

離散時間系における同定法の研究と  
その時変系を含む柔軟構造物同定への応用

澤井 秀次郎

①

博士論文

離散時間系における同定法の研究と  
その時変系を含む柔軟構造物同定への応用

指導教官

松尾弘毅教授

学籍番号17081

澤井秀次郎

1993年12月提出

東京大学工学系大学院  
(航空宇宙工学専攻)

## 本論文の概要

本論文では、時間領域での、離散時間系の物理量の同定問題を考察し、それを、分布定数系として扱われるような構造物の同定に適用した。すなわち、柔軟構造物を中心に物理量の同定問題を考察し、時間領域での、離散時間系の新しい同定法を提案した。

提案する方法では、まず、システムの応答の時間履歴よりARMAモデルが導出され、次いで、そのシステムのパルス応答が推定される。物理量はその推定されたパルス応答を元に同定される。この方法は、周波数領域の議論をせず、完全に時間領域だけでアルゴリズムを構成できるので、時変系へも拡張可能な方法である。

ここでは、入出力の実観測データより、パルス応答列の情報を抽出し、それをモデル化されたシステムと比較しているのであるが、比較に使用する量としては、

- (1)パルス応答列
- (2)連続系のシステム行列A、観測行列C、入力行列B
- (3)離散系のシステム行列F、観測行列H、入力行列G
- (4)行列の集合 $\{CB, CAB, CA^2B, CA^3B, \dots\}$   
(連続系のマルコフパラメータ)
- (5)モード特性量
- (6)支配方程式を構成する行列  
(例えば、質量行列、剛性行列)
- (7)入出力時系列そのもの

が考えられる。本論文では、

- ・ 同定の不安定性がない (cf. (4))
- ・ センサ数が少なく済む (cf. (2)、(3)、(6))
- ・ センサ配置などに比較的鈍感である (cf. (5))
- ・ 膨大な量のデータを取り扱う必要がない (cf. (7))
- ・ 同定アルゴリズムが完全に時間領域でのみ議論できる  
(時変系への拡張も可能である)

のため、(1)を比較量として使用することを提案した。なお、その一方で、(1)を使用すると、イタレーションが必要になるという、欠点を持つことになる。その点には注意を要する。

また、得られる同定値の誤差共分散の定量的評価も定式化された。同定誤差の定量的評価は、従来の研究ではあまり行われていない。

従来の同定法のうち、代表的なものとして、ERAを用いてモード特性を同定し、それを元に物理量を同定する、といった方法が挙げられる。数値シミ



ュレーションの結果、こういった従来の方法と比較し、提案する方法は、同定精度が高く、また、同定結果がセンサの配置に鈍感である、といった利点を有することがわかった。

本論文では続いて、ARMAモデルに時間変化を許すことにより、提案する同定法の時変系への拡張が可能であることが示される。

まず、時変ARMAモデルのパラメータ行列の時間変化を時間の有限次元多項式で近似することが考案され、その近似が成立するための十分条件が与えられている。さらに、時変ARMAモデルとパルス応答の関係式が導かれ、ARMA行列を最小2乗法により導出する方法が示されている。これらの考察に続いて、実観測データより時変ARMAモデル、パルス応答を推定し、数値計算モデル内の未知パラメータを同定するという時変系での同定法が提案されている。

以上述べたように、本論文では、ARMAモデル、パルス応答列を利用した同定法が提案され、数値シミュレーションによって検証されている。提案する方法は、センサ配置の制約が比較的緩やかであり、また、サンプリング時間間隔が長いときにも適用可能であるという、特徴を有することがわかった。さらに、その方法によって得られた同定値の誤差の定量的評価法が与えられ、また、時変システムの同定へも応用可能であることを示された。

なお、本論文では、物理量の同定法を提案しているが、従来、この他、システムのモード特性や支配方程式を同定することも考えられている。物理量を同定すると、同定試験の環境に依らず意味のある同定結果を得ることができるが、しかし、その同定結果を制御系設計などに使用する場合、それに必要な量は改めて計算する必要がある。ここでは、同定結果を広く使用できるという点を考慮して、物理量の同定について考察をしている。

本論文では、同定法そのものの議論に先立ち、変位分布、分布定数をスプライン関数を用いて有限次元近似することも考察されている。ここでは、変位分布の有限次元化の際、境界条件の取り込みが機械的になされる定式化が導かれる。B-スプラインを用いたので、境界条件が変わるごとに独立変数を替える必要がなく、より汎用性の高い方法である。

なお、分布定数系は本来、無限次元を有するものであり、そのシステムを支配するのは偏微分方程式である。しかし、ここでは、無限次元を扱う困難を避けるため、有限次元近似が施されており、その結果、システムを支配する方程式も、常微分方程式になっている。



## 目次

記号表 .....	i
1 章 序論 .....	1
1.1 従来の研究の外観 .....	1
1.1.1 モード特性の同定 .....	2
1.1.2 質量行列、剛性行列、減衰行列の同定 .....	5
1.1.3 分布定数の同定 .....	6
1.1.4 時変系の同定 .....	8
1.1.5 自由応答列の導出 .....	8
1.1.6 離散時間系の再帰表現 .....	9
1.2 本研究の位置付け .....	9
1.3 本論文の構成 .....	11
2 章 分布定数のモデル化 .....	12
2.1 モデル化の一般的な方法 .....	12
2.2 Euler-Beamの振動について .....	13
2.3 スプライン関数を用いた変位分布の近似 .....	14
2.4 境界条件の取り込み .....	16
2.5 支配方程式の線形表示 .....	17
2.6 構造の分布定数のスプライン近似 .....	19
2.7 本章のまとめ .....	21
3 章 時不変系の同定 .....	22
3.1 ARMAモデルの導出 .....	22
3.2 パルス応答列の導出 .....	25
3.3 パルス応答の未知パラメータ微分について .....	28
3.4 未知パラメータの同定アルゴリズムについて .....	30

3.5	比較する量について .....	33
3.6	同定誤差共分散の解析 .....	34
3.6.1	ARMAモデルを構成する行列 $\Theta$ の推定誤差 .....	35
3.6.2	ARMAモデルの式誤差 .....	40
3.6.3	パルス応答列の推定誤差 .....	42
3.6.4	未知パラメータの同定誤差 .....	44
3.6.5	同定誤差導出のまとめ .....	45
3.6.6	センサ、アクチュエータの配置について .....	45
3.7	本章のまとめ .....	45
4	時変系の同定アルゴリズム .....	46
4.1	時変ARMAモデルとパルス応答列の関係 .....	46
4.2	時変ARMAモデルの近似 .....	49
4.2.1	状態遷移行列の近似 .....	49
4.2.2	時変ARMAモデルの係数について .....	51
4.2.3	1次元システムへの適用例 .....	52
4.3	時変ARMAモデルの推定 .....	55
4.4	未知パラメータの同定アルゴリズムについて .....	56
4.5	同定誤差共分散の解析 .....	56
4.5.1	ARMAモデルを構成する行列 $\Theta$ の推定誤差 .....	56
4.5.2	パルス応答列の推定誤差 .....	60
4.5.3	未知パラメータの同定誤差 .....	63
4.6	本章のまとめ .....	63
5	数値計算例 .....	64
5.1	周辺システムが同定に影響を与える場合について .....	64
5.2	時不変系の同定例 .....	67
5.2.1	使用したモデル .....	67
5.2.2	ARMAモデルの導出 .....	71
5.2.3	パルス応答列の導出 .....	79
5.2.4	未知パラメータの同定結果例 .....	84
5.2.5	未知パラメータの同定結果の考察 .....	89
5.2.6	入力の影響について .....	100
5.2.7	ARMAモデルの次数の決定方法について .....	106
5.3	時変系の同定例 .....	109
5.3.1	使用したモデル .....	109
5.3.2	状態遷移行列の近似 .....	112
5.3.3	時変ARMAモデルの近似 .....	112



5.4	モード特性を利用した同定例 .....	116
5.4.1	モード特性を利用した同定アルゴリズム .....	116
5.4.2	同定結果例 .....	120
5.5	本章のまとめ .....	129
6 章	結論 .....	130
謝辞	.....	132
参考文献	.....	133
付録	主な用語の説明 .....	139

## 記号表

以下に本論文で使用する主な記号を列挙する。なお、ここに挙げた記号のいくつかは慣例的に異なる定義をすることもある。本論文でも、必要、かつ、混乱の恐れのない場合には、場所により異なる定義をしていることもある。その点に注意を要する。

A	連続系のシステム行列
B	連続系の入力行列
F	離散時間系のシステム行列
G	離散時間系の入力行列
H	観測行列
$\lambda_i$	行列Aの固有値
T	行列Aの固有ベクトルより成る行列
D	入力から出力への直達項の行列
$\Phi(t_1, t_2)$	時刻 $t_1$ から $t_2$ への状態遷移行列
M	質量行列
C	減衰行列
K	剛性行列
I	単位行列 (下記のEI、 $C_D I$ においてはその限りではない)
$\rho$	線密度
EI	剛性
$C_D I$	減衰係数
x	状態変数 (第2、5章でスカラのxをビームの位置変数としている。)
y	観測量
u	入力 (第2章でスカラのuを変位分布と定義している。)
$n_{out}$	出力の次数
$n_{inp}$	入力の次数
t	時刻
k	離散時間系のサンプリング時刻を表わすパラメータ



$\Delta t$	サンプリング時間間隔
$A_i$	ARMAモデルのAR部の係数行列
$B_i$	ARMAモデルのMA部の係数行列
$p$	ARMAモデルの次数 (未知パラメータを表わすこともある。)
$\Theta$	$= (A_1, A_2, \dots, A_p, B_0, B_1, B_2, \dots, B_p)$
$q$	パルス応答列内で、パルス応答の数
$n_b$	時変ARMAモデルでMA部を時間多項式で近似した時、その次数
$U$	直達行列Dとパルス応答を縦に $q$ 個並べた行列
$Ker()$	核空間
$Im()$	写像空間
$E()$	期待値
$vec()$	行列の列展開
$\otimes$	クロネッカ積

(下の添え字)

$0$	真値を表わす。(例外あり)
$e$	誤差を表わす。

(上の添え字)

$T$	行列の転置
$*$	行列の転置共役
$-$	行列の一般化逆行列
$+$	行列の擬似逆行列
$\cdot$	時間の1階微分
$\ddot{\phantom{x}}$	時間の2階微分
$\wedge$	推定値

## 第1章 序論

同定法の研究は、従来、航空機分野を中心に精力的な開発がなされてきた伝達関数による同定法や、状態空間法を基本とする現代制御理論を通して行われてきた。しかし、計算機技術の飛躍的な進歩は、離散時間系で、時間領域の同定法の発展を促し、また、システムの物理量を、より直接扱える可能性を与えた。

また、近年、運動方程式が偏微分方程式で表わされる、いわゆる分布定数系の研究が注目を集めている<sup>1-6)</sup>。このようなシステムの最大の特徴は、その運動が無限の自由度を有することである。そのため、それをどのように表現するのか、また、そのようなシステムの特性をいかにして特定し、どのように制御すべきか、など解決すべき課題も多いが、最近の宇宙開発の進歩はそれを現実の問題として突きつけている<sup>7-9)</sup>。近い将来に予定されている各種宇宙ミッションにおいても、柔軟で大型の構造物を高精度で制御する必要性が指摘されている。このような構造物は分布定数系とみなすことが妥当な選択となるものである。

本論文では、時間領域での、離散時間系の物理量の同定問題を考察し、それを、分布定数系として扱われるような構造物の同定に適用した。すなわち、柔軟構造物を中心に物理量の同定問題を考察し、時間領域での、離散時間系の同定法を提案した。

### 1.1 従来の研究の概観

柔軟構造物の制御や構造解析では、事前にその構造物の特性を正確に同定しておくことが重要である。Mook<sup>10)</sup>らはモデルが正確に同定されていない場合の状態量推定を考えているが、この方法ではシステムの内部構造を具体的に示唆する情報は得られず、また、高精度の制御が必要な場合には結局、同定も正確である必要がある。柔軟構造物などの同定問題は従来より関心が高く、多くの研究がなされている<sup>11-14)</sup>。それらは、

- ・モード特性の同定、
- ・質量行列、剛性行列、減衰行列の同定、
- ・分布定数そのものの同定



に分類される。次節以下でこれらについて従来の研究を概観する。

また、本研究においては、任意の入力を受けている系のパルス応答列の導出や、時変系の同定を問題としている。これらの内容についても以下で概観する。

なお、以下で使用されている用語の中には、必ずしも一般的でないものも含まれている。それらについては、付録として本論文の巻末にまとめ、若干の説明を加えている。以下では、その付録も参照されたい。

### 1.1.1 モード特性の同定

モード特性の同定問題は過去、多くの研究で取り扱われてきた。これは多くの制御系がモード情報を使用して設計されてきたことに対応する。モード特性の同定を周波数領域で議論するのは自然のことであり、数多くの分野で周波数領域でのモード同定が適用されている。しかし周波数領域での同定は、印加される入力に対する制約<sup>15)</sup>やモード周波数が密に存在する場合に正しい同定ができない<sup>16)</sup>などの問題点が指摘されている。そういったことを受け、近年、時間領域でのモード同定が注目を集めている。

時間領域の同定法として、まず考案されたのがHo-Kalmanの方法<sup>15)</sup>である。この方法はまず、入力为零の、いわゆるパルス応答の時間履歴（すなわちマルコフパラメータ）からHankel行列を構成する。次に、それが可制御行列と可観測行列の積になることを利用してシステムの最小実現を求め、最後に、そこからモード特性を得るものである。この方法は、計算法が複雑で、大きなシステムには適用しづらいという面を持っていた。

Ibrahimら<sup>17-18)</sup>は、Ibrahimの時間領域(Ibrahim's Time Domain ;ITD)法と呼ばれる同定法を提案した。この方法はHo-Kalmanの方法同様、自由応答の時間履歴からシステムの実現を求め、そこからモード特性を同定するものである。この方法はHankel行列と類似の構造を持つ行列を2個使用することにより、Ho-Kalmanの方法のとき問題となった膨大な量の計算を大幅に軽減した。ITD法は徐々に改良されてきた<sup>19-20)</sup>が、同定結果が観測雑音に対して敏感であること<sup>21)</sup>や、システムの次数の決定が曖昧である、といった欠点を抱えていた。(ITD法において、次数の決定は同定結果に大きな影響を与えることが知られている<sup>21)</sup>。)

Juangら<sup>22)</sup>は、固有システム実現アルゴリズム(Eigensystem Realization Algorithm ; ERA)を提案した。この方法も、まずシステムの最小実現を求め、次にそこからモード特性を導出するというものであり、その点では上記の方法と類似している。特徴としては、2個の拡張Hankel行列を使用することにより計算量を軽減しており、また、そのうちの片方の行列のSVD分解を求め

ることよりシステムの次数を決定し、最小実現を得るという長所を有する点が挙げられる。

ERAで最小実現を得る部分を簡単にまとめると、例えば以下のようなアルゴリズムとなる。なお、拡張Hankel行列の構成法はこの例以外にも考えられるのでその点には注意を要する。

1) まず、2個の拡張Hankel行列 $H_0, H_1$ を以下のように構成する。

$$H_0 = \begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_{n-1} & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_n & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ J_{n-1} & J_n & \cdots & J_{2n-2} & J_{2n-1} \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n-1} & J_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ Ce^{A\Delta t} \\ \vdots \\ Ce^{A n \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & e^{A\Delta t}B & \cdots & e^{A n \Delta t}B \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \cdots & J_n & J_{n+1} \\ J_2 & J_3 & \cdots & J_{n+1} & J_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n-1} & J_{2n} \\ J_{n+1} & J_{n+2} & \cdots & J_{2n} & J_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ Ce^{A\Delta t} \\ \vdots \\ Ce^{A n \Delta t} \end{bmatrix} e^{A\Delta t} \begin{bmatrix} B & e^{A\Delta t}B & \cdots & e^{A n \Delta t}B \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

ただし、 $J_i$ : マルコフパラメータで、 $J_i = Ce^{A i \Delta t}B$   
 $(A, B, C)$ : システムの実現

2)  $H_0$ をSVD分解し、

$$H_0 = U S V^T \quad (1.3)$$

とおく。ただし、行列 $S$ は対角行列で対角成分は非零とする。

3) (1.1)、(1.3)式を見比べることにより、例えば、

$$\begin{bmatrix} C \\ Ce^{A\Delta t} \\ \vdots \\ Ce^{A n \Delta t} \end{bmatrix} = U S^{1/2} \quad (1.4.1)$$

$$\begin{bmatrix} B & e^{A\Delta t}B & \cdots & e^{A n \Delta t}B \end{bmatrix} = S^{1/2} V^T \quad (1.4.2)$$



とおける。(これは一意ではないので他のおき方も考えられる。)

4) (1.4)式のようにおくと、システムの最小実現を以下の式より得る。

$$e^{A\Delta t} = S^{-1/2} U^T H_1 V S^{-1/2} \quad (1.5)$$

B:  $S^{1/2} V^T$  の最初の  $n_{\text{inp}}$  (: 入力次元数) 行

C:  $U S^{1/2}$  の最初の  $n_{\text{out}}$  (: 観測次元数) 列

ここで、システムの次数は手順の2)のSVD分解で、行列Sの対角成分を全て非零とするところで決定される。なお、Ho-Kalmanの方法は、(1.1)式を直接使用してシステムの最小実現を得ようとするものである。また、ERAでは、手順2)でいわば、行列 $H_0$ の擬似逆行列を得ようとしているのに対し、ITD法の考え方では行列Sの次元数を、対角成分にゼロがあるか否かによらず、 $H_0$ の列数に固定し、ゼロ成分も含めて逆行列をとることになる。よって、ITD法では、雑音が多すぎると逆行列がとれなくなる場合があり、また、雑音がある場合には、逆行列をとるのでその影響を強く受けることになる。ERAは、時間領域の従来の同定法をより一般化し、洗練させたものであるとみなすことができる。モード特性は行列Aの固有値、固有ベクトルを計算し、行列B、Cを加味することにより得られる。

ERAを含むこれらの一連の方法は、同定途中でシステムの(最小)実現を得ており、同定問題と同時に実現問題も解いていることになる、という特徴を持つ。実現問題そのものを扱った研究としては、例えば文献23の研究が挙げられる。この研究では、入出力の相関関数よりシステムの実現を得ることを提案しているが、得られる実現は一般に最小実現とはならない。そのため、得られた実現形式よりパルス応答列を計算し、改めてERAを用いて最小実現を得ることを提案している。

ERAを用いたモード同定試験は、過去いくつか計画され、またそのうちのいくつかは既に実施されている<sup>16), 24-25, 27)</sup>。

ERAは従来の方法に比較して洗練された方法であり、現在のところ、モード特性を同定する場合に最も有力な方法のひとつである。それでもなお、いくつかの改良が提案されている<sup>26-30)</sup>。ERAは観測雑音が存在する場合、同定結果はその影響を受けやすい。改良の多く<sup>27-30)</sup>は、観測雑音に対する同定結果の不感性を高めることを目的としている。そういった研究では、同定精度を評価するための指数がいくつか定義されているが、それらはいずれも定量的な情報は持っていない。同定精度に対する定量的なものは、従来の同定法に共通した欠点と考えられるが、近年のロバスト制御理論の発展により、同定精度を正確に把握する必要性が高まっている<sup>31)</sup>。

また、文献32には、拡張Hankel行列を用いて、モード特性をオンラインで同定する方法を提案している。

一方、Baruhら<sup>33)</sup>はシステムの質量行列が既知、剛性行列が未知の場合のモード特性同定を行った。この方法は、正弦波入力が必要とされる、質量行列の次元数分の観測点が必要である、など現実の問題への適用に関して制限が多い。

### 1.1.2 質量行列、剛性行列、減衰行列の同定

いくつかの研究は、質量行列、剛性行列、減衰行列といった運動方程式を構成する行列を同定することを指向している。これらの方法に共通した特徴は、行列の次数と同数の観測点を必要としていることであり、このことが実際への応用においてひとつの障害となっている。

Bermanら<sup>34)</sup>は、予め同定されたモード周波数、モード形状を用いて、質量行列と剛性行列をイタレーションなしで修正する方法を与えた。この方法は各行列の変更量を最小にとどめて、モード特性を合わせるものであるが、修正量決定の際に、物理的な条件を考慮していないため、予め同定されたモード周波数やモード形状に同定誤差が存在すると、同定結果はそれに敏感に変わってしまうことが指摘されている。

また、Creamerら<sup>35)</sup>は減衰がない、またはほとんどない場合について、モード周波数、モード形状、およびシステムの周波数応答を用いて各行列を同定している。

文献36-37では、主要モードのみを考えた質量行列、剛性行列を導いている。これらの行列は、主要モード以外のモードも考慮して得られる行列とは非常に異なったものとなる。ゆえに、ここで得られる行列は制御系設計に利用することはできるが、これを用いて剛性分布などの物理量を同定するのは困難である。

文献38では時間領域での同定法が構成されているが、これもまた、行列の次数分の観測点が必要とされる。また、Rajamanら<sup>39)</sup>は時間領域同定、周波数領域同定を含む3種類の同定法を提案している。これらの方法では、状態量、状態量の時間微分、その2階時間微分を用いて、最小2乗法を適用して質量行列、減衰行列、剛性行列を同定している。シンプルな方法であるが、多くの観測量を必要とし、また、次元の大きな行列の操作も不可避となるといふ問題点を抱えている。

Foxら<sup>40)</sup>は減衰がないシステムについて、モード周波数、モード形状と、質量行列、剛性行列の各要素の関係を定式化した。これより、質量行列、剛性行列と、剛性分布などの物理量の関係を導くことができる。すなわち、この研究結果を用いれば、同定された質量行列、剛性行列を用いて剛性分布な



どの物理量を得ることができる。

文献41では、運動方程式を適当に変換することにより質量特性が同定できることを示している。

### 1.1.3 分布定数の同定

多くの研究はシステムのモード特性の同定など、制御系設計に有用な情報を直接同定することを目指しているが、その一方で、物理的に意味のある量（例えば、質量分布、剛性分布など）を同定する必要性も指摘されている。物理量同定を行った場合には、同定試験実施時の環境と運用時の環境に著しい変化がある場合にも対応できる可能性がある。試験時と運用時に環境が変化する例としては、例えば、同定試験を地上の1Gの重力下で行い、実際の運用を無重力の宇宙空間で行う場合が挙げられる。また、同定試験時には供試体は支持台で支えられていて、運用時には宙に浮かんでいるケースも考えられる。こういった場合、その環境の差異がモード特性などに影響を及ぼすことになる。また、システムが大幅な変形を行い、単一の運動方程式ではすべてを記述できないことも考えられる。そういったとき、ひとつの状態のモード特性の同定だけでは不十分となる。環境の差異を考慮に入れたモード同定も提案されているが、物理量を直接同定することは、より多くのケースに対応しており、より高い一般性を持っている。

Caesar<sup>42)</sup>やStavriniadis<sup>43)</sup>は、予め同定されているモード特性を用いて構造パラメータを数値的に同定する方法を提案した。これらの方法では、同定にイタレーションが必要となるのだが、その際、パラメータの更新量をモード特性の数値差分を用いて得ている。そのため、数値差分が精度よく計算されるためには、パラメータをどの程度動かしたらいいかを把握する必要がある。また、モード特性を予め同定されているものと一致するように構造パラメータを決定するのであるが、例えばモード周波数とモード形状では単位は異なる。そのため、どちらの一致にどれだけ重みをおくのか、なども問題となる。文献42-43では、これらの問題は解決されていない。

Baruh<sup>44)</sup>はイタレーションなしの方法を提案している。この方法では、予め得られているモード形状を基底関数として使用し、直交性やモード周波数などの条件を満たすように構造パラメータを決定している。この方法は、モード形状の使用の必要があり、そのため、モード形状を十分精度よく表現できるよう、多数の観測点を必要としている。

文献45-46では、まずはじめに同定しようとしている分布定数がパラメータを用いて記述され、次に質量行列や剛性行列がそれらのパラメータを用いて表わされる。そしてそれらの行列が予め得られたモード特性量と矛盾しなくなるように、分布定数のパラメータを決定するというものである。これらの方法は、結局、質量行列、剛性行列を導出することを主眼としている。そ

のため、前節でも問題になったように、多数の観測点を必要としている。

文献47でも、モード特性を用いて物理量を同定しているのであるが、モード特性量のひとつとしてモード形状を使用せず、代わりに運動エネルギー分布を使用することを提案している。これにより、あまり励起されていないモード、すなわち、観測誤差の大きい可能性の高いモード、の影響を低めることができるとしている。

Meirovitchら<sup>48)</sup>は、有限要素モデルを用いて文献45-46と類似の手法を考案した。結局、この3者はほぼ同様の内容となっている。

以上の方法に共通する特徴は、2点挙げられる。第1点は、実験などより予め得ているのはモード特性量であることである。第2点は同定すべき(分布定数となっている)物理量を何らかの形で有限次元化していることである。その有限次元化により支配方程式が常微分方程式近似され、結局、その常微分方程式を得られているモード特性量と比較している。

それに対して、Leeら<sup>49)</sup>は偏微分方程式をそのまま使用した同定法を考案している。すなわち、分布定数を有限次元化することなくそのまま同定することを提案している。その研究では、まず、変位分布をHilbert空間の関数とみなすことにより支配方程式を定式化する。さらに評価関数として、支配方程式から計算された変位と観測された変位の差の2乗を時間、空間の両方向に積分したものをとる。このとき、その評価関数を最小にする物理量分布は、一般の最適制御問題でしばしば現われる共状態変数の拡張概念とも言える、共状態「関数」を導入することにより得ている。これは理論的には非常に興味深いものであるが、実際への適用で困難が伴う。例えば、支配方程式から時々刻々のシステムの状態を計算する必要があり、そのため初期状態量は完全に既知であることが要求される。また、変位分布そのものを観測する必要があり、さらに、数値計算に多大の労力を要するなどの困難が挙げられる。

