla \times, \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させることによりトロイダル, ポロイダルポテンシャルの式が導かれる.

$$\begin{aligned} \left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \psi - \tau Q \phi &= P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}), \\ \left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \phi + \tau Q \psi - RL_2 \theta &= -P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで L_2 は単位球面上の水平ラプラシアン²の逆符号であり, Q は

$$Q \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \mathbf{k} \cdot \nabla + \mathbf{k} \cdot \nabla L_2), \quad (2.21)$$

と表される演算子である. 温度の式もポテンシャルで表すと,

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta + L_2 \phi = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta, \quad (2.22)$$

となる. (2.19), (2.20), (2.22) はスケーリングの違いを除けば Zhang and Busse (1987) の用いた式に一致するものである.

2.1.2 境界条件

境界条件は簡単のため free-slip, 温度固定境界条件を用いることにする.

$$w = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = \theta = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.23)$$

ポテンシャルを用いて表すと,

$$\phi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = \theta = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.24)$$

2.2 問題へのアプローチ

本研究では対流の臨界モードを引き起こす平均東西風および平均子午面場を求めることを数値的に行なう。その手順は以下のようになる。

1. テイラー数、ブランドル数、球殻の半径比を与えて臨界値および臨界モードを求める。具体的には方程式を基本場のまわりに線型化して固有値問題を解き、成長率が正となる最小のレイリー数を探ることになる。方程式系を模式的に記述すると

$$\frac{\partial}{\partial t} Ax = Lv + n[x], \quad (2.25)$$

左辺が時間変化項、右辺第1項が線型項、第2項が非線形項である。時間に関して変数分離し非線形項を無視すると

$$sAx_1 = Lx_1, \quad (2.26)$$

となり、成長率 s に関する固有値問題となる。繰り返し固有値問題を解いて $Re[s] > 0$ となる最小のレイリー数 R_c を求める。その時の x_1 が臨界モードである。

2. 臨界モード x_1 および非線形項に代入し、東西平均して定常解を求める。レイリー数は臨界レイリー数 R_c を適用する。

$$\overline{Lx_2} = -\overline{n[x_1]}, \quad (2.27)$$

ただし $\overline{(\quad)}$ は東西平均を表す。連立1次方程式を解くことにより対流の臨界モードによって引き起こされる平均子午面場 x_2 が求まる。

この手順を様々なテイラー数 T 、ブランドル数 P 、半径比 η について行ない、対流により引き起こされる平均子午面場を求めていく。計算を行なったパラメータ範囲は $10^0 \leq T \leq 10^7$, $0.01 \leq P \leq 10^2$, $0.3 \leq \eta \leq 0.8$ である。

数値計算の際には方程式を水平方向に球面調和関数展開、鉛直方向にチェビシェフ関数展開して行なった。水平分解能は三角波数切断波数 21 あるいは 42、鉛直分解能はチェビシェフ関数を 12 次まで計算した。非線形項の計算は格子点上でその値を評価する擬スペクトル法を用いた。詳しい数値的技法については補遺 A を参照せよ。

第3章

対流の臨界モード

この章では計算された回転球殻対流の臨界モードの構造を示し、その性質を直観的に理解するための考察を加える。本研究で得られた臨界モードの性質は以前の研究ですでに示されていたものであるが、それらの物理的な説明がなされてはいなかった。

3.1 これまでの研究

一様内部熱源を持つ球殻中に生じる対流への弱い回転の影響について調べたのは Busse (1970a) である。彼は回転パラメータ τ を微小パラメータとして漸近展開し、対流の臨界値および臨界モードの性質を議論した。展開の0次からは非回転の場合の球殻内に生じる対流の臨界モードが選ばれ、厚みに応じた水平全波数が定まる (Chandrasekhar, 1961)。この時点では水平全波数 l に応じて $2l+1$ 個のモードが縮退している。展開の1次から回転の風の場合への影響と振動数 ω_c が定まり、対流パターンが西に伝播することがわかる。展開の2次で臨界レイリー数への回転の影響が求まり、縮退が解ける。その結果臨界モードとして選ばれるものは温度場および鉛直風が球面調和関数の Y_l^m の水平構造をもつことがわかる¹。

一方高速に回転している球の中に生じる対流について議論したのが Busse (1970b) である。彼は回転軸方向に揃った2次元的な運動が浮力によって駆動されるという方程式系を漸近展開で導き、その臨界状態を解析的に求めた。ほぼ地衡風バランスしている渦柱が回転軸と赤道外側の中間的な位置に生じ、それらが東に伝播するという結果を得た (図 3.1)。

¹後に Geiger and Busse (1981) は球殻が厚くブランドル数が大きい時には臨界モードが必ずしも Y_l^m 型の構造を持たないことを示した。

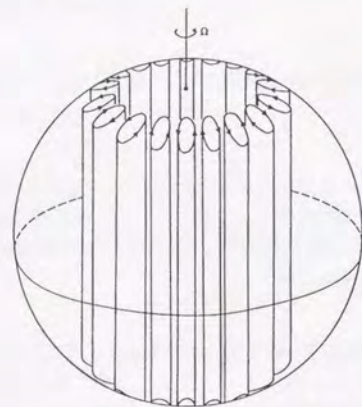


図 3.1: Busse(1970b) で得られた臨界モードの模式図.

これらはいずれも漸近理論であり、回転が極端に遅い場合あるいは速い場合にのみ適用される。回転が中間的な場合あるいはより広いパラメータ範囲にわたる臨界モードの構造の移り変わりを調べるには数値計算の能力の発達を待たねばならなかった。Zhang and Busse (1987) は $\eta = 0.4$ の場合について様々なテイラー数とプラントル数での臨界モードを数値的に求めた。図 3.2 は $T-P$ 面上で臨界モードの構造を整理したものである。テイラー数が $10^3 \sim 10^9$ にかけて西に伝播するモードから東に伝播するモードへと臨界モードが移り変わっていることが特徴的である。Busse(1970b) で得られたテイラー柱型の対流は図中右上の高テイラー数、高プラントル数で出現すると彼らは結論づけている。

最近の臨界モードの数値計算は非常に回転が速い場合でも Busse(1970) のテイラー柱型対流が必ずしも出現しないことを示しており、Busse(1970b) の漸近展開理論の再検討がなされている。図 3.3 は $\eta = 0.4$, $T \sim 10^{10}$ での様々なプラントル数に対する臨界モードの構造である。プラントル数が大きい時は対流が球の中程に局在し、Busse(1970b) のイメージに近い構造であるが(図 3.3c,d)、プラントル数が小さくなるに従って対流柱が赤道外側に向かってたなびき、球全体に対流運動が広がっている(図 3.3a)²。また、すべてのプラントル数を通じて対流柱が回転軸から遠ざかるほど東に傾いている様子がみられる。この構造は後に対流運動による平均東西風生成の議論の際に重要となる。Yano(1992) は Busse(1970b) の漸近展開を修正し、このような螺旋状に広がる対流構造の数学的な記述を行なっている。

²Zhang(1992) はこの構造を螺旋状対流 (spiralling columnar convection) と呼んでいる

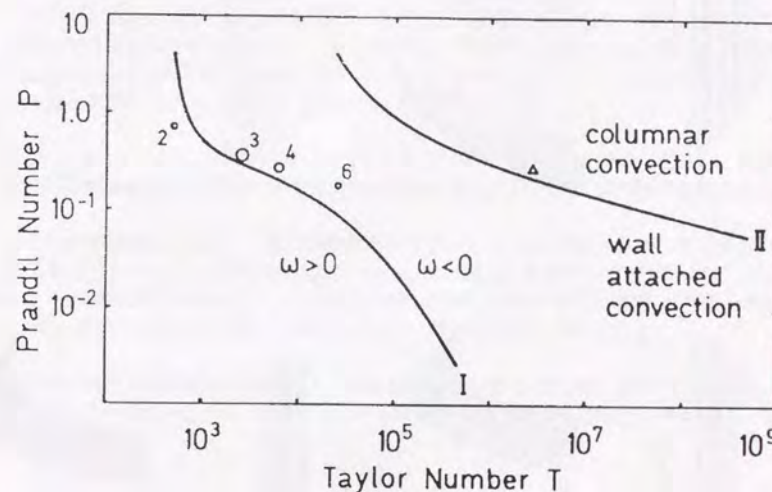


図 3.2: $T-P$ 面上での対流の臨界モードの分類 (Zhang and Busse, 1987). $\eta = 0.4$ の場合. 彼らの振動数の定義では正の振動数が西進, 負のモードが東進するモードである.

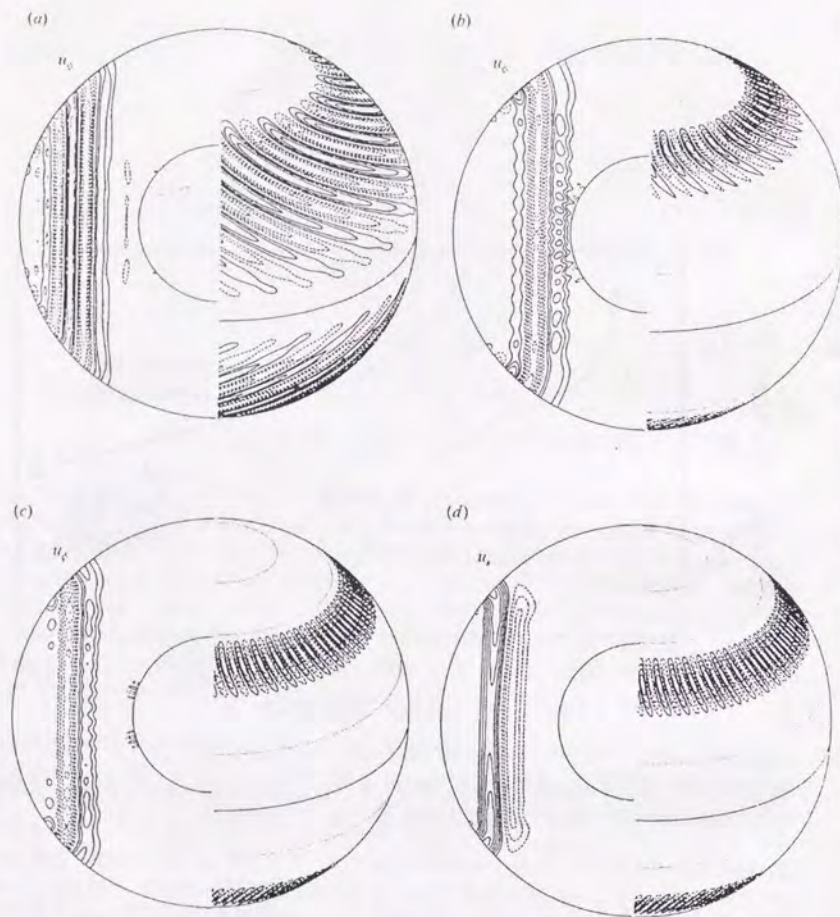


図 3.3: 高回転する球殻中に生じる対流の臨界モードの構造 (Zhang, 1992). $\eta = 0.4$, $T \sim 10^{10}$ の場合. 各図とも左側が子午面断面での東西風分布, 右側が外側境界でのトロイダルポテンシャル分布を示してある. (a) $P = 0.1$. (b) $P = 1$. (c) $P = 10$. (d) $P = 100$.

3.2 臨界モードの計算結果

ここでは後の章で平均東西風計算のために用いた臨界モードの計算結果の典型的な例を紹介する.

図 3.4 は数値的に求めた回転の遅い場合の臨界モードの構造である. Busse (1970a) で述べられたような Y' 型の水平構造が温度場に見られるのがわかる. 振動数は負であり, 西に伝播する性質を持つ.

一方, 図 3.5 は回転の速い場合の臨界モードの構造の計算結果である. 表面の風の場の赤道対称な中緯度の渦が特徴的であり, 南北断面図と合わせて見ると Busse (1970) の示唆する回転軸に沿った渦状の構造であることがわかる. 赤道断面図では Zhang (1992) (図 3.3) の特徴と同様の対流渦が外側ほど東にずれている構造が見られる.

図 3.6 は図 3.5 に対して球殻を薄くした場合の臨界モードの構造である. 図 3.5 と比較して, 対流運動が生じている領域が赤道付近に局在することを除けばほぼ同様の特徴が見られる.

図 3.7 は球殻厚別に臨界モードの振動数の符号を $T-P$ 面に図示したものである. 第 3.1 節で紹介した Zhang and Busse (1987) の $\eta = 0.4$ の場合の計算ではテイラー数が $10^3 \sim 10^5$ あたりで西向きに伝播するモードから東向きに伝播するモードへと遷移する様子が見られた. この傾向が球殻の厚みにそれほどよらない様子が図からうかがえる.

後の章においては振動数が負のモードを回転が小さい場合 (第 4 章), 振動数が正のモードを回転が大きい場合 (第 5 章) と分類して平均東西風生成の議論を行なうことにする.

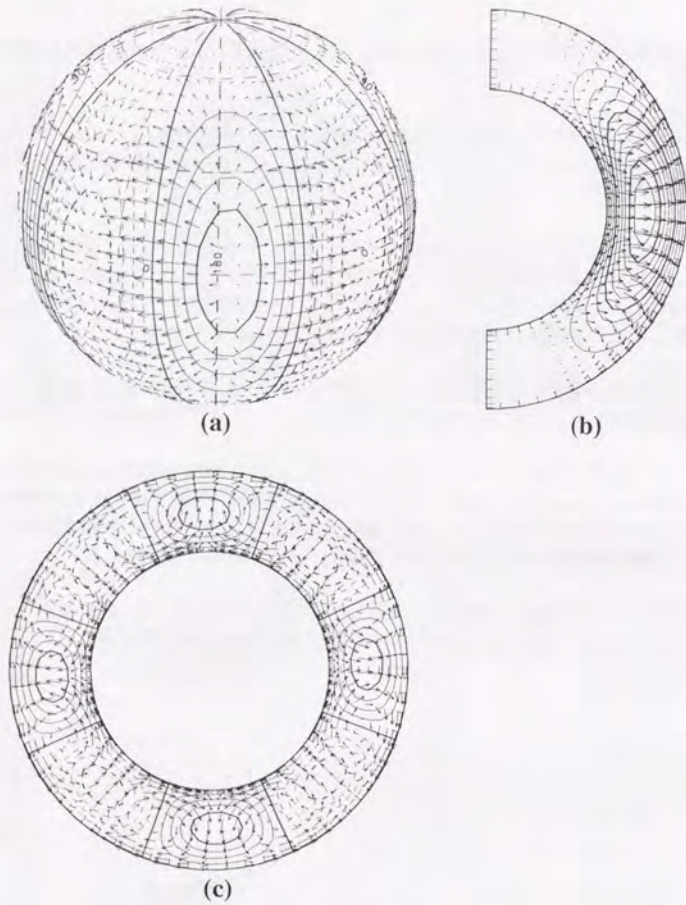


図 3.4: 回転が遅い場合の対流の臨界モード. $T = 10$, $P = 1$, $\eta = 0.6$ の場合. $R_c = 168.19$, $\omega_c = -0.316$. (a) 球殻中層の温度擾乱分布と球殻外側での水平風の分布. (b) 子午面断面での温度擾乱分布と風分布. (c) 赤道面での温度擾乱分布と風分布.

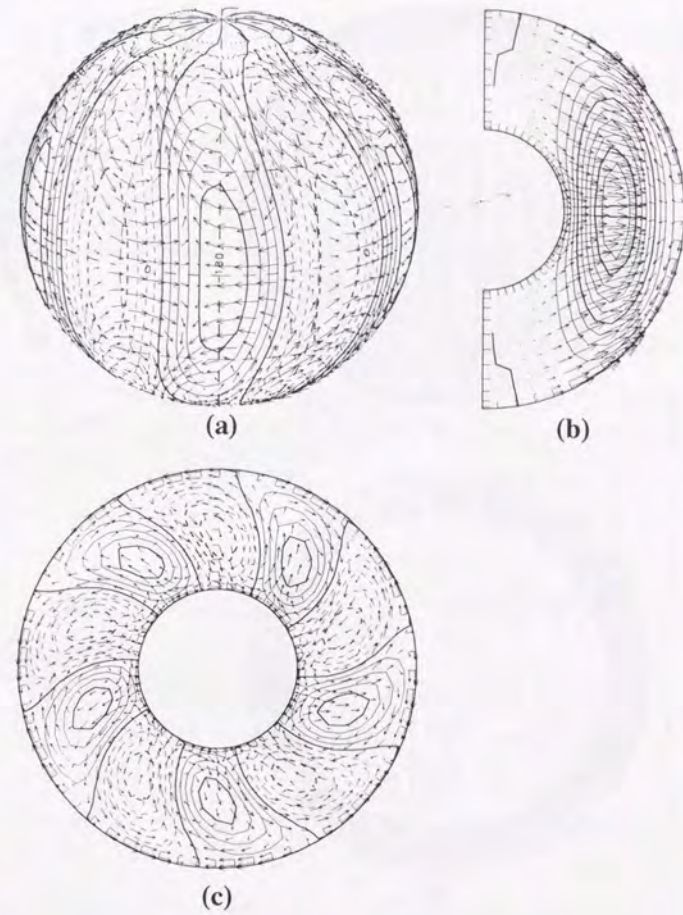


図 3.5: 回転が速い場合の対流の臨界モード. $T = 10^6$, $P = 1$, $\eta = 0.4$ の場合. $R_c = 1.302 \times 10^4$, $\omega_c = 33.4$. 前図と同様.

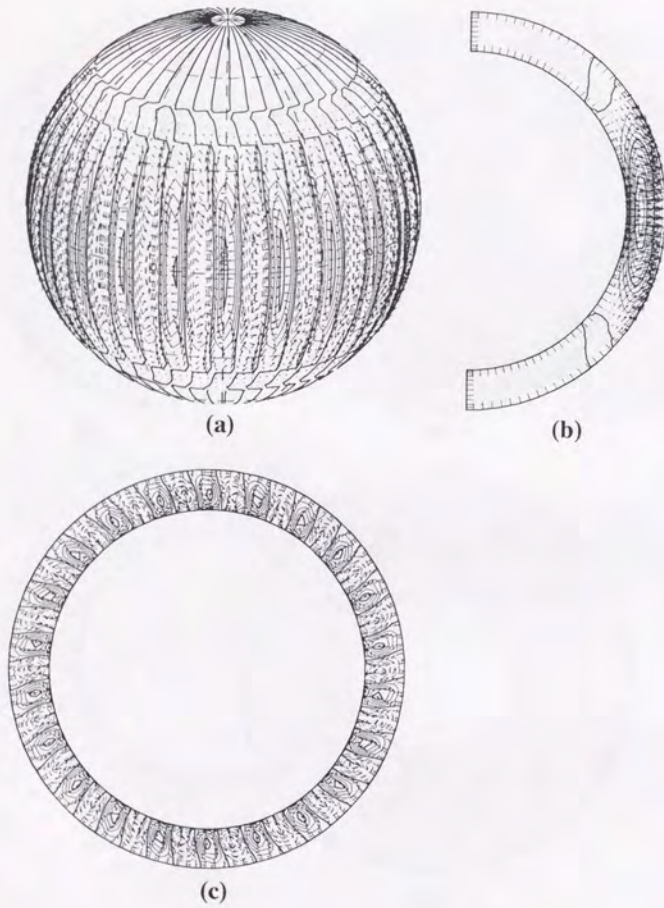


図 3.6: 回転が速い場合の対流の臨界モード. $T = 10^6$, $P = 1$, $\eta = 0.8$ の場合. $R_c = 558.2$, $\omega_c = 22.3$. 前図と同様.

