論文の内容の要旨

論文題目： Cube invariance of higher Chow groups with modulus

（モデュラス付き高次チャウ群のキューブ不変性）

氏名　　宮﨑　弘安

体 k 上の代数的スキーム X と非負整数 n に対し，余次元 n のサイクルの高次チャウ群 $\mathrm{CH}^n(X,*)$ は位相幾何学における特異コホモロジー群の類似として Bloch により [1] で導入された．高次チャウ群は数論幾何における基本的かつ重要な研究対象であり，これまでに様々な結果が得られている．

一方，位相幾何では空間対のコホモロジーが重要な役割を演じる．その代数幾何的な類似は何かを問うことは自然である．Binda と齋藤秀司氏（以下，敬称略）は [3] においてスキームと有効カルティエ因子の対 $\mathscr{X}=(X,D)$ に対しモデュラス付き高次チャウ群 $\mathrm{CH}^n(\mathscr{X},*)$ を定義した．因子 D が自明ならば，これは X の高次チャウ群と一致する．また，次数 0 の部分はモデュラス付きチャウ群と呼ばれ，Kerz と齋藤による有限体上の暴分岐を含む高次元類体論の構成 ([6]) に用いられている．さらに，対 $(X\times\mathbb{A}^1, m\cdot(X\times\{0\}))$（ここで m は正整数）に対するモデュラス付き高次チャウ群は，加法的高次チャウ群と呼ばれ，以前から Bloch-Esnault([2])，Rülling([7])，Krishna-Levine-Park([4],[5]) らにより研究されてきた．Rülling は $X=\mathrm{Spec}(k)$ の場合に加法的高次チャウ群と de Rham-Witt 複体の同型を示し，高次チャウ群では捉えられなかった新たな数論的対象との結びつきを明らかにしている．

モデュラス付き高次チャウ群は，Bloch の高次チャウ群，モデュラス付きチャウ群，加法的高次チャウ群という 3 つの研究対象を統合するとともに今後の研究の指針を与えているが，その研究は発展途上である．本論文の目標はモデュラス付き高次チャウ群の性質の一部を明らかにすることである．

以下，スキームと言えば体 k 上の有限型かつ分離的な同次元スキームを指す．スキーム X に対し，自然な射影 $p: X\times\mathbb{A}^1\to X$ による引き戻し写像 $p^*:\mathrm{CH}^n(X,*)\to\mathrm{CH}^n(X\times\mathbb{A}^1,*)$ が同型であるという Bloch により示された事実をホモトピー不変性と呼ぶ．これは特異コホモロジー群のホモトピー不変性の類似である．次の問題を考えることは自然である．

問題. ホモトピー不変性をモデュラス付き高次チャウ群に対し一般化できるか？

以下の定理 1 はこの問題に肯定的な解答を与える．まず，本論文では，スキーム X と，X 上の有効とは限らないカルティエ因子 D の対 $\mathscr{X}=(X,D)$ に対してモデュラス付き高次チャウ群の定義を拡張する．因子 D が有効ならば，これは従来の定義と一致する．負のカルティエ因子を許すことで，次の形の特別な対を考えることができる：

$$\overline{\square}^{(-1)} := (\mathbb{P}^1, -\{\infty\}).$$

ここで $\mathbb{P}^1$ は射影直線，$-\{\infty\}$ は無限遠点を台にもつ重複度 -1 のカルティエ因子を表す．このとき主定理は次のように述べられる．

定理 1. 任意のスキームとカルティエ因子の対 $\mathscr{X} = (X, D)$，および任意の非負整数 n に対し，次の自然な同型が存在する：

$$\mathrm{CH}^n(\mathscr{X}, *) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}^n(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *).$$

この同型をキューブ不変性と呼ぶ．ここで $\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)} := (X \times \mathbb{P}^1, D \times \mathbb{P}^1 - X \times \{\infty\})$ と定義される（一般の対の積の定義も同様）．また，因子 D が自明ならば，同型の左辺は $\mathrm{CH}^n(X, *)$，右辺は $\mathrm{CH}^n(X \times \mathbb{A}^1, *)$ に一致し，写像は射影 $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ による引き戻し写像である．

定理 1 の証明を少々修正することで，標数が正の体の上で次の結果が得られる．

定理 2. 体 k の標数 p が正であると仮定する．任意の $m \geq 1$ に対し，対 $\overline{\square}^{(-m)} = (\mathbb{P}^1, -m \cdot \{\infty\})$ を考える．このとき次の自然な同型が存在する：

$$\mathrm{CH}^n(\mathscr{X}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}^n(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-m)}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p].$$

簡単な考察により，次の自然な同型が存在することがわかる：

$$\mathrm{CH}^n(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1, *) \cong \varinjlim_{m} \mathrm{CH}^n(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-m)}, *).$$

ここで，スキーム $\mathbb{A}^1$ を対 $(\mathbb{A}^1, \emptyset)$ と同一視している．系として次のホモトピー不変性を得る．

系 3.
$$\mathrm{CH}^n(\mathscr{X}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}^n(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p].$$