変位分布や分布定数をそのまま無限次元で扱わないとすると、いかにモデル化するかということも問題となる。Banksら<sup>50-52)</sup>は連続体の梁の同定問題を扱い、変位分布をスプライン関数で近似することの正当性を証明した。

Noor ら<sup>53)</sup>はトラス状の構造物を連続体(すなわち分布定数)モデルで近似することの優位性についてのサーベイを行っている。Juangら<sup>54)</sup>はトラス構造物を連続体モデル表現して同定を試みている。これらの研究でも、結局は、連続体モデルはそのままでは扱わず、有限次元化が行われている。

近年、構造物のパラメータを含めた形で拡張Kalmanフィルターなどを構成し、状態変数の推定値を得るとともに構造物の同定を行おうとする動きもある。

Hoshiyaら<sup>55)</sup>は拡張Kalmanフィルターをそのまま構成すると同定値の収束性が良くないことを指摘し、同定値の共分散行列を定期的にリセットするこ



とを提案している。ただし、リセットの行い方、すなわち忘却因子の設定の仕方、を明確に示す指針は与えられていない。さらにその文献の中で膨大な計算量の必要性も確認されている。

Karlov<sup>56)</sup>は、リカッチ方程式を通常とは異なる方法で線形化するとフィルターの所要計算時間が大幅に短縮されることを報告している。

フィルターを用いた同定として、この他、例えば葛西<sup>57)</sup>らは拡張Kalmanフィルターを用いてモード特性が同定できることを主張したりしている。こういった種類の研究は適応制御の分野で多く見受けられるが、それらの共通した欠点としては以下の2つが考えられる。すなわち、ひとつは、構造の同定値を得るのみならず状態変数も推定するために計算量が多くなりがちであることであり、いまひとつは、逐次的な同定手法であるため、その収束の早さや最後まで残る偏差の存在が問題になることが多い点である。

#### 1.1.4 時変系の同定

時変系の同定は従来、例えば文献58-59に見られるように、拡張Kalmanフィルターやそれに類似したフィルターを用いて逐次的に同定する手法が主流である。

Havlena<sup>60)</sup>は、時変ARMAXモデルに対して拡張Kalmanフィルターを適用し、ARMAXモデルを同定した。その研究において、ARMAXモデルのパラメータ行列は時間変化しないものとして支配方程式が定式化された。すなわちARMAXモデルは時不変と仮定されている。ARMAXモデルの時間変化は、フィルターの収束する値が時間とともに変化することによって表現している。この場合、パラメータの追従性や定常偏差などの問題が生じる。

そのため、Zheng<sup>61-62)</sup>はARMAXモデルのパラメータを時間の多項式としてフィルターを構成した。しかし、パラメータを時間の多項式と表わすための条件その他については触れられておらず、その正当性は数値計算例で議論されているのみである。また、そのような時間変化するARMAXモデルと物理量の関係は与えられていない。

#### 1.1.5 自由応答の導出

以上の概観でも出てきたが、同定問題において、パルス応答やインパルス応答などのいわゆる自由応答を用いて同定を行うことがある。自由応答を導出する方法としては、直接観測するということも考えられる<sup>24-25, 27)</sup>が、この方法では、観測雑音の影響を受けやすい。

そのため、周波数応答の逆フーリエ変換はインパルス応答であることを利用し、この演算を通してインパルス応答を得るということがよく行われている。



る<sup>16, 27)</sup>。これは、周波数応答が、入出力の相互スペクトル密度とスペクトル密度の比になることを用いてまず、ランダム入力に対する応答の観測より周波数応答を導出し、その逆フーリエ変換をとることによりインパルス応答を得る、という手順にて行われる。

また、白色な入力に対する自己相関関数はインパルス応答そのものになることを利用することも考えられている。しかし、この場合、入力が白色である必要があり、システムに加えられる入力の統計的性質に対して制約がある。

こういった周波数特性を利用した方法を時変系に拡張する場合、周波数応答が時間変化することを考慮する必要がある。例えば、周波数応答を逐次的に求めていくことにより、時間変化に対応しようとするのが考えられる<sup>63)</sup>。そのような場合、忘却因子の設定が時変効果を決定する重要なパラメータとなるが、その設定の指針は曖昧である。

また、文献64-65では、白色のランダム入力に対する応答を時間を適当にずらして重ね合わせるにより自由応答が得られることを示している。この方法では、入力に対する出力のゲインは決定できず、また、時変システムへの応用も困難である。

文献23では、まずシステムの実現を求め、そこからパルス応答を計算している。

#### 1.1.6 離散時間系の再帰表現

線形の離散時間系を表現する方法として、ARMAモデルなどの再帰表現がしばしば用いられる。システムの再帰表現は状態変数表現と同様、制御系設計に使用されており、そのため、再帰表現の同定法の研究も多くなされている<sup>15, 66)</sup>。Leeら<sup>67)</sup>は、VAR(1)モデルの同定を扱い、入力が白色雑音でその時々刻々の大きさは未知である場合でも、VAR(1)モデルは唯一に決定できることを示した。Gerschら<sup>68)</sup>は、未知の入力を受ける1入力1出力系のARMAモデルの同定問題を検討した。また、文献69では、ARMAモデルと $z$ 変換した伝達関数行列の関係を用いて、モード特性を同定した。文献70-73では、Latticeフィルターを用いてシステムの次数を決定する方法を与えている。

1.1.4節の文献60-62に見られるように、再帰表現は時変系へも拡張されている。

## 1.2 本研究の位置付け

本論文では、時間領域での、離散時間系の物理量の同定問題を考察し、それを、分布定数系として扱われるような構造物の同定に適用した。

変位分布、分布定数はスプライン関数を用いて有限次元化されるが、変位分布の有限次元化の際、境界条件の取り込みが機械的になされる定式化を導く。Banksら<sup>50-52)</sup>の定式化では、境界条件が変わるごとに支配方程式の独立変数を替えていたが、ここでは、より汎用性の高い方法を与えた。定式は梁の振動を例に行われるが、例えば、スプライン関数の積を新たに座標関数とみなすなどとすれば、2次元平面の振動やその他のケースに拡張可能である。この定式は、有限要素法で行われているものと類同のものである。

有限次元化された未知パラメータは、パルス応答が合致するように決定される。従来の研究では、適合するように比較される量は、モード特性や質量行列・剛性行列であることが多かったが、ここではパルス応答列の使用を提案する。比較に使用する量はシステムを十分に記述している量である必要があり、具体的には、

- (1)パルス応答列
- (2)連続系のシステム行列A、観測行列C、入力行列B
- (3)離散系のシステム行列F、観測行列H、入力行列G
- (4)行列の集合 $\{CB, CAB, CA^2B, CA^3B, \dots\}$   
(連続系のマルコフパラメータ)
- (5)モード特性量
- (6)支配方程式を構成する行列  
(例えば、質量行列、剛性行列)
- (7)入出力時系列そのもの

が考えられる。本章で概観してきたとおり、従来、未知パラメータ同定に利用されてきたのは、(5)、(6)、(7)である。また、(1)より(2)や(5)を得る、(5)と(6)の関係を導く、といったこともよくなされている。ここでは、(1)を使用することを考えた。(1)を比較量として使用することは、

- ・同定の不安定性がない (cf. (4))
- ・センサ数が少なく済む (cf. (2)、(3)、(6))
- ・センサ配置などに比較的鈍感である (cf. (5))
- ・膨大な量のデータを直接取り扱う必要がない (cf. (7))
- ・イタレーションが必要になる (cf. (2)、(3)、(6))
- ・同定アルゴリズムが完全に時間領域でのみ議論できる  
(時変系への拡張も可能である)

の特徴を有する。

パルス応答の導出はARMAモデルより行った。これは、入力に対する制約が少ない。すなわち、従来の導出法では、方法によっては入力の白色性を仮定したりする必要があったが、この方法ではそれはまぬがれている。

ARMAモデルに時間変化を許すことにより、提案する同定法の時変系への拡張が可能である。時変系の同定では、時変ARMAモデルのパラメータ行列の時間変化を時間の有限次元多項式で近似することを考え、その近似が成立



するための十分条件を与えた。さらにそのとき、そのARMA行列の導出方法を考察した。

同定された量の誤差の共分散行列を評価する式も併せて定式化した。これを用いることにより、センサやアクチュエータの配置についての検討が可能である。

### 1.3 本論文の構成

本論文は本章を含め、6章で構成される。まず、第2章で分布定数のモデル化について論ずる。ここではスプライン関数を用いた分布定数の有限次元近似や、本来、偏微分方程式である支配方程式の常微分方程式近似の方法を与える。第3章で提案する同定法を時不変システムに適用する。ARMAモデルを用いたパルス応答列の導出や、それに基づいた同定を定式化し、さらに同定誤差を評価する式も与える。また、比較する量としてパルス応答を用いることについての議論もここで行う。第4章では時変システムの場合を扱う。ここでは、時変ARMAモデルのパラメータ行列を時間の有限次元多項式と近似することの正当性について論じ、その十分条件を与える。その条件が満たされる範囲内では、時変システムの同定は時不変の場合の単純な拡張となるが、そのことも明示的に示す。第5章において、前章までの議論の正当性を確認するため、数値シミュレーション例を載せた。対象としたモデルは両端フリーの梁であり、その諸元は通称M3SII型と呼ばれているロケットを元にとった。数値シミュレーションの一環として、従来のようにモード特性を使用して構造パラメータを同定するケースとの比較も行った。最後に第6章で結論をまとめた。



## 第2章 分布定数のモデル化

分布定数系の運動は本来、偏微分方程式を用いて表わされる。本章では、梁の振動を例にとり、それを有限次元化、すなわち、常微分方程式化する方法を与えた。具体的には、まず、変位分布をスプライン関数近似することにより変位を有限の座標関数の線形和で表現し、次に、ガラーキン法を用いて常微分方程式に近似した。質量分布、剛性分布などの分布定数パラメータのスプライン関数近似も定式化した。

### 2.1 モデル化の一般的な方法

本章では、偏微分方程式で支配されるシステムを常微分方程式で近似する方法を議論するのであるが、有限要素法による定式化でも同様の結果となる。構造物の振動の場合、状態方程式は、有限要素法を用いると結局、

$$M\dot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = u(t) \quad (2.1)$$

ただし、

$M, C, K$  : それぞれ質量行列、減衰行列、剛性行列 (対称行列)  
 $z(t)$  : 状態変数  
 $u(t)$  : 入力

となる。これを、取り扱いの便を考え、よく、

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

ただし、

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$
$$B \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$
$$x(t) \equiv (z^T(t), \dot{z}^T(t))^T$$

とすることがある。本章では、変位分布をスプライン関数で表現しても同様

の定式化がなされることを示す。なお、スプライン関数の完備性は既に証明されている。

次節以下で示されるとおり、ここで提案する方法は、境界条件の取り込み、局所的座標関数の導入など、有限要素法の考え方と多くの共通点を持っている。

## 2.2 Euler-Beamの振動について

簡単のため、本章ではEuler-Beamを用いて議論を行う。議論を始めるにあたって、まず、本節でEuler-Beamの振動の定式化を行う。

さて、Euler-Beamの振動の支配方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_D I \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) = f(x, t) \quad (2.3)$$

ただし、

$u(x, t)$	: 変位
$\rho(x, t)$	: 質量分布
$f(x, t)$	: 分布力
$EI(x, t)$	: 剛性分布
$C_D I(x, t)$	: 減衰係数分布
$x$	: ビーム位置を表わす変数
$t$	: 時刻を表わす変数

である。境界条件は自由端のとき、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_D I \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) &= 0 \\ - \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_D I \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

固定端のとき、

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

となる。また、以下でビームの全長はLとする。

### 2.3 スプライン関数を用いた変位分布の近似

ここで、変位分布のスプライン関数近似を表わす方法を与える。まず、

任意のスプラインは、同じ次数を持つB-スプラインの線形和として表現できる

という事実<sup>74)</sup>に注意する。ここで、 $m$ 次のB-スプラインとは、

各節点間で各々 $m$ 次の多項式となっている区分的多項式、  
両端の節点で $m-1$ 次までの微分がゼロ、  
各節点で $m-1$ 次までの微分が連続、

という性質を持ったものである。これは、すなわち、 $m+2$ 個の節点を持つ $m$ 次のC-スプラインのことである。

さて、このことより、変位分布は、空間方向についてスプライン関数近似すると、B-スプラインを用いて変数分離表現が得られ、

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (2.6)$$

ただし、

$\hat{u}(x,t)$  : 変位分布の近似値

$\phi_i(x)$  : B-スプライン関数

となる。ここで、 $n$ は本来無限大であるべきものであるが、変位分布を有限個の節点を持つスプラインで近似したことによりでてきたものである。また、スプライン関数の次数は、(2.3)式に直接代入する場合、4次以上である必要がある。しかし、後に示すようにガラーキン法を用いて(2.3)式を常微分法定式化すると、境界条件式も考え併せ、3次以上であればよいことがわかる。よって、以降、常微分方程式化を念頭に置き、変位分布を近似するスプラインとして、3次のスプラインを考えることにする。図2.1に3次のB-スプラインの例を載せる。



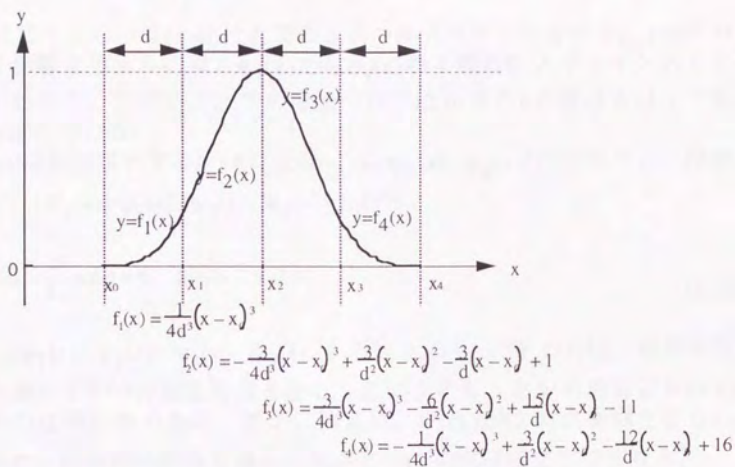


図 2.1 B-スプライン関数の例（3次、ノード間が等間隔の例）

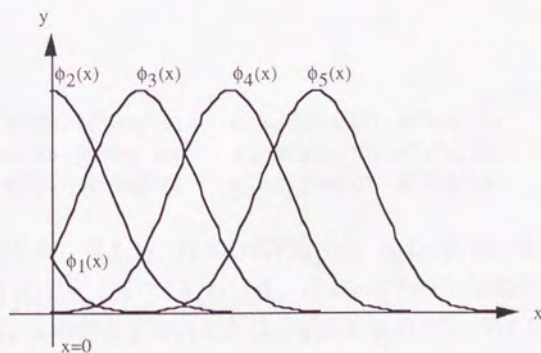


図 2.2  $x=0$  付近の座標関数

## 2.4 境界条件の取り込み

図 2.2 にビームの一端 ( $x=0$ ) 付近での 3 次の B-スプラインを示す。 $x=0$  における変位に影響を与えるのは、 $\phi_1(x)$  から  $\phi_4(x)$  の 4 個の B-スプラインのみであることがわかる。ただし、以下の議論では、(2.6) 式の  $n$  の値は 8 以上であることを仮定している。

いま、 $x=0$  は自由端とする。 $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x)\}$  の代わりに、座標関数として、 $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\}$  をおき、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_i(x) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \psi_i(x) = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.7)$$

とすると、 $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x), \phi_5(x), \phi_6(x), \dots, \phi_n(x)\}$  は、境界条件式 (2.4) 式を満たす  $\hat{u}(x, t)$  の基底関数となる。というのも、上記の線形和が (2.4) 式を満たすのは明らかである。また、例えば、 $\psi_1(x)$  が (2.7) 式を満たさないと仮定すると、線形和の係数を適当に選ぶと、(2.4) 式は成立しなくなる。

さて、(2.7) 式を満たす  $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\}$  は、例えば、

$$\psi_1(x) = a_{11}\phi_1(x) + a_{12}\phi_2(x) + a_{13}\phi_3(x) \quad (2.8.1)$$

$$\psi_2(x) = a_{21}\phi_2(x) + a_{22}\phi_3(x) + a_{23}\phi_4(x) \quad (2.8.2)$$

$$\psi_3(x) = 0 \quad (2.8.3)$$

$$\psi_4(x) = 0 \quad (2.8.4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \phi_2^{(2)}(0)\phi_3^{(3)}(0) - \phi_3^{(2)}(0)\phi_2^{(3)}(0) & a_{21} &= \phi_3^{(2)}(0)\phi_4^{(3)}(0) - \phi_4^{(2)}(0)\phi_3^{(3)}(0) \\ a_{12} &= \phi_3^{(2)}(0)\phi_1^{(3)}(0) - \phi_1^{(2)}(0)\phi_3^{(3)}(0) & a_{22} &= \phi_4^{(2)}(0)\phi_2^{(3)}(0) - \phi_2^{(2)}(0)\phi_4^{(3)}(0) \\ a_{13} &= \phi_1^{(2)}(0)\phi_2^{(3)}(0) - \phi_2^{(2)}(0)\phi_1^{(3)}(0) & a_{23} &= \phi_2^{(2)}(0)\phi_3^{(3)}(0) - \phi_3^{(2)}(0)\phi_2^{(3)}(0) \end{aligned}$$

で与えられる。このとき、(2.8.1)、(2.8.2) 式の  $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$  を用いて構成される、 $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \phi_5(x), \phi_6(x), \dots, \phi_n(x)\}$  は、端点  $x=0$  での自由端の条件を満たす基底関数となる。 $x=0$  が固定端のときは、 $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$  は、例えば、

$$\psi_1(x) = a_{11}\phi_1(x) + a_{12}\phi_2(x) + a_{13}\phi_3(x) \quad (2.9.1)$$

$$\psi_2(x) = a_{21}\phi_2(x) + a_{22}\phi_3(x) + a_{23}\phi_4(x) \quad (2.9.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \phi_2^{(0)}(0)\phi_3^{(1)}(0) - \phi_3^{(0)}(0)\phi_2^{(1)}(0) & a_{21} &= \phi_3^{(0)}(0)\phi_4^{(1)}(0) - \phi_4^{(0)}(0)\phi_3^{(1)}(0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{12} &= \phi_3^{(0)}(0)\phi_1^{(1)}(0) - \phi_1^{(0)}(0)\phi_3^{(1)}(0) & a_{22} &= \phi_4^{(0)}(0)\phi_2^{(1)}(0) - \phi_2^{(0)}(0)\phi_4^{(1)}(0) \\ a_{13} &= \phi_1^{(0)}(0)\phi_2^{(1)}(0) - \phi_2^{(0)}(0)\phi_1^{(1)}(0) & a_{23} &= \phi_2^{(0)}(0)\phi_3^{(1)}(0) - \phi_3^{(0)}(0)\phi_2^{(1)}(0) \end{aligned}$$

とすればよい。

もう一方の端点  $x=L$  も同様に考えると、結局、両端での境界条件を満たす基底関数として、 $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \phi_5(x), \phi_6(x), \dots, \phi_{n-4}(x), \psi_{n-1}(x), \psi_n(x)\}$  を得る。記述の簡単のため、これを改めて、 $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$  とおき、

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) z_i(t) \quad (2.10)$$

と記述する。この変位分布表現が完備であること、すなわち (2.8) 式で  $m$  が無限大になるにつれて  $\tilde{u}(x, t)$  が真の変位分布に収束することは、スプライン関数の完備性<sup>48)</sup> より明らかである。

## 2.5 支配方程式の線形表示

前節で得られた変位分布の近似表現式 (2.10) を支配方程式 (2.3) に代入すると、

$$\rho \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \ddot{z}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \sum_{i=1}^m \varphi_i^{(2)}(x) z_i(t) + C_D I \sum_{i=1}^m \varphi_i^{(2)}(x) \dot{z}_i(t) \right) = f(x, t) \quad (2.11)$$

となる。この式にガラーキン法を適用して結局、次式のような常微分方程式化を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_0^L \rho \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \ddot{z}_j(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^L EI \varphi_i^{(2)}(x) \varphi_j^{(2)}(x) dx z_j(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^L C_D I \varphi_i^{(2)}(x) \varphi_j^{(2)}(x) dx \dot{z}_j(t) \\ = \int_0^L f(x, t) \varphi_j(x) dx \end{aligned} \quad (2.12)$$

これはまず、(2.11) 式の両辺に  $\varphi_j(x)$  ( $j=1 \sim m$ ) を掛け、次に両辺をビーム全長 ( $x=0 \sim L$ ) にわたって積分し、さらにそれを部分積分したものである。

なお、(2.14) 式より得られる振動の解は、弱解である。

さて、これを以下のようにして線形ベクトル表示にする。まず、

$$\Phi = \left( \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x) \right)^T \quad (2.13)$$

とおき、行列  $M, C, K$  をそれぞれ

$$M \equiv \int_0^L \varphi(x) \rho \varphi^T(x) dx \quad (2.14.1)$$

$$C \equiv \int_0^L \varphi(x) C_D I \varphi^T(x) dx \quad (2.14.2)$$

$$K \equiv \int_0^L \varphi(x) EI \varphi^T(x) dx \quad (2.14.3)$$

と定義する。これはそれぞれ、質量行列、減衰行列、剛性行列となっている。  
このとき、(2.12)式は、

$$M\dot{z}(t) + Cz(t) + Kz(t) = u(t) \quad (2.15)$$

ただし、

$$z(t) \equiv (z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t))^T$$

$$u(t) \equiv \left( \int_0^L f(x,t) \varphi_1(x) dx, \int_0^L f(x,t) \varphi_2(x) dx, \dots, \int_0^L f(x,t) \varphi_m(x) dx, \right)^T$$

となる。これはさらに、

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.16)$$

ただし、

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$B \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = (z^T(t), \dot{z}^T(t))^T$$

のように変形できる。これは、支配方程式の線形ベクトル表示である。この表現は、システムが時変系、時不変系に関わらず成立する。

なお、このとき観測方程式は、

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) \quad (2.17)$$



ただし、

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_{out}}(t))^T$$

$n_{out}$  : センサの数

$y_i(t)$  :  $i$ 番目のセンサの出力

$x_i(t)$  :  $i$ 番目のセンサの位置

$$H \equiv \begin{bmatrix} \varphi^T(x_1) & 0 \\ \varphi^T(x_2) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi^T(x_{n_{out}}) & 0 \end{bmatrix} \quad D \equiv 0 \quad (\text{変位センサのとき})$$

$$H \equiv \begin{bmatrix} 0 & \varphi^T(x_1) \\ 0 & \varphi^T(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \varphi^T(x_{n_{out}}) \end{bmatrix} \quad D \equiv 0 \quad (\text{速度センサのとき})$$

$$H \equiv \begin{bmatrix} 0 & \varphi^T(x_1) \\ 0 & \varphi^T(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \varphi^T(x_{n_{out}}) \end{bmatrix} A \quad D \equiv \begin{bmatrix} 0 & \varphi^T(x_1) \\ 0 & \varphi^T(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \varphi^T(x_{n_{out}}) \end{bmatrix} B \quad (\text{加速度センサのとき})$$

注) A: システム行列、B: 入力行列

となる。各種センサが混在している場合も同様に表現できる。

## 2.6 構造の分布定数のスプライン近似

質量分布、剛性分布、減衰係数分布を

$$\rho(x, t) = \sum_{i=1}^{m_1} \gamma_{1,i}(x) p_{1,i}(t) \quad (2.18.1)$$

$$EI(x, t) = \sum_{i=1}^{m_2} \gamma_{2,i}(x) p_{2,i}(t) \quad (2.18.2)$$

$$C_p I(x, t) = \sum_{i=1}^{m_3} \gamma_{3,i}(x) p_{3,i}(t) \quad (2.18.3)$$

と表わす。ただしここで、 $\{\gamma_{j,i}(x)\}$ は、0次のB-スプラインとする。また、時不変系の場合には、 $\{p_{j,i}(t)\}$ は $\{p_{j,i}\}$ 、すなわち時間に関して不変、とする。このとき、 $\{p_{j,i}(t)\}$ もしくは $\{p_{j,i}\}$ が構造を表わすパラメータとなる。行列M,

C, Kをこれらの構造パラメータで微分したものは

$$\frac{\partial M}{\partial p_{1,i}} = \int_0^L \Phi(x) \gamma_{1,i}(x) \Phi^T(x) dx \quad (2.19.1)$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_{2,i}} = \int_0^L \Phi(x) \gamma_{2,i}(x) \Phi^T(x) dx \quad (2.19.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial p_{3,i}} = \int_0^L \Phi(x) \gamma_{3,i}(x) \Phi^T(x) dx \quad (2.19.3)$$

のように陽に表わすことができる。これを用いれば、(2.16)式の行列A, Bの構造パラメータ微分も、

$$\frac{\partial A}{\partial p_{1,i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M^{-1} \frac{\partial M}{\partial p_{1,i}} M^{-1} K & M^{-1} \frac{\partial M}{\partial p_{1,i}} M^{-1} C \end{bmatrix} \quad (2.20.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial p_{2,i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1} \frac{\partial K}{\partial p_{2,i}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20.2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial p_{3,i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1} \frac{\partial C}{\partial p_{3,i}} \end{bmatrix} \quad (2.20.3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_{1,i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} \frac{\partial M}{\partial p_{1,i}} M^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.20.4)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_{2,i}} = 0 \quad (2.20.5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_{3,i}} = 0 \quad (2.20.6)$$