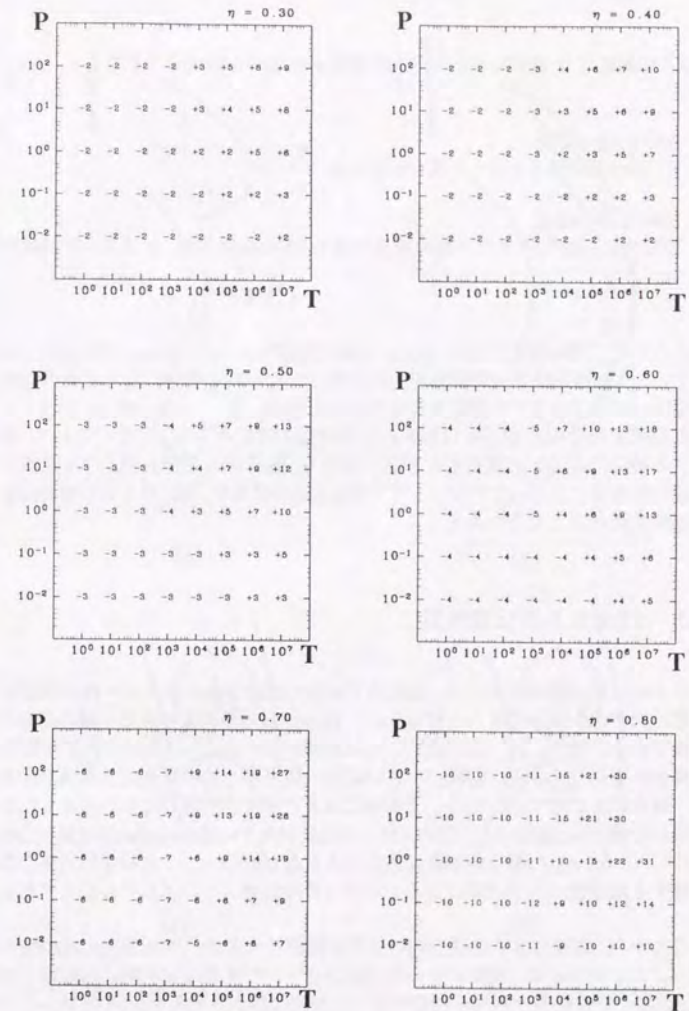


図 3.7: 対流の臨界波数と振動数の符号. 数字が臨界波数, +- が振動数の符号を表す.

3.3 臨界モードの性質

ここまでに紹介した臨界モードの性質をまとめておくと次のようになる。

- 回転が遅い場合
Y₁¹型の水平構造を持ち、西に伝播する。
- 回転が速い場合
回転軸に沿ったテイラー柱の構造を持ち、東に伝播する。テイラー柱は外側ほど東に傾く。

このような性質は本研究以前に Busse の漸近理論あるいは Zhang の数値計算によって示されていた。高速回転下での回転軸方向に伸びた対流柱の傾きに関して外側境界面の傾きを微小パラメータとする漸近展開を行なった Busse and Hood (1982)、ブランドル数による漸近展開を行なった Busse (1983 a,b) の理論的研究がある。しかしながら、彼らは臨界モードの数学的あるいは数値的な記述に留まり、臨界モードが上のような性質を持つことの直観的な理解には至っていない。以下では上記の性質を、特にロスビー波の性質として記述し理解を深めることを試みる。

3.3.1 対流セルの伝播性質

対流セルの伝播を理解するには、回転系での渦の波動であるロスビー波の伝播のメカニズムを思い出すのが良いであろう (Pedlosky, 1979)。最も単純なロスビー波の伝播の説明は渦の伸縮である。図 3.4 (b) と図 3.5 (b) には回転の大小による上昇域での子午面内の風向きの差異が明瞭に見られる。回転が小さい場合の臨界モードの構造は上昇域で赤道面の渦を伸ばす傾向にあるので (図 3.4 b)、上昇域には正の渦度が引き起こされることになり対流セルが西に伝播する (図 3.8 c)。これに対して回転が大きい場合は赤道面の渦を縮める傾向にあるので (図 3.5 b)、伝播方向が逆に東向きとなる (図 3.8 d)。これは地球流体力学の教科書で登場する地形性ベータ効果によるロスビー波の伝播メカニズムそのものである。

このことから、回転による伝播方向の差異は臨界モードの子午面方向の風の場の構造が重要であることがわかる。回転が遅い時の臨界モードの構造は 0 次的には回転の影響を受けず、全波数 l で特徴づけられる球殻に沿った対流運動が生じる (第 3.1 節 Busse, 1970a)。回転軸方向に節を持つ構造であると慣性波の復元力が働き対流運動が抑えられるので、 $2l+1$ 個の縮退したモードの中で南北方向に節を持たないものである Y₁¹ が対流の臨界モードの構造として選ばれると考えられる。したがって 図 3.8 (a) のような上昇域で赤道面の渦を

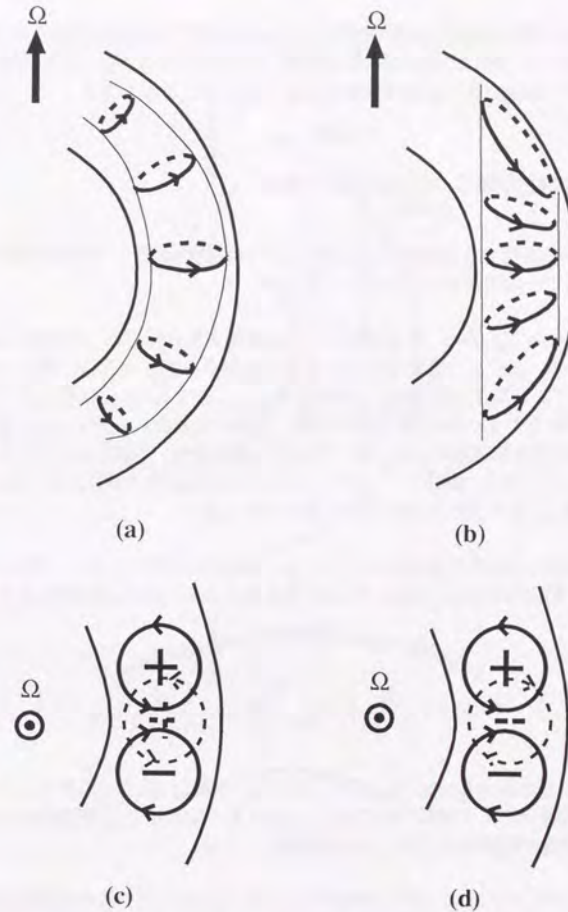


図 3.8: 対流セル構造の模式図とその伝播メカニズム。(a) 回転が遅い場合の対流セルの模式図。(b) 回転が速い場合の対流セルの模式図。(c) 回転が遅い場合の対流セルの伝播。点線の渦が実線の渦によって引き起こされる。(d) 回転が速い場合の対流セルの伝播。

伸ばすような構造になる。これに対して回転が速い場合は、回転軸に沿った構造が第一に定まる。次に外壁の影響で上昇域に赤道面の渦を縮めるような風場が加わる。

すなわち、回転が遅い場合には渦が球殻に沿うように曲げられるのに対して、回転が速い場合には回転軸方向に伸ばされた渦が外側境界でゆがめられるため、子午面風が渦の伸縮に関して正反対の構造になり伝播方向が異なると考えることができる。

3.3.2 対流柱の傾き～回転が速い場合

回転が速い時に出現する回転軸方向に伸びた対流渦柱の傾きを、境界面の地形性ベータ効果によるロスビー波の構造としてとらえてみる。

高速回転していることから、対流運動として回転軸方向に伸びた2次元的な渦運動のみ考えることにする。このような渦柱に対しては回転軸から遠ざかるほど境界の傾斜が急になるので、回転による対流運動を抑える効果が大きい。すなわち、回転軸に近い内側の方が外側より運動が生じやすく熱的に不安定であり、外側は相対的に安定であると想像される。このことは、内側が対流運動を駆動するエネルギー源となり、外側においてエネルギーが散逸されているような構造を臨界モードが持っていることを示唆する。このとき、ロスビー波は内側から外側へエネルギーを運んでいなければならない。

このことを簡単に非粘性の非発散ロスビー波の分散関係で考えてみる。図3.3.2のように西向きに x 軸、動径外向きに y 軸をとると、非発散ロスビー波の分散関係をそのまま用いることができ、

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}, \quad C_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2} > 0, \quad (3.1)$$

ここで β は正であるから $kl > 0$ となり、図3.3.2のように波面が外側東よりに傾くことになる。また、外側ほどより傾斜が急になり、 β が大きくなるので、分散関係から外側ほど l が大きくなり波面が螺旋状のパターンを描くことになる。

第3.1節で紹介した Zhang(1992)の結果はこのようなロスビー波の伝播性質が対流の臨界モードの構造を決めていることを明瞭に示すものである。ブランドル数が大きいと相対的に粘性散逸が大きくなるので、局所的に不安定な回転軸に近い側から励起されたロスビー波がすぐに散逸され、動径方向に運動が広がらない(図3.3 c,d)。これに対してブランドル数が小さい場合にはロスビー波は散逸されずに赤道外側近くまで伝播し、動径方向に大きく広がった螺旋上の構造が出現すると考えられる(図3.3 a)。

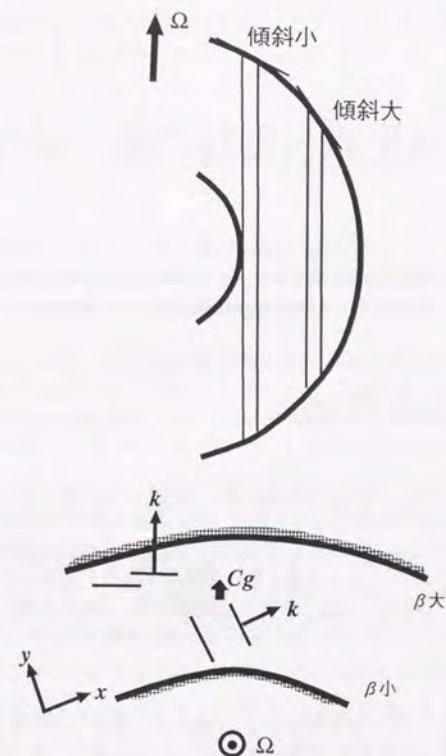


図 3.9: ロスビー波としてとらえた対流柱の傾斜。

第4章

平均東西風生成～回転の遅い場合

この章では第3章で求めた対流の臨界モードを用いて回転が遅い場合の対流が引き起こす平均東西風を求めた結果を示し、その力学的構造について議論する。

4.1 以前の研究と問題点

対流運動により引き起こされる平均東西風についての先駆的な研究は Busse(1970a) である。彼は太陽の差分回転を説明するために、回転が遅い場合の球殻内に生じる対流の臨界モードを漸近展開で求め(第3.1節)、その非線形効果による運動量輸送により差分回転、すなわち赤道で西風を生成できることを薄い球殻の近似の下で示した。さらに Busse(1973) では Busse(1970a) の議論を発展させて平均午面循環の効果を検討した。その結果は、引き起こされる鉛直方向に二重の子午面循環による運動量輸送を考慮しても、やはり赤道で西風であった。

Busse(1970a, 1973) の平均東西風生成メカニズムの本質は角運動量保存則で考えるとわかりやすい。運動方程式の傾度方向成分(2.10)に $r \cos \varphi$ をかけると角運動量保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(ur \cos \varphi) + \nabla \cdot \{(\tau r^2 \cos^2 \varphi + ur \cos \varphi)v\} = -\frac{\partial}{\partial \lambda}(\pi r \cos \varphi) + F_{\lambda r} \cos \varphi, \quad (4.1)$$

東西平均 $\bar{f} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\lambda$, 鉛直平均 $\langle f \rangle \equiv \int_{r_1}^{r_0} f r^2 dr / \int_{r_1}^{r_0} r^2 dr$ を作用させ、free-slip 境界条

件を用いることにより東西鉛直平均角運動量保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle \bar{u}r \rangle \cos \varphi) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \cos \varphi \left(\tau \langle \bar{v}r \rangle \cos^2 \varphi + \langle \bar{u}v \rangle \cos \varphi \right) \right\} = \langle F_{\lambda r} \rangle \cos \varphi, \quad (4.2)$$

さらに物理量を振幅展開して $v = \varepsilon v' + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots$ とすると、2次のオーダーの東西鉛直平均角運動量保存則が次のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle \bar{u}^{(2)}r \rangle \cos \varphi) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \cos \varphi \left(\tau \langle \bar{v}^{(2)}r \rangle \cos^2 \varphi + \langle \bar{u}'v' \rangle \cos \varphi \right) \right\} = \langle F_{\lambda}^{(2)}r \rangle \cos \varphi, \quad (4.3)$$

左辺第1項は角運動量の時間変化、第2項が角運動量輸送収束、右辺が粘性散逸項である。角運動量輸送には2種類存在し、 $\tau \langle \bar{v}^{(2)}r \rangle \cos^2 \varphi$ が平均子午面循環による輸送、 $\langle \bar{u}'v' \rangle \cos \varphi$ が対流のレイノルズストレスによる角運動量輸送である。

対流のレイノルズストレスによる角運動量の赤道方向への輸送が粘性散逸とバランスし、赤道西風になることが Busse(1970a) で得られた解である。回転が遅い時の臨界モードはほぼ Y_1' 型の水平構造であるから温度場が南北方向に伸びたパターンである。上層の水平風は高温域から吹き出した風が低温域に吹き込むので図4.1点線矢印のように東西風が卓越する。中高緯度ではその東西風がコリオリ力によりゆがめられ、南北成分が引き起こされる。その結果東西風と南北風の相関が生じ、運動量を赤道向きに輸送することになる。

水平風のこのような構造は第3.2節で示した臨界モードにも現れている。図4.2は $\eta = 0.6, T = 10, P = 1$ の臨界モードの上端境界の水平風速場である。振幅の大きなところでの東西風と南北風の相関が赤道方向へ角運動量を運ぶ傾向にあることがわかる。

これに対して平均子午面循環による運動量輸送のメカニズムを示したのが図4.3である。熱的に引き起こされる子午面循環を考えると¹、臨界モードの振幅が赤道で最大であるから対流による熱輸送も赤道で最大である。熱輸送に対して熱拡散でのバランスを考慮すると、赤道上層で温度擾乱が最大、下層で最小となる。その結果、水平方向の温度傾度が生じ子午面循環が引き起こされる。

例えば上層で高緯度向き、下層で低緯度向きの子午面循環(図4.3(a)の上層の循環、あるいは(b)の循環)による角運動量輸送を考えてみよう。剛体回転部分の角運動量 $\Omega r^2 \cos^2 \varphi$ は上層で大きく下層で小さいので、考えている循環は上層で大きい角運動量を高緯度に輸送

¹運動方程式の南北成分、および鉛直成分に起因する力学的に引き起こされる子午面循環も存在する。この寄与の大きさは後の数値計算において確かめる。

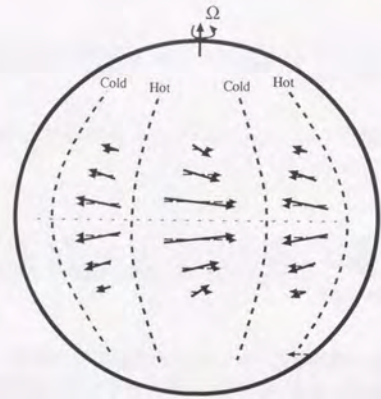


図 4.1: 回転が遅い場合のレイノルズストレスによる西風生成の模式図.

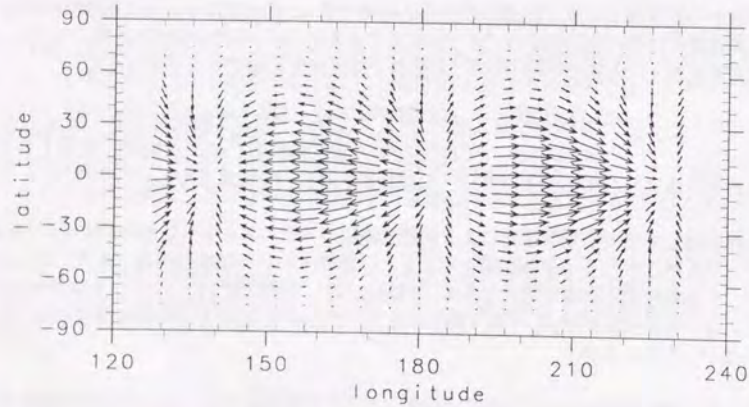


図 4.2: 回転が遅い場合の臨界モード. 上端境界での水平風速場. $\eta = 0.6, T = 10, P = 1$ の場合.

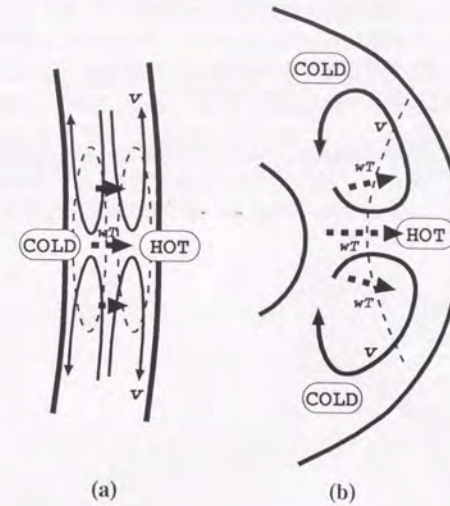


図 4.3: 子午面循環による角運動量輸送の模式図. (a) 球殻が薄い場合. (b) 球殻が厚い場合.

