# 論文の内容の要旨

## 論文題目: Calabi-Yau 3-folds in Grassmannians and their $I$-functions

## （グラスマン多様体に含まれる3次元カラビ・ヤウ多様体とそれらの $I$-関数）

氏名：井上　大輔

## 1　背景

複素3次元カラビ・ヤウ多様体に対して，そのミラー対と呼ばれる別の複素3次元カラビ・ヤウ多様体が存在して，お互いの複素幾何学とシンプレクティック幾何学とが入れ替わって対応することが弦理論の双対性から予想される．4次元射影空間の5次超曲面で与えられるカラビ・ヤウ多様体 (クインティックと呼ばれる) の場合にキャンデラス達 [CdlOGP] はミラー多様体の周期積分を用いて，一般のクインティックに含まれる有理曲線について高次の曲線の数に予想を与えた．彼らの計算の数学的正当化はコンツェビッチによる安定写像の理論を基礎に文献 [Giv], [LLY] によって与えられ今日ではミラー定理として知られている．同様の主張はゴレンシュタイン・トーリック・ファノ多様体のネフな線束 (の因子）の完全交叉について示されている．

以上の話をより一般のカラビ・ヤウ多様体に拡張することは意義のある問題である．ミラー多様体の構成に関しては大きな枠組みとしてグロス・ジーベルトによるトーリック退化を用いた方法が提唱されているが，具体的な計算を行うには現段階では困難であるように思われる．一方でミラー定理はミラー多様体の存在を仮定せずに主張ができる．ギベンタールはミラー定理を証明する過程で，$J$-関数と $I$-関数と呼ばれる関数を定義した．$J$-関数はカラビ・ヤウ多様体の量子積を用いて特徴づけられる関数である．ギベンタールはクインティックの $I$-関数をクインティックを含む4次元射影空間の $J$-関数とクインティックを定義する線束 $\mathcal{O}(5)$ から定義した．一方 $I$-関数はミラー多様体の周期積分に対応する関数でもある．ミラー定理は $J$-関数と $I$-関数との間に成立する簡単な関係式として述べられている．

コーツとギベンタール [CG] は以上の $I$-関数の構成を一般の多様体上の線束の直和に対して拡張し，量子レフシェッツ定理と呼ばれる定理を示した．量子レフシェッツ定理を使うことで多くの多様体の $I$-関数が計算できる．

しかし量子レフシェッツ定理の適用外にある多様体として線束と限らないベクトル束の切断の零点として定義される多様体がある．幾何学的不変式商として記述される多様体の場合，群の表現から誘導されるベクトル束に対して文献 [BCFK], [CFKS] では $I$-関数を具体的に書き表す表式の予想が提唱されている．予想はアーベル／非アーベル対応と呼ばれ $A$ 型の旗多様体に関して正しいことが示されている．とくにグラスマン多様体の上の普遍部分ベクトル束を用いて表される等質ベクトル束の場合に正しいことが示されている．

## 2 グラスマン多様体の等質ベクトル束の零点となるカラビ・ヤウ多様体

第 1 章ではグラスマン多様体の等質ベクトル束の一般の切断の零点として得られる 3 次元カラビ・ヤウ多様体を扱った．

1.1 節において等質ベクトル束の一般の切断の零点として得られる 3 次元カラビ・ヤウ多様体を分類した．グラスマン多様体は等質空間であるので，特殊線形群が推移的に作用する．この作用について同変な作用を持つベクトル束を等質ベクトル束と呼ぶ．等質ベクトル束は放物的部分群の表現から決まり，グラスマン多様体上の普遍ベクトル束による簡単な記述を持つ．分類にあたって解くべきことは

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\mathcal{E}) &= k(n-k)-3 && \text{(次元条件)} \\ c_1(\mathcal{E}) &= n && (c_1\text{条件}) \end{aligned}$$

を満足する大域切断で生成される等質ベクトル束 $\mathcal{E}$ をみつけることである．先行する結果として文献 [Küc] において 4 次元ファノ多様体の場合に同様の分類が考えられている．3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合にも同様の議論により分類がなされる．

**主結果 1.** $\mathcal{E}$ をグラスマン多様体 $G(k,n)$ 上の大域切断で生成される等質ベクトル束で，一般の切断の零点が 3 次元カラビ・ヤウ多様体を定義するものとする．等質ベクトル束の切断の零点の間の自然な同型を除いて $(G(k,n),\mathcal{E})$ の組は 33 個 (論文中 表 1.1) で尽くされる．とくに第 2 ベッチ数が 1 のものが 22 個ある．

得られた結果には文献 [Küc] のリストから自然に従うものが含まれるが新たに 8 例が現れている．

1.2 節では 1.1 節で得られた等質ベクトル束 $\mathcal{E}$ について一般の切断の零点として定義される 3 次元カラビ・ヤウ多様体の位相的不変量の計算をした．得られた位相的不変量は表 1.1 にまとめられている．

