論文審査の結果の要旨

氏　名　井上　大輔

弦理論の研究から見つかったミラー対称性に動機づけられて，複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体に興味が持たれている．ミラー対称性は，複素幾何学とシンプレクティック幾何学にまたがる対称性で，その数学的な定式化について幾つかの有望な提唱がなされているが，その全貌の解明には至っていない．こうした状況において，カラビ・ヤウ多様体を具体的に構成して，対称性の検証とグロモフ・ウィッテン不変量などへの応用を考察することが意味を持つ． 実際，90 年代にトーリック多様体の中で考える超曲面や完全交叉として実現されるカラビ・ヤウ多様体が考察され，この様に構成されるカラビ・ヤウ多様体について一般にミラー対称性が成立することが示され，さらに，グロモフ・ウィッテン不変量の母関数(J-関数)を定める I-関数の理論が Givental, Lian-Liu-Yau によって構築されている． 2000 年代に入って，グラスマン多様体や旗多様体の中で完全交叉として構成されるカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性と I-関数の理論の研究が進み，特に Ciocan-Fontanine, Kim, Sabbah らによって I-関数の理論が幾何学的不変式論(GIT)の手法を用いて出来あがり「アーベル/非アーベル対応の理論」として広く知られている．

こうした背景のもとで論文の主題と主結果は以下の通りである：グラスマン多様体上の等質ベクトル束の切断の零点集合と実現される 3 次元カラビ・ヤウ多様体について考察し，(1) 3 次元カラビ・ヤウ多様体を実現するグラスマン多様体と等質ベクトル束の対(G(k,n),E)を自明な同型を除いて分類した．(2) (1)で得られた対についてそれぞれ I-関数を決定した．

主結果(1)は，同様な設定でファノ指数が 1 に等しい 4 次元ファノ多様体の分類が Kuchle('95)によってなされていて，そこでの議論に沿った解析に基づいている．結果，33 個の対(G(k,n),E)が存在することが示されている．Kuchle の分類リストから直ちに従うものが 25 個存在するが，残りの 8 例はファノ指数が 1 に等しい 4 次元ファノ多様体を経由しないもので，提出論文で初めて登場している．またここでの結果は，伊藤敦氏，三浦真人氏との共同研究として高次元への拡張も含めた形でプレプリントとして公表されている．
主結果(2)では，主結果(1)で分類された 33 個の対から構成するカラビ・ヤウ多様体の内でピカール数が 1 に等しい 22 個のカラビ・ヤウ多様体の I-関数を具体的に決定し，また I-関数を特徴づける微分方程式を決定している．I-関数を決定する手法としては，(i)

前出のCiocan-Fontanine, Kim, Sabbah によるアーベル/非アーベル対応の理論を用いる手法，(ii) Coates, Givental による量子コホモロジー環に関する量子レフシェッツ定理と Kontsevich の局所化公式を併用する手法，以上の２つを用いる．殆どの場合，(i)の手法が適応できることが判明するが，(a)　(G(2,7),E_1)，　(b)　(G(3,7),E_2)，(c) (G(2,8),E_3) (E_1,E_2,E_3 は論文参照)の３つが例外となる．(c)に関しては，(ii)の手法で局所化公式を具体的に調べて I-関数が決定される．(a),(b) に関しても，それぞれ，他のカラビ・ヤウ多様体への変形同値性と同型を示す命題（前出の伊藤，三浦氏との共同研究で得られた結果)を途中で用いて，最終的に I-関数の決定まで至っている．

主要結果(1)は共同研究の一部として発表されているが，分類を完成させている点，また主要結果(2)では，ピカール数１という条件課しているが，可能な手法を駆使して分類で得られたカラビ・ヤウ多様体の I-関数をすべて決定しており，これらの結果は十分評価できると判断する．よって，論文提出者井上大輔は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．