し下層で小さい角運動量を低緯度に輸送する. したがって, 赤道から角運動量を抜きとることになり東風生成に寄与すると考えられる. これに対して, 逆向きの子午面循環 (図 4.3(a) の下層の循環) の角運動量輸送は, 赤道へ角運動量を集め, 西風生成に寄与する.

Busse(1973) が考慮した子午面循環が赤道西風の結果を変えなかったことは, 上の議論から容易に理解できる. 彼は薄い球殻近似を用いているために, そもそも上層と下層の剛体部分の角運動量の差が小さいので結果的に子午面循環による角運動量輸送の寄与が小さくなっている. そのためレイノルズストレスによる赤道西風を逆向きにするに至らなかったのである. 球殻が厚い場合には子午面循環による角運動量輸送の寄与が大きくなると考えられるので, 赤道で東風が生じやすくなると想像される.

Busse(1970a, 1973) の議論に含まれていない他の一つの事項はブランドル数依存性である. ブランドル数が大きい場合には粘性率が大きいためにコリオリにより引き起こされる南北風が小さくなりレイノルズストレスによる角運動量輸送が小さくなる. 一方, 熱的な子午面循環は, 熱拡散率が相対的に小さくなるために² 温度の不均一が大きくなるので, 粘性率が

² 回転が小さい時には臨界レイリー数がブランドル数にそれほど依存しないので, レイリー数一定の下で考える.

大きくなることと相殺し循環の強さは変化しない。したがってブランドル数を大きくすると熱的な子午面循環による角運動量輸送の寄与が卓越すると考えられ、Busse(1970a)のレイノルズストレスによる赤道加速は見えなくなると想像される。実際 Busse(1973)の解にはこのようなブランドル数依存性が含まれているが、彼は $P \sim O(1)$ 程度の範囲でのみ議論して常に赤道上端で西風であると結論づけている。

Busse(1970a,1973)の理論の問題点は、熱的な子午面循環による角運動量輸送の寄与が過小評価されていることである。この寄与が大きくなる可能性として球殻が厚い場合、ブランドル数が大きい場合の二つを定性的に議論した。次の節ではこの予想を数値的弱非線形計算により確かめていくことにする。

4.2 平均東西風と平均子午面場～計算結果

図4.4は第3.2節で紹介した臨界モード(図3.4)により引き起こされる平均子午面場の計算結果である。赤道付近で西風であり、いわゆる赤道加速の状態が実現されている。子午面循環場は赤道付近に鉛直2重の子午面循環が引き起こされる Busse(1973)の結果とは異なり、鉛直方向に1重の循環が形成されている。また、高緯度にも逆循環が生じており、低緯度の循環よりも強い。

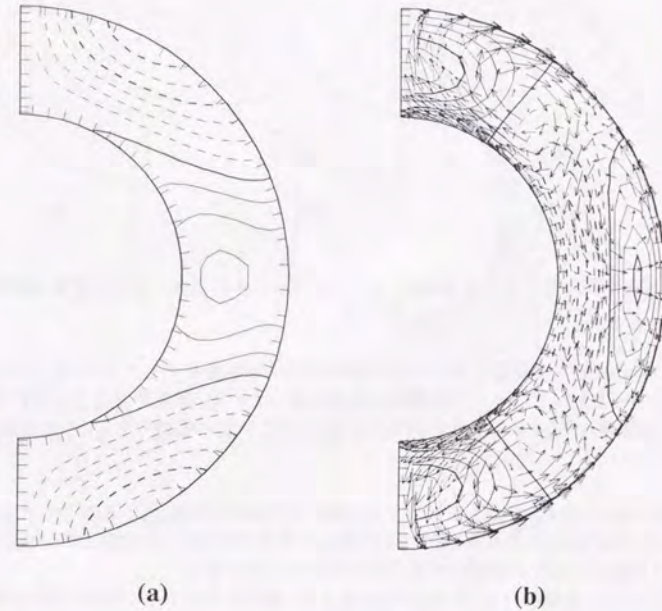


図4.4: 対流が引き起こす平均子午面場. $\eta = 0.6, T = 10, P = 1$ の場合. (a) 平均東西風. 実線が西風, 破線が東風を表す. (b) 平均子午面循環と平均温度擾乱. 実線が正の温度擾乱, 破線が負の温度擾乱を表す.

図4.4に対してブランドル数を変化させた場合に引き起こされる平均東西風を示したのが図4.5である。 $P = 1$ の場合(図4.5b)に対してブランドル数を小さくした場合には(図4.5a)以前として赤道西風である。一方ブランドル数を大きくした場合には(図4.5c)赤道

で風向きが逆になり東風となっている。このブランドル数依存性は第4.1節での定性的な議論と整合的である。

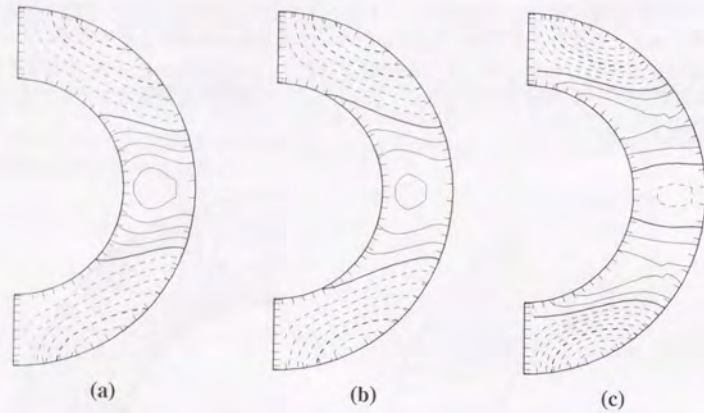


図 4.5: 対流が引き起こす平均東西風. $\eta = 0.6, T = 10$ の場合. 実線が西風, 破線が東風を表す. (a) $P = 0.01$. (b) $P = 1$. (c) $P = 10^2$.

図 4.4 の場合に対して球殻を厚くした場合の平均子午面場を示したのが図 4.6 である。第 4.1 節での予想通り、図 4.4 では赤道加速状態であったのが、赤道で東風に変化している。また、子午面循環は図 4.4 の場合と同様に鉛直方向に 1 重の循環であるが、高緯度の逆循環は存在していない。

球殻の厚い場合 図 4.6 に対してブランドル数を変化させた場合に引き起こされる平均東西風を示したのが図 4.7 である。図 4.5 に比較して特徴的なことは、球殻が厚い場合にはどのブランドル数についても赤道で東風となっていることである。

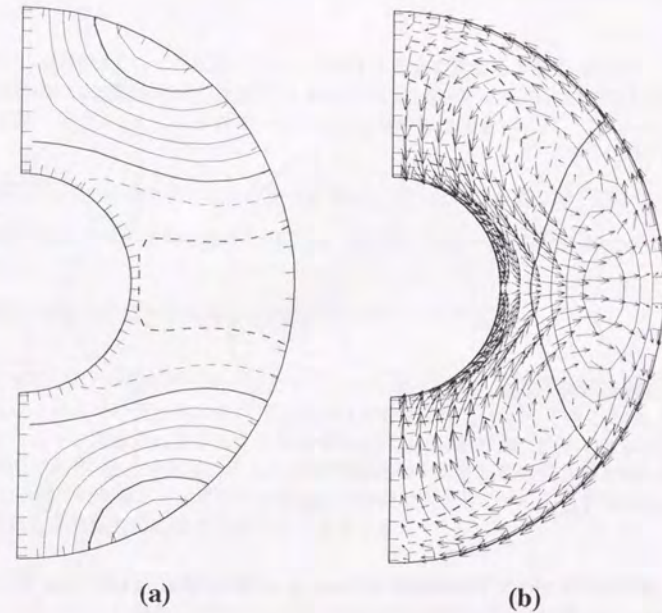


図 4.6: 対流が引き起こす平均子午面場. $\eta = 0.4, T = 10, P = 1$ の場合. (a) 平均東西風. 実線が西風, 破線が東風を表す. (b) 平均子午面循環と平均温度擾乱. 実線が正の温度擾乱, 破線が負の温度擾乱を表す.

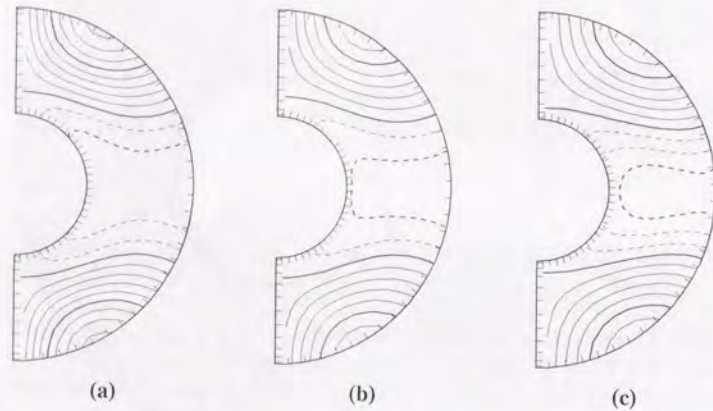


図 4.7: 対流が引き起こす平均東西風. $\eta = 0.4$, $T = 10$ の場合. 実線が西風, 破線が東風を表す. (a) $P = 0.01$. (b) $P = 1$. (c) $P = 10^2$.

4.3 各非線形項が引き起こす平均子午面場

球殻が厚い場合あるいはプランドル数が大きい場合には, 熱的に引き起こされる子午面循環による高緯度への角運動量輸送の寄与が相対的に大きくなり, 赤道への角運動量輸送収束による西風生成を妨げると予想したのが第 4.1 節での定性的な議論であり, 第 4.2 節で得られた平均東西風分布は整合的な結果であった. 以下では, その予想の正当性を定量的に評価することを試みる.

第 4.2 節での対流によって引き起こされる平均子午面場を求める手順中, 臨界モードを代入する非線形項には運動方程式の経度方向, 緯度方向, 鉛直方向の式の非線形項と温度の式の非線形項の 4 項がある. この臨界モードを代入する非線形項を

- 運動方程式の経度方向のみに限定する場合 (東西方向の加速に対する応答).
- 運動方程式の緯度方向と鉛直方向のみに限定する場合 (子午面方向の加速に対する応答).
- 温度の式のみに限定する場合 (加熱冷却に対する応答).

の 3 通りに分けて, 平均子午面場を求めることを行なう. 特に, 赤道への角運動量輸送収束により生成される平均東西風は東西方向の加速に対する応答によって求められ, 熱的に引き起こされる子午面循環により生成される平均東西風は加熱冷却に対する応答により求められるものである. 先の予想はこれら 2 種類の応答の平均東西風の強さの比較で検証される. また, 予想では考慮していない子午面方向の加速で引き起こされる子午面循環により引き起こされる平均東西風の強さも合わせて比較する.

図 4.8 は 図 3.4 で示した対流の臨界モードの非線形効果を表した図である. 図 (a) には, Busse の理論と同じく赤道で東向き加速となっている様子が見られる. 図 (b) では赤道で最大となっている鉛直熱輸送による加熱冷却の様子が見られる.

図 4.8 のそれぞれの非線形効果によって引き起こされる平均子午面場を 図 4.9 に示す. 図 (a) では角運動量輸送収束による東向き加速に応じて西風が生じ, その風によるコリオリ力によって図 (c) のような子午面循環が誘起されている. 図 (b) の加熱に対する応答は予想と異なり赤道で西風となっているが, これは図 (d) 中に見られる高緯度の逆循環によるものと考えられる. 赤道付近の循環は予想通り赤道で東風生成に寄与しているが, 逆循環の角運動量輸送による中低緯度の西向き加速が強いため赤道で風向きを逆にするに至っていないのである. 実際図 (b) では赤道での風速が中緯度に比べて若干小さくなっている.

それぞれの非線形効果によって引き起こされる東西風の強さの比較を外側境界での風速で

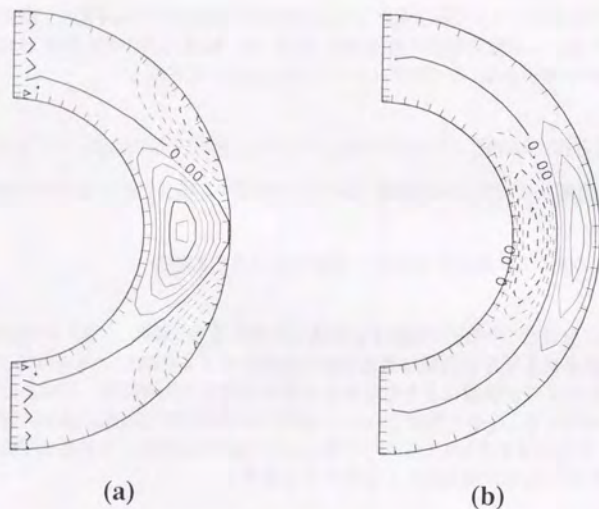


図 4.8: 対流の臨界モードの非線形効果. $\eta = 0.6, T = 10, P = 1$ の場合. (a) 運動方程式経度成分の非線形項 (東西加速項). 実線が西向き加速, 破線が東向き加速を表す. (b) 温度の式の非線形項 (加熱項). 実線が加熱, 点線が冷却を表す.

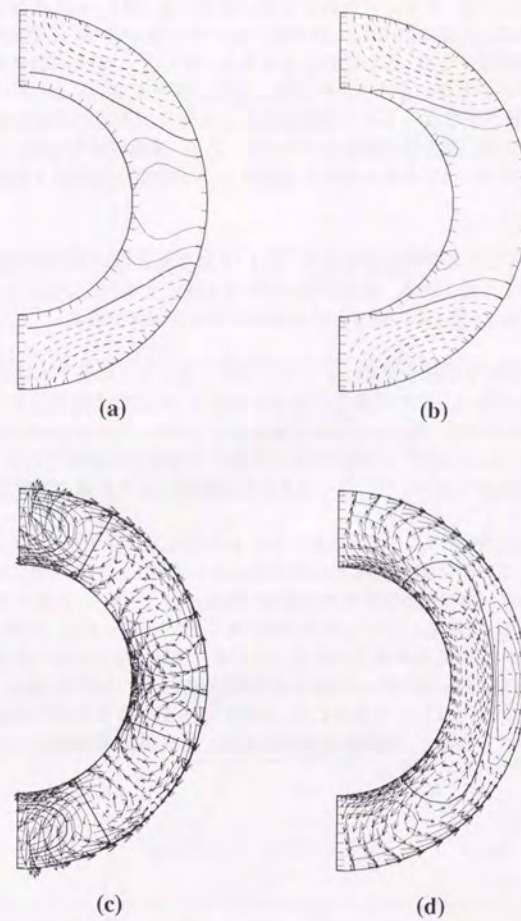


図 4.9: 臨界モードの各非線形効果によって引き起こされる平均子午面場. $\eta = 0.6, T = 10, P = 1$ の場合. (a) 東西加速項による平均東西風. 実線が西風, 破線が東風を表す. (b) 加熱項による平均東西風. (c) 東西加速項による平均子午面循環と温度擾乱場. 実線が正の温度擾乱, 破線が負の温度擾乱を表す. (d) 加熱項による平均子午面循環と温度擾乱場.

行なったのが図4.10である。各非線形効果の寄与の相対的な強さがブランドル数によって異なる様子が見られる。ブランドル数が小さい場合には(図4.10 a)東西加速項に対する応答が加熱項に対する応答に比べて大きい。ブランドル数が $O(1)$ 程度になると(図4.10 b)応答の強さが同程度になり、さらに大きくなると(図4.10 c)完全に加熱項による寄与だけで風場が定まることがわかる。この結果は先の予想を定量的に裏付けるものである。また、予想では考慮されなかった子午面加速項による寄与は東西加速項によるものと同程度のオーダーであるが、赤道での振幅は半分程度である。風速分布を定めるには子午面加速項の寄与は無視できないが、赤道の風向を議論する上では東西加速項と加熱項による応答で説明ができればよい。

次に、球殻を厚くした場合の結果を示す。図4.11は球殻が厚い場合の対流の臨界モードの非線形効果を表した図である。球殻が厚い分緯度方向に分布が広がることを除けば、球殻が中程度の厚さである図4.8の場合と同じ傾向の非線形効果である。

図4.11のそれぞれの非線形効果によって引き起こされる平均子午面場が図4.12である。注目すべきことは図(a)での赤道での風向きである。角運動量輸送収束が赤道で東向き加速であるにもかかわらず、図(a)は赤道東風を示している。これは加速の向きに風が引き起こされるBusse(1970a,1973)の理論や先の予想とは相反する結果である。図(b)の加熱に対する応答は予想通り図(d)中に見られる子午面循環により赤道で東風が生成されている。

図4.13は各非線形効果によって引き起こされる外側境界東西風を図示したものである。ブランドル数が小さい時に東西加速項に対する応答が卓越し、大きい時に加熱項による応答が卓越する傾向は、先の球殻の厚さが中程度の場合(図4.10)と同様である。しかし、今の場合は東西加速項、加熱項どちらも赤道東風に寄与しているために、結果としてすべてのブランドル数において赤道東風状態が実現している。球殻が厚い場合は赤道東風になるという予想の結果だけは整合的であったが、その東風生成のメカニズムは正しくない。球殻が厚くブランドル数が $P \leq O(1)$ の場合には、熱的に引き起こされた子午面循環により東風が作られているわけではなく、角運動量輸送の収束による東向きの加速に対する応答がそもそも東風となっているのである。

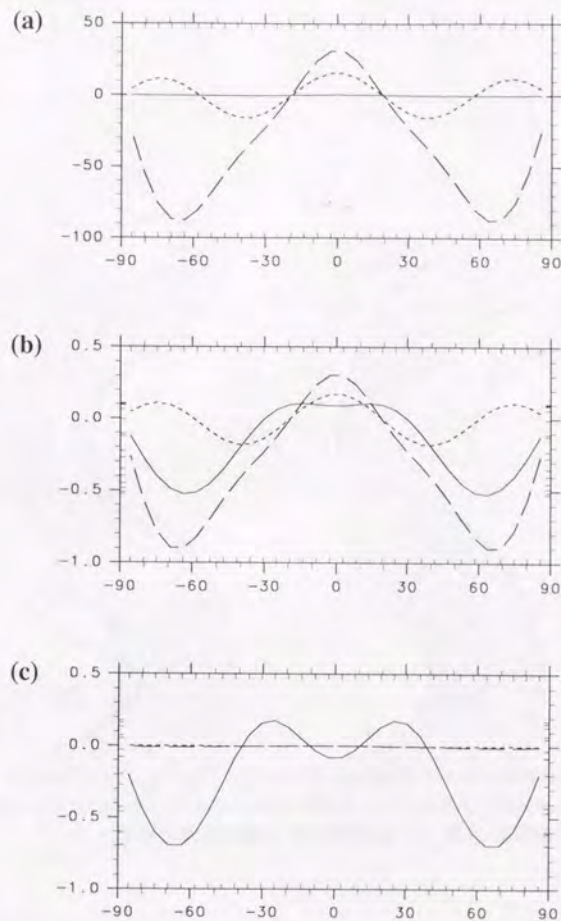


図4.10: 臨界モードの各非線形効果によって引き起こされる外側境界での平均東西風の緯度分布。 $\eta = 0.6$, $T = 10$ の場合。それぞれ実線が加熱項、破線が東西加速項、点線が子午面加速項により引き起こされる平均東西風を表す。(a) $P = 0.01$. (b) $P = 1$. (c) $P = 10^2$.