と表わされる。また、(2.17)式の行列HやDの構造パラメータ微分も陽に得られる。すなわち、変位センサ、速度センサでは、パラメータ微分は、両方とも零である。加速度センサの場合には零ではないが、行列A, Bのパラメータ微分が(2.20)式で与えられているので、陽に書き下せることになる。

なお、このように構造パラメータ微分が陽に得られたのは、分布定数を(2.18)式のように要素関数を用いて表示したからである。この結果は、要素関数にB-スプラインを用いることと関係なく成立する。



## 2.7 本章のまとめ

以上、Euler-Beamを例に分布定数をスプライン関数近似する方法を示した。支配方程式は結局、(2.16)式のような線形ベクトル式で表示できること、また、構造の物理量もスプライン関数近似すると、(2.16)式の係数行列を構造パラメータで微分したものが陽に定式できることを示した。

上記の議論は1次元のビームを扱っていたが、これはもっと一般的な場合に拡張可能である。例えば2次元平面の振動の場合には以下のようにすればよい。すなわち、平面を  $(x, y)$  で表わし、 $x$ 方向について(2.10)式の $\varphi_i(x)$ に相当するものを $\varphi_{x,i}(x)$ 、 $y$ 方向を $\varphi_{y,i}(x)$ とする。このとき、

$$\varphi_{i,j}(x, y) \equiv \varphi_{x,i}(x) \varphi_{y,j}(y) \quad (2.19)$$

を座標関数とすれば、明らかに上記とほとんど同様の議論が成立する。

次章以下では、以上のように分布定数系を有限次元近似して扱う。すなわち、支配方程式が(2.16)式で表わされ、その係数行列の未知パラメータ微分が陽に表現されるようなシステムを考える。

### 第3章 時不変系の同定

本章で時不変系の未知パラメータの同定法について述べる。ここで提案する同定法は、まずARMAモデルを導出し、そこからパルス応答列を導き、それを元に、未知パラメータを同定するものである。本章ではこれらを概説する。まずはじめにARMAモデルを使用してパルス応答列を導出する方法についてまとめる。次に、パルス応答列のパラメータ微分が解析的に表わせることを示し、それを元にパルス応答列を使用した同定法を提案する。最後に、その同定された値の誤差を評価する方法を与える。

#### 3.1 ARMAモデルの導出<sup>66)</sup>

線形システム

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_2(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

ただし、

$\mathbf{y}(t)$ : 観測量  
 $\mathbf{u}(t)$ : 入力  
 $\mathbf{v}_1(t)$ : プロセス雑音  
 $\mathbf{v}_2(t)$ : 観測雑音

の離散時間表現

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}_1(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}_2(k)\end{aligned}\tag{3.2}$$

ただし、

$k$ : サンプル時刻を表わすパラメータ

を考える。このシステムの入出力の時系列を



$$y(k) = - \sum_{i=1}^p A_i y(k-i) + \sum_{i=0}^p B_i u(k-i) + v(k) \quad (3.3)$$

ただし、

$v(k)$ : 白色雑音

のような再帰形式で表現したとき、これをこのシステムのARMAモデルという。ここで、 $p$ は、このモデルの次数を表わしている。この $p$ がシステムの可観測指数以上のとき、(3.3)式のモデル誤差は零にできるものである。

なお、(3.3)式で式誤差 $v(k)$ を白色と仮定していることに注意されたい。もし、この白色性が仮定できないときには、以下の議論の最小2乗法のアプローチは成立しなくなり、一般化最小2乗法や拡大最小2乗法の適用が必要になる。

このモデルを構成するパラメータは最小2乗法により以下のようにして導出できる。まず、(3.3)式を

$$y(k) = \Theta z(k) \quad (3.4)$$

ただし、

$$\Theta \equiv [A_1, A_2, \dots, A_p, B_0, B_1, \dots, B_p]$$

$$z(k) \equiv \left[ -y^T(k-1), -y^T(k-2), \dots, -y^T(k-p), u^T(k), u^T(k-1), \dots, u^T(k-p) \right]^T$$

と表現するとき、

$$E \left[ \| y(k) - \Theta z(k) \|^2 \right] \rightarrow \min \quad (3.5)$$

ただし、

$E(*)$  : 期待値を表わす  
 $\|v\|$  :  $v$ のノルムを表わす  
 $\min$  : 最小値

を満たす $\Theta$ は、次式により得られる。

$$\hat{\Theta} = \left( \sum_{k=p+1}^N y(k) z^T(k) \right) \left( \sum_{k=p+1}^N z(k) z^T(k) \right)^{-1} \quad (3.6)$$

ただし、

$$\hat{\Theta} \equiv [\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_p, \hat{B}_0, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_p]$$

$M^-$  : 行列 $M$ の一般化逆行列を示す

$\wedge$  : 推定値を表わす。

ここで、

観測時点の数： $n$

ARMAの次数： $p$

とくと、(3.6)式のシグマで和をとる回数は、 $n-p$ 回となる。ARMAモデルのパラメータ行列 $\Theta$ が一意に決まるためには、この回数がベクトルの $z(k)$ の次元以上、すなわち、

$$n-p \geq n_{out} \times p + n_{inp} \times (p+1)$$

ただし、

$n_{out}$  : 出力の次数

$n_{inp}$  : 入力次数

である必要がある。

なお、 $\Theta$ の表現は、(3.6)式以外にもいくつか与えられているので、注意を要する。また、前述のとおり、(3.3)式の式誤差 $v(k)$ が白色でないとき、(3.6)式による表現は偏差を持つことになる。そのときには、一般化最小2乗法や拡大最小2乗法を使用することになる。

(3.6)式の一般化逆行列は、

$$Z \equiv \Lambda^{-1} (\Lambda^{-1} Z \Lambda^{-1})^+ \Lambda^{-1} \quad (3.7)$$

ただし、

$$Z \equiv \sum_{k=p+1}^n z(k) z^T(k)$$

$\Lambda$  :  $\Lambda^{-1} Z \Lambda^{-1}$ の対角項を全て1とするような対角行列

$M^+$  :  $M$ の擬似逆行列で $M$ のSVD分解を

$$M = USV^T$$

としたとき、

$$M^+ = VS^{-1}U^T$$

と定義した。これは、行列の一般化逆行列をとるのに、まず行列を正規化し



てからSVD分解していることに相当する。さらに、これは、次のような意味がある。すなわち、

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{x} \quad (3.8)$$

なる方程式の解として、

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{y} \quad (3.9)$$

を使用すると、これは、

$$\left\| \Lambda^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{x}) \right\|_2^2 \rightarrow \min \quad (3.10.1)$$

を満たす $\mathbf{x}$ のうち、

$$\left\| \Lambda^{-1} \mathbf{x} \right\|_2^2 \rightarrow \min \quad (3.10.2)$$

となるものであることがわかる。(3.10.1)式は重み付きの最小2乗解であることを表わし、(3.10.2)式は重み付きの最小ノルム解であることを表わす。ここで、重みは、各入力、各出力のレベルを正規化するようなものである。

### 3.2 パルス応答列の導出

得られたARMAモデルよりパルス応答列を得る方法はいくつか考えられるが、ここでは、ARMAモデルのパラメータ行列であることの必要十分性を念頭に置いた定式を行う。パルス応答導出式は、どのような方法で定式しても同様となる。

まず、(3.2)式より、

$$\mathbf{y}(k-p) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k-p) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-p) + \mathbf{v}(k-p)$$

$$\mathbf{y}(k-p+1) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k-p+1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-p+1) + \mathbf{v}(k-p+1)$$

$$= \mathbf{H}(\mathbf{F}\mathbf{x}(k-p) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k-p)) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k-p+1) + \mathbf{v}(k-p+1)$$

ただし、 $\mathbf{v}(*)$ ：雑音

などとなり、結局、

$$\begin{bmatrix} y(k-p) \\ y(k-p+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^p \end{bmatrix} x(k-p) + \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ HG & D & \ddots & \vdots \\ HFG & HG & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ HF^{p-1}G & HF^{p-2}G & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-p) \\ u(k-p+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} + v \quad (3.11)$$

ただし、  
v: 雑音

を得る。また、ARMAモデルを

$$\begin{bmatrix} A_p & A_{p-1} & \cdots & A_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-p) \\ y(k-p+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_p & B_{p-1} & \cdots & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-p) \\ u(k-p+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (3.12)$$

ただし、  
v(k): 雑音

と表示する。(3.11)式の両辺の左側から  $[A_p, A_{p-1}, \dots, A_1, I]$  を掛けて(3.12)式を代入すると、結局、

$$\left\{ \begin{bmatrix} B_p & B_{p-1} & \cdots & B_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_p & A_{p-1} & \cdots & A_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ HG & D & \ddots & \vdots \\ HFG & HG & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ HF^{p-1}G & HF^{p-2}G & \cdots & D \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u(k-p) \\ u(k-p+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} = \left( HF^p + \sum_{i=1}^p A_i HF^{p-i} \right) x(k-p) + v \quad (3.13)$$



ただし、  
v: 雑音

を得る。ここで、雑音を無視すると、(3.13)式は、

ある時刻における状態量と、その時刻以降の入力の間の関係

を記述したものである。この両者に相関がないとすると、(3.13)式の両辺の係数行列はともに零となる。これを整理して書くと、

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & & \cdots & & 0 \\ A_1 & I & 0 & & & \\ A_2 & A_1 & I & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_p & A_{p-1} & A_{p-2} & \cdots & I & 0 \\ 0 & A_p & A_{p-1} & A_{p-2} & \cdots & I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & A_p & A_{p-1} & A_{p-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ HG \\ HFG \\ \vdots \\ HF^p G \\ \vdots \\ HF^q G \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

となる。これより、ARMAモデルのパラメータ行列 $\{A_i, B_i\}$ より、パルス応答 $\{HF^i G\}$ が導出できる。なお、この手続きの逆をたどると、逆に(3.14)式が任意の $q$ に対して成立するとき、 $\{A_i, B_i\}$ はARMAモデルのパラメータとなっていることがわかる。提案する同定法はARMAモデルよりパルス応答を導出するのであるが、その際にはこの式を使用することになる。

また、(3.14)式でパルス応答の個数を表わしている $q$ は、パルス応答の張る空間が有限次元のときには無限大まで考慮する必要はない。 $q_m$ 個のパルス応答がその空間を完全に張るとすると、

$$q_m = q \quad (3.15)$$

とすればよい。

なお、

$H = I$  (単位行列)

$B_0 = 0$

$p = 1$

とおくと、ARMAモデルと離散系の状態方程式は一致することになる。このとき、(3.14)式を用いてもたしかに

$$F = A_1$$

$$G = B_1$$

となっていることがわかる。

### 3.3 パルス応答の未知パラメータ微分について

本節で、パルス応答の未知パラメータ微分が陽に書き下せることを示す。さて、(3.2)式の行列F, Gは

$$F = e^{A \Delta t} \quad (3.16.1)$$

$$G = \int_0^{\Delta t} e^{A \tau} d\tau B \quad (3.16.2)$$

ただし、

$\Delta t$ : サンプルング時間間隔

となる。よって、 $e^{A \Delta t}$ のパラメータ微分が解析的に得られれば、パルス応答列 $\{HF^iG\}$ のパラメータ微分も解析的に得られる。いま、未知パラメータを $p$ とおき、これを以下のような問題にすり替えて考える。すなわち、

$$\frac{\partial A}{\partial p}$$

が得られていると仮定し、

$$\frac{\partial e^{A \Delta t}}{\partial p}$$

が陽に定式できること、すなわちパルス応答の未知パラメータ微分が解析的に書き下せること、を示す。この仮定は、第2章の議論で得た、行列Aのパラメータ微分は陽に書き下せるという結論に対応する。

さて、

$$e^{A \Delta t} = \left( e^{A \frac{\Delta t}{n}} \right)^n \quad (3.17)$$

なので、この両辺を  $p$  で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial p} e^{A \Delta t} = \sum_{i=0}^{n-1} e^{A i \tau} \left( \frac{\partial}{\partial p} e^{A \tau} \right) e^{A (\Delta t - (i+1)\tau)} \quad (3.18)$$

ただし、

$$\tau \equiv \frac{\Delta t}{n}$$

となる。ここで、 $n \rightarrow \infty$  の極限をとると、

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} e^{A \tau} = \frac{\partial A}{\partial p} \tau \quad (3.19)$$

に注意して、(3.16)式は、

$$\frac{\partial}{\partial p} e^{A \Delta t} = \int_0^{\Delta t} e^{A \tau} \frac{\partial A}{\partial p} e^{A (\Delta t - \tau)} d\tau \quad (3.20)$$

となる。ここで、行列  $A$  をジョルダン標準形にすることを考える。行列  $A$  の作り方より対角化できないのは、いわゆる剛体モード部分、すなわち固有値ゼロに対応した部分となる。このとき、行列  $A$  は

$$A = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_m & \\ & & & 0 & I \\ & & & & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \quad (3.21)$$

ただし、

$\lambda_i$ : 固有値

$T$ : 固有ベクトルから成る行列

と表わすことができ、これを用いると、

$$e^{A t} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_m t} & \\ & & & I & I t \\ & & & & I \end{bmatrix} T^{-1} \quad (3.22)$$



ただし、

$t$ : 時刻

となる。これを(3.20)式の右辺に代入すると、右辺の積分内部の行列の各要素は、

$$e^{at} t^b \quad (a: \text{実数}, b: \text{整数})$$

といった形になる。このとき、これの $t$ に関する積分は計算することができるので、結局、

$$\frac{\partial e^{At}}{\partial p}$$

は陽に表わすことができる。よって、システム行列 $A$ 、入力行列 $B$ 、観測行列 $H$ のパラメータ微分は陽に表わされると仮定すると、パルス応答の未知パラメータ微分が陽に書き下せることが示された。

### 3.4 未知パラメータの同定アルゴリズムについて

以上の準備を元に未知パラメータを同定する方法を考えた。そのアルゴリズムを図3.1に示す。まず、ランダムに加振されているシステムの入出力を観測する。それを元にARMAモデルを導出し、さらにそれよりパルス応答を求める。数値計算モデルから計算されたパルス応答がそれと一致するように構造パラメータを逐次的に同定していくものである。この方法は、実観測データよりパルス応答列の情報を抽出し、それを計算機内でモデル化されたシステムと比較しているものである。なお、パラメータの更新は、

$$\Delta p = (M^T M)^{-1} M^T \text{vec}(U_0 - U) \quad (3.23)$$

ただし、

$p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_m)^T$ : 未知パラメータを並べたベクトル

$U$ : 数値計算モデルより推定されたパルス応答列の行列

$U_0$ : 実験データより抽出されたパルス応答列

$\text{vec}$ : 行列の列展開を表わす

$$M \equiv \begin{bmatrix} \text{vec}\left(\frac{\partial U}{\partial p_1}\right) & \text{vec}\left(\frac{\partial U}{\partial p_2}\right) & \dots & \text{vec}\left(\frac{\partial U}{\partial p_m}\right) \end{bmatrix}$$

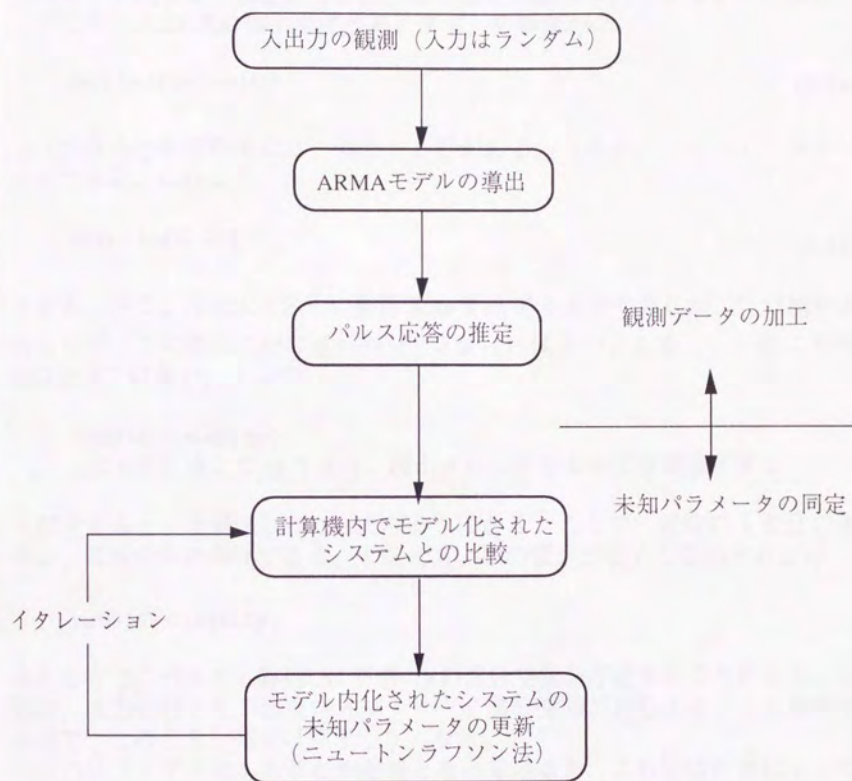


図3.1 同定のアルゴリズム

によって行った。これはいわゆるニュートンラフソン法である。ここで、3.3節の結果を踏まえると、更新量を規定する行列 $M$ 、すなわちパルス応答のパラメータ微分は、数値差分を行うことなく、陽に与えられることになる。

ここで、(3.23)式の導出を述べる。まず、更新量 $\Delta p$ は、

$$\text{vec}(U) + M\Delta p = \text{vec}(U_0) \quad (3.24)$$

を（少なくとも近似的には）満たす必要がある。これが、ニュートンラフソン法である。これより、

$$M\Delta p = \text{vec}(U_0 - U) \quad (3.25)$$

となる。さて、(3.25)式を元に更新量 $\Delta p$ を決定するのであるが、行列 $M$ が正則ならば、この両辺に $M$ の逆行列 $M^{-1}$ を掛ければよい。しかし、一般に行列 $M$ は正方ではない。ここで、

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(\Delta p)$$

(3.25)式を満たす $\Delta p$ のうち、最小ノルム解をもって更新量とする

と仮定すると、更新量は(3.23)式のようになる。ここで、仮定の1番目の条件は、可同定性の条件である。すなわち、この仮定が成立しないときには、

$$\text{rank}(M) < \text{rank}(\Delta p)$$

となるので、パルス応答列 $U$ に不感な $p$ の部分空間が存在することになる。これは、出力に対して不感な未知パラメータ部分空間が存在することを意味するので、このとき、同定は完了しなくなる。

入力ランダムであることが前提となっているが、これは(3.6)式によってARMAモデルを導出するためである。特に白色性を仮定する必要はない。従来の同定法の多くでは、入力は、ランダム白色入力であったり、インパルス、正弦波であったりなどの制約が設けられていた。本手法では、入力に対する制約は緩く、制御など他の目的で加えられている入力を使用して同定を行うことができる。従来の方法で、これに匹敵する方法は、周波数応答の逆フーリエ変換をとる方法である。それと比較して、提案する方法は、完全に時間領域で議論しているので、時変系へも自然に拡張できる利点を有する。



### 3.5 比較する量について

提案する方法は、入出力の実観測データよりパルス応答列の情報を抽出し、それを予想したモデルと比較して、未知パラメータを同定するというものである。パルス応答列、すなわちマルコフパラメータがシステムに関する情報を十分に有していることは広く知られていることである。比較に使用する量としては、

#### (1)パルス応答列

の他、

#### (2)連続系のシステム行列A、観測行列C、入力行列B

#### (3)離散系のシステム行列F、観測行列H、入力行列G

#### (4)行列の集合 $\{CB, CAB, CA^2B, CA^3B, \dots\}$

(連続系のマルコフパラメータ)

#### (5)モード特性量

#### (6)支配方程式を構成する行列

(例えば、質量行列、剛性行列)

#### (7)入出力時系列そのもの

が考えられる。このうち、従来、未知パラメータ同定に利用されてきたのは、(5)、(6)、(7)である。また、(1)より(2)や(5)を得る、(5)と(6)の関係を導く、といったこともよくなされている。

さて、未知パラメータ同定の比較量に使用する場合、(2)、(3)、(6)、(7)はすべての状態量についての情報が必要となる。すなわち、同定実験において全状態量を直接観測しているか、推定している必要がある。さらに、(7)は、(何らかの情報を抽出するのではなく)同定実験時の挙動そのものが比較する量なので、扱うデータ数多くなりがちであり、所要計算量も増大する。

これに対して、(1)、(4)、(5)はすべての状態量についての情報を要求していないが、(4)は特に雑音に対するロバスト性に問題がある。というのも、例えば行列Aに非常に減衰の大きいモードが含まれているとき、そのようなモードは実際の挙動には大きな影響を及ぼさないが、(4)の各行列の値はそれに強く影響される。すなわち実際にはあまり重要ではない部分に関する情報を増幅して比較していることになる。

(5)は従来より多く使用されてきた比較量であり、同定法そのものの中に高域カットのフィルターが組み込まれていると考えることができる方法である。しかし、これを比較量に使用する場合、いくつかの欠点が指摘されている。まずモードの対応をとる必要があるということが挙げられる。これは実観測

データより得られたモードの中にノイズに起因して発生した偽のモードがある場合や、逆にあるモードが得られなかったような場合に問題になる。近接する複数のモードが分離できず、1つのモードとして推定されてしまう場合にも問題となる。また、それに関連してセンサの配置や入力も注意深く決める必要がある。

それと比べて(1)では、比較すべき量の対応は明白であり、モードの対応をとる、といった困難はまぬがれている。同定結果はセンサ配置や入力の影響は受けるという点では同じであるが、センサ、アクチュエータ配置がモード対応の取りやすさなどの制約を受けることなく比較的自由に決定できるという特徴も有する。すなわち、(1)を比較量として使用することは、

- ・ 同定の不安定性がない (cf. (4))
- ・ センサ数が少なく済む (cf. (2)、(3)、(6))
- ・ センサ配置などに比較的鈍感である (cf. (5))
- ・ 扱うデータ量が少ない (cf. (7))
- ・ イタレーションが必要になる (cf. (2)、(3)、(6))
- ・ 同定アルゴリズムが完全に時間領域でのみ議論できる  
(時変系への拡張も可能である)

の特徴を有する。表3.1に各量の比較結果を示す。なお、(7)の特殊な例として、

- ・ 拡張Kalmanフィルターにより同定する
- ・ 入力を正弦波、ステップ波などに限定する

といったことも考えられる。しかし、拡張Kalmanフィルターを用いる場合には、同定の収束性に問題があることが指摘されており、また、後者では、同定試験方法に一定の制約を設けることになるため、ここでは考慮していない。

### 3.6 同定誤差共分散の解析

以上のようなアルゴリズムで同定されるパラメータの誤差を評価する方法を与える。観測雑音の白色性を仮定し、同定誤差の共分散行列の推定値を導出した。以下では、まず、ARMAモデルの導出の誤差の共分散を得る。次にそのARMAのモデル化誤差を推定する方法を考え、さらに、パルス応答列の誤差共分散を求める。最後にパラメータ同定の誤差共分散を評価した。



表 3.1 各抽出量の得失

	(1) パルス 応答	(2) 連続時間 行列	(3) 離散時間 行列	(4) 連続系マル コフ	(5) モード 特性	(6) 支配 方程式	(7) 入出力時 系列
同定の安定性	○	○	○	×	○	○	○
扱うデータ量の少なさ	○	○	○	○	○	○	×
所要センサ数の少なさ	○	×	×	○	○/×	×	○
センサ・アクチュエータ配置制約の緩やかさ	○	—	—	○	×	—	○
時間領域のみで議論できる	○	○	○	○	×	○	○
イタレーション不要性	×	○	○	×	×/○	○	×

### 3.6.1 ARMAモデルを構成する行列 $\Theta$ の推定誤差

まず、(3.6)式のARMAモデルの推定則を

$$\Theta = YZ^{-1} \quad (3.26)$$

ただし、

$$\Theta \equiv (A_1, A_2, \dots, A_p, B_0, B_1, \dots, B_p)$$

$$Y \equiv \sum_{k=p+1}^N y(k) z^T(k)$$

$$Z \equiv \sum_{k=p+1}^N z(k) z^T(k)$$

$$z(k) \equiv (-y^T(k-1), -y^T(k-2), \dots, -y^T(k-p), u^T(k), u^T(k-1), \dots, u^T(k-p))$$

とおく。変数の添え字で、

e: 誤差

0: 真値

なし: 観測値

とする。なお、ここで観測される自由度（モードの数）が、十分に大きいとき、または、 $p$ の値が適切にとられているとき、(3.26)式の $Z$ の一般化逆行列は通常の逆行列に置き換えられる。すなわち、



$$\Theta = YZ^{-1} \quad (3.26)'$$

となる。

さて、

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_0 + \Theta_e, \quad Y = Y_0 + Y_e, \quad Z = Z_0 + Z_e \\ z(k) &= z_0(k) + z_e(k), \quad y(k) = y_0(k) + y_e(k) \\ Y_0 &\equiv \sum_{k=p+1}^N y_0(k) z_0^T(k), \quad Z_0 \equiv \sum_{k=p+1}^N z_0(k) z_0^T(k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