系 3 を用いることで，さらに次の独立性定理を示すことができる．

定理 4. 体 k の標数 p が正であると仮定する．任意のスキーム X とその上の有効カルティエ因子 D, D' に対し，台 $|D|, |D'|$ が等しいと仮定し，$\mathscr{X} = (X, D), \mathscr{X}' = (X, D')$ とおく．このとき次の標準的な同型が存在する：

$$\mathrm{CH}^n(\mathscr{X}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \cong \mathrm{CH}^n(\mathscr{X}', *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p].$$

定理 4 は，p 冪ねじれ部分がモデュラス理論的に最も興味深い情報を含んでいることを示唆している．

以下，定理の証明について述べる．定理 1 の証明は [1] におけるホモトピー不変性の証明を適切に修正することでなされる．対 $\mathscr{X} = (X, D)$ に対し，$\mathscr{X}$ のモデュラス付き高次チャウ群は，Bloch のサイクル複体の部分複体 $z^n(\mathscr{X}, *) \subset z^n(X^\circ, *)$ のホモロジー群として定義される（ここで $X^\circ := X - |D|$，$|D|$ は台）．部分複体 $z^n(\mathscr{X}, *)$ は，Bloch のサイクル複体に属するサイクルのうち，因子 D との交わり方に関する追加の条件（これをモデュラス条件という）をみたすもので生成される．[1] の議論を踏襲することにより，定理 1 は以下の補題 5, 6 から従う．

補題 5. 任意の対 $\mathscr{X}$ に対し，座標 $\epsilon \in \{0, 1\}$ への埋め込み写像 $i_\epsilon : X^\circ \to X^\circ \times \mathbb{A}^1 = (\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)})^\circ$ による代数的サイクルの引き戻し写像

$$i_\epsilon^* : z^n_w(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *) \to z^n(\mathscr{X}, *)$$

が *well-defined* であるような部分複体 $z^n_w(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *) \subset z^n(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *)$ が存在し，かつ，この包含写像は複体の擬同型である．

補題 6. 引き戻し写像 i_0^*, i_1^* はホモトピックである．

補題 6 の証明は形式的かつ容易である．補題 5 の証明の大雑把な方針は，スキーム $X^\circ \times \mathbb{A}^1$ 上のサイクルを $\mathbb{A}^1$ に沿って平行移動し，$X^\circ \times \{0\}, X^\circ \times \{1\} \subset X^\circ \times \mathbb{A}^1$ と正しく交わるようにすることである．平行移動の仕方は個々のサイクルで異なるため “一般的な” 平行移動を考えなければならない．このことは，

超越次数 1 の純超越拡大 $K \supset k$ を考え，平行移動の時間軸に対応するアファイン直線 $\mathbb{A}^1$ を付け加えたスキーム $X^\circ \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ の K 上への底変換の上にホモトピーサイクル $\mathcal{H}$ を構成することで実現される．我々の状況ではさらに $\mathcal{H}$ がモデュラス条件をみたすように調整しなければならない．そのためには十分に大きな正整数 d に対し，時間軸 $\mathbb{A}^1$ 上で d 乗写像 $\rho^d : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1, t \mapsto t^d$（これは有限射）に沿って $\mathcal{H}$ を押し出せばよい，というのが証明の重要なアイデアである．

定理 2 の証明は，補題 5, 6 の主張に現れるモデュラス付き高次チャウ群に $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/p]$ を施し，任意の $m \geq 1$ に対し $\overline{\square}^{(-1)}$ を $\overline{\square}^{(-m)}$ で置きかえた主張（それぞれ補題 5'，補題 6' と呼ぶ）を示すことでなされる．補題 5' の証明は 5 と全く同じである（よって $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/p]$ は不要である）．補題 6' は，十分に大きな p 冪乗写像で $\mathbb{A}^1$ に沿ってサイクルを押し出すことで補題 6 に帰着される．ここで $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/p]$ を施す理由は，p 冪乗写像でサイクルを押し出してから i_ϵ^* で引き戻して得られるサイクルと，はじめから i_ϵ^* で引き戻したサイクルの間に発生する p 冪倍のずれを無視するためである．

定理 4 の証明は，因子の重複度に依存しないことが明らかなモデュラス付き高次チャウ群のナイーヴ版を定義し，それと通常のモデュラス付き高次チャウ群との比較同型を構成することでなされる．証明では，ある二重複体に付随するスペクトル系列の退化を示す必要があり，ここに系 3 が用いられる．

参考文献

[1] Bloch, S. : *Algebraic Cycles and Higher K-theory*, Advances in Mathematics **61**, Issue 3, 267-304 (1986).

[2] Bloch, S. and Esnault, H. : *An additive version of higher Chow groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **36**, 463-477 (2003).

[3] Binda, F. and Saito, S. : *Relative cycles with moduli and regulator maps*, arXiv preprint `http://arxiv.org/abs/1412.0385` (2014).

[4] Krishna, A. and Levine, M. : *Additive higher Chow groups of schemes*, J. Reine Angew. Math. **619**, 75-140 (2008).

[5] Krishna, A. and Park, J. : *Moving lemma for additive higher Chow groups*, Algebra and Number theory, **6**(2), 293-326 (2012).

[6] Kerz, M. and Saito, S. : *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, to appear in Duke Math. J.

[7] Rülling, K. : *The generalized de Rham-Witt complex over a field is a complex of zero-cycles*, J. Algebraic Geom., **16** (1) 109-169 (2007).