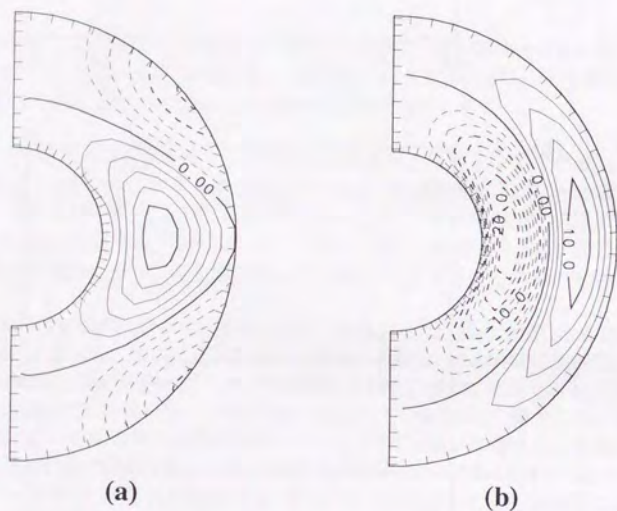


図 4.11: 対流の臨界モードの非線形効果. $\eta = 0.4, T = 10, P = 1$ の場合. (a) 運動方程式経度成分の非線形項 (東西加速項). 実線が西向き加速, 破線が東向き加速を表す. (b) 温度の式の非線形項 (加熱項). 実線が加熱, 点線が冷却を表す.

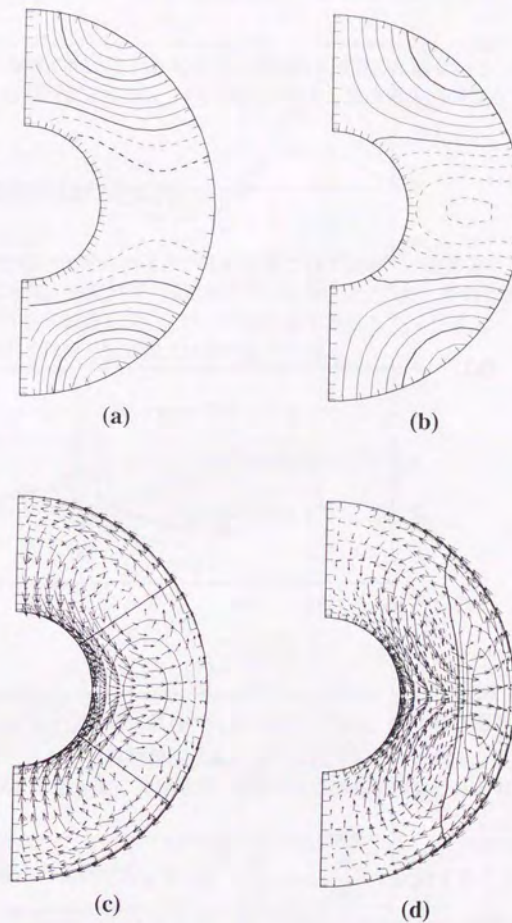


図 4.12: 臨界モードの各非線形効果によって引き起こされる平均子午面場. $\eta = 0.4, T = 10, P = 1$ の場合. (a) 東西加速項による平均東西風. 実線が西風, 破線が東風を表す. (b) 加熱項による平均東西風. (c) 東西加速項による平均子午面循環と温度擾乱場. 実線が正の温度擾乱, 破線が負の温度擾乱を表す. (d) 加熱項による平均子午面循環と温度擾乱場.

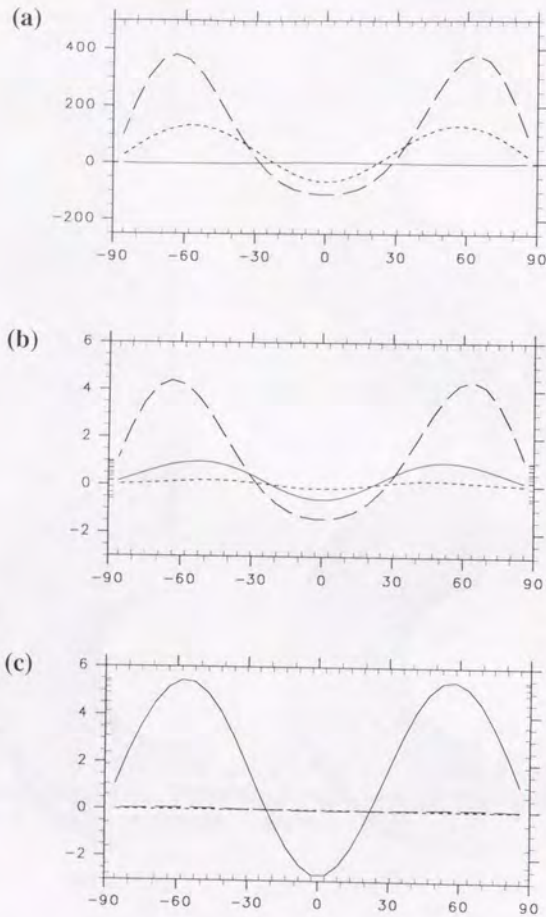


図 4.13: 臨界モードの各非線形効果によって引き起こされる外側境界での平均東西風の緯度分布. $\eta = 0.4, T = 10$ の場合. それぞれ実線が加熱項, 破線が東西加速項, 点線が子午面加速項により引き起こされる平均東西風を表す. (a) $P = 0.01$. (b) $P = 1$. (c) $P = 10^2$.

4.4 線型応答問題～東西加速項に対する定常解

第 4.3 節 に現れた加速の向きと引き起こされる風向きが逆になるという一見奇妙な結果を理解するために, 回転不安定成層流体の強制に対する応答問題を調べてみる.

4.4.1 線型応答問題の定式化

図 4.14 のような回転軸と重力の向きが垂直な系でのブシネスク流体を考える. 回転軸, 重力と垂直な向きに x 軸 (東西方向), 回転軸方向に y 軸 (南北方向), 重力と逆向きに z 軸 (鉛直方向) を選ぶ. 不安定成層している静止状態を基本場として x 方向に一樣な擾乱場のみ考えると, 無次元化された支配方程式は次のようになる.

$$\frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial t} + \tau w = \nabla^2 u + F_x(y, z), \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{P} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \nabla^2 v + F_y(y, z), \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{P} \frac{\partial w}{\partial t} - \tau u = -\frac{\partial \pi}{\partial z} + R\theta + \nabla^2 w + F_z(y, z), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \theta + Q(y, z), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4.8)$$

ここで $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である. $F_x(y, z), F_y(y, z), F_z(y, z)$ は強制加速項, $Q(y, z)$ は強制加熱冷却項を表す. これらは弱非線形計算における臨界モードの代入された運動方程式の経度方向, 緯度方向, 鉛直方向の非線形項, 温度の式の非線形項をそれぞれ想定しているものである.

(4.8) より $y-z$ 面内の流線関数 ψ を $v = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ と定義することができる. 圧力を消去するため $-\frac{\partial}{\partial z}(4.5) + \frac{\partial}{\partial y}(4.6)$ とすると, 子午面の渦度方程式が得られる.

$$\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \tau \frac{\partial u}{\partial y} = R \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 \nabla^2 \psi + F_m(y, z), \quad (4.9)$$

ただし $F_m(y, z) \equiv \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$ は子午面方向の加速による渦度生成項である. 運動方程式

の x 成分と温度の式も流線関数で表しておく。

$$\frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial t} + \tau \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nabla^2 u + F_x(y, z), \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nabla^2 \theta + Q(y, z). \quad (4.11)$$

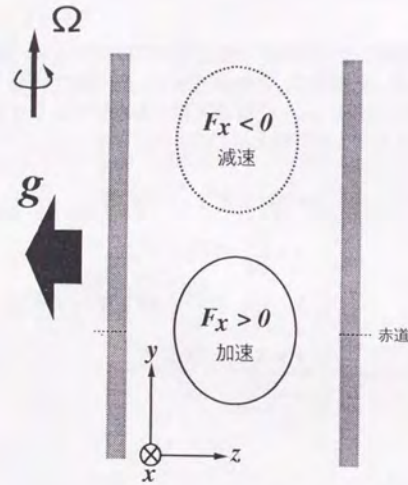


図 4.14: 簡単な線型応答モデルの模式図。

4.4.2 強制項がない場合の性質

強制に対する応答を調べる前に、まずは強制のない場合の性質を調べておく。 $F_x, F_m, Q \equiv 0$ とし $\psi, \theta, u \propto \exp\{i(l y + m z - \omega t)\}$ を (4.9), (4.10), (4.11) に代入する。係数行列式が 0 であることから分散関係が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta(\omega, l, m; R, \tau) \equiv & -(l^2 + m^2) \left\{ -\frac{i\omega}{P} + l^2 + m^2 \right\}^2 (-i\omega + l^2 + m^2) \\ & + l^2 R \left\{ -\frac{i\omega}{P} + l^2 + m^2 \right\} - l^2 \tau^2 \{-i\omega + l^2 + m^2\} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\omega = 0$ とすることにより、波数 l, m の子午面内の運動に対する臨界レイリー数 R_c が求まる。

$$R_c(l, m, \tau) = \frac{(l^2 + m^2)^3}{l^2} + \tau^2. \quad (4.13)$$

第 1 項目が回転に依存しない部分であり、レイリー-ペナル対流問題で得られる臨界レイリー数と同じ形をしている。第 2 項目が回転による安定化の効果を表している。

4.4.3 強制に対する定常応答解

次に強制項に対する定常応答解を求める。加速項、加熱項として波数 l, m の分布

$$(F_m, F_x, Q) = (\tilde{F}_m, \tilde{F}_x, \tilde{Q}) \exp\{i(l y + m z)\}$$

を考える。これに対する定常解を

$$(\psi, u, \theta) = (\tilde{\psi}, \tilde{u}, \tilde{\theta}) \exp\{i(l y + m z)\}$$

とおくと (4.9), (4.10), (4.11) は

$$\begin{pmatrix} -(l^2 + m^2)^2 & -il\tau & -ilR \\ il\tau & l^2 + m^2 & 0 \\ -il & 0 & l^2 + m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_m \\ \tilde{F}_x \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}.$$

したがって、定常解は

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(0, l, m; R, \tau)} \begin{pmatrix} (l^2 + m^2)^2 & il\tau(l^2 + m^2) & ilR(l^2 + m^2) \\ -il\tau(l^2 + m^2) & -(l^2 + m^2)^3 + l^2 R & R\tau l^2 \\ il(l^2 + m^2) & l^2 \tau & -(l^2 + m^2)^3 - \tau^2 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_m \\ \tilde{F}_x \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Delta(0, l, m; R, \tau) &= -l^2(l^2 + m^2) \left\{ \frac{(l^2 + m^2)^3}{l^2} + \tau^2 - R \right\} \\ &= -l^2(l^2 + m^2) [R_c(l, m, \tau) - R], \end{aligned} \quad (4.15)$$

である。

我々が考えている状況は不安定成層であるが、子午面運動に関しては熱的に安定な状態であることに注意されたい。弱非線形計算を行なう時はレイリー数を東西波数が 0 でない運動

も含めた場合の臨界値に選んだ。回転の影響により東西波数が0でないモードが臨界モードとして選ばれるので、東西波数0のモードに対する臨界レイリー数は臨界値よりも大きい。したがって $R < R_c(l, m, \tau)$ であり、 $\Delta(0, l, m; R, \tau) < 0$ である。

特に興味のあるのは東西加速項 F_x に対する定常応答である。 $\dot{F}_m, \dot{Q} = 0$ を (4.14) に代入すると

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{u} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \frac{\bar{F}_x}{-\Delta(0, l, m; R, \tau)} \begin{pmatrix} -il\tau(l^2 + m^2) \\ \{(l^2 + m^2)^3 - l^2 R\} \\ -l^2\tau \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

となる。(4.16) はレイリー数の大きさによって引き起こされる東西風の向きが変わることを表しており、その境界値となる遷移レイリー数 R_t は

$$R_t(l, m) \equiv \frac{(l^2 + m^2)^3}{l^2}, \quad (4.17)$$

である。例えば図 4.8(a) 図 4.11(a) での赤道域に相当する $F_x > 0$ の領域(東向き加速)では $R < R_t(l, m)$ の時に西風 ($u > 0$), $R > R_t(l, m)$ の時には東風 ($u < 0$) が生じることになる(図 4.15)。

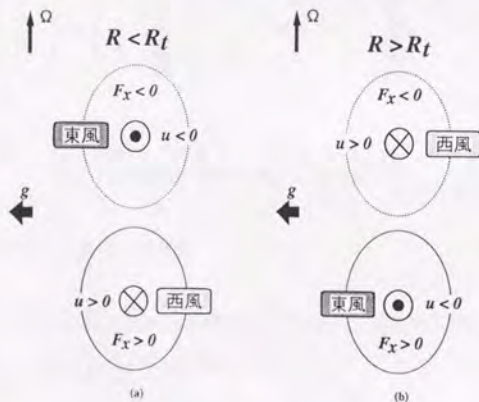


図 4.15: 東西加速によって引き起こされる東西風の模式図。(a) レイリー数が小さい場合 ($R < R_t$). (b) レイリー数が大きい場合 ($R_t < R$).

レイリー数が大きい場合に加速の向きと逆の風向となることは静止状態に強制加速を与えて定常に達するまでの変化を想像することで直観的には理解できるだろう。加速をはじめると、まずは加速の向きに東西風が生じ、次に東西風の科リオリ力により子午面循環が引き起こされる。その循環による角運動量輸送は最初に引き起こされた風向きとは逆の向きの風を作ろうとする。レイリー数が小さい時には引き起こされた子午面循環が粘性により抑えられているので最初に生じた風を弱める程度にしか作用しない。しかしながらレイリー数が大きい時には熱的に不安定な状態に近いので容易に子午面循環を引き起こすことができ、逆向きの風を引き起こせるほどに強い子午面循環を作ることができる。

レイリー数が大きい場合に加速の向きと逆の風向となることを定常状態における力学バランスを通じて理解するならば、遷移レイリー数 R_t が非回転の時の臨界レイリー数に一致していることに注目すれば良いだろう。 $R < R_t$ の場合には粘性および熱拡散で対流運動が抑えられて安定状態を保っているのに対して、 $R > R_t$ の場合には粘性および熱拡散だけでは対流運動を抑え切れず、回転の効果と合わせて安定を保っている状態である。したがって、 $R > R_t$ の場合の定常状態のバランスは回転の効果が子午面の対流運動を抑える方向に働いていなければならない。このことを念頭において、東西加速に対する定常応答の状態を模式的に表した図 4.16 を見てみよう。図 (a) では加速に対して同じ向きの東西風が生じて粘性によりバランスし、東西風の科リオリ力によって子午面循環が生じている。すなわち科リオリ力が子午面循環を加速する向きに働いている。レイリー数が小さい場合には粘性の効果が大きくこのようなバランスが可能である。しかしながらレイリー数が遷移レイリー数を越えると東西風の科リオリ力もあわせて子午面循環を抑えていなければならないので図 (a) のような状態は定常状態として維持できないのである。したがって図 (b) のように加速に対して逆向きの東西風が生じて科リオリ力が子午面循環を抑える状態でバランスしていなければならない。この時東西方向の力のバランスは東西加速と東西風の粘性力が同じ向きを向いており、それらとは逆向きの子午面循環の科リオリ力がつりあっている状態になっている。

4.4.4 数値計算との比較

東西加速項が引き起こす東西風の風向きを定める上で重要なことはレイリー数の大きさであることが示された。風向きが逆転する境目の遷移レイリー数 R_t は、与えられた強制のスケールに対する回転のない場合の臨界レイリー数であった。以下では先の第 4.2 節での平均子午面場の計算に用いたレイリー数とここで導出された遷移レイリー数とを比較し、計算された平均東西風の風向きとの整合性を調べる。

遷移レイリー数 $R_t(l, m)$ を定めるには強制加速項の鉛直および緯度方向のスケールを見積もり、波数 l, m を定めなければならない。ここでは簡単のため図 4.17 のように、球殻の厚

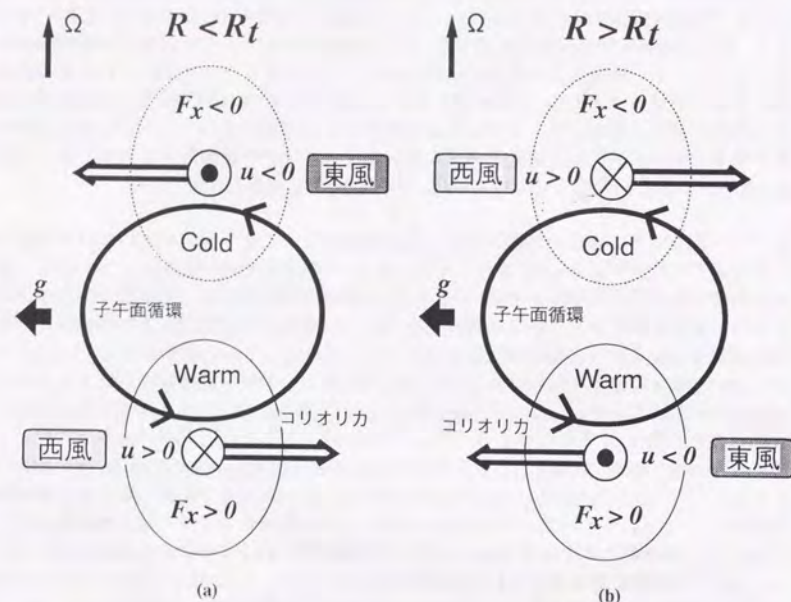


図 4.16: 東西加速に対する応答のバランスの模式図. (a) レイリー数が小さい場合 ($R < R_t$). (b) レイリー数が大きい場合 ($R_t < R$).