である。ここで、まず、(3.26)'式の場合を考える。このとき、

$$\Theta_0 Z_0 = Y_0 \quad (3.28)$$

の関係が成り立つので、

$$\Theta_e = YZ^{-1} - \Theta_0 Z^{-1} + \Theta_0 Z Z^{-1} \quad (3.29)$$

となる。ここで、高次の誤差項を無視すると、

$$\Theta_e \approx YZ^{-1} - \Theta_0 Z^{-1} \quad (3.30)$$

となる。

また、(3.26)式の場合、すなわち一般化逆行列をとる場合には、以下のようになる。

まず、

$$\Theta_0 = Y_0 Z_0^{-} \quad (3.31)$$

より、

$$\Theta_0 Z_0 = Y_0 + \varepsilon \quad (3.32)$$

ただし、 $\varepsilon : Z_0^{-}$ が真の逆行列でないことに起因した誤差で  $\varepsilon Z_0^{-} = 0$

である。ここで、(3.26)'式のと看、または、(3.26)式でpが十分に大きいときには、 $\varepsilon$ は零とみなせる。

(3.27)、(3.32)式より、

$$\begin{aligned}
& (\Theta - \Theta_e) \left\{ Z - \sum_{k=p+1}^N z(k) z_e^T(k) - \sum_{k=p+1}^N z_e(k) (z(k) - z_e(k))^T \right\} \\
& = Y - \sum_{k=p+1}^N y(k) z_e^T(k) - \sum_{k=p+1}^N y_e(k) (z(k) - z_e(k))^T + \varepsilon
\end{aligned} \quad (3.33)$$

これを変形して、

$$\begin{aligned}
\Theta_e Z = & (\Theta Z - Y - \varepsilon) + \sum_{k=p+1}^N (y(k) - \Theta z(k)) z_e^T(k) + \sum_{k=p+1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k)) (z(k) - z_e(k))^T \\
& + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z(k) z_e^T(k) + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z_e(k) (z(k) - z_e(k))^T
\end{aligned} \quad (3.34)$$

(3.34)式の両辺に $Z^-$ を掛けて、

$$\begin{aligned}
\Theta_e Z Z^- = & (\Theta Z - Y) Z^- - \varepsilon Z^- + \sum_{k=p+1}^N (y(k) - \Theta z(k)) z_e^T(k) Z^- + \sum_{k=p+1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k)) (z(k) - z_e(k))^T Z^- \\
& + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z(k) z_e^T(k) Z^- + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z_e(k) (z(k) - z_e(k))^T Z^-
\end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで右辺第1項は、

$$(\Theta Z - Y) Z^- = (Y Z Z^- - Y) Z^- = Y (Z Z Z^- - Z^-) = 0 \quad (3.36)$$

ただし、一般に一般化逆行列は $Z Z Z^- = Z^-$ を満たすことに注意。

である。高次の誤差項を無視すると、(3.36)式を考え併せ、(3.35)式は、

$$\Theta_e Z Z^- \approx -\varepsilon Z^- + \sum_{k=1}^N (y(k) - \Theta z(k)) z_e^T(k) Z^- + \sum_{k=1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k)) z(k)^T Z^- \quad (3.37)$$

の近似が成立する。

さて、ここで、

$$\Theta_e Z Z^- \approx \Theta_e, \quad \varepsilon Z^- \approx 0 \quad (3.38)$$

のような近似を考える。この近似は、 $Z$ の逆行列が真の逆行列であるとき、すなわち(3.26)'式を扱っているときに成立するものである。また、(3.26)式の $p$ が十分に大きいときには、(3.38)式の第2式は成立する。

以下で、(3.26)式の場合について、この近似の意味を場合分けして考察する。ただし、

Ker : 核空間を表わす  
Im : 写像空間を表わす

を表わすものとする。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &\equiv \{x | Tx = 0\} \\ \text{Im } T &\equiv \{y | y = Tx\} \end{aligned}$$

である。

i)  $\text{Ker } Z^- \approx \text{Ker } Z_0^-$  (すなわち、 $\text{Im } Z^- \approx \text{Im } Z_0^-$ ) のとき

これは、(3.26)式で一般化逆行列をとるとき、「真の自由度」に関するものはすべて考慮し、観測雑音によって生じた「偽りの自由度」に関するものはすべてトランケートする、ことを意味する。このとき、

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Theta &\supseteq \text{Ker } Z^- \\ \text{Ker } \Theta_0 &\supseteq \text{Ker } Z_0^- \end{aligned} \quad (3.39)$$

より、

$$\text{Ker } \Theta_e = \text{Ker} (\Theta - \Theta_0) \supseteq \text{Ker } Z^- \cap \text{Ker } Z_0^- \approx \text{Ker } Z^- \quad (3.40)$$

なので、ある行列Mが存在し、そのMに対して、

$$\Theta_e \approx MZ^- \quad (3.41)$$

が成立する。このとき、一般化逆行列の関係式((3.36)式のただし書き参照。)に注意して、

$$\Theta ZZ^- \approx MZ^- ZZ^- = MZ^- \approx \Theta_e \quad (3.42)$$

となり、前者の式が導ける。後者の式は、

$$\text{Im } \varepsilon Z^- \approx \text{Im } \varepsilon Z_0^- = 0 \quad (3.43)$$



より明らかである。

ii)  $\text{Ker } Z^- \subseteq \text{Ker } Z_0^-$  のとき

これは、(3.26)式で一般化逆行列をとるとき、「真の自由度」に関するものはすべて、考慮しているのみならず、観測雑音によって生じた「偽りの自由度」に関するものの一部まで、トランケートされずに考慮されてしまっている、ことを意味する。

このとき、(3.38)式のひとつめの式は成立している。というのも、このとき、 $\Theta_e$ は、(3.41)式のように表わされるからである。

一方、ふたつめの $\varepsilon$ に関する式は、満たされない。しかし、 $\varepsilon$ は、観測雑音がないときに定義されているものであり、十分小さいことが期待できる。このとき、近似的には、ふたつめの式も満たされているとみなすことができる。

ii)  $\text{Ker } Z^- \supseteq \text{Ker } Z_0^-$  のとき

これは、(3.26)式で一般化逆行列をとるとき、観測雑音によって生じた「偽りの自由度」に関するものはすべてトランケートするのみならず、「真の自由度」に関するものの一部までトランケートしている、ことを意味する。

このとき、(3.38)式のふたつめの式は成立している。というのも、これは、

$$\text{Im } Z^- \subseteq \text{Im } Z_0^- \quad (3.44)$$

を意味するからである。

一方、ひとつめの式は成立しない。しかし、「真」のARMAモデルとして、新たに、「真の自由度」に関するものの一部までトランケートして得られるものを考えとする。そのとき、「真」のARMAモデル $\Theta_0$ に対して、ひとつめの式も成立することになる。ただし、このとき、モデル化誤差は大きくなっている。

さて、(3.38)式の近似を考えると、(3.37)式は、

$$\Theta_e \approx \sum_{k=1}^N (y(k) - \Theta z(k)) z_e^T(k) Z^- + \sum_{k=1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k)) z(k)^T Z^- \quad (3.45)$$

となる。これが、(3.26)式の場合、すなわち一般化逆行列をとる場合の式である。なお、(3.26)'式の場合、すなわち真の逆行列をとる場合には(3.30)式のようになる。以下では、(3.45)式の場合を扱うが、(3.30)式の場合も同様の議論となっている。

さて、行列の列展開を $\text{vec} \cdot$ と表わし、(3.48)式の両辺を列展開すると、クロネッカー積<sup>75)</sup>などを利用して

$$\begin{aligned} \text{vec } \Theta_e &\approx \sum_{k=1}^N \left\{ Z^T \otimes (y(k) - \Theta z(k)) \right\} \text{vec } z_e^T(k) + \sum_{k=1}^N \left\{ Z^T z(k) \otimes I_{n_{\text{out}} \times n_{\text{out}}} \right\} \text{vec } (y_e(k) - \Theta z_e(k)) \\ &= \cdots = \sum_{k=1}^N \left\{ Z^T \otimes (y(k) - \Theta z(k)) - Z^T z(k) \otimes \Theta \right\} z_e(k) + \sum_{k=1}^N \left\{ Z^T z(k) \otimes I_{n_{\text{out}} \times n_{\text{out}}} \right\} y_e(k) \end{aligned} \quad (3.46)$$

さらに、マルコフ過程、および、入力雑音と観測雑音の無相関を仮定すると、

$$\begin{aligned} E(y_e(k_1) y_e^T(k_1)) &= \sigma_y^2 I & E(u_e(k_1) u_e^T(k_1)) &= \sigma_u^2 I \\ E(y_e(k_1) y_e^T(k_2)) &= 0 & E(u_e(k_1) u_e^T(k_2)) &= 0 & \text{if } k_1 \neq k_2 \\ E(u_e(k_1) y_e^T(k_2)) &= 0 & E(y_e(k_1) u_e^T(k_2)) &= 0 & \text{for } \forall k_1, k_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

ただし、

$\sigma_y, \sigma_u$ : それぞれ観測・入力の共分散を表わす

$E(\cdot)$ : 期待値を表わす

となる。これより、ARMAパラメータ推定誤差の共分散行列

$$E(\text{vec } \Theta_e \text{vec } \Theta_e^T) \quad (3.48)$$

は、(3.46), (3.47)式を用いて計算できる。

なお、ARMAモデルをKalmanフィルターを用いて逐次的に推定することもある。サンプリングの個数が十分に大きいときには、(3.48)式の共分散行列のかわりに、このKalmanフィルターを構成するリカッチ方程式の定常値をとることも考えられる。(3.26)式の一般化逆行列が十分注意深くとられていると仮定すると、両者は一致するはずである。

### 3.6.2 ARMAモデルの式誤差

ここで、ARMAのモデル化誤差について考察する。まず、モデルの式誤差を

$$\frac{1}{E\left(\|y_0(k)\|^2\right)} E\left(\left(y_0(k) + \sum_{i=1}^p A_i y_0(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i u_0(k-i)\right) \left(y_0(k) + \sum_{i=1}^p A_i y_0(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i u_0(k-i)\right)^T\right) \quad (3.49)$$

ただし、

$y_0(k)$ : 出力の真値

$u_0(k)$ : 入力 of 真値

と定義する。ここで、入出力の観測より、この誤差の真値を知ることはできない。近似的にモデル化誤差を得る方法を考える。

### i) 数値シミュレーションによる方法

得られたARMAモデルに対して、数値シミュレーションによって真値を発生させ、(3.49)式を計算することが考えられる。

### ii) 実データを用いる方法

入出力の実観測データそのものを(3.49)式に入れて計算することも考えられる。このとき、(3.49)式の結果がゼロにならない要因としては、ARMAモデルの式誤差の他に、観測雑音の影響も挙げられる。

### iii) 実データを元に観測雑音の影響を差し引く方法

入出力の実観測データそのものを(3.49)式に入れて計算するとき、その観測雑音の影響は、

$$\frac{1}{E\left(\|y(k)\|^2\right)} \left(R_{out} + \sum_{i=1}^p A_i R_{out} A_i^T - \sum_{i=0}^p B_i R_{inp} B_i^T\right) \quad (3.50)$$

ただし、

$R_{inp}$ : 入力 of 観測誤差共分散

$R_{out}$ : 出力 of 観測誤差共分散

によって、見積もることができる。(実観測データより得た) (3.49)式、および、(3.50)式の対角項の差の絶対値を集めて、対角に並べた行列を新たに定義すると、その行列はARMAモデルの式誤差を近似的に表わしていると、みなせる。



なお、(3.50)式より、(3.49)式の対角項のほうが小さいとき、このARMAモデルは、観測誤差にまでフィッティングしている、と考えられる。

#### iv) システムを線形近似して観測雑音を軽減する方法

システムが線形と仮定すると、そのシステムの任意の2つの入出力時系列を加え合わせたものは、また、そのシステムの入出力時系列となる。このことを利用し、実観測データの多数の入出力時系列を平均し、(3.49)式に入れることも考えられる。そのとき、観測雑音の影響は軽減される。

ただし、このとき、システムは線形であることが要求される。

### 3.6.3 パルス応答列の推定誤差

まず、(3.14)式のように書かれたパルス応答列の推定を次式のようにおくとする。

$$U = A^{-1}B \quad (3.51)$$

ただし、

$$A \equiv \begin{bmatrix} I & & & & \\ A_1 & I & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ A_{p-1} & \cdots & A_1 & I & \\ A_p & \cdots & \cdots & A_1 & I \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & A_p & \cdots & \cdots & A_1 & I \end{bmatrix} \quad B \equiv \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad U \equiv \begin{bmatrix} J \\ HG \\ \vdots \\ HF^pG \end{bmatrix}$$

前節同様、変数の添え字はそれぞれ、

e: 誤差

0: 真値

なし: 観測値

を意味するものとする。なお、(3.51)式は、観測値を用いて構成されていることに注意をされたい。この式を真値を用いて構成しようとする場合、ARMAモデル化誤差の存在により、この式は等号で結べなくなる。

さて、

$$(B_0 + B_e) = (A_0 + A_e)(U_0 + U_e) \quad (3.52)$$

を変形して、

$$U_e = A^{-1}B_e - A^{-1}A_eU_0 + A^{-1}A_0(A_0^{-1}B_0 - U_0) \quad (3.53)$$

を得る。ここで、

$$A^{-1}A_0 \approx I \quad (3.54)$$

を仮定し、高次の誤差項は省略すると、

$$U_e \approx A^{-1}B_e - A^{-1}A_eU + (A_0^{-1}B_0 - U_0) \quad (3.55)$$

上式を列展開をとると、結局、

$$\text{vec } U_e \approx (I \otimes A^{-1}) \text{vec } B_e - (U^T \otimes A^{-1}) \text{vec } A_e + \text{vec } (A_0^{-1}B_0 - U_0) \quad (3.56)$$

となる。右辺最終項の

$$A_0^{-1}B_0 - U_0 \quad (3.57)$$

は、ARMAモデルの式誤差の存在により、ゼロにならない項である。よって、この部分を前節の式誤差の近似値で置き換えることが考えられる。また、式誤差は、トランケーションによって生じているものであるが、ここで、ARMAのモデル次数 $p$ が十分に大きいと仮定すると、この項を無視できる。すなわち、

$$A_0^{-1}B_0 - U_0 = 0 \quad (3.58)$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned} (\text{vec } U_e)(\text{vec } U_e)^T \approx & \left\{ (I \otimes A^{-1}) \text{vec } B_e - (U^T \otimes A^{-1}) \text{vec } A_e \right\} \left\{ (\text{vec } B_e)^T (I \otimes A^{-T}) - (\text{vec } A_e)^T (U \otimes A^{-T}) \right\} \\ & (3.59) \end{aligned}$$

となる。また、(3.58)式のようにみなせないときには、

$$\begin{aligned} (\text{vec } U_e)(\text{vec } U_e)^T &= \left\{ (I \otimes A^{-1}) \text{vec } B_e - (U^T \otimes A^{-1}) \text{vec } A_e + \text{vec } (A_0^{-1} B_0 - U_0) \right\} \\ &\quad \left\{ (\text{vec } B_e)^T (I \otimes A^{-T}) - (\text{vec } A_e)^T (U \otimes A^{-T}) + \text{vec } (A_0^{-1} B_0 - U_0)^T \right\}^T \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。

ところで、

$$\begin{aligned} E\{(\text{vec } A_e)(\text{vec } A_e)^T\} & E\{(\text{vec } A_e)(\text{vec } B_e)^T\} \\ E\{(\text{vec } B_e)(\text{vec } A_e)^T\} & E\{(\text{vec } B_e)(\text{vec } B_e)^T\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

は、(3.48)式より、得られ、

$$\begin{aligned} \{E(\text{vec } A_e)\} \{ \text{vec } (A_0^{-1} B_0 - U_0) \}^T &= 0 \quad \{E(\text{vec } B_e)\} \{ \text{vec } (A_0^{-1} B_0 - U_0) \}^T = 0 \\ \{ \text{vec } (A_0^{-1} B_0 - U_0) \} \{E(\text{vec } A_e)\}^T &= 0 \quad \{ \text{vec } (A_0^{-1} B_0 - U_0) \} \{E(\text{vec } B_e)\}^T = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

であること、を考え合わせると、パルス応答列の誤差の共分散行列

$$V_{free} = E\{(\text{vec } U_e)(\text{vec } U_e)^T\} \quad (3.63)$$

の推定値は計算できる。

### 3.6.4 未知パラメータの同定誤差

(3.23)式にもあるように、自由応答列の摂動と未知パラメータの摂動の間には、

$$\partial p = (M^T M)^{-1} M^T \text{vec } \partial H \quad (3.64)$$

のような関係がある。これより、未知パラメータの同定誤差の共分散行列は、(3.63)式の  $V_{free}$  を用いて、



$$V = (M^T M)^{-1} M^T V_{free} M (M^T M)^{-1} \quad (3.65)$$

のようになる。

### 3.6.5 同定誤差導出のまとめ

以上見てきたように、未知パラメータの同定誤差の共分散は(3.65)式より導出される。この式の導出をここで再度まとめる。まず、(3.46)、(3.47)、(3.48)式より、(3.61)式の値を計算する。それと、(3.59)または(3.60)式、および(3.61)、(3.62)、(3.63)式を用いて $V_{free}$ が導出される。さらに、これと(3.23)式で定義された行列 $M$ を(3.65)式に代入して、同定誤差共分散 $V$ が得られる。

### 3.6.6 センサ、アクチュエータの配置について

この結果を利用すると、センサ、アクチュエータの配置の善し悪しを議論できる。すなわち、ここで得られる共分散行列のノルムがなるべく小さくなるようにセンサ、アクチュエータを配置すればよいことになる。具体的には、センサ、アクチュエータの配置をいくつか仮定し、それぞれに対し、数値シミュレーションにより同定誤差共分散を計算する。そして、それをお互いに比較することにより、善し悪しを判断することになる。

## 3.7 本章のまとめ

以上、提案する時不変同定について、その概略をまとめた。この方法の特徴は、未知パラメータを同定するために実観測データより抽出するのがパルス応答列である点であり、完全に時間領域で同定が完了するようなアルゴリズムを組むことができた。また、3.6節に示したように、同定誤差の定量的な評価が比較的簡単に定式化された。従来の多くの同定法は同定誤差の定量的な解析を行っておらず、それが、ロバスト制御系を組むときの1つの障害になっていた。提案する方法では、その障害をクリアできる可能性がある。

実観測データより抽出する量として、パルス応答を用いている点については、3.5節で、その妥当性を議論している。ただし、その欠点として、同定アルゴリズムでイタレーションが必要になる点が挙げられる。

時間領域でのみ議論するアルゴリズムであるので、次章に示すように時変系への拡張も容易である。

## 第4章 時変系の同定

前章で時不変系の同定アルゴリズムを提案したが、本章ではそれを時変系に拡張する。まずはじめにARMAモデルのパラメータ行列に時間変化を許すことにより時変系に対応させ、その時変ARMAモデルとパルス応答の関係を導く。次にARMAモデルのパラメータ行列を時間の有限次の多項式と近似することを考え、そのような近似が成立するための十分条件について考察する。また、そのとき、ARMAモデルを最小2乗法に基づき導出する方法を与え、さらに、未知パラメータ同定のアルゴリズムを示す。最後に、前章同様、同定誤差の推定法について述べる。

### 4.1 時変ARMAモデルとパルス応答列の関係

本章では、時変系を扱う。そこで、ARMAモデルが時変系に対応できるように、

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p A_i(k) y(k-i) + \sum_{i=0}^p B_i(k) u(k-i) + v(k) \quad (4.1)$$

ただし、  
 $v(k)$ : 雑音

とおく。前章同様、これを

$$\begin{bmatrix} A_p(k) & A_{p-1}(k) & \cdots & A_1(k) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-p) \\ y(k-p+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_p(k) & B_{p-1}(k) & \cdots & B_0(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-p) \\ u(k-p+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (4.2)$$

と表示する。システムの支配方程式を

$$x(k+1) = \phi(t_k, t_{k+1})x(k) + G(k)u(k) + v_1(k) \quad (4.3)$$

ただし、

$t_k$  : サンプル時刻  $k$  を表わす

$\phi(t_k, t_{k+1})$  : 状態遷移行列

$v_1(k)$  : プロセス雑音

また、観測方程式を

$$y(k) = H(k)x(k) + D(k)u(k) + v_2(k) \quad (4.4)$$

ただし、

$v_2(k)$  : 観測雑音

とおく。(4.3)、(4.4)式より、

$$\begin{bmatrix} y(k-p) \\ y(k-p+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(k-p) \\ H(k-p+1)\phi(t_{k-p}, t_{k-p+1}) \\ \vdots \\ H(k)\phi(t_{k-p}, t_k) \end{bmatrix} x(k-p) + \begin{bmatrix} D(k-p) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi(t_{k-p}, t_{k-p+1}) & D(k-p+1) & 0 & \cdots & 0 \\ \phi(t_{k-p}, t_{k-p+2}) & \phi(t_{k-p+1}, t_{k-p+2}) & D(k-p+2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \phi(t_{k-p}, t_k) & \phi(t_{k-p+1}, t_k) & \phi(t_{k-p+2}, t_k) & \cdots & D(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-p) \\ u(k-p+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} + v \quad (4.5)$$

ただし、

$v$  : 雑音

が得られる。(4.5)式の両辺に左側から  $[A_p(k), A_{p-1}(k), \dots, A_1(k), I]$  を掛けてそれに(4.2)式を代入すると、結局、以下の式を得る。



$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ B_p(k) \ B_{p-1}(k) \ \cdots \ B_0(k) \right] - \left[ A_p(k) \ A_{p-1}(k) \ \cdots \ A_1(k) \ I \right] \begin{bmatrix} D(k-p) & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi(t_{k-p}, t_{k-p+1}) & D(k-p+1) & \cdots & 0 \\ \varphi(t_{k-p}, t_{k-p+2}) & \varphi(t_{k-p+1}, t_{k-p+2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \varphi(t_{k-p}, t_k) & \varphi(t_{k-p+1}, t) & \cdots & D(k) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} u(k-p) \\ u(k-p+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} = \left\{ H(k)\phi(t_{k-p}, t_k) + \sum_{i=1}^p A_i(k)H(k-i)\phi(t_{k-p}, t_{k-i}) \right\} x(k-p) + v \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ただし、  
v : 雑音

ここで、

- ・ 雑音を無視する
- ・ 入力は、それ以前のシステムの状態量とは無相関である

と仮定すると、(4.6)式の両辺はそれぞれ零になるので、

$$\left[ B_p(k) \ B_{p-1}(k) \ \cdots \ B_0(k) \right] = \left[ A_p(k) \ A_{p-1}(k) \ \cdots \ A_1(k) \ I \right] \begin{bmatrix} D(k-p) & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi(t_{k-p}, t_{k-p+1}) & D(k-p+1) & \cdots & 0 \\ \varphi(t_{k-p}, t_{k-p+2}) & \varphi(t_{k-p+1}, t_{k-p+2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \varphi(t_{k-p}, t_k) & \varphi(t_{k-p+1}, t) & \cdots & D(k) \end{bmatrix} \quad (4.7.1)$$

$$H(k)\phi(t_{k-p}, t_k) + \sum_{i=1}^p A_i(k)H(k-i)\phi(t_{k-p}, t_{k-i}) = 0 \quad (4.7.2)$$

となる。ここで、時刻パラメータkを適当にずらすことにより、

$$\begin{bmatrix} B_0(k) \\ B_1(k+1) \\ \vdots \\ B_p(k+p) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & & \cdots & & 0 \\ A_1(k+1) & I & 0 & & & \\ A_2(k+2) & A_1(k+2) & I & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ A_p(k+p) & A_{p-1}(k+p) & \cdots & A_1(k+p) & I & 0 \\ 0 & A_p(k+p+1) & \cdots & A_1(k+p+1) & I & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & A_p(k+q) & A_{p-1}(k+q) & \cdots & A_1(k+q) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(k) \\ \varphi(t_k, t_{k+1}) \\ \varphi(t_k, t_{k+2}) \\ \vdots \\ \varphi(t_k, t_{k+p}) \\ \vdots \\ \varphi(t_k, t_{k+q}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

を得る。これは、時変系において、ARMAモデルとパルス応答列の関係を表わしている。上記の手続きの逆をたどることにより、(4.8)式が任意の $q$ について成立することが、ARMAモデルパラメータ行列の必要十分条件であることがわかる。

## 4.2 時変ARMAモデルの近似

前節で、ARMAモデルのパラメータ行列に時間変化を許したが、この時間変化の仕方は単純ではなく、一般的な定式化がなされにくい。ここでは、ARMAモデルの行列を時間の多項式で近似することを考え、その正当性について議論した。以下では、まず、時変系の状態遷移行列を時間の有限次元多項式で近似できるための条件を考察した。次に、その条件が成立し、かつ、システムの安定性を仮定すると、ARMAモデルの行列を時間の多項式で近似できることを示した。本節の最後に、この近似の意味をより直観的に捉えるため、1次元の時変系に適用した例を載せた。

### 4.2.1 状態遷移行列の近似

以下で、

$$\int_0^{t_f-t_i} \left| e^{A_0(t_f-t_i-t)} \int_0^{t_i+t} \dot{A}(\tau) d\tau \right| dt \leq 1 \quad (4.9)$$

および、

$$\dot{A}(t) \text{ の } t=t_0 \text{ まわりのテイラー展開が } t \in [t_i, t_f] \text{ で絶対収束する} \quad (*)$$