## 3 アーベル／非アーベル対応の適用

第 2 章では主結果 1 で得られた第 2 ベッチ数が 1 である 22 個の 3 次元カラビ・ヤウ多様体のうちでアーベル／非アーベル対応が適用できる場合についてそれらの $I$-関数を計算した．

2.2 節ではグラスマン多様体を幾何学的不変式商として表した下でのアーベル／非アーベル対応が適用できる場合 (22 個のうち 19 個) を扱った．これら 19 個に対応する組 $(G(k,n),\mathcal{E})$ は，グラスマン多様体の双対性 $G(k,n)\cong G(n-k,n)$ に基づく同型を除いて，すべて等質ベクトル束 $\mathcal{E}$ が普遍部分ベクトル束 $\mathcal{S}$ にシュアー関手を適用したものの直和となっていて，前出の [BCFK], [CFKS] で与えられた予想が成立しており $I$-関数が計算される．

2.3 節では 2.2 節では扱えない $G(2,8)$ 上の等質ベクトル束 $\mathcal{E}=\operatorname{Sym}^2\mathcal{S}^*\oplus\wedge^5\mathcal{Q}$ の場合を議論する．一般の $\wedge^5\mathcal{Q}$ の切断の零点を $N$ とすると，$N$ は文献 [EPS] により調べられている既知の多様体に同型なことが文献 [IIM] により示されている．さらに $N$ は幾何学的不変式商としての表示を持っていて $\operatorname{Sym}^2\mathcal{S}^*$ の $N$ への制限は群のベクトル空間への表現から誘導されることがわかる [IIM]．文献 [CFKS] による $I$-関数の予想が $(N,\operatorname{Sym}^2\mathcal{S}^*)$ に対して成立することを仮定して，$(G(2,8),\mathcal{E})$ に対応するカラビ・ヤウ多様体の $I$-関数の形を計算した．

## 4　量子レフシェッツ定理と局所化公式

第 3 章では第 2 章では扱えない $G(3,7)$ 上の等質ベクトル束 $\mathcal{E} = \wedge^2\mathcal{S}^* \oplus \wedge^3\mathcal{Q} \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$ の場合を議論した．量子レフシェッツ定理によりこの場合の $I$-関数の計算は $\mathcal{E}' = \wedge^2\mathcal{S}^* \oplus \wedge^3\mathcal{Q}$ で捩じられた $J$-関数の計算に帰着される． $J$-関数の計算は局所化によりグロモフ・ウィッテン不変量を計算することで実行され，これにより $I$-関数を決定することができた．

第 2 章と第 3 章を合わせて次の結果を得る．

**主結果 2.** 主結果 1 で得られた 22 個の第 2 ベッチ数が 1 の 3 次元カラビ・ヤウ多様体について，それぞれの $I$-関数を (1 つを除いて) 計算した．除外した 1 つに関してはアーベル／非アーベル対応から予想される $I$-関数を与えた．同時に $I$-関数を基本解とする 4 階の微分作用素を計算した．

得られた微分作用素は補遺 C にまとめてある．補遺 D において主結果 2 で得られた微分作用素についてミラー対称性から予想される整シンプレクティックな基底のモノドロミー行列を (数値的に) 計算した．またコニフォルド周期と呼ばれる解から読み取れるカラビ・ヤウ多様体の位相不変量の値を計算し，これらが主結果 1 で得られたものと一致することを確かめた．このことはミラー多様体の存在を示唆するものである．

## 参考文献


[BCFK] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, and B. Kim, *Gromov-Witten invariants for abelian and nonabelian quotients*, J. Algebraic Geom. **17** (2008), no. 2, 275–294. MR2369087

[CdlOGP] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green, and L. Parkes, *A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nuclear Phys. B **359** (1991), no. 1, 21–74. MR1115626

[CFKS] I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and C. Sabbah, *The abelian/nonabelian correspondence and Frobenius manifolds*, Invent. Math. **171** (2008), no. 2, 301–343. MR2367022

[CG] T. Coates and A. Givental, *Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 1, 15–53. MR2276766

[EPS] G. Ellingsrud, R. Piene, and S. A. Strømme, *On the variety of nets of quadrics defining twisted cubic curves*, Space curves (Rocca di Papa, 1985), 84–96, Lecture Notes in Math., 1266, Springer, Berlin, 1987. MR908709

[Giv] A. B. Givental, *Equivariant Gromov–Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices **1996**, no. 13, 613–663. MR1408320

[IIM] D. Inoue, A. Ito, and M. Miura, *Complete intersection Calabi–Yau manifolds with respect to homogeneous vector bundles on Grassmannians*, arXiv:1607.07821.

[Küc] O. Küchle, *On Fano 4-folds of index 1 and homogeneous vector bundles over Grassmannians*, Math. Z. **218** (1995), no. 4, 563–575. MR1326986

[LLY] B. H. Lian, K. Liu, and S.-T. Yau, *Mirror principle I*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 4, 729–763. MR1621573