みから強制項のスケールを定めることにする. 強制東西加速分布 F_x は

$$F_x(y, z) = \tilde{F}_x \sin \pi z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L_y} y\right), \quad (4.18)$$

ただし, L_y は球殻内境界に接するように球殻を切りとった時の切口の長さで定める. この時 L_y を η で表すと

$$L_y = \sqrt{r_o^2 - r_i^2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}, \quad (4.19)$$

となる.

遷移レイリー数は $l = \frac{\pi}{L_y}$, $m = \pi$ を (4.17) に代入することにより η の関数として求める

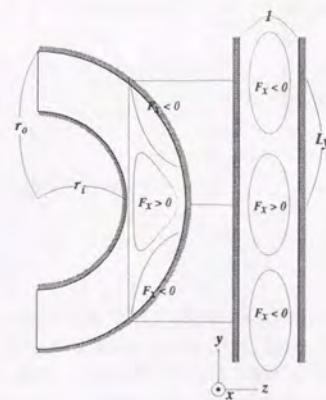


図 4.17: 球殻モデルと線型応答モデルの対応.

ことができる.

$$R_t = \frac{\{(\pi/L_y)^2 + \pi^2\}^3}{(\pi/L_y)^2} = \frac{8\pi^4}{(1-\eta)(1+\eta)^2}. \quad (4.20)$$

球殻モデルに対応させるには, さらにレイリー数の定義の差異を考慮する必要がある. 概して平板間の対流問題のレイリー数 R と球殻対流問題のレイリー数 R は球殻の平均半径 $\bar{r} = \frac{1+\eta}{21-\eta}$ を用いて

$$R = \frac{R_*}{\bar{r}^2}, \quad (4.21)$$

と関係づけることができる (補遺 B 参照).

以上のように見積もった R_t と球殻モデルで得られた臨界レイリー数を比較したのが図 4.17 である. 第 4.4.3 節での議論によると, 図中 R_t の横線より臨界レイリー数の点为上側にある場合には東西加速の向きと逆向きの東西風が生成され, プランドル数が小さい場合でも赤道で東風になると結論されることになる球殻が厚い $\eta = 0.4$ (図 a) の場合にはすべて臨界レイリー数が R_t を越えているのに対して, 薄い球殻である $\eta = 0.8$ (図 c) ではすべて臨界レイリー数が R_t より小さくなっている. このことから $\eta = 0.4$ では赤道で東風, $\eta = 0.8$ の場合には赤道で西風であることが予想される. $\eta = 0.6$ の場合には $T \leq 10^2$ までは臨界レイリー数が R_t より小さく, $T = 10^3$ になると臨界レイリー数が R_t を越えている. したがって, $\eta = 0.6$ の場合には赤道の風向にテイラー数依存性が存在し, $T \leq 10^2$ までは西風であり, $T = 10^3$ になると東風に転ずると予想される.

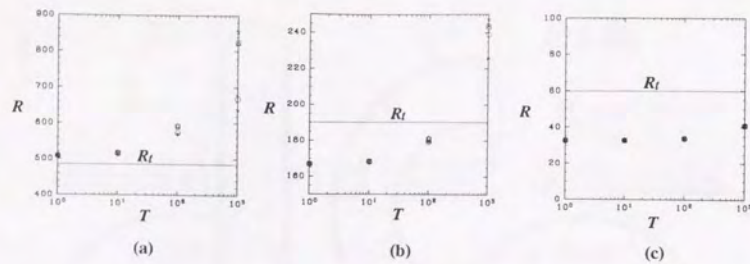


図 4.18: 臨界レイリー数と遷移レイリー数の比較. 図中のマークが計算された臨界レイリー数 (星印 $P = 0.01$, 丸印 $P = 0.1$, ×印 $P = 1$, 四角印 $P = 10$, 三角印 $P = 10^2$), 実線が線型応答モデルから見積もられた遷移レイリー数を表す. 臨界レイリー数を表す. (a) $\eta = 0.4$ の場合. $R_c = 486.8$. (b) $\eta = 0.6$ の場合. $R_c = 190.3$. (c) $\eta = 0.8$ の場合. $R_c = 59.4$.

これに対して, 第 4.2 節での弱非線形計算により得られた東西風分布を 図 4.19 に示す. 赤道での東西風の風向きはレイリー数の大小による議論と整合的である. 薄い球殻の場合には西風, 厚い球殻では東風となっている. 中間的な厚さの場合にはテイラー数が大きい場合に西風から東風へ転じている.

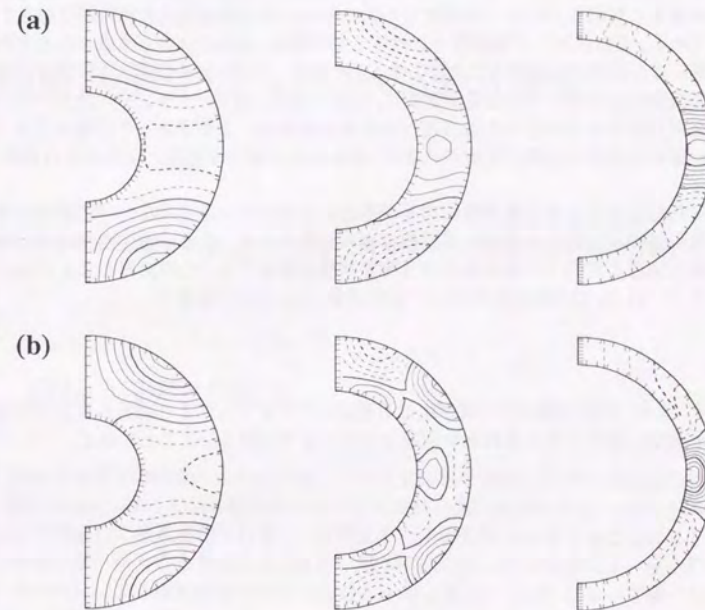


図 4.19: 対流によって引き起こされた平均東西風. それぞれ左から $\eta = 0.4, 0.6, 0.8$ の場合を示してある. (a) $T = 10, P = 1$ の場合. (b) $T = 10^3, P = 1$ の場合.

4.5 まとめ

以上の結果から、回転が小さい場合の対流により引き起こされる平均東西風は次のようにまとめられる。ブランドル数が大きい、あるいは球殻が厚い場合には赤道で東風となる。ブランドル数が $O(1)$ あるいはより小さく、球殻が薄い場合に赤道で西風となる。

平均東西風の赤道風向のブランドル数依存性は熱的に引き起こされた子午面循環による角運動量輸送と対流セルによる高緯度から低緯度への角運動量輸送の相対的な強さの変化の現れである。これに対して球殻厚さに対する依存性は、加速の向きと生成される東西風の向きが逆になる状態が実現することによるものである。ブランドル数が大きい場合には熱的な子午面循環により平均子午面場が定まり、赤道で東風となる。ブランドル数が小さい場合には対流セルによる高緯度から低緯度への角運動量輸送により平均子午面場が定まる。球殻が薄い場合は赤道で西風が生成されるが、球殻が厚い場合は加速と反対向きの東風となる。

加速の向きと生成される東西風の向きが逆になるという一見奇妙な力学的状態は不安定成層流体の強制項に対する線型応答問題により理解される。成層不安定度があるしきい値を越えると加速と逆向きの東西風を伴う定常状態が実現する。その境界となる不安定度を表すレイリー数 R_l は強制の南北および鉛直波数 l, m だけで定まり、

$$R_l(l, m) \equiv \frac{(l^2 + m^2)^3}{l^2}.$$

である。また、加速と逆向きの風が生じる理由はコリオリ力により誘起される子午面循環が熱的不安定に助けられて東西風を逆向きにするまでに強くなることにある。

第5章

平均東西風生成～回転の速い場合

この章では第3章で求めた対流の臨界モードを用いて回転が速い場合の対流が引き起こす平均東西風を求めた結果を示し、その力学的構造について回転が遅い場合と並行して議論する。

5.1 以前の研究と問題点

高速に回転する球での対流により引き起こされる東西風を議論したのは Busse (1983a, b) である。彼は Busse (1970) の回転軸方向に伸びた対流柱の議論を発展させ、ブランドル数が小さい場合を想定して漸近展開を行ない、境界面の曲率の影響を考慮することにより対流セルが外側ほど東に傾くことを示した (図 5.1, 第3章)。ブランドル数が大きい場合については境界面の傾斜による漸近展開を行なった Busse and Hood (1982) によって調べられており、同様の結果を得ている。

実際に彼が理論を構築する際に念頭においていた地学的対象は外惑星の縞状のパターンであったが (図 1.2)、赤道加速にも応用することができる。すなわち、傾いた対流セルの構造は回転軸に近い内側から外側への運動量輸送をもたらす、東西風を引き起こす。この場合、赤道外側境界で西風であり赤道加速状態が実現されることになる。

第4.1節での議論と同様に、これらの理論の問題点は熱的に引き起こされるであろう平均子午面循環の効果を考慮していないことである。上の理論では運動量輸送収束に対して粘性によりバランスする状態であるので、ブランドル数を大きくすると運動量輸送収束により引き起こされる東西風の振幅が弱まり、相対的に熱的に引き起こされた子午面循環による

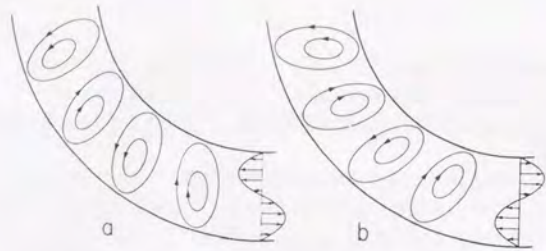


図 5.1: 高速回転下の対流セルの傾き (Busse 1983b). 赤道面での流線関数を示してある. (a) が球に相当する場合, (b) が曲率を逆符号にした場合である.

角運動量輸送が勝るようになると予想される. また, 第 4.4 節にて見いだされた, 加速に対して生成される東西風の向きが逆になる状態が実現する可能性も考慮する必要があり, 運動量輸送の向きから単純に東西風の向きを結論づけることはできない.

Busse and Hood (1982) や Busse (1983b) は室内実験あるいは理論での取り扱いを簡単にするため重力を回転軸に垂直な方向に選んでいる. そのような枠組では熱的には子午面循環を駆動させることができない. 対流セルが回転軸方向に一樣に伸びているので熱輸送量もその方向に一樣であり, したがって引き起こされる平均子午面場には水平方向の温度傾度が存在しないのである. しかしながら本来は重力が球の中心方向に働くため, 半径が一定の面での緯度方向の温度傾度により循環が駆動されるはずである.

以下では弱非線形数値計算による結果を示し, 赤道での東西風の向きを調べることにする.

5.2 平均東西風と平均子午面場～計算結果

図 5.2 は 第 3.2 節 で紹介した臨界モード (図 3.5) により引き起こされる平均子午面場の計算結果である. 図 (a) において回転軸に近い側で東風であり, 赤道外側で西風となっていることがわかる. 東西風の等値線が回転軸方向に平行である特徴は Busse の理論のいうところの内側から外側への運動量輸送による東西風生成を思わせる. 図 (b) に見られる子午面循環は赤道で角運動量を高緯度に運ぶ向きになっている.

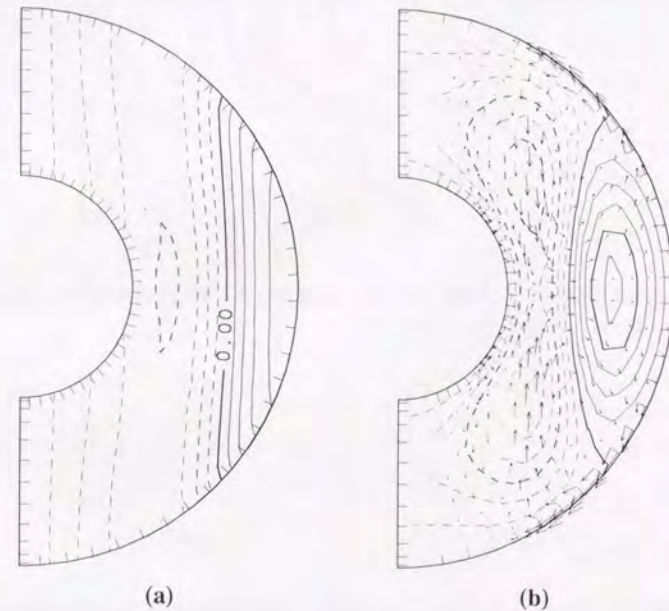


図 5.2: 対流が引き起こす平均子午面場. $\eta = 0.4$, $T = 10^6$, $P = 1$ の場合. (a) 平均東西風. 実線が西風, 破線が東風を表す. (b) 平均子午面循環と平均温度擾乱. 実線が正の温度擾乱, 破線が負の温度擾乱を表す.

図 5.2 に対してプラントル数を大きくした場合に引き起こされる平均東西風を示したのが図 5.3 である. 図 5.3(a) に対してプラントル数を大きくしていくと赤道での西風が弱められ (図 5.3 b), ついには風向きが逆になり東風となる (図 5.3 c). これは 図 5.2(b) に見られ

たような子午面循環による角運動量輸送の効果が次第に大きくなっていくためであると考えられる。

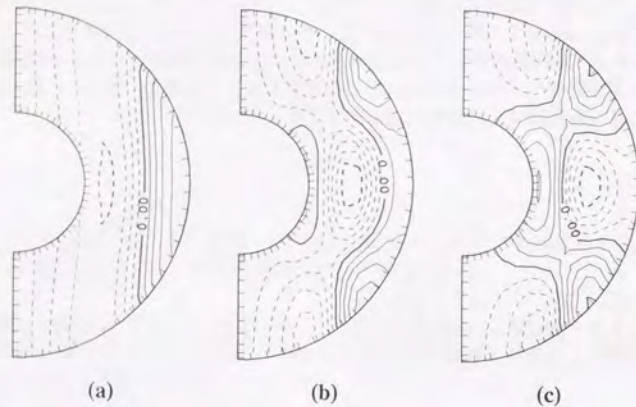


図 5.3: 対流が引き起こす平均東西風. $\eta = 0.4$, $T = 10^6$ の場合. 実線が西風, 破線が東風を表す. (a) $P = 1$. (b) $P = 10$. (c) $P = 10^2$.

5.3 各非線形項が引き起こす平均子午面場

では, 第 4.3 節と同様に平均子午面場の計算を非線形項毎に分けて行ない, それぞれが引き起こす東西風の強さを比較してみる.

図 5.4 は 図 3.5 で示した対流の臨界モードの非線形効果を表した図である. 図 (a) には, Busse らの理論に示されるように内側から外側への運動量輸送による内側での減速, 外側での加速が見られる. 同様に図 (b) では外向きの熱輸送による加熱冷却が見られる. どちらも等値線が回転軸方向に平行であることが特徴であり, 対流運動が回転軸方向に一樣であることを反映している.

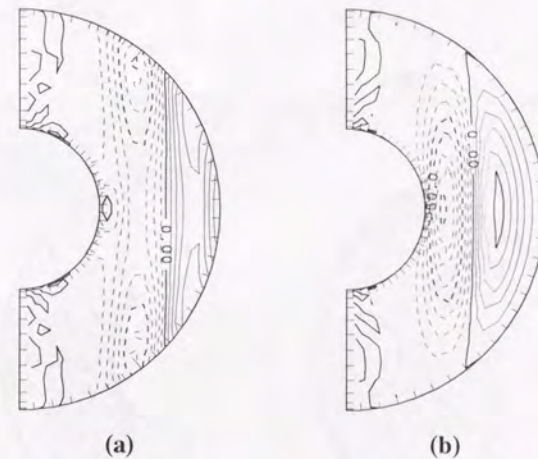


図 5.4: 対流の臨界モードの非線形効果. $\eta = 0.4$, $T = 10^6$, $P = 1$ の場合. (a) 運動方程式経度成分の非線形項 (東西加速項). 実線が西向き加速, 破線が東向き加速を表す. (b) 温度の式の非線形項 (加熱項). 実線が加熱, 点線が冷却を表す.

図 5.4 のそれぞれの非線形効果によって引き起こされる平均子午面場を 図 5.5 に示す. 図 (a) に見られる東西加速項により引き起こされた東西風は回転軸方向に一樣な分布が特徴的であり, Busse らの理論と整合的である. 一方図 (b) の加熱項による東西風は赤道で東風となっており, 図 (d) に見られる子午面循環による角運動量輸送により引き起こされたと思われる.

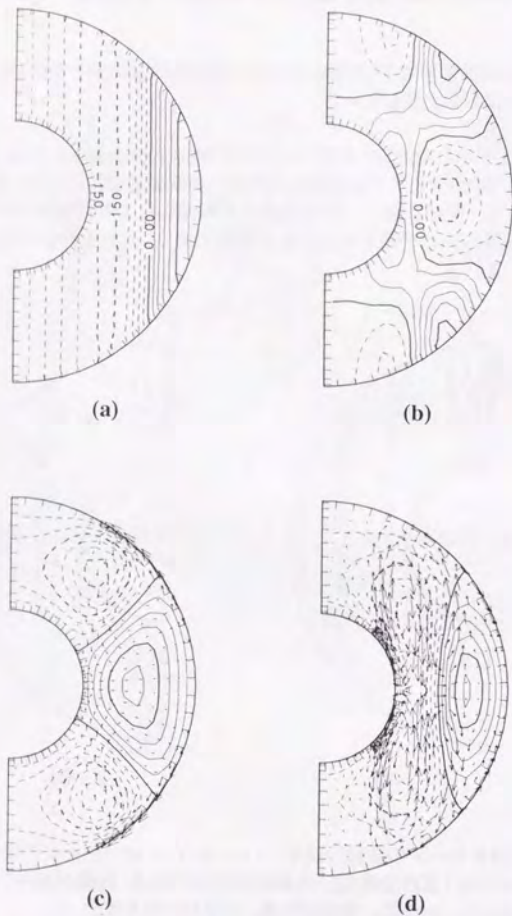


図 5.5: 臨界モードの各非線形効果によって引き起こされる平均子午面場. $\eta = 0.4$, $T = 10^6$, $P = 1$ の場合. (a) 東西加速項による平均東西風. 実線が西風, 破線が東風を表す. (b) 加熱項による平均東西風. (c) 東西加速項による平均子午面循環と温度擾乱場. 実線が正の温度擾乱, 破線が負の温度擾乱を表す. (d) 加熱項による平均子午面循環と温度擾乱場.

これらより 図 5.2(a) に見られる回転軸方向に一様な東西風分布は, 主に東西加速項による寄与で生成されていることがいえる. 一方, 図 (b) の東西風はブランドル数の大きい図 5.3(c) と同じような分布となっている. このことはブランドル数が大きい時には加熱項による寄与が大きいことを示唆する.