が成立するとき、

状態遷移行列 $\Phi(t_i, t_f)$ は、 $t_i$ の有限次元多項式で近似できる

ことを示す。

まず、 $\Phi_n(t_i, t_f)$ を以下のようにおく。

$$\Phi_n(t_i, t_f) = \left( e^{A_0 \Delta t} + \int_{t_0}^{t_f - \Delta t} \dot{A}(\tau) \Delta t d\tau \right) \cdot \left( e^{A_0 \Delta t} + \int_{t_0}^{t_f - 2\Delta t} \dot{A}(\tau) \Delta t d\tau \right) \cdot \dots \cdot \left( e^{A_0 \Delta t} + \int_{t_0}^{t_f - n\Delta t} \dot{A}(\tau) \Delta t d\tau \right) \quad (4.10)$$

ただし、

$A_0$ : 時刻 $t=t_0$ におけるシステム行列

$\dot{A}$ : システム行列の時間微分

$\Delta t = (t_f - t_i) / n$

ここで、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} e^{A \Delta t} = \dot{A} \Delta t \quad (4.11)$$

に注意すると、 $\Phi_n(t_i, t_f)$ の極限 ( $n \rightarrow \infty$ )は、状態遷移行列 $\Phi(t_i, t_f)$ になる。(4.10)式を展開すると、

$$\Phi_n(t_i, t_f) = e^{A_0(t_f - t_i)} + \sum_{j=1}^n B_{j,n}(t_i, t_f) \quad (4.12)$$

ただし、

$$B_{1,n}(t_i, t_f) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{A_0(n-1-i)\Delta t} \int_{t_0}^{t_i + i\Delta t} \dot{A}(\tau) \Delta t d\tau e^{A_0 i \Delta t}$$

$$B_{j+1,n}(t_i, t_f) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{A_0(n-1-i)\Delta t} \int_{t_0}^{t_i + i\Delta t} \dot{A}(\tau) \Delta t d\tau B_{j,n}(t_i, t_i + i\Delta t)$$

(4.12)式の極限をとると、これもやはり状態遷移行列となり、

$$\Phi(t_i, t_f) = e^{A(t_f - t_i)} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t_i, t_f) \quad (4.13)$$



ただし、

$$B_i(t_i, t_f) = \int_0^{t_f - t_i} e^{A_0(t_f - t_i - \tau)} \int_{t_0}^{t_i + \tau} \dot{A}(\tau) d\tau e^{A_0 \tau} dt$$

$$B_{j+1}(t_j, t_f) = \int_0^{t_f - t_j} e^{A_0(t_f - t_j - \tau)} \int_{t_0}^{t_j + \tau} \dot{A}(\tau) d\tau B_j(t_j, t_i + \tau) dt$$

さて、ここで近似について考える。

まず、(4.12)式の無限級数和は、(4.9)式が成立するとき、有限打ち切り時の残差が0に収束する。さらに、(\*)の記述が成立するとき、すなわち、 $\dot{A}(t)$ が有限次元多項式で近似できるとき、

$$\int_{t_0}^{t_i + t} \dot{A}(\tau) d\tau \quad (4.14)$$

の独立変数を $t_i, t$ とすれば、この式は、 $t_i$ の有限次元多項式で近似できる。このとき、(4.13)式の $B_i(t_i, t_f)$ で独立変数を $t_i, t_f - t_i$ ととると、これは、 $t_i$ の有限次元多項式で近似できることになり、それより、 $B_{j+1}(t_j, t_f)$ も近似できることになる。

これより、結局、(4.9)式、および、(\*) の記述が成立するとき、状態遷移行列 $\Phi(t_i, t_f)$ は、 $t_i$ の有限次元多項式で近似できることが示された。

#### 4.2.2 時変ARMAモデルの係数について

さて、時変システムにおいて、(4.9)式、および、(\*) の記述を仮定すると、状態遷移行列が開始時刻 $t_i$ の有限次元多項式で近似できることがわかった。

ここで、さらに、

入力行列・観測行列が時間の多項式で近似できる (\*\*)

十分大きく $p$ の値が与えられている (\*\*\*)  
ある $q_m$ が存在し、 $q > q_m$ なる任意の $q$ に対して、 $\Phi(t_i, t_{i+q}) \approx 0$

と仮定すると、

$A_i(k) : t_k$ に対して定数

$$B_i(k) : t_k \text{の有限次元多項式} \quad (****)$$

とおけることを示す。

さて、(\*\*)を仮定すると、

$$t_f = (t_f - t_i) + t_i \quad (4.15)$$

なので、独立変数を $t_i, t_f - t_i$ ととると、結局、 $t_i$ から $t_f$ への自由応答は、

(自由応答) = ( $t_f$ における観測行列)

( $t_i$ から $t_f$ への自由応答) ( $t_i$ における観測行列)

より、 $t_i$ の有限次元多項式で近似できる。すなわち、(4.8)式の右辺第2項は、 $t_k$ の有限次元多項式で近似できることになる。

よって、このとき(\*\*\*\*)を仮定し、 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ の係数を適当に合わせれば、任意の $t_k$ について(4.8)式の上位 $p+1$ 行が近似的に成立する。

さらにここで、(\*\*\*\*)を仮定すると、 $B_i(k)$ を $t_k$ の多項式とみなしたときの係数を適当に合わせれば、(4.8)式の残り $q-p-1$ 行も近似的に満たすことができる。

故に、(4.9)式、および、(\*), (\*\*), (\*\*\*)の記述が成立するとき、時変ARMAモデルのパラメータ行列は、(\*\*\*\*)のように近似できる。

#### 4.2.3 1次元システムへの適用例

さて、ここで、上述のような近似がどのようなものであるかをより直観的に把握するため、1次元システムを例にとって考えることにする。

まず、時変系を

$$\dot{x}(t) = (a_0 + a_1 t)x(t) + bu(t) \quad (4.16)$$

ただし、

$x(t)$ : 状態量

$u(t)$ : 入力量

$t$ : 時刻

とおく。この微分方程式を解くと、

$$x(t) = C e^{a_0 t + a_1 t^2} + e^{a_0 t + a_1 t^2} b \int_0^t e^{-[a_0 \tau + a_1 \tau^2]} u(\tau) d\tau \quad (4.17)$$

ただし、

C: 積分定数

となる。よって、(4.16)式のようなシステムの離散時間表現は、

$$x(k) = e^{a_0 \Delta t + a_1 \Delta t^2} x(k-1) + b \int_{k-\Delta t}^{k} e^{-[a_0 \tau + a_1 \tau^2]} d\tau u(k-1) \quad (4.18)$$

となる。さて、

$$C_0 = e^{a_0 \Delta t - \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2} \quad (4.19.1)$$

$$C_1 = e^{a_1 \Delta t} \quad (4.19.2)$$

$$G(k-1) = b \int_{k-\Delta t}^{k} e^{-[a_0 \tau + a_1 \tau^2]} d\tau \quad (4.19.3)$$

とおき、これらを(4.18)式に代入すると、

$$x(k) = C_0 C_1^k x(k-1) + G(k-1) u(k-1) \quad (4.20)$$

これはARMA次数 $p=1$ のARMAモデル表示となっているが、(\*\*\*)の記述は満たしていない。以下で、 $p$ をもっと大きな値にすることにより、(\*\*\*)の記述を近似的に成立する表現を得る。

さて、(4.20)式より、

$$\begin{aligned} x(k) &= C_0 \alpha_1 x(k-1) + C_0 (C_1^k - \alpha_1) x(k-1) + G(k-1) u(k-1) \\ &= C_0 \alpha_1 x(k-1) + C_0^2 C_1^{-1} \alpha_2 x(k-2) + C_0^2 C_1^{-1} \left\{ (C_1^k)^2 - \alpha_1 C_1^k - \alpha_2 \right\} x(k-2) + G(k-1) u(k-1) + C_0 \\ &\quad (C_1^k - \alpha_1) G(k-2) u(k-2) \\ &= \sum_{i=1}^n C_0^i C_1^{-S_i} \alpha_i x(k-i) + C_0^0 C_1^{-S_n} \left\{ (C_1^k)^n - \sum_{i=1}^n \alpha_i (C_1^k)^{n-i} \right\} x(k-n) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n C_0^{-1} C_1^{-S_{i-1}} \left\{ (C_1^k)^{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j (C_1^k)^{i-j} \right\} G(k-i) u(k-i) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ただし、



$$S_i = \sum_{j=1}^i j$$

$\alpha_i$ : 任意の定数

なる関係が導かれる。ところで、このシステムのARMAモデルを

$$x(k) = - \sum_{i=1}^n A_i x(k-i) + \sum_{i=0}^n B_i u(k-i) \quad (4.22)$$

とおく。この両式を較べることにより、例えば、

$$A_i = C_0^i C_1^{-S_i} \alpha_i \quad (i < n \text{ のとき}) \quad (4.23.1)$$

$$A_n = C_0^n C_1^{-S_n} \left\{ (C_1^n)^n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (C_1^n)^{n-i} \right\} \quad (4.23.2)$$

$$B_0 = 0 \quad (4.23.3)$$

$$B_i = C_0^{i-1} C_1^{-S_{i-1}} \left\{ (C_1^{i-1})^{i-1} - \sum_{j=1}^{i-2} \alpha_j (C_1^{i-1})^{i-1-j} \right\} G(k-i) \quad (4.23.4)$$

となる。これを(\*\*\*\*)の記述のように近似することを考える。

さて、ARMAモデルの係数を(4.23)式のようにおいたとき、 $i < n$ なる $A_i$ は定数である。さらに  $\alpha_i$ を適当に選ぶことにより

$$(C_1^n)^n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (C_1^n)^{n-i}$$

が $t_k$ に対して定数とみなせる、もしくは、

$$C_0^n C_1^{-S_n}$$

がほぼゼロとみなせるときには、 $A_n$ もほぼ $t_k$ に対して定数となる。また、

$$(C_1^{i-1})^{i-1} - \sum_{j=1}^{i-2} \alpha_j (C_1^{i-1})^{i-1-j}$$

の $t_k$ についてのテイラー展開が絶対収束するとき、 $B_n$ は $t_k$ の有限次元多項式で近似できることになる。

よって、上述の条件が成立しているとき、ARMAモデルは(\*\*\*\*)の記述のような形で近似できることになる。

なお、以上で見てきたとおり、(\*\*\*\*)のようにARMAモデルを表現すると

ARMAの次数 $p$ は大きくなりがちであることに注意を要する。

### 4.3 時変ARMAモデルの推定

さて、ARMAモデルが(\*\*\*\*)のように近似できる条件を満たしているとする。ここで、(\*\*\*\*)のように近似されたモデルを最小2乗法に基づき得る方法を与える。まず、ARMAモデルのパラメータ行列を

$$A_i(k) = A_i \text{ (constant)} \quad (4.24.1)$$

$$B_i(k) = \sum_{j=0}^q B_{ij} t_k^j \quad (4.24.2)$$

とおく。このとき、次式によって、ARMAモデルを推定する。

$$\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_p & B_{00} & \cdots & B_{p0} & B_{01} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{p1} & \cdots & B_{0r} & \cdots & B_{pr} \end{bmatrix} = \left\{ \sum_k y_k M^T(k) \right\} \left\{ \sum_k M(k) M^T(k) \right\}^{-1} \quad (4.25)$$

ただし、

$$M(k) = \begin{bmatrix} -M_y(k), M_u(k), t_k M_u(k), t_k^2 M_u(k), \dots, t_k^r M_u(k) \end{bmatrix}^T$$

$$M_y(k) = \begin{bmatrix} y^T(k-1), y^T(k-2), \dots, y^T(k-p) \end{bmatrix}^T$$

$$M_u(k) = \begin{bmatrix} u^T(k), u^T(k-1), \dots, u^T(k-p) \end{bmatrix}^T$$

$y(k)$ : 時刻 $t_k$ における観測値

$u(k)$ : 時刻 $t_k$ における入力

$M^{-1}$ : 行列 $M$ の一般化逆行列を示す

一般化逆行列は、時不変系の場合と同様に、

$$Z \equiv \Lambda^{-1} (\Lambda^{-1} Z \Lambda^{-1})^+ \Lambda^{-1} \quad (4.26)$$

ただし、

$\Lambda^{-1}$ :  $\Lambda^{-1} Z \Lambda^{-1}$ の対角項を全て1とするような対角行列

$M^+$ :  $M$ の擬似逆行列で $M$ のSVD分解を

$$M = USV^T$$

としたとき、

$$M^+ = VS^{-1}U^T$$

と定義した。これは、行列の擬似逆行列をとるのに、まず行列を正規化してからSVD分解していることになる。

#### 4.4 未知パラメータの同定アルゴリズムについて

時変系の構造パラメータの同定アルゴリズムを図4.1にまとめる。時不変系の場合の拡張であることがわかる。まず、任意の入力を受けているシステムの入出力を観測することより(4.25)式を用いてARMAモデルを得る。次に、(4.8)式よりパルス応答列を導出し、それを数値計算モデルと比較する。両者が一致するように未知パラメータを決定するというものである。

ここで、時不変系の場合と異なるのは、数値計算モデルのパルス応答列を厳密に書き下すことができない点である。そこで、まず、状態遷移行列を(4.12)式で表わし、さらにシグマを有限打ち切りして近似した。パルス応答の近似はこの状態遷移行列の近似式を用いて導出した。このとき、パルス応答の近似式のパラメータ微分は、時不変系の場合と同様にして陽に書き下せる。すなわち、パルス応答をこのように近似することにより、パルス応答そのもの、および、その未知パラメータ微分は、その近似式がそれぞれ陽に書けることになる。

#### 4.5 同定誤差共分散の解析

同定された未知パラメータの誤差の共分散行列を得る方法について述べる。一定の仮定をおくことにより共分散行列の近似式が得られることを示す。この近似式は時不変系の場合の拡張であり、論理もほとんど類同のものである。

##### 4.5.1 ARMAモデルを構成する行列 $\Theta$ の推定誤差

まず、(4.25)式のARMAモデルの推定則を

$$\Theta = YZ^T \quad (4.27)$$

ただし、



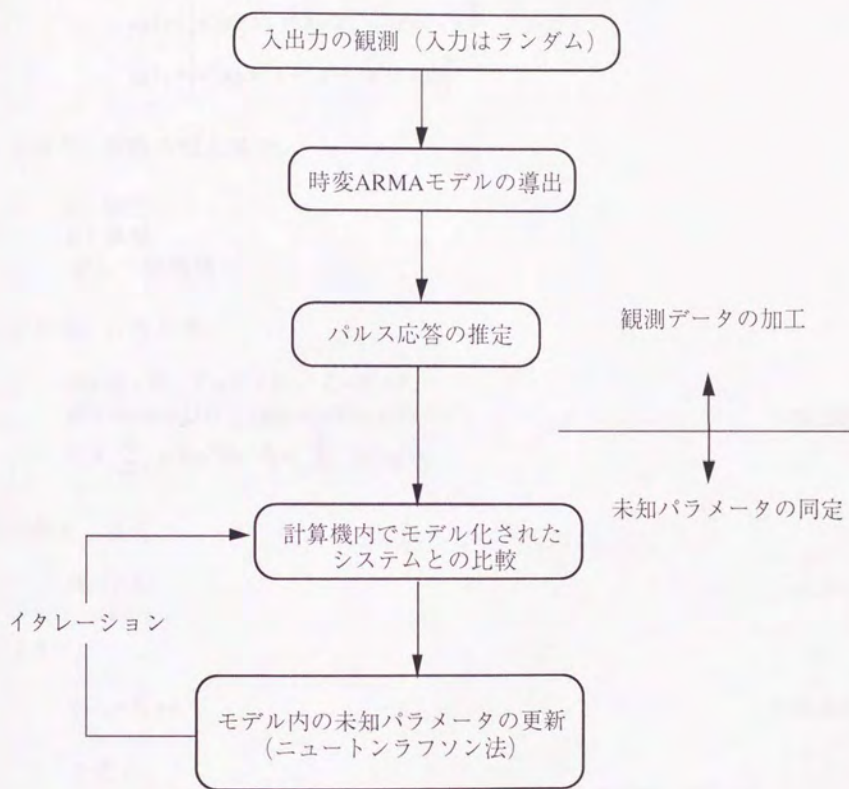


図 4.1 時変系の同定のアルゴリズム

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_p & B_{00} & \cdots & B_{p0} & B_{01} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{p1} & \cdots & B_{0n} & \cdots & B_{pn} \end{bmatrix}$$

$$Y = \sum_k y_k z^T(k)$$

$$Z = \sum_k z(k) z^T(k)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} -z_y(k), z_u(k), t_k z_u(k), t_k^2 z_u(k), \dots, t_k^n z_u(k) \end{bmatrix}^T$$

$$z_y(k) = \begin{bmatrix} y^T(k-1), y^T(k-2), \dots, y^T(k-p) \end{bmatrix}^T$$

$$z_u(k) = \begin{bmatrix} u^T(k), u^T(k-1), \dots, u^T(k-p) \end{bmatrix}^T$$

とおく。変数の添え字で、

e: 誤差  
0: 真値  
なし: 観測値

とする。このとき、

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_0 + \Theta_e & Y &= Y_0 + Y_e & Z &= Z_0 + Z_e \\ z(k) &= z_0(k) + z_e(k) & y(k) &= y_0(k) + y_e(k) \\ Y_0 &\equiv \sum_{k=p+1}^N y_0(k) z_0^T(k) & Z_0 &\equiv \sum_{k=p+1}^N z_0(k) z_0^T(k) \end{aligned} \quad (4.28)$$

である。さて、

$$\Theta_0 = Y_0 Z_0^{-1} \quad (4.29)$$

より、

$$\Theta_0 Z_0 = Y_0 + \varepsilon \quad (4.30)$$

ただし、

$\varepsilon$ :  $Z_0^{-1}$  が真の逆行列でないことに起因した誤差で  $\varepsilon Z_0^{-1} = 0$

(4.30)式より、

$$(\Theta - \Theta_e) \left\{ Z - \sum_{k=p+1}^N z(k) z_e^T(k) - \sum_{k=p+1}^N z_e(k) (z(k) - z_e(k))^T \right\}$$

$$= Y - \sum_{k=p+1}^N y(k)z_e^T(k) - \sum_{k=p+1}^N y_e(k)(z(k) - z_e(k))^T + \varepsilon \quad (4.31)$$

これを变形して、

$$\begin{aligned} \Theta_e Z = & (\Theta Z - Y - \varepsilon) + \sum_{k=p+1}^N (y(k) - \Theta z(k))z_e^T(k) + \sum_{k=p+1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k))(z(k) - z_e(k))^T \\ & + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z(k)z_e^T(k) + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z_e(k)(z(k) - z_e(k))^T \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.32)式の両辺に $Z^T$ を掛けて、

$$\begin{aligned} \Theta_e Z Z^T = & (\Theta Z - Y)Z^T - \varepsilon Z^T + \sum_{k=p+1}^N (y(k) - \Theta z(k))z_e^T(k)Z^T + \sum_{k=p+1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k))(z(k) - z_e(k))^T Z^T \\ & + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z(k)z_e^T(k)Z^T + \sum_{k=p+1}^N \Theta_e z_e(k)(z(k) - z_e(k))^T Z^T \end{aligned} \quad (4.33)$$

ここで、(4.33)式の右辺第1項は

$$(\Theta Z - Y)Z^T = (Y Z Z^T - Y)Z^T = Y(Z Z Z^T - Z^T) = 0$$

ただし、

一般に一般化逆行列は $Z Z Z^T = Z^T$ を満たすことに注意。

となり、また、右辺に存在する高次の誤差項を無視すると、

$$\Theta_e Z Z^T = -\varepsilon Z^T + \sum_{k=p+1}^N (y(k) - \Theta z(k))z_e^T(k)Z^T + \sum_{k=p+1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k))z(k)^T Z^T \quad (4.34)$$

の近似が成立する。また、3.6節同様、

$$\Theta_e Z Z^T = \Theta_e \quad \varepsilon Z^T = 0 \quad (4.35)$$

と近似すると、(4.34)式は、

$$\Theta_e = \sum_{k=p+1}^N (y(k) - \Theta z(k))z_e^T(k)Z^T + \sum_{k=p+1}^N (y_e(k) - \Theta z_e(k))z(k)^T Z^T \quad (4.36)$$

となる。(4.27)式で、一般化逆行列をとっている部分を真の逆行列においたとき、(4.35)式の各式の両辺は等号で結べることになる。

さて、行列の列展開を $\text{vec} \cdot$ と表わし、(4.36)式の両辺を列展開すると、



$$\begin{aligned}
\text{vec } \Theta_e &= \sum_{k=p+1}^N \left\{ Z^T \otimes (y(k) - \Theta z(k)) \right\} \text{vec } z_e^T(k) + \sum_{k=p+1}^N \left\{ Z^T z(k) \otimes I_{n_{\text{out}} \times n_{\text{out}}} \right\} \text{vec } (y_e(k) - \Theta z_e(k)) \\
&= \cdots = \sum_{k=p+1}^N \left\{ Z^T \otimes (y(k) - \Theta z(k)) - Z^T z(k) \otimes \Theta \right\} z_e(k) + \sum_{k=p+1}^N \left\{ Z^T z(k) \otimes I_{n_{\text{out}} \times n_{\text{out}}} \right\} y_e(k)
\end{aligned} \quad (4.37)$$

さらに、マルコフ過程、および、入力雑音と観測雑音の無相関を仮定すると、

$$\begin{aligned}
E(y_e(k_1) y_e^T(k_1)) &= \sigma_y^2 I & E(u_e(k_1) u_e^T(k_1)) &= \sigma_u^2 I \\
E(y_e(k_1) y_e^T(k_2)) &= 0 & E(u_e(k_1) u_e^T(k_2)) &= 0 \quad \text{if } k_1 \neq k_2 \\
E(u_e(k_1) y_e^T(k_2)) &= 0 & E(y_e(k_1) u_e^T(k_2)) &= 0 \quad \text{for } \forall k_1, k_2
\end{aligned} \quad (4.38)$$

ただし、

$\sigma_y, \sigma_u$  : それぞれ観測・入力の共分散を表わす

$E(\cdot)$  : 期待値を表わす

となる。これより、ARMAパラメータ推定誤差の共分散行列

$$E\left(\text{vec } \Theta_e \left(\text{vec } \Theta_e\right)^T\right) \quad (4.39)$$

は、(4.37), (4.38)式を用いて計算できる。

#### 4.5.2 パルス応答列の推定誤差

まず、パルス応答列の推定を次式により行うとする。

$$U(k) = A^{-1}(k) B(k) \quad (4.40)$$

ただし、

$$B(k) \equiv \begin{bmatrix} B_0(k) \\ B_1(k+1) \\ \vdots \\ B_p(k+p) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad U(k) \equiv \begin{bmatrix} \varphi(t_k, t_k) \\ \varphi(t_k, t_{k+1}) \\ \vdots \\ \varphi(t_k, t_{k+q}) \end{bmatrix}$$

$$A(k) \equiv \begin{bmatrix} I & & & & \\ A_1(k+1) & I & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ A_{p-1}(k+p-1) & \cdots & A_1(k+p-1) & I & \\ A_p(k+p) & \cdots & \cdots & A_1(k+p) & I \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & A_p(k+q) & \cdots & \cdots A_1(k+q) I \end{bmatrix}$$

ここで変数の添え字はそれぞれ、

e: 誤差  
0: 真値  
なし: 観測値

を意味するものとする。このとき、

$$(B_0(k) + B_e(k)) = (A_0(k) + A_e(k)) (U_0(k) + U_e(k)) \quad (4.41)$$

を変形して、

$$U_e(k) = A^{-1}(k)B_e(k) - A^{-1}(k)A_e(k)U_0(k) + A^{-1}(k)A_0(k)(A_0^{-1}(k)B_0(k) - U_0(k)) \quad (4.42)$$

を得る。ここで、

$$A^{-1}(k)A_0(k) \approx I \quad (4.43)$$

を仮定し、高次の誤差項は省略すると、

$$U_e(k) \approx A^{-1}(k)B_e(k) - A^{-1}(k)A_e(k)U_0(k) + (A_0^{-1}(k)B_0(k) - U_0(k)) \quad (4.44)$$

上式を列展開すると、

$$\text{vec } U_e(k) \approx (I \otimes A^{-1}(k)) \text{vec } B_e(k) - (U^T(k) \otimes A^{-1}(k)) \text{vec } A_e(k) + \text{vec } (A_0^{-1}(k)B_0(k) - U_0(k)) \quad (4.45)$$

となる。

ここで、(4.45)式の右辺の最終項に関係して

$$\left( \text{vec} \left( A_0^{-1}(k) B_0(k) - U_0(k) \right) \right) \left( \text{vec} \left( A_0^{-1}(k) B_0(k) - U_0(k) \right) \right)^T \quad (4.46)$$

について考察する。この式の計算は真値を必要とするので、実際には行うことはできない。ここでは、時不変系の場合と同様に、3.6.2節のようにして近似値を得るものとする。

さて、ここで、

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left( \text{vec} A_e(k) \right) \left( \text{vec} A_e(k) \right)^T \right\} \\ & E \left\{ \left( \text{vec} A_e(k) \right) \left( \text{vec} B_e(k) \right)^T \right\} \\ & E \left\{ \left( \text{vec} B_e(k) \right) \left( \text{vec} A_e(k) \right)^T \right\} \\ & E \left\{ \left( \text{vec} B_e(k) \right) \left( \text{vec} B_e(k) \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