図 5.6 は, それぞれの非線形効果によって引き起こされる東西風の強さの比較を外側境界での風速で行なったものである. ブランドル数に対する各非線形項の寄与の相対的大きさの変化は回転の小さい第 4.3 節の場合と同様である. すなわち, ブランドル数が小さい場合には東西加速項の寄与が卓越し, ブランドル数が大きい場合には加熱項の寄与が大きくなる. しかしながら, 回転が小さい場合に両者の寄与が拮抗するのが $P \sim O(1)$ であったのに対して図 5.6 では $P \sim O(10)$ である点と, 子午面加速項の寄与がほとんどない点が異なる.

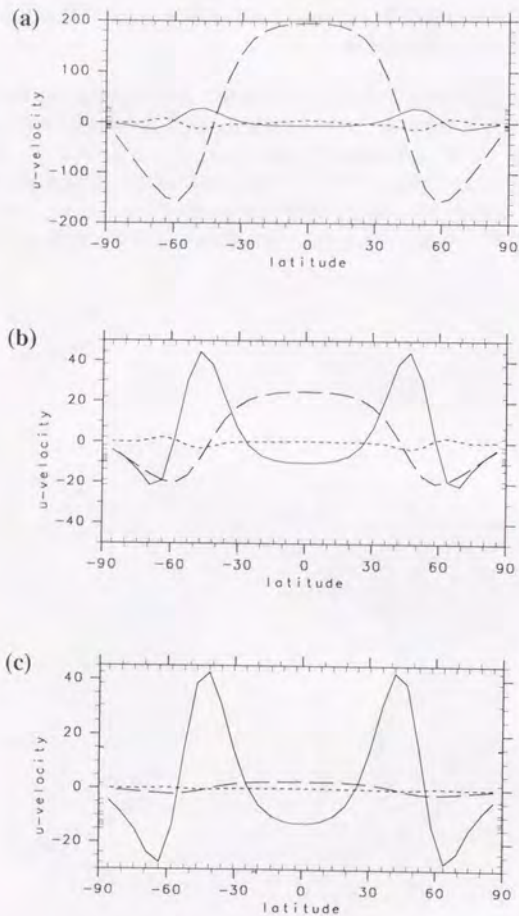


図 5.6: 臨界モードの各非線形効果によって引き起こされる外側境界での平均東西風の緯度分布. $\eta = 0.4, T = 10^6$ の場合. それぞれ実線が加熱項, 破線が東西加速項, 点線が子午面加速項により引き起こされる平均東西風を表す. (a) $P = 1$. (b) $P = 10$. (c) $P = 10^2$.

5.4 まとめ

以上の結果から, 回転が大きい場合の対流により引き起こされる平均東西風は次のようにまとめられる. プランドル数が大きい時には熱的に引き起こされた子午面循環による角運動量輸送が赤道で東風を生成する. プランドル数が $O(1)$ あるいはより小さい場合は外側で東向きに傾いた対流セルによる内側から外側への運動量輸送により赤道外側で西風を生成する.

第4章で出現した加速の向きと生成される東西風の向きが逆になる状態は, 回転が大きい場合には現れなかった. その理由は東西加速項の分布にあると考えられる. 生成される東西風が加速と逆向きになるには, 加速によって子午面循環が引き起こされなければならない. ところが図 5.4(a) では回転軸方向に一樣な加速のために, 子午面循環が引き起こされない. 第4.4節での記述で言えば, 強制分布の波数が $l=0$ であるために遷移レイリー数 (4.17) が無限大となっていることに対応する.

このことは, 赤道での風向きに対する球殻厚依存性が弱いことをも意味する. 第4章で見られた球殻厚に対する赤道風向の遷移は, 加速と同じ向きの東西風が生成される状態から逆向きの東西風が生成される状態への遷移であった. 回転が大きい場合には, その加速項の分布から逆向きの東西風が生成される状態が存在しないために第4章のような球殻の厚みに対する依存性は小さいと考えられる. 図 5.7 は図 5.3 に対して球殻を薄くした場合の東西風分布である. 振幅が赤道付近に集中していることを除けば図 5.3 と相似的な分布を示している.

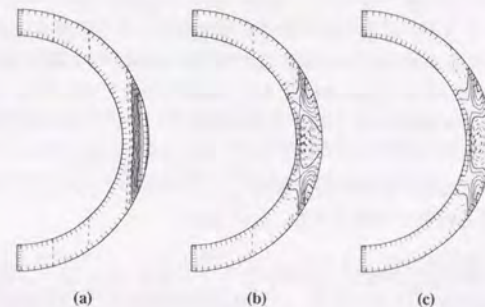


図 5.7: 対流が引き起こす平均東西風. $\eta = 0.8, T = 10^6$ の場合. 実線が西風, 破線が東風を表す. (a) $P = 1$. (b) $P = 10$. (c) $P = 10^2$.

第6章

結論および議論

以上回転の遅い場合と速い場合に分けて、対流の引き起こす平均東西風について議論した。得られた東西風分布の一覧を補遺 C に示す。赤道外側境界における風向きについて整理したダイアグラムが図 6.1 である。一様内部熱源により駆動される大気循環は必ずしも赤道西風とはならない。赤道東風になるのはブランドル数が大きい場合、あるいは回転が小さく球殻が厚い場合である。

赤道外側境界での風向のブランドル数依存性は生成される平均子午面場への各非線形項の寄与の相対的大きさの変化によるものであった。回転の大きさによらず、ブランドル数が小さい時には対流のレイノルズストレスによる運動量輸送収束の寄与が大きく、ブランドル数が大きい時には対流の熱輸送によって引き起こされる子午面循環の寄与が大きい。この傾向はスケーリングされた支配方程式からも見出すことができる。(2.1) の非線形項には係数 $\frac{1}{P}$ がかかっているためブランドル数が無限大の極限では運動方程式の非線形項が無視できる。これはマントル対流の計算を行なう際にしばしば用いられる近似である。一方、ブランドル数が小さい極限をとる場合には、時間のスケーリングを熱拡散時間でなく粘性散逸時間 d^2/ν で行なう方がわかりやすい (Zhang and Busse, 1987)。このとき運動方程式の非線形項でなく温度の非線形項に係数 $\frac{1}{P}$ がかかるので、ブランドル数が小さい極限では温度の非線形項の寄与が無視できることになる。

得られた東西風分布の中で特記すべきはブランドル数が $O(1)$ 以下で回転が遅く、球殻が厚い場合に現れた赤道東風の解である。この解は運動量輸送により赤道で西風が引き起こされる向きに加速されているにもかかわらず、生成される風の向きは逆の東風となっているのであった。この結果は加速と同じ向きの風が生じるという直観的なイメージが当てはまらず、加速の向きからだけでは必ずしも東西風の向きを予言することはできないことを意味する。また、この解の存在が回転が遅い場合の赤道風向の球殻厚依存性の原因であった。

加速と同じ向きの風が生じるイメージは第 4.1 節、第 5.1 節で紹介した理論のように東西方向の加速と生成される東西風に働く粘性力とのバランスを考慮することにより得られるものである。上で得られた解はそのような力学バランスだけでは解釈できないものであり、コリオリ力により誘起される子午面循環が重要な役割を果たしている。成層不安定な基本場であるので熱的な不安定性が子午面循環を生成する方向に働き、その循環の強度が東西風の向きを反転させるまでに強くなるのである。成層安定な基本場の場合には子午面循環を抑える向きに働くので、東西風の向きを変えらるまでにはいたらず、このような解は存在しない。

第 4 章の弱非線形計算はレイリー数を臨界値を選んで計算を行なったが、その力学的な解析を行なった第 4.4 節での結果は臨界値を上回るレイリー数を選ぶ非線形計算の振舞いも示唆している。レイリー数が遷移レイリー数 R_1 (4.17) を越えると西風を引き起こす向きの加速にもかかわらず東風となる力学バランスが可能となるので、図 6.1(b),(c) に見られる回転が遅い場合の西風領域のパラメータを選んでも、レイリー数を遷移レイリー数より大きくすると東風に転じると考えられる。一方で、回転が速い場合にはその加速分布が子午面循環を誘起しないので、加速の向きと逆の風が生じるバランスが不可能である。したがってブランドル数が $O(1)$ 以下での超臨界レイリー数の場合には図 6.1(b),(c) に見られる赤道西風の領域が東風に転じ、球殻の厚みによらず回転が遅い場合に東風、速い場合に西風となる傾向が見られることが予想される。

実際の惑星大気においては、弱非線形的であるとは限らないことに加えて粘性拡散などの不明なパラメータもあるために、直接的にここでの結果を応用することは難しい。にもかかわらず得られた傾向をとりだすと、対流層が厚い方が赤道で東風になりやすいと考えられる。一方で、対流運動が球殻が厚いほど南北方向に広がることから赤道のジェット幅を球殻の厚さに読み変えることができれば、図 1 から木星、土星に比べて海王星の対流層が厚いと想像できる。これは海王星が赤道で東風であることと整合的であるといえる。より興味深いのは、最近日震学によって内部構造が明らかにされつつある太陽の場合である。Glatzmaier (1987) らのダイナモ計算の結果では、回転角速度の子午面分布が回転軸方向に一樣となっている。これは本研究での回転が遅い場合の傾向に一致する。一方日震学による太陽内部の構造は回転軸方向に一樣な回転角速度の子午面分布が見られず、むしろ回転が遅い場合の傾向に一致する。このことは、表面での速度分布が太陽の観測値と似ているにも関わらず、Glatzmaier らの結果は実際の太陽とは異なる力学バランスの解であることを示している。

最後に、ここで得られた対流とそれにより引き起こされる平均子午面場の性質については、弱非線形計算であることを前提にしたとしてもまだ議論する余地があることを注意しておく。それは、調べた基本場の温度分布が一般的なものでなく限定されたものであることである。数学的な定式化の簡単さから伝統的に (2.5) の形の基本場の温度分布が扱われ、本研究においてもそれにしたがった。しかしながら、回転が大きい場合の東西風生成に本質的な対流セルの傾きは、基本場の局所的な安定性、すなわち温度分布と重力分布に依存していることを第 3.3.2 節にて定性的に議論した。このことから、基本場の温度分布としてより一般的

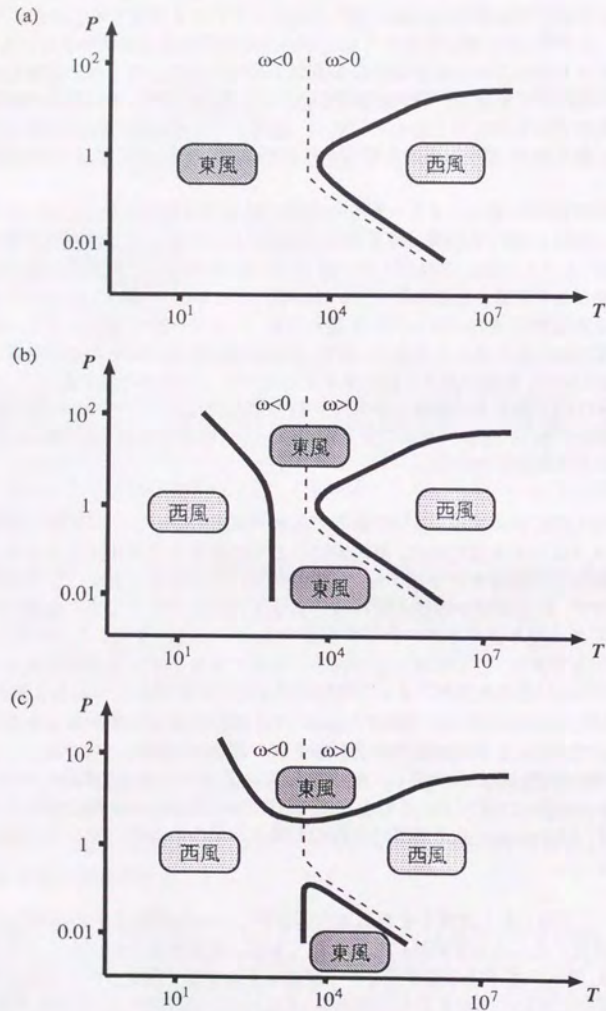


図 6.1: $T-P$ 面上での赤道外側境界の風向のダイアグラム. (a) 厚い球殻の場合 ($\eta = 0.3, 0.4$). (b) 中程度の厚さの球殻の場合 ($\eta = 0.5, 0.6$). (c) 薄い球殻の場合 ($\eta = 0.7, 0.8$).

なものを選べば、本研究で得られたものとは異なる性質をもつ臨界モードが得られ、引き起こされる東西風分布が変化する可能性がある。

謝辞

研究を遂行するにあたって東京大学理学部地球惑星物理学科の皆様には様々な面からの励ましや協力をいただいた。特に、林祥介氏には研究全体を通じて議論につきあっていただき、貴重な助言をいただいた。松田助教授には本論文をまとめるにあたって多くの有益な助言をいただいた。

球殻ブシネスクモデルの開発に当たっては、国立環境研究所の沼口敦氏の開発した大気大循環モデル AGCM5 のプログラム構造を参考にさせていただいたことが大いに役立った。加えて、その球面調和関数変換サブルーチンを流用させていただいた。

最後に、本研究の出発点となったウッズホール海洋研究所の地球流体夏季プログラムへの参加を当時快く承諾してくださった松野教授、住教授に感謝したい。

数値計算は国立環境研究所のスーパーコンピューター SX-3 で行った。図の描画には京都大学の塩谷、酒井両氏を中心として開発された地球流体電脳倶楽部ライブラリ、および沼口氏の作成した格子点データ解析ツール gtool3 を用いた。

補遺 A

ブシネスク球殻モデルの記述

A.1 基礎方程式

A.1.1 基礎方程式

基礎方程式はブシネスク方程式系である。非発散速度場をトロイダル、ポロイダルポテンシャルを用いて表し、温度を特定の温度分布からのずれとして表現してある (Zhang and Busse, 1987; Chandrasekhar, 1961)。

速度場の式

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r}) \quad (\text{A.1})$$

トロイダルポテンシャルの式

$$\left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \psi - \tau Q \phi = P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (\text{A.2})$$

ポロイダルポテンシャルの式

$$\left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \phi + \tau Q \psi - RL_2 \theta = -P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (\text{A.3})$$

温度の式

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta + L_2 \phi = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \quad (\text{A.4})$$

ここで、 \mathbf{k} は回転ベクトル方向の単位ベクトルである。系のパラメータはブランドル数 P 、レイリー数 R 、テイラー数 $T = \tau^2$ である。球座標 (緯度 λ , 経度 φ , 鉛直 r) における演算子の表現は

$$\mu \equiv \sin \varphi \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} L_2 &\equiv - \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] = -\nabla_H^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_2}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \nabla &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$Q \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \mathbf{k} \cdot \nabla + \mathbf{k} \cdot \nabla L_2) \quad (\text{A.10})$$

である。非線形項の球座標での表現は

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_\lambda = \mathbf{v} \cdot \nabla u + \frac{wu}{r} - \frac{vu \tan \varphi}{r}, \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_\varphi = \mathbf{v} \cdot \nabla v + \frac{wv}{r} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r}, \quad (\text{A.12})$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_r = \mathbf{v} \cdot \nabla w - \frac{u^2 + v^2}{r}, \quad (\text{A.13})$$

ただし

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + w \frac{\partial f}{\partial r}$$

である。

ポテンシャルと速度場の関係

ポテンシャルと速度場の関係は

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$v = -\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$w = \frac{L_2 \phi}{r} \quad (\text{A.16})$$

である。あるいは、

$$\begin{aligned} U &\equiv u \cos \varphi \\ &= \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right) \\ &= (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} V &\equiv v \cos \varphi \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

である。

A.1.2 境界条件

運動学的境界条件

運動学的境界条件は、壁を横切る流れなし、である。ポテンシャルで表現すれば

$$\phi = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (\text{A.19})$$

力学的境界条件

考察する力学的境界条件は、ストレスなし (free-slip) あるいは粘着条件 (rigid) の 2 種類である。ストレスなし条件の場合は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (\text{A.20})$$

粘着条件の場合は

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \psi = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (\text{A.21})$$

熱的境界条件

考察する熱的境界条件は、温度固定条件あるいは熱フラックス固定境界条件の 2 つの場合である。温度固定条件の場合は

$$\theta = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (\text{A.22})$$

熱フラックス固定条件の場合は¹

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}. \quad (\text{A.23})$$

¹基本場の境界での熱フラックスが与えられていることになる。

A.2 水平離散化

水平方向の離散化はスペクトル変換法を用いる (Glatzmaier, 1984, 沼口, 1992)。経度、緯度に関する微分の項は直交関数展開によって評価し、一方、非線型項は格子点上で計算する。

A.2.1 スペクトル展開

展開関数系としては球面上の Laplacian の固有関数系である球面調和関数 $Y_n^m(\mu, \lambda)$ を用いる。 Y_n^m は次のような方程式を満たし、

$$\nabla_\sigma^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1)Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.24})$$

Legendre 陪関数 P_n^m を用いて次のように書き表される。

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu)e^{im\lambda} \quad (\text{A.25})$$

ただし、 $n \geq |m|$ である。球面調和関数による展開は、

$$\psi_{ij} \equiv \psi(\lambda_i, \mu_j) = \text{Re} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\lambda_i, \mu_j), \quad (\text{A.26})$$

その逆変換は、

$$\tilde{\Psi}_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda \psi(\lambda, \mu) Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \psi(\lambda_i, \mu_j) Y_n^{m*}(\lambda_i, \mu_j) w_j \quad (\text{A.28})$$

のように表される²。積分を和に置き換えて評価する際には、 λ 積分については Gauss の台形公式を、 μ 積分については Gauss-Legendre 積分公式を用いる。 μ_j は Gauss 緯度、 w_j は Gauss 荷重である。また、 λ_i は等間隔の格子である。スペクトル展開を用いれば、微分を含む項の格子点値は次のように求められる。

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_{ij} = \text{Re} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N im \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\mu_i, \lambda_j) \quad (\text{A.29})$$

$$\left((1-\mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_{ij} = \text{Re} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \tilde{\Psi}_n^m (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_n^m(\mu_i, \lambda_j) \quad (\text{A.30})$$

²ここでは三角形切断を用いている。平行四辺形切断の場合には、 $\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \rightarrow \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^{N+|m|}$ と置き換えること。

方程式の移流項に現れる水平微分は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} \right)_n^m &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\lambda \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\lambda \operatorname{im} A(\lambda, \mu) \frac{1}{a(1-\mu^2)} Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \operatorname{im} A_{ij} Y_n^{m*}(\lambda_i, \mu_j) \frac{w_j}{a(1-\mu_j^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial B}{\partial \mu} \right)_n^m &= \frac{1}{4\pi a} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\lambda \frac{\partial B}{\partial \mu} Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \\ &= -\frac{1}{4\pi a} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\lambda B(\lambda, \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_n^{m*}(\lambda, \mu) \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{ij} (1-\mu_j^2) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_n^{m*}(\lambda_i, \mu_j) \frac{w_j}{a(1-\mu_j^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

ここで UA, UB は極 ($\mu = \pm 1$) で 0 になることを用いている。さらに、

$$\left(\widetilde{L_2 X} \right)_n^m = +n(n+1) \widetilde{X}_n^m \quad (\text{A.33})$$

を L_2 の項の評価のために用いる。

A.2.2 非線形項

各方程式の非線形項は、格子点上での $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, $\mathbf{v}\theta$ を計算し、それらの $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$, $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$, $\nabla \cdot$ をスペクトル空間で見積もる。ベクトル場 \mathbf{f} に対して

$$\mathbf{f} = (f_\lambda, f_\varphi, f_r) \equiv \left(\frac{rF_\lambda}{\cos \varphi}, \frac{rF_\varphi}{\cos \varphi}, f_r \right) \quad (\text{A.34})$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \nabla s &\equiv f_r \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{f_\varphi}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{f_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial s}{\partial \lambda} \\ &= f_r \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{F_\varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{F_\lambda}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial s}{\partial \lambda} \\ &= f_r \frac{\partial s}{\partial r} + F_\varphi \frac{\partial s}{\partial \mu} + \frac{F_\lambda}{1-\mu^2} \frac{\partial s}{\partial \lambda}, \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &\equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (f_\varphi \cos \varphi) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{f})_r &\equiv \frac{1}{r \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial f_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (f_\lambda \cos \varphi) \right\} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial \mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{f})_r &\equiv \frac{1}{r \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\nabla \times \mathbf{f})_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla \times \mathbf{f})_\lambda \cos \varphi \right\} \\ &= \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r f_\lambda) - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial f_r}{\partial \lambda} \right\} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r f_\varphi) \right\} \cos \varphi \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} \right) \\ &\quad - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 f_r}{\partial \lambda^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F_\varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{1-\mu^2} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} \right) + \frac{L_2 f_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

したがって、スペクトル空間では

$$(\nabla \cdot \mathbf{f})_n^m = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (f_r)_n^m + \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \mu} \right)_n^m + \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} \right)_n^m, \quad (\text{A.39})$$

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{f})_n^m = r \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \lambda} \right)_n^m - r \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial \mu} \right)_n^m, \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{f})_n^m &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \mu} \right)_n^m \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} \right)_n^m \right\} \\ &\quad + \frac{n(n+1)(f_r)_n^m}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

A.2.3 方程式のスペクトル表現

速度場の式

$$U_{ij}(r, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left\{ \tilde{\Psi}_n^m (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_n^m(\lambda_i, \mu_j) + im \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\Phi}_n^m) Y_n^m(\lambda_i, \mu_j) \right\} \quad (\text{A.42})$$

$$V_{ij}(r, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left\{ -im \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\lambda_i, \mu_j) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\Phi}_n^m) (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_n^m(\lambda_i, \mu_j) \right\} \quad (\text{A.43})$$

$$w_{ij}(r, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N n(n+1) \frac{\tilde{\Psi}_n^m(r, t)}{r} Y_n^m(\lambda_i, \mu_j). \quad (\text{A.44})$$

トロイダルポテンシャルの式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Psi}_n^m(r, t)}{\partial t} &= PG_n^m \tilde{\Psi}_n^m - P\tau \frac{(\tilde{Q}\psi)_n^m}{n(n+1)} \\ &\quad - \frac{1}{n(n+1)} [r \cdot \nabla \times (v \cdot \nabla v)]_n^m \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

ただし、式の中に現れる演算子の定義は次の通りである。

$$D_n \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad (\text{A.46})$$

$$G_n^m \equiv \frac{im}{n(n+1)} + D_n. \quad (\text{A.47})$$

ポロイダルポテンシャルの式

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_n \tilde{\Phi}_n^m(r, t)}{\partial t} &= PG_n^m D_n \tilde{\Phi}_n^m + P\tau \frac{(\tilde{Q}\psi)_n^m}{n(n+1)} - PR \tilde{\Theta}_n^m \\ &\quad + \frac{1}{n(n+1)} [r \cdot \nabla \times \nabla \times (v \cdot \nabla v)]_n^m \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

温度の式

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_n^m(r, t)}{\partial t} = D_n \tilde{\Theta}_n^m + n(n+1) \tilde{\Phi}_n^m - [\nabla \cdot (v\theta)]_n^m. \quad (\text{A.49})$$

A.3 鉛直離散化

Glatzmaier(1984) にしたがって, 基礎方程式を鉛直方向に離散化する. 鉛直微分をチェビシェフ関数展開を用いて評価する.

A.3.1 レベルのとりかた

上の層から下へと層の番号をつける. グリッドポイントをチェビシェフポイント (チェビシェフ関数が極値をとる点) にとる. 動径方向を次のように座標変換することにより, $[-1, 1]$ の区間へ移される (上の境界面が 1, 下の境界面が -1).

$$r = \frac{r_{out} + r_{in}}{2} + \frac{r_{out} - r_{in}}{2} \xi, \quad (\text{A.50})$$

$$\xi = \frac{2r - (r_{out} + r_{in})}{r_{out} - r_{in}}. \quad (\text{A.51})$$

座標 ξ 上で $K+1$ 個のグリッドポイントを次のように定義する.

$$\xi_k = \cos\left(\frac{\pi k}{K}\right), \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (\text{A.52})$$

各チェビシェフポイントでのチェビシェフ関数の値は

$$T_j(\xi_k) = \cos\left(\frac{jk\pi}{K}\right), \quad (\text{A.53})$$

となる. グリッド空間での物理量 $\tilde{\Phi}(r, t)_n^m$ をチェビシェフ関数展開すると

$$\Phi_{jn}^m(t) = \left(\frac{2}{K}\right) \sum_{k=0}^K {}''\tilde{\Phi}_n^m(\xi_k, t) T_j(\xi_k), \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (\text{A.54})$$

ただし Σ'' は最初と最後の項を 2 分の 1 倍して和をとることを表す. チェビシェフ展開係数からグリッドでの値を求めるには

$$\tilde{\Phi}_n^m(\xi_k, t) = \sum_{j=0}^K {}''\Phi_{jn}^m(t) T_j(\xi_k). \quad (\text{A.55})$$

A.3.2 鉛直境界条件

内部領域のグリッドにおいて差分化した方程式を時間積分した後, 鉛直境界条件を満たすように境界付近でのグリッド上の関数値を定める.

トロイダルポテンシャル

トロイダルポテンシャルに関しては r_k ($k = 1, \dots, K-1$) の点で時間積分を実行する. ストレスなし条件の場合, 境界値は内部領域を計算した後

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_0, t) = \frac{r_0}{r_1} \tilde{\Psi}_n^m(r_1, t), \quad (\text{A.56})$$

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_K, t) = \frac{r_K}{r_{K-1}} \tilde{\Psi}_n^m(r_{K-1}, t), \quad (\text{A.57})$$

で定める. 粘着条件の場合は (A.56), (A.57) を適宜

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_0, t) = 0, \quad (\text{A.58})$$

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_K, t) = 0, \quad (\text{A.59})$$

に置き換える.

ポロイダルポテンシャル

ポロイダルポテンシャルは $r_k, k = 2, \dots, K-2$ の点で $D_n \tilde{\Phi}_n^m$ について時間積分を実行する. $\tilde{\Phi}_n^m$ を定めるには境界値問題

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) \tilde{\Phi}_n^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m \quad (\text{A.60})$$

$$\tilde{\Phi}_n^m = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_n^m}{\partial r^2} = 0 \quad \text{at } r = r_{in}, r_{out}, \quad (\text{A.61})$$

を解かねばならない (上式はストレスなし条件の場合). 上式をチェビシェフ関数展開で表現すると

$$\sum_{j=0}^K {}'' \left(\frac{d^2 T_j(r_k)}{dr^2} + \frac{2}{r_k} \frac{dT_j(r_k)}{dr} - \frac{n(n+1)}{r_k^2} T_j(r_k)\right) \Phi_{jn}^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m(r_k), \quad k = 2, \dots, K \quad (\text{A.62})$$

$$\sum_{j=0}^K {}'' T_j(r_0) \Phi_{jn}^m = 0, \quad (\text{A.63})$$

$$\sum_{j=0}^K {}''T_j(r_K)\Phi_{jn}^m = 0, \quad (\text{A.64})$$

$$\sum_{j=0}^K {}''\frac{dT_j(r_0)}{dr^2}\Phi_{jn}^m = 0, \quad (\text{A.65})$$

$$\sum_{j=0}^K {}''\frac{dT_j(r_K)}{dr^2}\Phi_{jn}^m = 0, \quad (\text{A.66})$$

と、 Φ_{jn}^m に関する連立 1 次方程式となる。これを LU 分解で解き、 Φ_{jn}^m を定める。

粘着条件の場合は (A.65), (A.66) を適宜

$$\sum_{j=0}^K {}''\frac{dT_j(r_0)}{dr}\Phi_{jn}^m = 0, \quad (\text{A.67})$$

$$\sum_{j=0}^K {}''\frac{dT_j(r_K)}{dr}\Phi_{jn}^m = 0, \quad (\text{A.68})$$

に置き換える。

温度

温度に関しては $r_k, k = 1, \dots, K-1$ の点で時間積分を実行する。境界値は内部領域を計算した後 (温度固定の場合)

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_0, t) = 0, \quad \tilde{\Theta}_n^m(r_K, t) = 0, \quad (\text{A.69})$$

で定める。熱フラックス固定の場合は適宜 (A.69) を

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_0, t) = \tilde{\Theta}_n^m(r_1, t), \quad \tilde{\Theta}_n^m(r_K, t) = \tilde{\Theta}_n^m(r_{K-1}, t), \quad (\text{A.70})$$

に置き換える。

A.4 線型解析

固有値問題を解く際には物理量を東西方向に変数分離し、さらに赤道対称と反対称モードに分けて次のような線型方程式を構築する。

$$sA_s(m, R, T, P)x_s^m = L_s(m, R, T, P)x_s^m, \quad (\text{A.71})$$

$$sA_a(m, R, T, P)x_a^m = L_s(m, R, T, P)x_a^m \quad (\text{A.72})$$

ただし、 $x_s(x_a)$ はポロイダルポテンシャル、温度擾乱が赤道対称 (反対称)、トロイダルポテンシャルが赤道反対称 (対称) なモードであり、

$$x_s^m = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{2l+1+m}^m(r_k), & l = 0, 1, \dots, k = 1, \dots, K-1 \\ \tilde{\Phi}_{2l+m}^m(r_k), & l = 0, 1, \dots, k = 2, \dots, K-2 \\ \tilde{\Theta}_{2l+m}^m(r_k), & l = 0, 1, \dots, k = 1, \dots, K-1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.73})$$

$$x_a^m = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{2l+m}^m(r_k), & l = 0, 1, \dots, k = 1, \dots, K-1 \\ \tilde{\Phi}_{2l+1+m}^m(r_k), & l = 0, 1, \dots, k = 2, \dots, K-2 \\ \tilde{\Theta}_{2l+1+m}^m(r_k), & l = 0, 1, \dots, k = 1, \dots, K-1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.74})$$

これを東西波数、対称性ごとに成長率 s に関する固有値問題を繰り返し解き、Brunt 法を用いて (Press *et al.*, 1986) 成長率が 0 となるレイリー数を探し、固有値問題はダブル QR 法により解く (小国ら 1991)。

本研究では境界条件を free-slip に選んだために、臨界モードが引き起こす東西平均子午面場を求める際に解く連立 1 次方程式には剛体回転を表す固有値が 0 のモードが含まれていることに注意する必要がある。理論的には剛体回転のモードを励起する成分は 0 でなければならない。しかし数値誤差によりこのモードが励起されてしまうため、連立 1 次方程式を解く際にこのモードを除かなければならない。

$$L(m=0, R, T, P)x_2 = -\overline{n[x_{s,a}^m]}, \quad (\text{A.75})$$

L の固有値、固有ベクトルの組を $s^{(j)}, x^{(j)}$ とする。 $x^{(j)}$ は 1 次独立であるから $x^{(j)}$ によって右辺ベクトル n および解 x_2 を展開することができて、

$$n = \sum_j c_j x^{(j)}, \quad x_2 = \sum_j a_j x^{(j)}. \quad (\text{A.76})$$

これを線型方程式に代入することにより

$$\begin{aligned} L(0, R, T, P)x_2 &= L(0, R, T, P) \sum_j a_j x^{(j)} = \sum_j s^{(j)} a_j x^{(j)} = \sum_j c_j x^{(j)}, \\ \sum_j (s^{(j)} a_j - c_j) x^{(j)} &= 0, \\ s^{(j)} a_j &= c_j. \end{aligned}$$

したがって解は $s^{(j)} = 0$ を除いて和をとれば良く、

$$x_2 = \sum_{j, s^{(j)} \neq 0} \frac{c_j}{s^{(j)}} x^{(j)}, \quad (\text{A.77})$$

となる。

補遺 B

平板間の対流と球殻対流の対応

ここでは、球殻内の対流の枠組を良く研究されている平板間の対流(ベナルレイリー対流)に対応させることにより、球殻対流の臨界値を簡単に見積もることを試みる。

非回転の場合の臨界状態でのバランスの式は (2.20), (2.22) において非線形項を無視し、 $\tau = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$ とすることにより得られる。

$$\nabla^2 L_2 \phi - RL_2 \theta = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^2 \theta + L_2 \phi = 0. \quad (\text{B.2})$$

ϕ を消去すると、

$$(\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + RL_2) \theta = 0, \quad (\text{B.3})$$

となる。 θ を球面調和函数 Y_l^m で展開して $\theta = F(r) Y_l^m(\varphi, \lambda)$ とすると

$$\{D_l^3 + Rl(l+1)\} F(r) = 0, \quad (\text{B.4})$$

ただし、 $D_l \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$ である。

温度固定, free-slip 境界条件を満たす鉛直構造 $F(r)$ は概して $F(r) \sim \sin n\pi(r-r_i)$ と考えられる。この時

$$D_l F(r) \sim - \left\{ \pi^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} F, \quad (\text{B.5})$$

ただし \bar{r} は球殻の平均半径であり、内径外径比 η を用いると $r_i = \frac{\eta}{1-\eta}$, $r_o = \frac{1}{1-\eta}$ であるから

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_o}{2} = \frac{1 + \eta}{2(1-\eta)} \quad (B.6)$$

である。

この近似を用いると中立曲線を表すレイリー数が

$$R \sim \frac{\left\{ \pi^2 + \frac{l(l+1)}{\bar{r}^2} \right\}^3}{l(l+1)} = \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{(\pi^2 + \alpha^2)^3}{\alpha^2} \quad (B.7)$$

と求まる。ここで α は水平波数を表し、 $\alpha^2 \equiv \frac{l(l+1)}{\bar{r}^2}$ である。この表現は $\frac{1}{\bar{r}^2}$ 倍を除いて平板間の対流のレイリー数 R_* の表現に等しく、 $R \sim \frac{1}{\bar{r}^2} R_*$ である。したがって臨界レイリー数 R_c および臨界波数 l_c が次のように求まる。

$$R_c \sim \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{27\pi^4}{4} \quad (B.8)$$

$$l_c(l_c + 1) \sim \frac{\pi^2}{2} \bar{r}^2 \quad (B.9)$$

この表現を用いて様々な η について計算した臨界値と 3 次元球殻モデルによる結果を表 B.1 に示す。

η	r_i	r_o	\bar{r}	$R_c(\text{概算値})$	$l_c(\text{概算値})$	$R_c(\text{計算値})$	$l_c(\text{計算値})$
0.100	0.111	1.111	0.611	1760.609	0.947	1990.944	1
0.200	0.250	1.250	0.750	1168.909	1.239	1361.330	1
0.300	0.429	1.429	0.929	762.558	1.623	835.253	2
0.400	0.667	1.667	1.167	483.070	2.139	508.047	2
0.500	1.000	2.000	1.500	292.227	2.869	300.291	3
0.600	1.500	2.500	2.000	164.378	3.971	166.859	4
0.700	2.333	3.333	2.833	81.905	5.814	82.596	6
0.800	4.000	5.000	4.500	32.470	9.509	32.663	10
0.900	9.000	10.000	9.500	7.285	20.610	7.294	21

表 B.1: 平板間対流の臨界値と球殻対流の臨界値の比較。

補遺 C

平均東西風分布一覽

弱非線形計算による平均東西風分布を以下にまとめる。球殻の厚さごとに、図 C.1 のように $T-P$ 面上で分布図を並べてある。各図中東風領域に陰影を施してある。



図 C.1: 東西風分布図の見方。

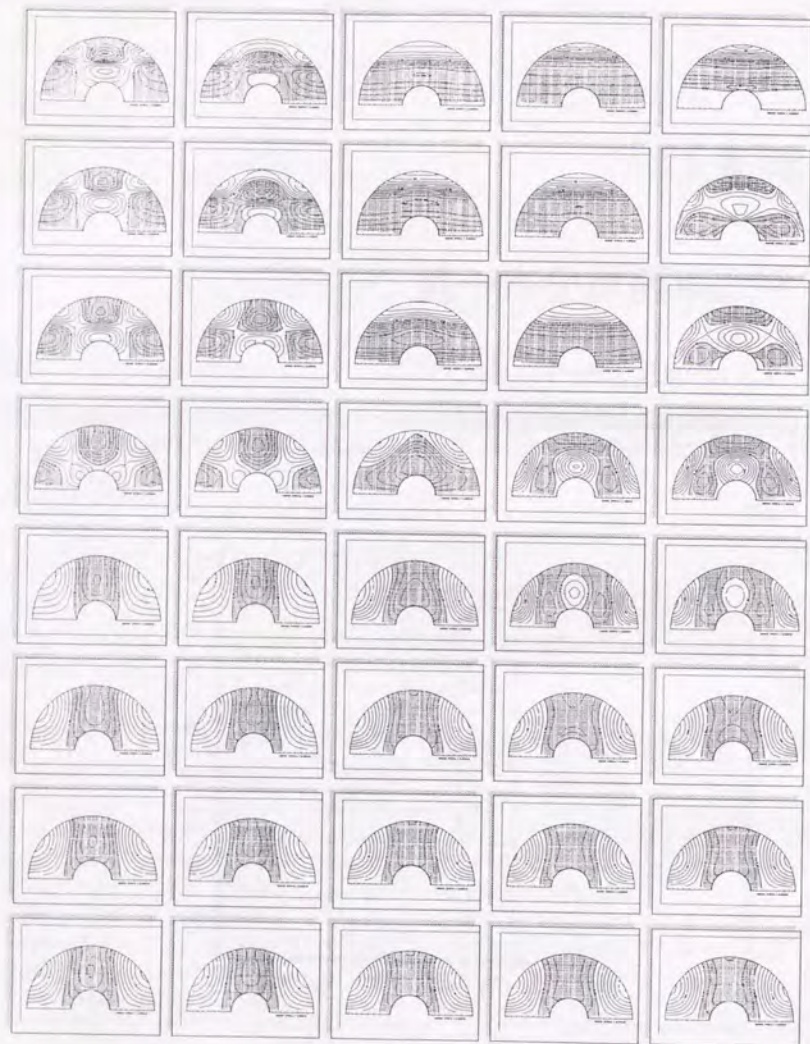


図 C.2: $T-P$ 面上での平均東西風分布. $\eta = 0.3$ の場合.