は、(4.39)式より得られること、および、

$$\begin{aligned} & \left\{ E \left( \text{vec} A_e(k) \right) \right\} \left\{ \text{vec} \left( A_0^{-1}(k) B_0(k) - U_0(k) \right) \right\}^T = 0 \\ & \left\{ E \left( \text{vec} B_e(k) \right) \right\} \left\{ \text{vec} \left( A_0^{-1}(k) B_0(k) - U_0(k) \right) \right\}^T = 0 \\ & \left\{ \text{vec} \left( A_0^{-1}(k) B_0(k) - U_0(k) \right) \right\} \left\{ E \left( \text{vec} A_e(k) \right) \right\}^T = 0 \\ & \left\{ \text{vec} \left( A_0^{-1}(k) B_0(k) - U_0(k) \right) \right\} \left\{ E \left( \text{vec} B_e(k) \right) \right\}^T = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

であること、を考え合わせると、パルス応答列の誤差の共分散行列

$$V_{rec}(k) = E \left\{ \left( \text{vec} U_e(k) \right) \left( \text{vec} U_e(k) \right)^T \right\} \quad (4.49)$$

の推定値は計算できる。



### 4.5.3 未知パラメータの同定誤差

パルス応答列の摂動と未知パラメータの摂動の間には、

$$\partial p(k) = \left( M^T(k) M(k) \right)^{-1} M^T(k) \text{vec } \partial H(k) \quad (4.50)$$

ただし、

$$M(k) \equiv \left[ \text{vec } \frac{\partial H}{\partial p_1}, \text{vec } \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \text{vec } \frac{\partial H}{\partial p_r} \right]_{t=t_k}$$

のような関係がある。これより、未知パラメータの同定誤差の共分散行列は、(4.49)式の  $V_{\text{free}}(k)$  を用いて、

$$V(k) = \left( M^T(k) M(k) \right)^{-1} M^T(k) V_{\text{free}}(k) M(k) \left( M^T(k) M(k) \right)^{-1} \quad (4.51)$$

のようになる。

## 4.6 本章のまとめ

以上、提案する時変系同定についてまとめた。まず、時変ARMAモデルのパラメータ行列が時刻の多項式近似できるための十分条件を導出し、それを利用した同定法を提案した。この同定法は、時不変系の場合の拡張になっている。従来の時変系の研究では、適応制御の分野のようにシステムの特性を逐次的に求めることにより時変に対応させているケースが主であったが、ここで述べた方法は時間変化そのものを陽に取り込んでいるものである。

## 第5章 数値計算例

以上で述べてきた同定法を本章において数値シミュレーションにより検証する。シミュレーションに使用したモデルは両端自由の梁であり、その諸元はM3SII型と呼ばれているロケットをモデル化したものである。以下、5.2節で時不変系の同定例が示される。そこでは、ARMAモデルの導出、およびその表現精度、またパルス応答列の推定精度を議論した後、未知パラメータ同定の結果例を示す。また、誤差の見積りにについても言及する。次に5.3節で時変系の同定例を示す。ここでは、状態遷移行列の近似表現やそれに基づくARMAモデルの近似の精度について触れた後、同定結果例を載せる。提案する方法は、時不変系の同定の場合、従来のモード特性を利用した方法と直接的な比較ができる。5.4節ではその比較を行った。用いた方法は、ERAによってモード特性を同定した後、Foxら<sup>40)</sup>の方法を一般の場合に拡張した方法を利用して未知パラメータの同定を行うというものである。まず、従来の方法を改良した部分を中心にアルゴリズムを概説した後、同定例を示した。なお、提案する方法の同定誤差との比較は、シミュレーション結果を比べることにより行った。というのも、従来の方法では誤差を定量的に評価する指数は与えられておらず、ここでもそういった指数の導入は行っていないからである。

以上、述べたように、5.2節以降では、両端自由の梁を扱っているが、これは、飛翔中のロケットのデータを用いた同定を念頭においている。しかし、飛翔前のロケットを地上で振動試験することも考えられる。このとき、ロケットは宙に浮かんでいることはできないので、何らかの形で支持する必要がある。すると、ロケットを支持する設備が振動に影響を与えることになる。このようなことを踏まえ、本格的な議論の前に、5.1節において、支持体などの周辺のシステムが、供試体の同定に影響を与える場合について、簡単な検討を行う。簡単のため、5.1節の検討は、無次元化したシステムを用いて行っている。

なお、各図で、検討の詳細は本文を参照されたい。

### 5.1 周辺のシステムが同定に影響を与える場合について

同定に用いる観測データは、そのシステムを実オペレーション時と同一環境において、行うべきであるが、必ずしも、それが可能でないときがある。



例えば、飛翔中のロケットの特性を地上試験結果より同定する場合がそれにあたる。このときには、重力環境もさることながら、ロケットを支持している設備の影響が無視できなくなる。すなわち、そういった試験から同定されたモード特性や、質量行列、剛性行列は、いわば、供試体・支持体連結系のものであり、これを直接、供試体単体時の解析に用いることはできない。そのような場合、本論文で行っているように、物理的な量を同定することが望まれる。

ここで、供試体・支持体連結系による同定の例として、図5.1に示すような系を考えた。これは、発射塔に連結したロケットの、段間継ぎ手の剛性、減衰係数を同定する問題をモデル化したものである。ここで、簡単のため、各量は無次元化されている。検討の条件は、

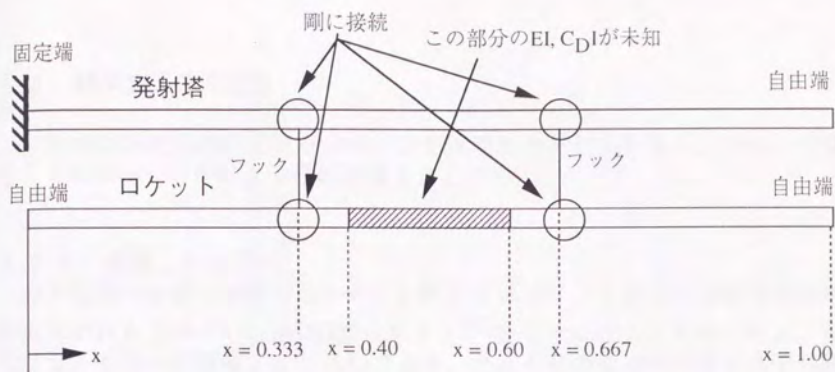
センサ	: 2 個 (ロケット側の $x=0.90, 1.00$ ) (加速度センサ)
アクチュエータ	: 2 個 (ロケット側の $x=0.90, 1.00$ ) (力を加える)
サンプリング時間間隔	: 0.01
観測時間	: 100
ARMA次数 $p$	: 30
パルス応答の数	: 30
打ち切りスレッショルド	: $10^{-3}$
雑音	: なし

とした。ここで、打ち切りスレッショルドとは、(3.6)式の一般化逆行列をとるときに関係する量で、詳細は、後に5.2節の(5.6)式にて定義される。

また、このシステムの挙動の「真値」は、ロケット、発射塔がともに40個のノードを持つスプラインでモデル化したものより得た。同定アルゴリズムが内部で参照する数値計算モデルは、ロケット、発射塔とも20個のノードを持つスプラインで記述した。このように、「真値」を発生させるモデルと、同定アルゴリズムが内部で使用するモデルを異なるものにしたのは、同定アルゴリズムにモデル化誤差の影響を加えるためである。

図5.2に同定結果の例を示す。同定は比較的正確であったことがわかる。この同定結果を用いれば、ロケット単体時の挙動を把握することができる。なお、供試体と支持体との間の干渉力を直接観測、もしくは推定できる場合には、供試体単体モデルを用いて同定アルゴリズムを構成することができる。





☆EI, CDI,  $\rho$  は、ロケット、発射塔とも一様で

$$EI = 1.0$$

$$CDI = 1.0 \times 10^{-2}$$

$$\rho = 1.0$$

(いずれも無次元量)とした。

図 5.1 簡略化されたロケット／発射塔系

(同定値) / (真値)

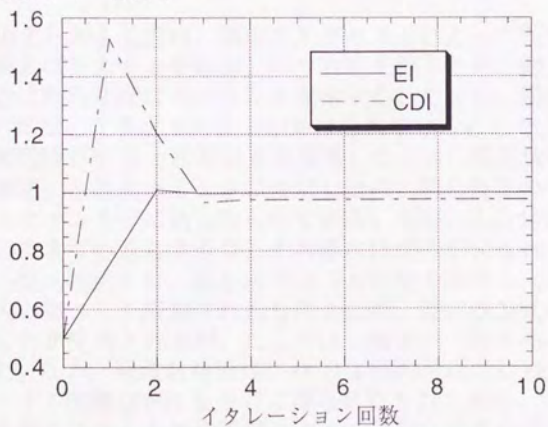


図 5.2 ロケット／発射塔系の同定例

## 5.2 時不変系の同定例

本節で時不変系の同定例を示す。まず使用したモデルを示し、つづいて数値シミュレーションによる検討結果をまとめる。

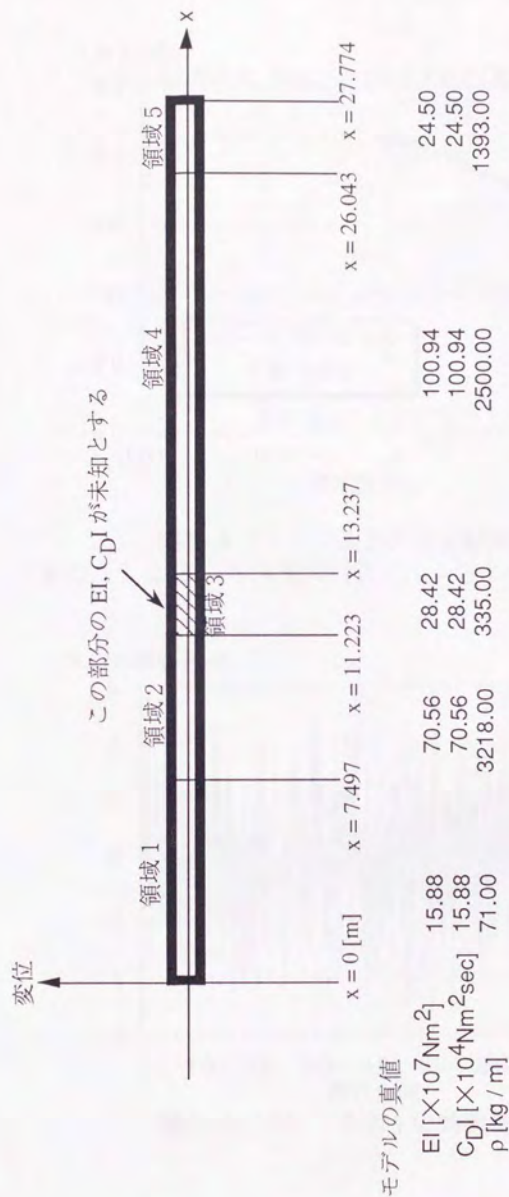
### 5.2.1 使用したモデル

時不変系の同定で使用したモデルを図5.3に示す。これは文部省宇宙科学研究所が打ち上げているM3SII型ロケット<sup>76)</sup>をモデル化したものである。全体は大きく5つの領域に分けられており、それぞれの領域内ではそれぞれ剛性、減衰係数、線密度は一定である。1/2段段間継ぎ手に相当する部分である真ん中の領域で、剛性と減衰係数が未知とする。

さて、このようなモデルの運動の真値は解析的には得られない。ここでは、数値的に得ることを考えた。具体的には、このビームの変位分布を、2章で述べたように70個の等間隔のノードを設定してスプライン関数近似し、そのモデルが生成する運動を「真値」とした。「実験値」としてはこれに観測雑音としてランダムな値を加えたものを使用した。ランダムな値として、ここでは擬似的な一様乱数を使用した。具体的には、使用した計算機(FACOM M770/10)の内部ルーチンである、「科学用サブルーチンライブラリSSL II」<sup>77)</sup>の一様乱数を発生するサブルーチンである、RANU2()を使用している。

システムに加えられる入力、同定アルゴリズムにとって任意であるとした。これは、例えばシステムを制御しつつ同定を行うとき、同定アルゴリズム側が制御入力に制約を設けないことを意味する。ただし、観測のサンプリング時間間隔と同期して0次ホールドがかけられているとした。図5.4にサンプリング時間間隔が0.01秒のときの使用した入力の周波数特性を示す。これは、「実験値」を生成するときを使用したのと同じ性質の一様乱数を1次の高域カットフィルターに通したものである。なお、入力は時々刻々観測、もしくは推定、できているとするが、その値には誤差が含まれていると仮定した。誤差は一様乱数状とし、図5.4のような性質を有する入力に誤差を加えたものが、入力値として観測されるものとした。後に(5.2)式によって、雑音レベルなるものが定義されるが、ここでは、雑音レベル5%の雑音の周波数特性も示した。なお、周波数特性は、0.01秒の周期で8192点サンプリングし、高速フーリエ変換(FFT)をかけて得られたものである。

以上は真値を発生させるための数値シミュレーション用のモデルの話であり、いわば、同定法の外側の問題である。このほか、同定法の内部でも、「実験値」と比較するために使用するモデルが必要になる。こちらはビームに5



★両端自由の梁である。

図 5.3 使用したモデル



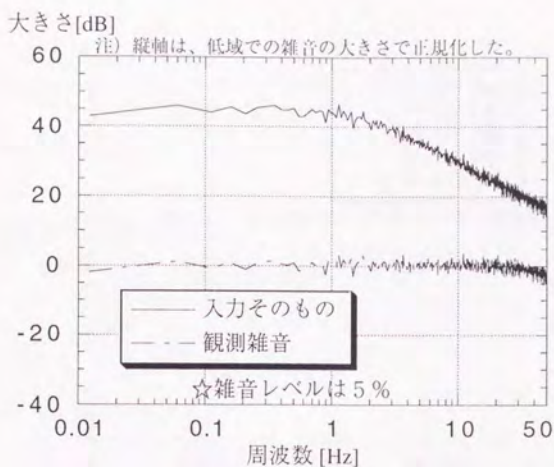


図 5.4 (1) 入力の周波数特性  
(後に、5.2.6、5.4 節で「入力 1」として参照される)

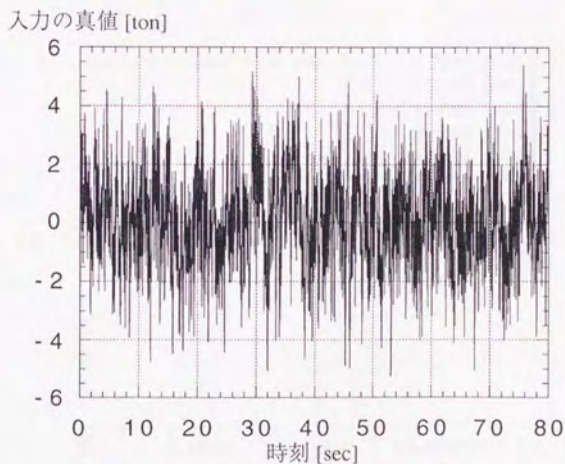


図 5.4 (2) 入力 1 の時間履歴

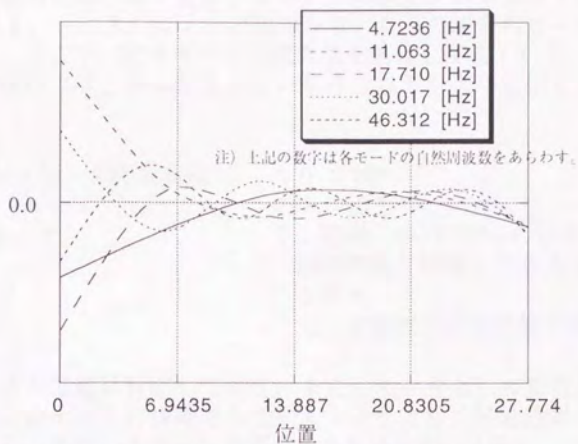


図 5.5 (1) モード形状 (ノード数: 70)

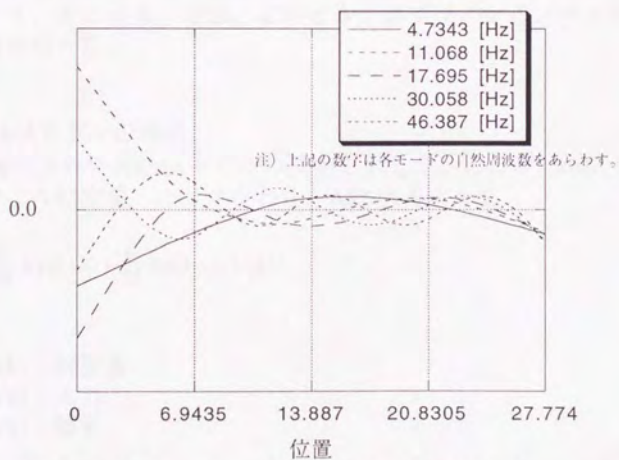


図 5.5 (2) モード形状 (ノード数: 50)

0個の等間隔ノードを設定したスプラインで記述した。このように「真値」を発生させるモデルと同定法内部で使用するモデルを異なるものとして検討を行った。これは同定法内部で使用するモデルに誤差がある場合を想定している。図5.5(1)～(2)にノード数が50、70の場合のビームの固有モードを示した。ここで、固有モードは減衰項を無視して得ている。

なお、以下の検討では、特に記述しない限り、以下のような仮定をおいている。

観測のサンプリング時間間隔	: 0.01秒
観測期間	: 10.0秒
アクチュエータ	: 1箇所 (x=27.773mの位置) 観測周期と同期して0次ホールド
センサ	: 1箇所 センサ設置点の加速度を観測

入力的位置はノズル位置に対応しており、また、センサとして加速度計を選んだのは、現在、ロケットに搭載されているセンサとして加速度計が一般的であることによる。また、入力は、力が入力されるものとした。

また、図5.6に領域3の剛性が各モードの自然周波数に与える影響を示した。これは、いま、未知と仮定している部分が全体の運動に与える影響の程度を示唆しているものである。図より、1次モードが最も大きく影響を受けること、また、剛性の値が50%変動しても、自然周波数は高々10%程度しか変わらないこと、がわかる。なお、このとき、スプラインのノード数は70個として計算を行った。

## 5.2.2 ARMAモデルの導出

図5.7に推定されたARMAモデルの誤差を示した。ここでARMAモデルの誤差は以下のように定義した。すなわち、ARMAモデルを

$$y(k) = -\sum_{i=1}^p A_i y(k-i) + \sum_{i=0}^p B_i u(k-i) + v(k) \quad (5.1)$$

ただし、

$y(k)$ : 観測量

$u(k)$ : 入力

$v(k)$ : 雑音

のように記述したとき、誤差 $e$ は、



(自然周波数) / (真の自然周波数)

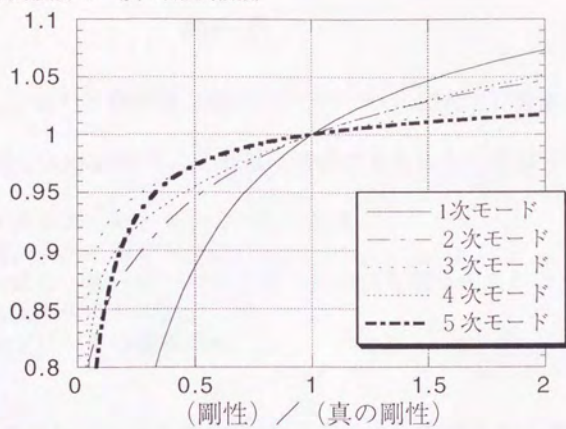


図 5.6 領域 3 の剛性の変化に対する各モードの自然周波数の変化

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{E\left\|\mathbf{y}(k) + \sum_{i=1}^p A_i \mathbf{y}(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i \mathbf{u}(k-i)\right\|^2}{E\{\|\mathbf{y}(k)\|^2\}}} \quad (5.2)$$

ただし、 $E(\cdot)$ ：期待値（時刻パラメータ $k$ に関して）を意味する

とした。さて、ARMAモデルの誤差に関係するものとしては、

- ・アクチュエータ、センサの数、配置
- ・観測、入力雑音レベル
- ・(3.6)式の一般化逆行列をとるときの打ち切りのスレッシュホールド $\varepsilon$
- ・ARMAモデルの次数 $p$
- ・サンプリング時間間隔 $\Delta t$

が考えられる。

打ち切りのスレッシュホールド $\varepsilon$ は、以下のように定義した。まず、(3.6)式の行列 $Z$ の一般化逆行列のとり方をもう一度まとめる。行列 $M$ を

$$M \equiv \Lambda^{-1} Z \Lambda^{-1} \quad (5.3)$$

ただし、

$\Lambda$ ： $\Lambda^{-1} Z \Lambda^{-1}$ の対角項を全て1とするような対角行列

とおき、そのSVD分解を

$$M = U S V^T \quad (5.4)$$

のようにおく。このとき、行列 $Z$ の一般化逆行列を

$$Z^{-} \equiv \Lambda^{-1} V S^{-1} U^T \Lambda^{-1} \quad (5.5)$$

で定義した。ここで、(5.4)式で行列 $M$ のSVD分解をとるとき、本来、対角行列 $S$ は、すべての非零要素を集めているものである。しかし、実際には、観測雑音や数値計算誤差などの要因によって本来ゼロである特異値が値を持つことがあるので、そのように行列 $S$ をとると、(5.5)式の誤差が大きくなることもある。よって、(5.4)式で、行列 $S$ を構成するとき、すべての非零要素を集めるのではなく、ある一定の値以上のものを集める、とするのが普通である。この打ち切りに関して通常何らかのスレッシュホールドが定義される。こ

では、スレッショルド $\varepsilon$ を以下のように定義した。すなわち、行列 $S$ の対角項を $\sigma$ とおくとき、

$$\sigma^2 < \varepsilon \sigma_{\max}^2 \quad (5.6)$$

ただし、

$\sigma_{\max}$  : 行列 $S$ の対角項のうち、その絶対値が最大のもの

なる $\sigma$ は、零に近いとして打ち切ることとした。

なお、ここでは、行列 $Z$ の正則性は仮定していないが、正則になることもあり得る。行列 $Z$ が正則になるのは、(3.7)式からもわかるように、ベクトル $z(k)$ の集合が全空間を張るときである。これは、

$$m_{\text{inp}} \geq n_{\text{inp}}$$

現在の入力とは過去 $p$ 個のサンプリング時刻の入力では定まらない

$$r_{\text{out}} \geq n_{\text{out}} \times p$$

ただし、

$m_{\text{inp}}$  : 入力の自由度

$n_{\text{inp}}$  : 入力の数

$r_{\text{out}}$  : システムの自由度のうち、観測される自由度の数

$n_{\text{out}}$  : 出力の数

$p$  : ARMAモデルの次数

と言い換えることができる。ここで第1式は、入力をその自由度分だけ定義すればよい。また、第2の関係は、十分広い入力周波数帯域を仮定すれば、システムに関係なく成立させることができる。第3式の $r_{\text{out}}$ は、システムとセンサ配置によって決定されるものであり、その上限はシステムの状態量の自由度である。センサが複数のとき、ARMAモデルの次数 $p$ をどのように設定しても第3式の両辺を等しくできないことがある。このとき、第3式を成立させると、ARMAモデルはシステムの本来の自由度をトランケートしていることになる。よって、行列 $Z$ に正則性の条件を課すると、 $p$ は小さめにとる必要があるので、ARMAモデルの表現精度が悪化することがある。

さて、ARMAモデル誤差の検討であるが、ここでは簡単のため、アクチュエータの数は1個のみとし、前節で記したように  $x=27.773m$  の位置で、力を入力するものとした。センサも加速度計が1個だけと仮定した。図5.7の各図でARMAモデルの誤差をプロットした。これらの図は、同定のシミュレーションを、センサ位置を梁の全長にわたって変えながら、行うことにより得た。各図で横軸はセンサ位置であり、縦軸はARMA誤差である。



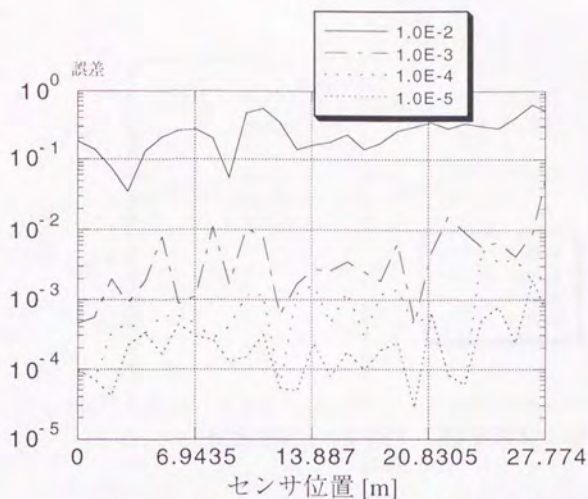


図 5.7 (1) センサ位置によるARMA誤差  
打ち切りスレッショルドの影響 (雑音なし)

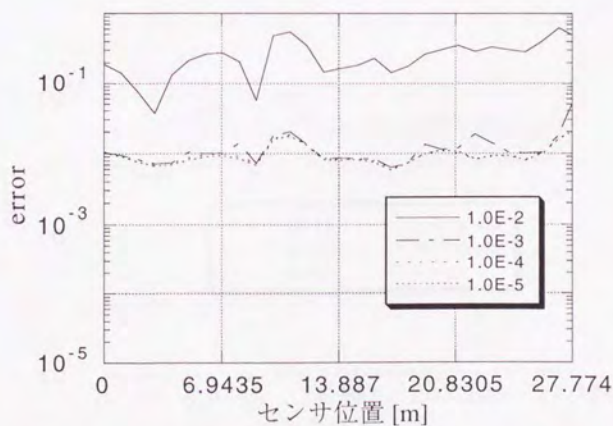


図 5.7 (2) センサ位置によるARMA誤差  
打ち切りスレッショルドの影響 (雑音 5%)