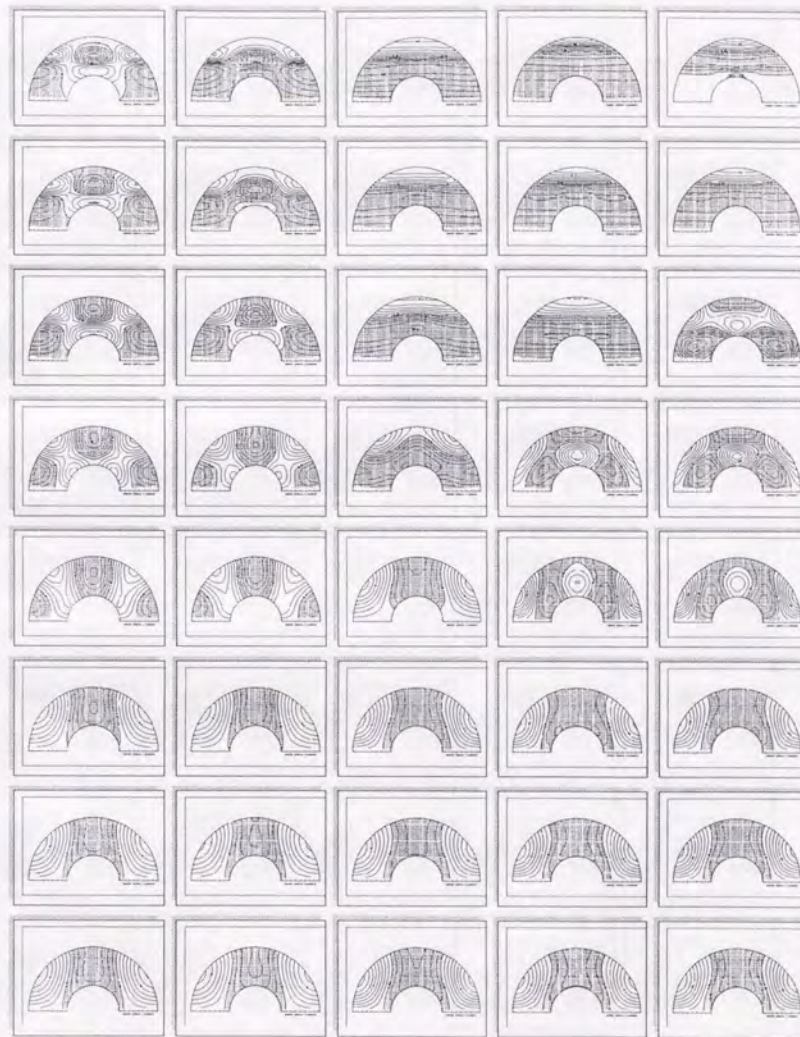


図 C.3: $T-P$ 面上での平均東西風分布. $\eta = 0.4$ の場合.

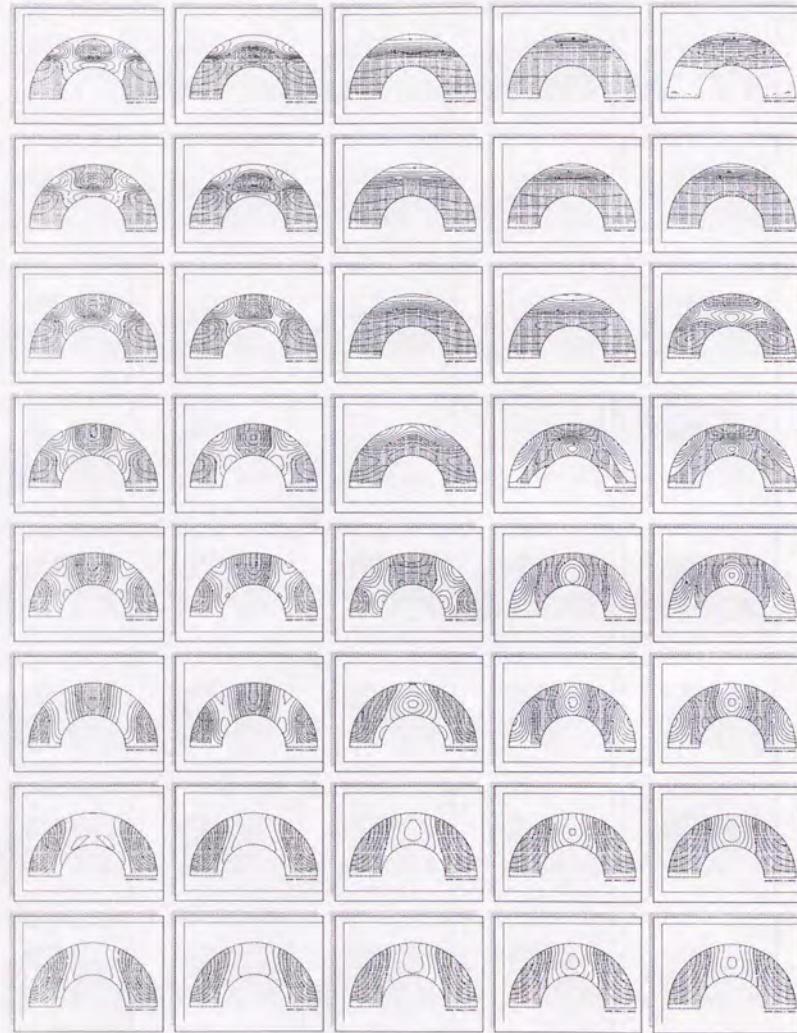


図 C.4: $T-P$ 面上での平均東西風分布. $\eta = 0.5$ の場合.

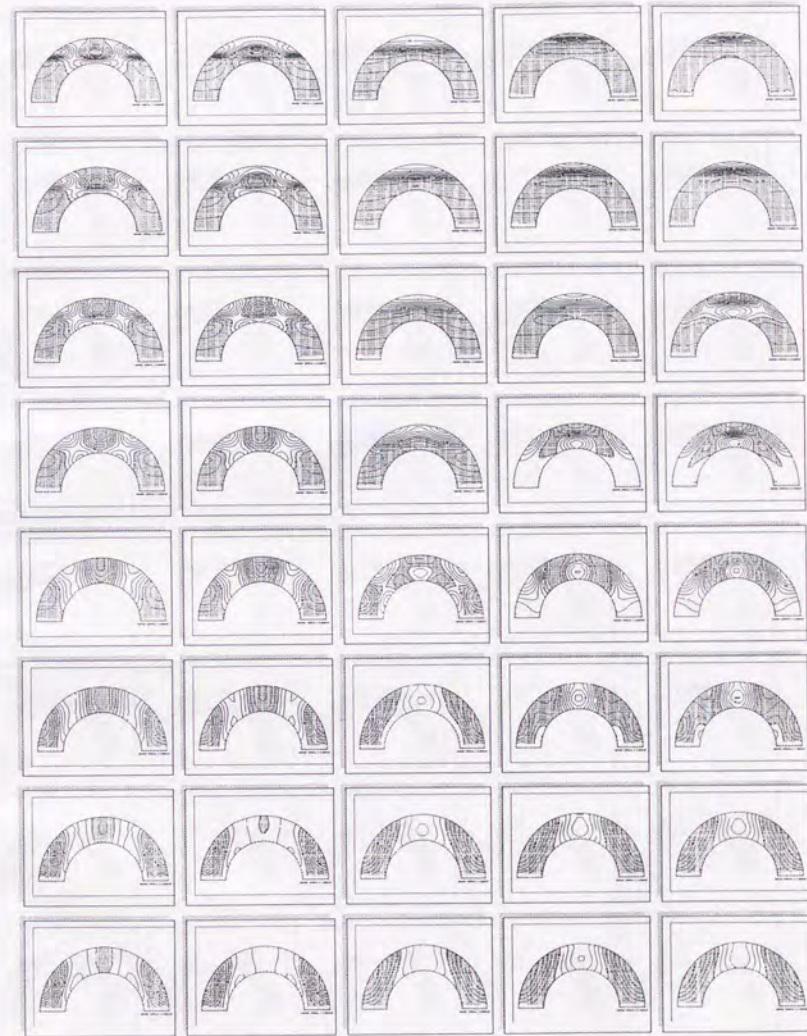


図 C.5: $T-P$ 面上での平均東西風分布. $\eta = 0.6$ の場合.

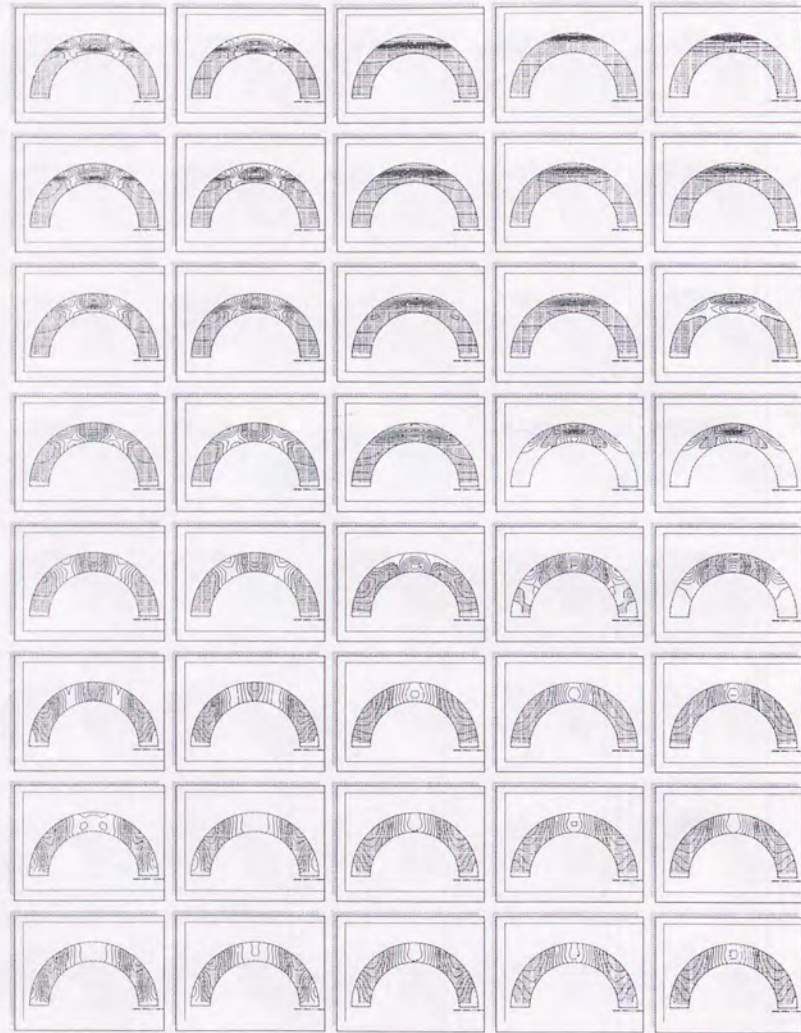


図 C.6: $T-P$ 面上での平均東西風分布. $\eta = 0.7$ の場合.

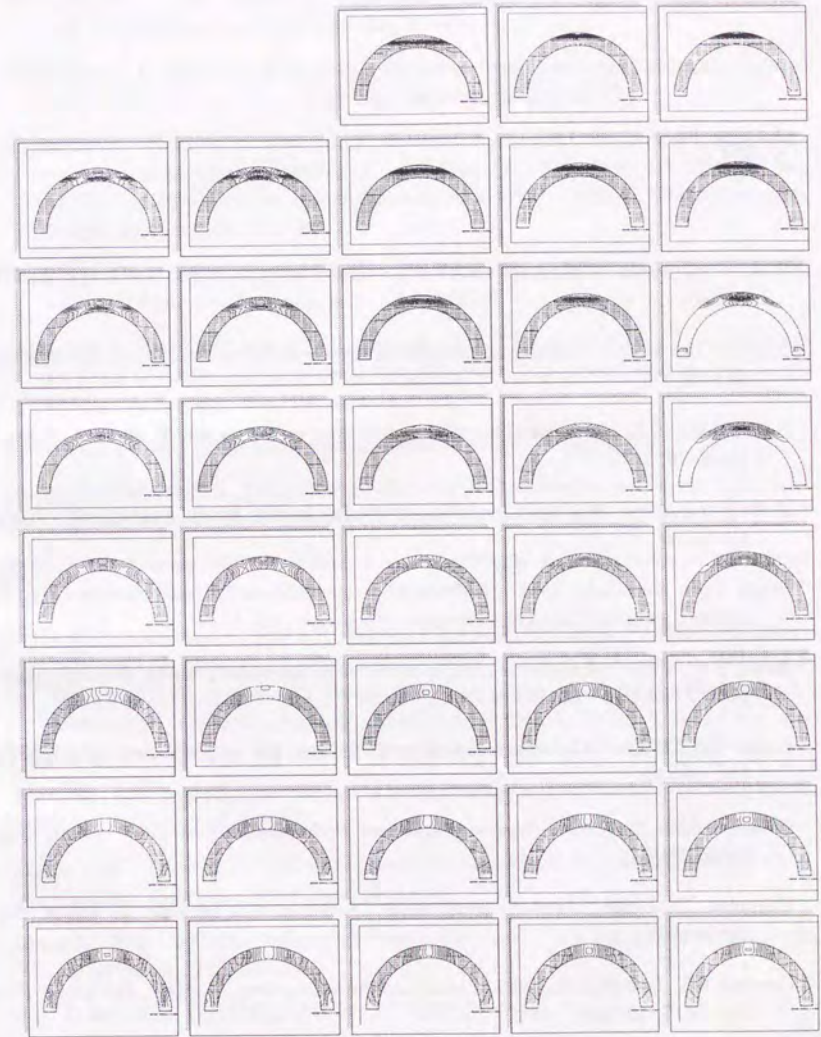


図 C.7: $T-P$ 面上での平均東西風分布. $\eta = 0.8$ の場合.

文献

- Busse, F.H., 1970a : Differential rotation in stellar convection zones. *Astrophys. J.*, **159**, 629-40
- Busse, F.H., 1970b : Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, **44**, 441-460
- Busse, F.H., 1973 : Differential rotation in stellar convection zones. II. *Astron. & Astrophys.*, **28**, 27-37
- Busse, F.H., 1976 : A simple model of convection in the Jovian atmosphere. *Icarus*, **29**, 255-60
- Busse, F.H., Hood, L.L., 1982 : Differential rotation driven by convection in a rapidly rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **21**, 59-74
- Busse, F.H., 1983a : A model of mean zonal flows in the major planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **23**, 153-74
- Busse, F.H., 1983b : Convection-driven zonal flows in the major planets. *PAGEOPH*, **121**, 375-90
- Chandrasekhar, S., 1961 : *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*. Oxford Univ. Press, 654pp.
- Chapman, C.R., 1969 : Jupiter's zonal winds : variation with latitude. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 986-990
- Dowling, T.E., Spiegel, E.A., 1988 : Stellar and Jovian vortices. *NonLin. Astrophys. Fluid Dyn.*, **617**, 190-216
- Geiger, G., Busse, F., 1981 : On the onset of thermal convection in slowly rotating fluid shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **18**, 147-56

- Glatzmaier, G.A., 1984 : Numerical simulations of stellar convective dynamos. 1. The model and method. *J. Comp. Phys.*, **55**, 461-484
- Glatzmaier, G.A., 1987 : A review of what numerical simulations tell us about the internal rotation of the Sun. The internal Solar Angular velocity, 263-274
- Hammel, H.B., Beebe, R.F., DeJong, E.M., Hansen, C.J., Howell, C.D., Ingersoll, A.P., Johnson, T.V., Limaye, S.S., Magalhaes, J.A., Pollack, J.B., Sromovsky, L.A., Suomi, V.E., Swift, C.E., 1989 : Neptune's wind speeds obtained by tracking clouds in voyager images. *Science*, **245**, 1367-69
- Hanel, R.A., Conrath, B.J., Kunde, V.G., Pirraglia, J.A., 1983 : Albedo, internal heat flux, and energy balance of Saturn. *Icarus*, **53**, 262-285
- Ingersoll, A.P., Beebe, R.F., Mitchell, J.L., Garneau, G.W., Yagi, G.M., Muller, J.-P., 1981 : Interaction of eddies and mean zonal flow on Jupiter as inferred from Voyager 1 and 2 images. *J. Geophys. Res.*, **86**, 8733-43
- Pedlosky, J., 1987 : *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, 710pp.
- Preal, J.C., Conrath, B.J., 1991 : The albedo, effective temperature, and energy balance of Neptune, as determined from Voyager data. *J. Geophys. Res.*, **96**, 18921-130
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., 1986 : *Numerical recipes*. Cambridge Univ. Press, 818pp.
- Smith, B.A., Soderblom, L., Beebe, R., Boyce, J., Briggs, G., Bunker, A., Collins, S.A., Hansen, C.J., Johnson, T.V., Mitchell, J.L., Terrile, R.J., Carr, M., Cook, A.F., II, Cuzzi, J., Pollack, J.B., Danielson, G.E., Ingersoll, A., Davies, M.E., Hunt, G.E., Masursky, H., Shoemaker, E., Morrison, D., Owen, T., Sagan, C., Veverka, J., Strom, R., Suomi, V.E., 1981 : Encounter with Saturn: Voyager 1 imaging science results. *Science*, **212**, 163-91
- Yano, J.-I., 1992 : Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, **243**, 103-131
- Zhang, K.-K., Busse, F.H., 1987 : On the onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **39**, 119-47
- Zhang, K., 1992 : Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.*, **236**, 535-556
- 小国力 編. 1991 : 行列計算ソフトウェア. 丸善出版, 391pp.
- 沼口 敦. 1992 : 熱帯における積雲活動の大規模構造に関する数値実験. 東京大学学位論文, 205pp.