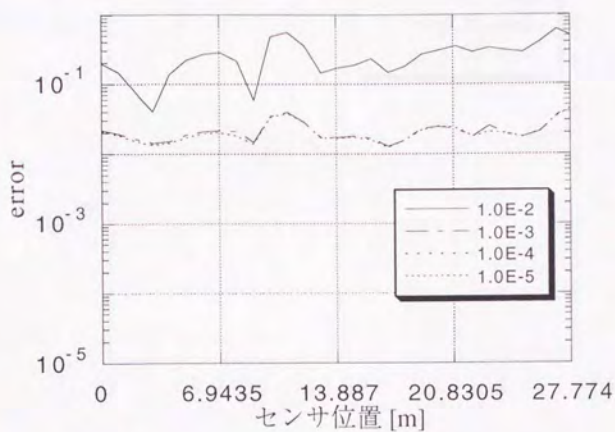


図 5.7 (3) センサ位置によるARMA誤差  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音10%)

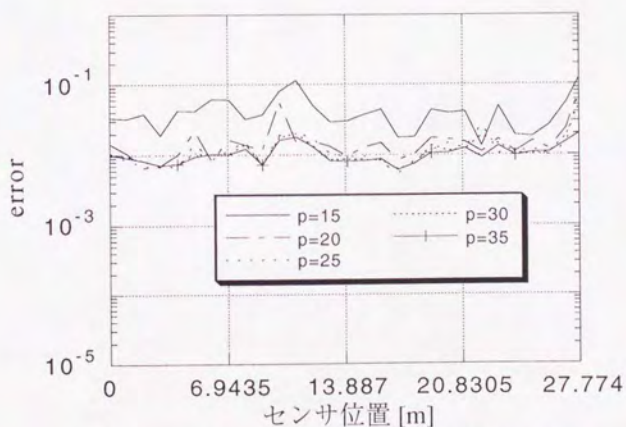


図 5.7 (4) センサ位置によるARMA誤差  
ARMA次数の影響 (雑音5%、スレッシュホールド $10^{-3}$ )

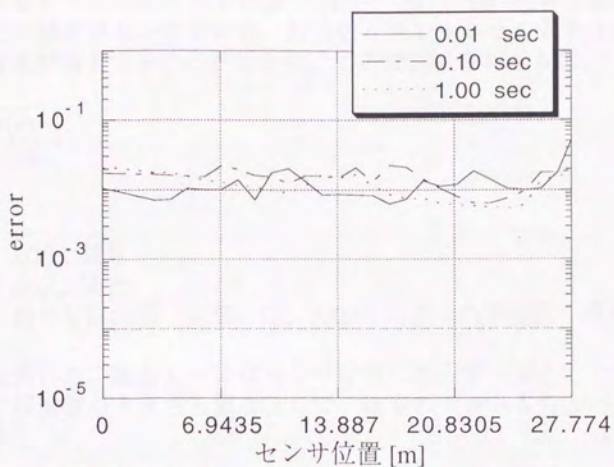


図 5.7 (5) センサ位置によるARMA誤差  
サンプリング時間間隔の影響  
(雑音 5 %、スレッシュホールド  $10^{-3}$ )



まず、図5.7 (1) には、観測・入力雑音レベルが信号レベルの0%のとき、打ち切りスレッショルドが $10^{-2}$ 、 $10^{-3}$ 、 $10^{-4}$ 、 $10^{-5}$ の各場合のARMA誤差を示した。雑音がないときには、打ち切りスレッショルドを小さくすればとるほど精度が向上することがわかる。ここで、雑音レベルは、

$$\sqrt{\frac{E\{e^2(k)\}}{E\{x^2(k)\}}} \quad (5.7)$$

ただし、

$x(k)$ : 信号

$e(k)$ : 雑音

$E(*)$ : 期待値 (実際には、1000サンプルの平均値を用いた。)

によって定義した。雑音レベルはセンサ位置によらず一定としたが、センサ位置により観測値の大きさも異なるので、雑音の大きさもちがったものとなる。これは、

- ・ センサのフルレンジに対して一定である
- ・ 場所により、信号の大きさに合わせてセンサをこまめに変更する

といった仮定をモデル化したものである。また、雑音レベルは、センサ出力値の観測と、アクチュエータ入力値の観測の両方で同じとした。

また、図5.7 (2) にはこの雑音レベルが5%のとき、図5.7 (3) には10%のときの打ち切りスレッショルドに対するARMA誤差を示した。この3つの図を比較することにより、以下のことがわかる。すなわち、

- ・ ある一定のスレッショルド以下になると、精度はあまり向上しない
- ・ その傾向は、雑音レベルが大きくなるほど顕著である
- ・ スレッショルドを小さくすればとるほど精度が上がる

ことがわかる。

また、図5.7 (4) には、雑音レベル5%、打ち切りスレッショルド $10^{-3}$ の場合について、ARMAモデルの次数に対するARMA誤差を示した。次数を上げれば誤差は減少するが、それはそのうち頭打ちになることがわかる。

また、図5.7 (5) には、サンプリング時間間隔の影響をプロットした。誤差はARMA次数やサンプリング時間間隔にあまり依存しないことがわかる。

後に示されるように、サンプリング時間間隔は、同定結果そのものにもあまり影響を与えないのであるが、ここで注意すべきことは、サンプリング時

間隔が長くなったとき、高次のモードの情報は消失するのではなく、エリアシングしているという事実である。モード解析においてはエリアシングは解析を困難にするため、高域カットのフィルターを使用して高次のモードの情報を欠落させることがよくあるが、長いサンプリング時間間隔そのものが情報をカットしているわけではない。よって、いまのように、完全に時間領域で議論する場合、エリアシングが何ら困難をもたらすわけではなく、また、高次のモードの情報が欠落するわけでもないで、サンプリング時間間隔の影響はあまり大きくならない。ただし、減衰の大きいモードが存在すると、そのモードに関する情報は雑音にまみれてしまうので、サンプリング時間間隔が長くなると、そのモードに関係した分だけ、影響を受けることになる。

図 5.8 に打ち切りに関係した行列  $S$  の特異値の例を示す。図でセンサ位置は  $x=5.0m$  の位置とし、そのほかの条件は、図 5.7 に合わせてある。各図を比較することより、雑音レベルに関わらず、特異値はほぼ一定であることがわかる。これは、スレッシュホールドを小さくとればとるほど、ARMA の精度が上がることに関係している。というのも、両者はともに、雑音レベルに関わらずすべての特異値が正確に計算されていることを示している。

各々の特異値は、それぞれ、入力部自由度や出力のモードに対応していると思われる。図 5.9 に得られた ARMA モデルの周波数特性を示す。ここで、ARMA モデルへの入力は、図 5.4 のようなものとした。打ち切りスレッシュホールドが  $10^{-3}$  以上のとき、得られる周波数特性はほぼ同じであり、主要 5 モードが含まれている。(ただし、第 3 のモードは非常に識別しにくくなっている。) これより 1 番目から 38 番目の特異値の中にその 5 つのモードに関するもの ( $5 \times 2 = 10$  個ある) が含まれており、残りの 28 個の中に入力に関するもの (全部で  $p+1 = 31$  個ある) のうちの重要なものが含まれている、と考えられる。残りの特異値は、減衰の大きいモードに関したものとなる。

また、打ち切りスレッシュホールドが  $10^{-2}$  のときは、3 番目のモードから 4 番目のモードの間で 2 つのピークが観測される。また、高周波数域の応答が他の 3 つと異なったものとなっていることがわかる。カットされた特異値の中に、高周波数域の情報をもったものが含まれていたものと思われる。

### 5.2.3 パルス応答列の導出

図 5.10 にパルス応答列の導出誤差の例を載せる。ここで、パルス応答列の導出誤差は

$$\sqrt{\frac{\| \text{vec}(H_e) \|^2}{\| \text{vec}(H_0) \|^2}} \quad (5.8)$$

ただし、

$\text{vec}(*):$  行列の列展開を表わす



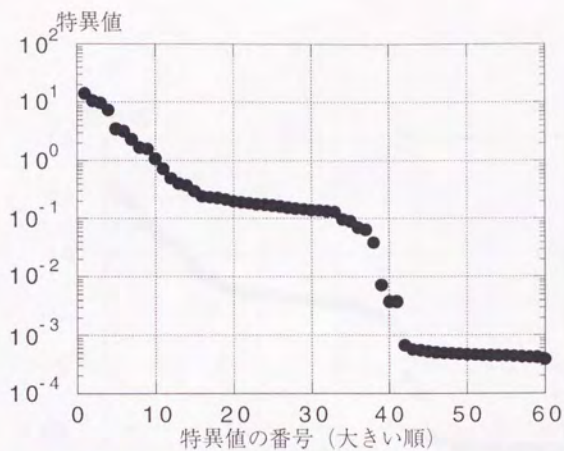


図 5.8 (1) ARMAを導出する行列の特異値分布  
(雑音 0%)

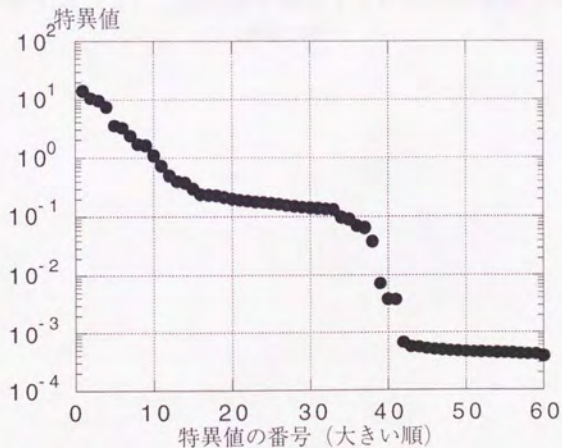


図 5.8 (2) ARMAを導出する行列の特異値分布  
(雑音 5%)



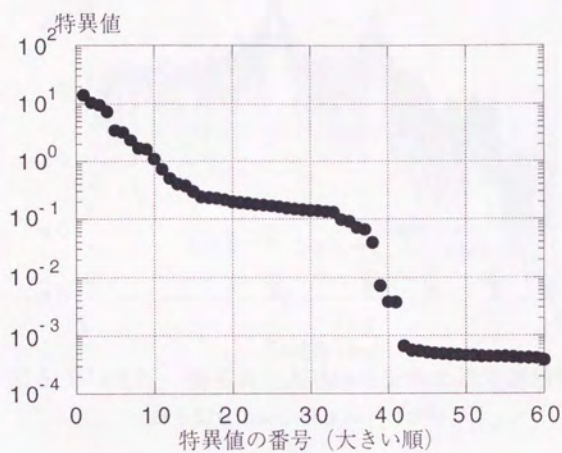


図 5.8 (3) ARMAを導出する行列の特異値分布  
(雑音10%)

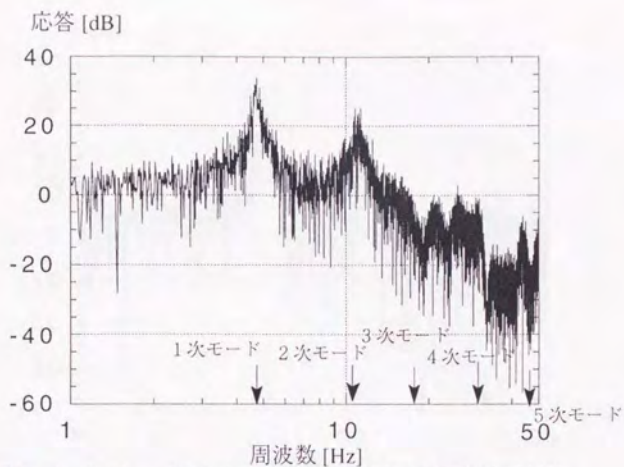


図 5.9 (1) 得られたARMAモデルの周波数特性  
(打ち切りスレッシュヨルド  $10^{-2}$ )

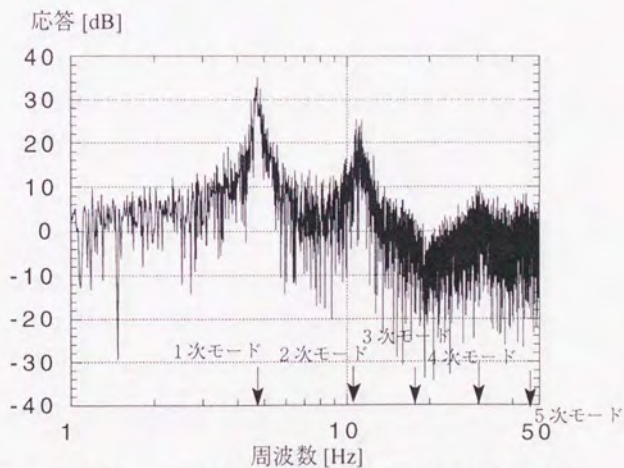


図 5.9 (2) 得られたARMAモデルの周波数特性  
(打ち切りスレッシュヨルド  $10^{-3}$ )

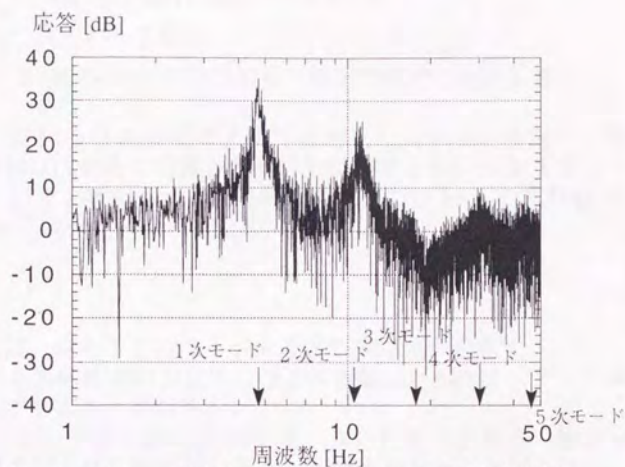


図 5.9 (3) 得られたARMAモデルの周波数特性  
(打ち切りスレッシュヨルド $10^{-4}$ )

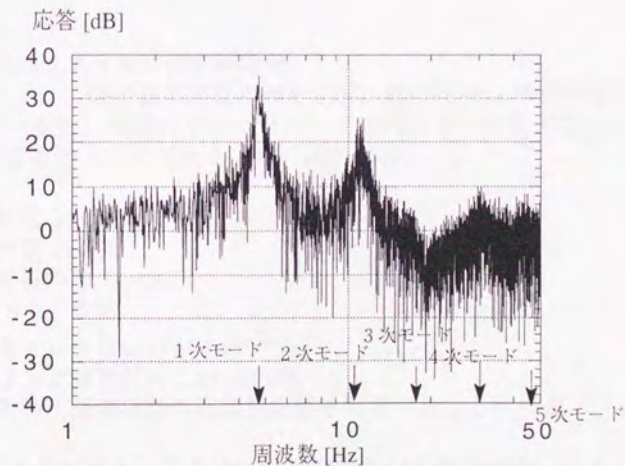


図 5.9 (4) 得られたARMAモデルの周波数特性  
(打ち切りスレッシュヨルド $10^{-5}$ )



$H_e$  : パルス応答列の誤差で  $H_e \equiv H - H_0$

$H_0$  : 真のパルス応答

$H$  : ARMAモデルを使用して導出されたパルス応答

と定義した。図5.10の各図は図5.7に対応している。各図で、横軸はセンサ位置、縦軸は(5.8)式で定義された導出誤差である。図5.10(1)から図5.10(5)で、考えるパルス応答の数(すなわち(3.12)式の $q$ )はARMAモデルの次数 $p$ によらず一定、すなわち、

$$q=30 \quad (5.9)$$

とした。これは、高々15のモードを考慮することを意味する。

各要因がパルス応答導出の誤差に与える影響は、ARMAモデルの誤差のときと同じ傾向であることがわかる。

図5.10(6)では、この $q$ に対するパルス応答導出誤差の影響を調べている。導出精度はこれらの要因にあまり影響されないことがわかる。なお、 $q$ を大きくするとパルス誤差がわずかながら増大しているのが認められる。これは、パルス発生時刻から遠い時点の応答の推定は、近い時点の応答の推定より精度が落ちることを意味する。

#### 5.2.4 未知パラメータの同定結果例

図5.11(1)に時不変系同定の例を示す。図で横軸は同定値を更新したイタレーション回数、縦軸は未知パラメータの同定値を真値で割ったもので、その値は1になるべきものである。この図の例は、

センサ位置 :  $x=5.0\text{m}$

ARMA次数 :  $p=30$

パルス応答の数 :  $q=30$

雑音レベル : 5%

打ち切りスレッシュホールド :  $10^{-3}$

サンプリング時間間隔 :  $\Delta t=0.01$ 秒

未知の剛性、減衰係数の初期推定値 : 真値の約35%の値

としたときのものである。ここではほかの条件での同定結果は示さないが、ほかの場合もほぼこの図と同様の結果となる。図より、同定は4回のイタレーションでほぼ収束し、剛性の同定はほぼ正確、減衰係数の同定は約4%の

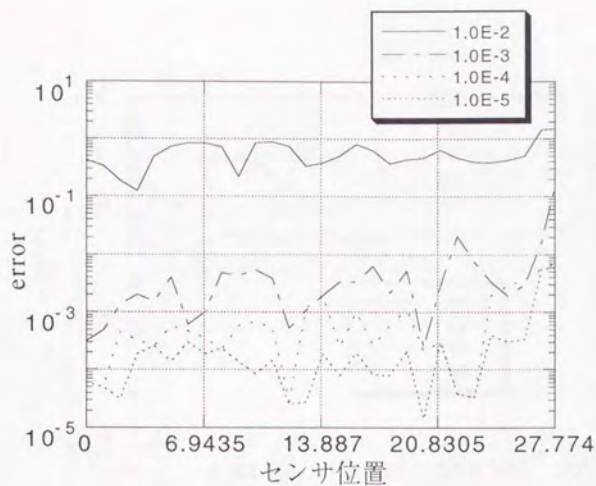


図 5.10 (1) パルス応答の推定誤差  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音なし)

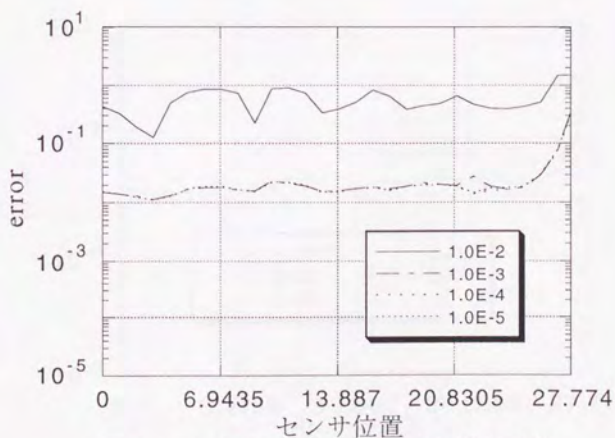


図 5.10 (2) パルス応答の推定誤差  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音 5%)

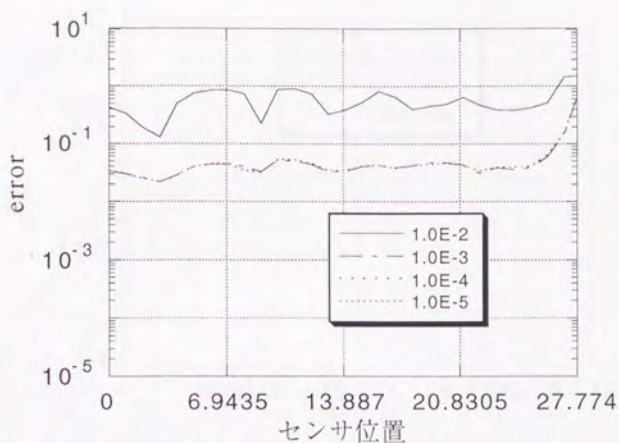


図 5.10 (3) パルス応答の推定誤差  
打ち切りスレシヨルドの影響 (雑音10%)

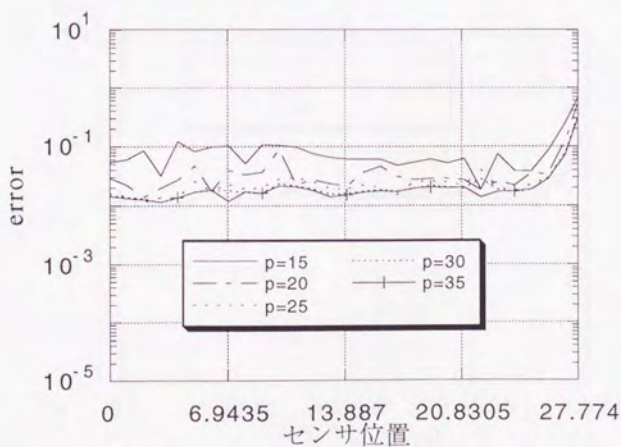


図 5.10 (4) パルス応答の推定誤差  
ARMA次数の影響 (雑音5%、スレシヨルド $10^{-3}$ )



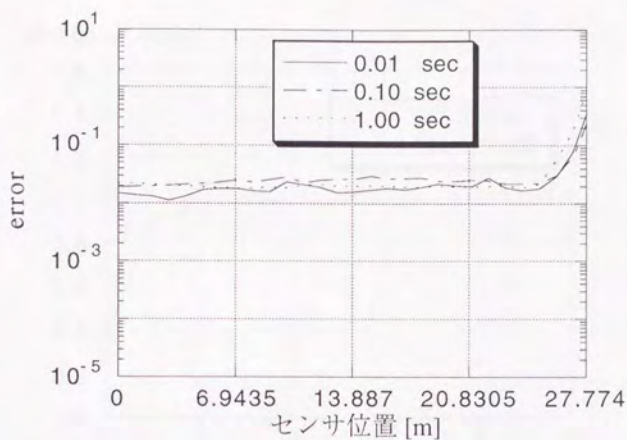


図 5.10 (5) パルス応答の推定誤差  
サンプリング時間間隔の影響 (雑音 5%、スレッシュホールド  $10^{-3}$ )

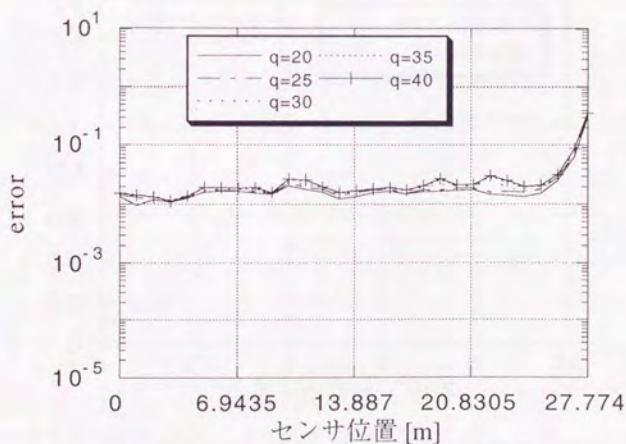


図 5.10 (6) パルス応答の推定誤差  
パルス応答の長さの影響 (雑音 5%、スレッシュホールド  $10^{-3}$ )

(同定値) / (真値)

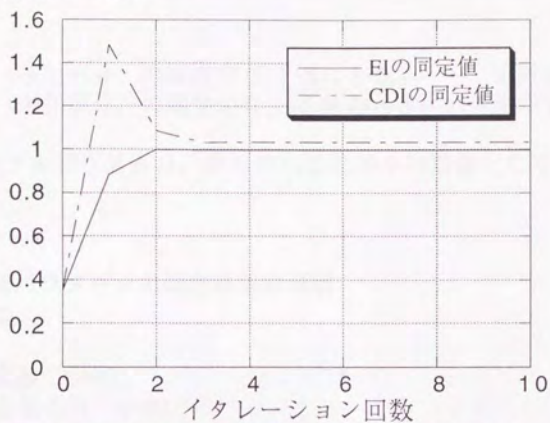


図5.11 (1) 時不変系の同定例 (その1)

(同定値) / (真値)

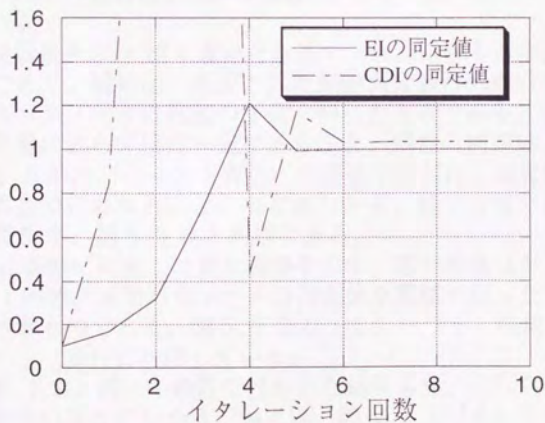


図5.11 (2) 時不変系の同定例 (その2)

誤差をもってなされていることがわかる。図5.11(2)に未知の剛性、減衰係数の初期推定値が真値の0.1倍であるときの同定例を示す。こちらは、収束性は悪化しているが、ほぼ同様の値のところに落ち着いていることがわかる。図5.4より、(縦軸の範囲からはみ出しているが)1次モードの自然周波数は、

領域3(未知部分)の剛性が0.1倍のとき、元の0.53倍  
領域3(未知部分)の剛性が0.35倍のとき、元の0.81倍

である。同定アルゴリズムは、それぞれこの差を初期値として動作したことになる。

### 5.2.5 未知パラメータの同定結果の考察

図5.12に

ARMA次数:  $p=30$   
パルス応答の数:  $q=30$   
雑音レベル: 5 %  
打ち切りスレッシュホールド:  $10^{-3}$   
サンプリング時間間隔:  $\Delta t=0.01$ 秒

のときの同定誤差を3.6節で導いた方法で求めた結果を示す。図中で横軸はセンサ位置であり、縦軸は、推定された誤差共分散行列の対角項をその対角項に対応するパラメータの真値の2乗で割ったものである。図より、同定精度はセンサ位置によらずほぼ一定であること、剛性の同定は1%程度(=縦軸の読みの0.5乗のパーセント表示)の誤差で行われ、減衰係数の同定は10%程度の誤差で行われること、などがわかる。図で右端で同定精度が悪化するの、図5.7、図5.10と同様である。

図5.13に実際に同定した見た結果を示す。図で横軸はセンサ位置、縦軸は、図5.11同様、未知パラメータの同定値を真値で割ったもので、その値は1になるべきものである。図5.13の(1)～(6)の検討条件は、図5.10の(1)～(6)に対応している。

また、図5.12と同一の条件で行われた結果より、これらの図の間には、内容の矛盾がないことがわかる。例えば、図5.13(2)で打ち切りスレッシュ

ホールドが $10^{-3}$ の線が図5.12と同じ検討条件である。図5.13(2)より、数値シミュレーションによって同定された値は、センサ位置が $x=0 \sim 20$  [m]のあたりでは、剛性EIが大体2%以内の誤差、減衰係数 $C_D I$ が7～8%



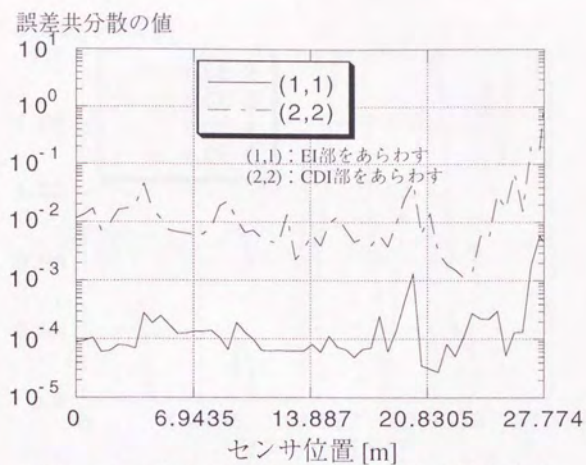


図5.1 2 得られた同定誤差共分散の対角成分  
(雑音5%)

(同定値) / (真値)



図 5.1 3 (1) .1 EIの同定例  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音なし)

(同定値) / (真値)

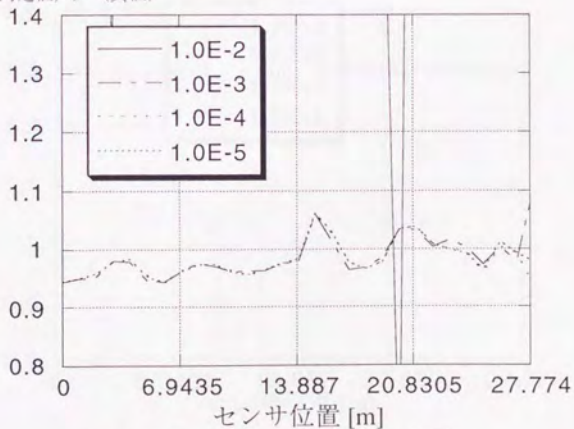


図 5.1 3 (1) .2  $C_D$ の同定例  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音なし)

(同定値) / (真値)



図 5.1 3 (2) .1 EI の同定例  
打ち切りスレッシュホルドの影響 (雑音 5%)

(同定値) / (真値)

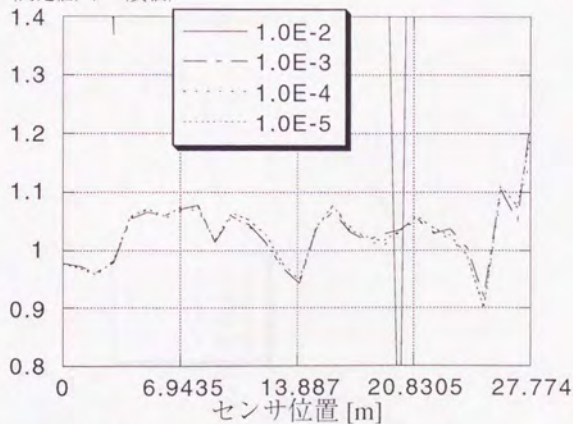


図 5.1 3 (2) .2  $C_D$  の同定例  
打ち切りスレッシュホルドの影響 (雑音 5%)



(同定値) / (真値)

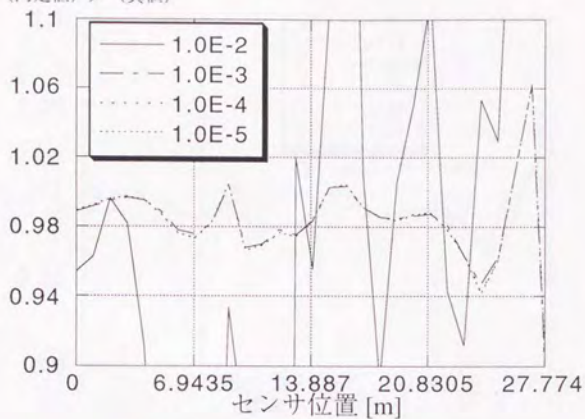


図 5.1 3 (3) .1 EIの同定例  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音10%)

(同定値) / (真値)

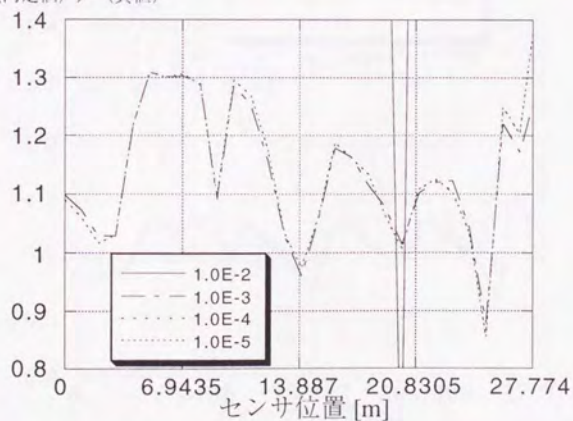


図 5.1 3 (3) .2  $C_D$ の同定例  
打ち切りスレッシュホールドの影響 (雑音10%)

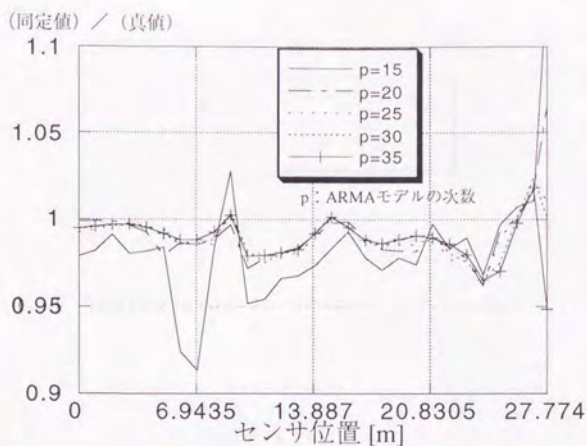


図 5.1 3 (4) .1 EIの同定例  
ARMAモデルの次数の影響 (雑音 5%、スレッシュヨルド  $10^{-3}$ )

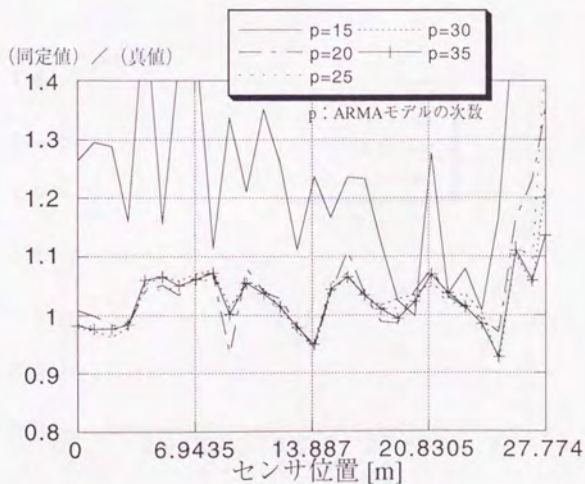


図 5.1 3 (4) .2  $C_D$ Iの同定例  
ARMAモデルの次数の影響 (雑音 5%、スレッシュヨルド  $10^{-3}$ )

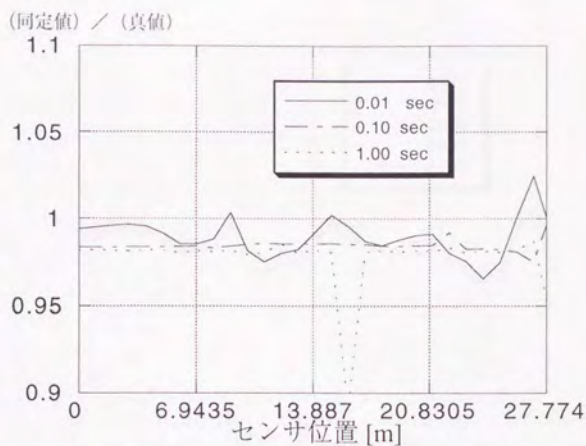


図 5.1 3 (5) .1 EIの同定例

サンプリング時間間隔の影響 (雑音 5%、スレッシュヨルド  $10^{-3}$ )

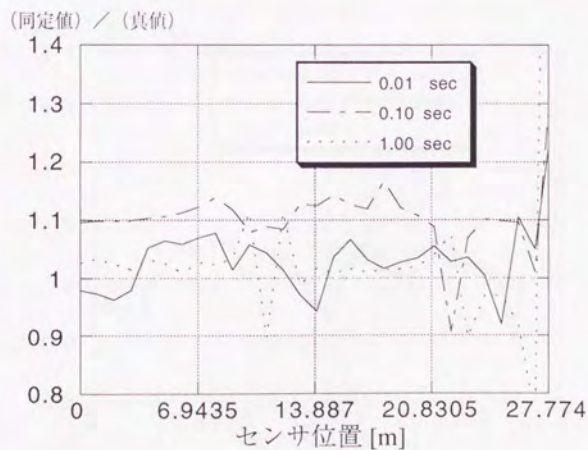


図 5.1 3 (5) .2  $C_D I$ の同定例

サンプリング時間間隔の影響 (雑音 5%、スレッシュヨルド  $10^{-3}$ )



(同定値) / (真値)

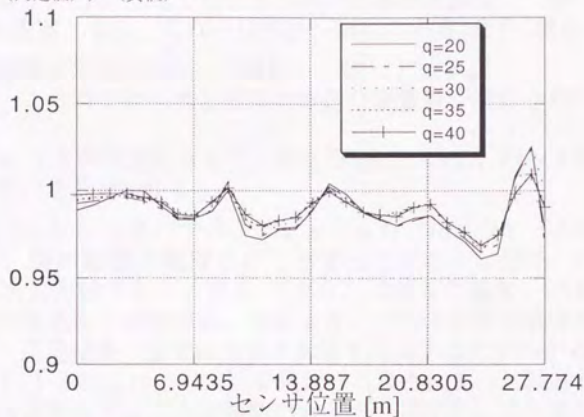


図 5.13 (6) .1 EIの同定例

パルス応答の長さの影響 (雑音 5%、スレッショルド  $10^{-3}$ )

(同定値) / (真値)

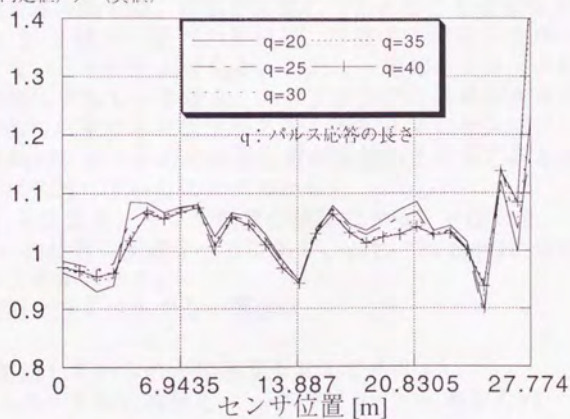


図 5.13 (6) .2  $C_D I$ の同定例

パルス応答の長さの影響 (雑音 5%、スレッショルド  $10^{-3}$ )

の誤差をもって同定されていることがわかる。一方、図 5.1 2 で、そのあたりのセンサ位置では、EI の線は  $10^{-4}$  あたりにあり、CDI の線は  $10^{-2}$  あたりにある。これより、図 5.1 2 を用いて予想される同定誤差は、EI で 1 % 程度、 $C_{DI}$  で 10 % 程度となる。これらは大体一致している。また、端点  $x=27.774[m]$  付近で同定精度が悪化するという傾向も一致している。

これより、この例では、同定誤差の推定の定量性が満たされていることがわかる。

また、図 5.1 3 の各図をみると、同定誤差について、パルス応答誤差と同様の傾向を持つことがわかる。

図 5.1 3 (1) ~ (3) では、スレッシュホールド  $10^{-2}$  のケースは同定精度が非常に悪く、図の縦軸の範囲にはとどまっていない。図 5.1 3 (4) の  $p=15$  のケースも同様である。図 5.7 より、これらの場合、パルス応答の推定が不正確であることがわかる。これより、パルス応答の誤差がある程度以上大きいと、同定結果に非常に大きな影響を及ぼすことがわかる。

また、図 5.1 3 (1) ~ (3) を見比べることにより、雑音が大きくなると、同定精度が悪化することが確認できるが、傾向として、剛性よりも、減衰係数のほうが、悪化の度合いが激しいことがわかる。

図 5.1 3 (5) では、サンプリング時間間隔の影響をプロットしているが、図より、いずれのサンプリング時間間隔でも同定結果は安定していたことがわかる。これは、サンプリング時間間隔が 1 次モードのナイキスト周波数(今の場合約 0.1 秒である。図 5.2 の自然周波数の記述を参照のこと。) より長くても提案する方法では、同定が正確に行われることを意味する。

これは、5.1.2 節でも述べたとおり、提案する同定方法がエリアシングの影響を受けないことが原因である。ただし、未知パラメータの初期推定値が真値から大幅にずれている場合、エリアシングの効果が大きく変わるため、間違った同定値に収束する可能性がある。図 5.1 4 にサンプリング時間間隔が 1 秒で、未知パラメータの初期推定値が真値の 10 % である例を示す。この場合、同定は失敗していることがわかる。

なお、図 5.1 2 より、センサ配置が議論できる。すなわち、センサは  $x=0 \sim 15 [m]$  くらいの位置に配置すべきであり、 $x=27.774 [m]$  の右端付近には配置すべきでないことがわかる。

センサを右端に置くべきでない理由は、

いま、使用しているのが加速度センサであり、  
アクチュエータも右端付近 ( $x=27.773 [m]$ ) にあるため

入力から出力への直達成分が大きくなるためと思われる。アクチュエータ位置を  $x=13.887 [m]$  (梁の真ん中) に置いたときの、同定結果例を図 5.1 5

(同定値) / (真値)

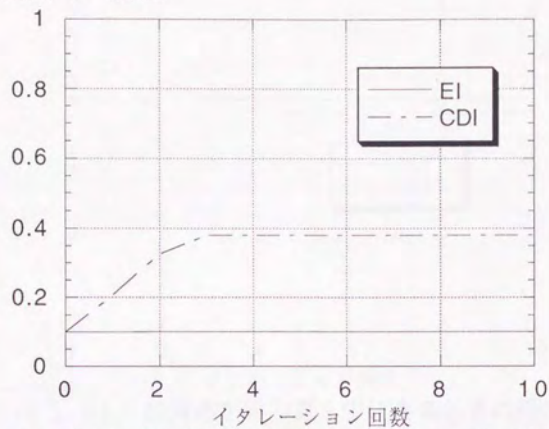


図 5.1 4 サンプル時間間隔が長く未知パラメータの初期推定値の誤りが大きい場合の同定例  
(サンプリング時間間隔 1 秒)



(同定値) / (真値)

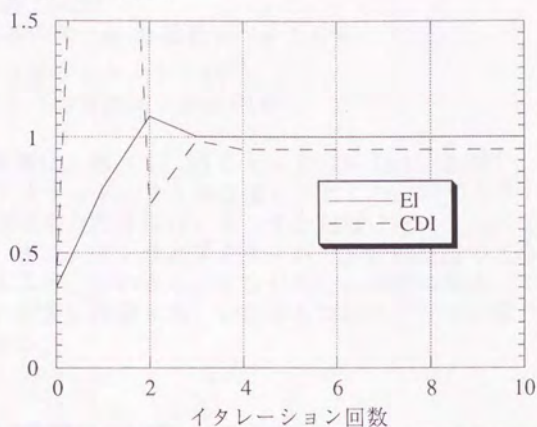


図 5.15 (1) 加振点が梁の真ん中にあるときの同定例  
(センサ  $x=27.774$  [m])

(同定値) / (真値)

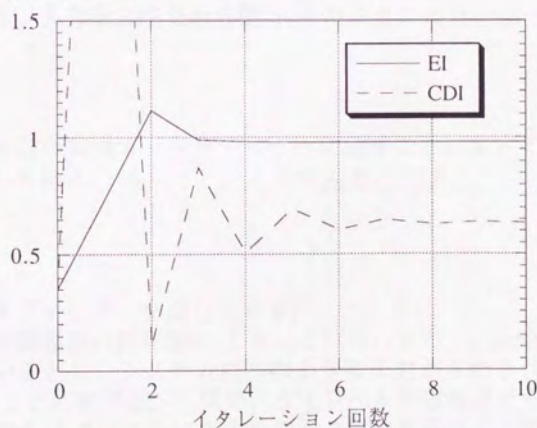


図 5.15 (2) 加振点が梁の真ん中にあるときの同定例  
(センサ  $x=13.887$  [m])

に示す。ここで、

ARMA次数:  $p=30$

パルス応答の数:  $q=30$  雑音レベル: 5 %

打ち切りスレッシュホールド:  $10^{-3}$

サンプリング時間間隔:  $\Delta t=0.01$  秒

とし、センサ位置は、第(1)図で  $x = 27.774$  [m] (右端)、第(2)図で  $x=13.887$  [m] (アクチュエータと同位置)、とした。両図より、アクチュエータが梁の真ん中に来たときには、センサを右端に置いても同定は正確に行われていること、また、センサとアクチュエータが同位置のときには同定精度は悪化していること、がわかる。すなわち、この例の場合、センサ、アクチュエータを同一位置に配置する、いわゆるコロケーション系、にすべきではないことがわかる。

#### 5.2.6 入力の影響について

以上の検討は、図5.4に示したような特性を持つ入力を加えたときの結果である。ここで、入力が異なったものになったときの影響を考えた。検討のため、図5.4に図示したものより高域帯をさらに強くカットされた入力を考え、その入力を使用した同定を試みた。図5.16(1)に使用した入力の周波数特性を示す。入力1、すなわち図5.4のような入力、は一様乱数を、

$$\frac{1}{s+10} \quad (5.10)$$

なる伝達関数を持つ高域カットフィルターに通すことによって得ていたが、入力2、すなわち図5.16(1)のような入力、では

$$\frac{1}{s+1} \quad (5.11)$$

なる高域カットフィルターを通してている。

この入力の時間履歴の例を図5.16(2)に、また、 $x = 5$  [m] に加速度センサがついているとし、システムにこのような入力をもたされたときの、出力の例を図5.17に掲げる。各図で、5 %レベルの観測雑音も併せてプロットしてある。図5.17(1)に示した出力の周波数特性で、第1、2、4次のモードのピークははっきりと認められ、また、第3次のモードのピークもわずかながら認められている。

図5.18に実際に同定してみた結果を示す。ここで、検討条件は、

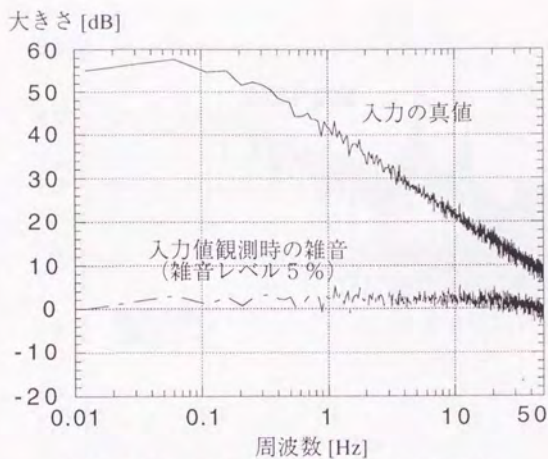


図 5.1 6 (1) 入力 2 の周波数特性  
(5%レベルの観測雑音も併せて示した。)

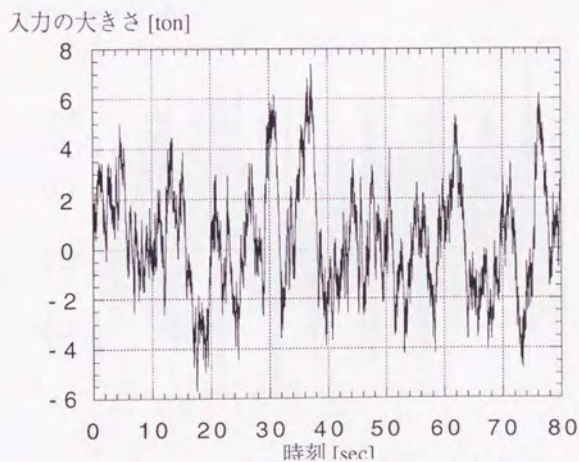


図 5.1 6 (2) 入力 2 の時間履歴



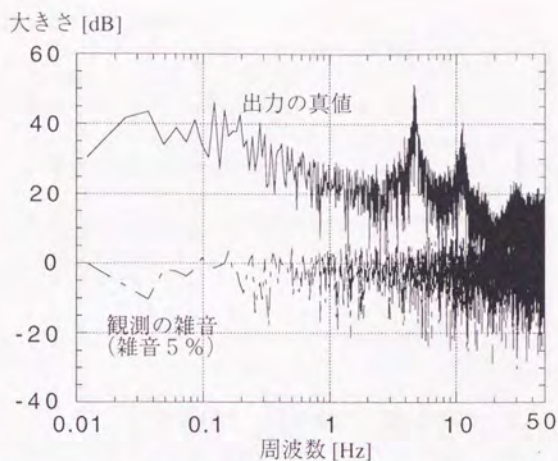


図 5.17 (1) 入力 2 に対する出力の周波数特性  
(センサ  $x=5.0$ [m]、5%レベルの観測雑音も併せて示した。)

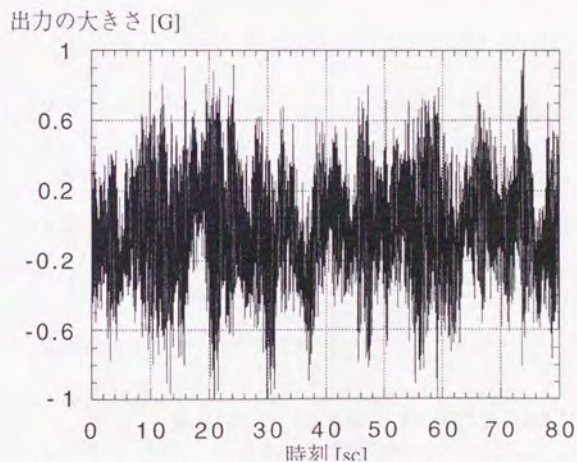


図 5.17 (2) 入力 2 に対する出力の時間履歴  
(センサ  $x=5.0$ [m])

(同定値) / (真値)

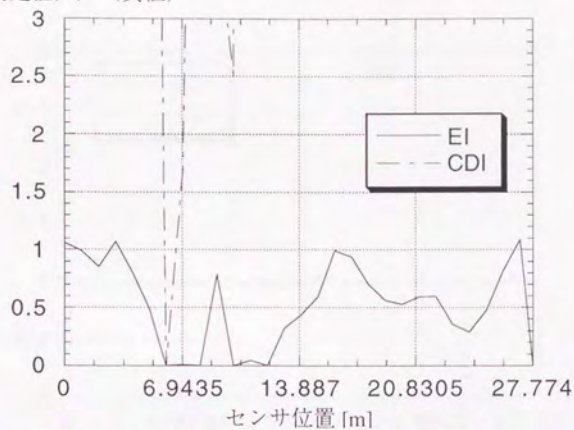


図 5.18 (1) 入力 2 を用いた同定の例  
(雑音レベル 5 %、打ち切りスレッシュヨルド  $10^{-3}$ )

(同定値) / (真値)

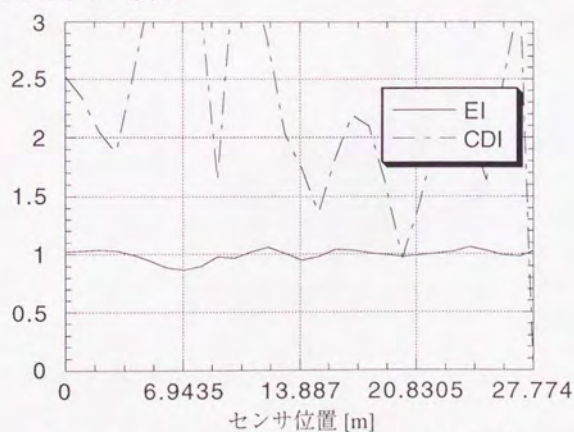


図 5.18 (2) 入力 2 を用いた同定の例  
(雑音レベル 5 %、打ち切りスレッシュヨルド  $10^{-5}$ )

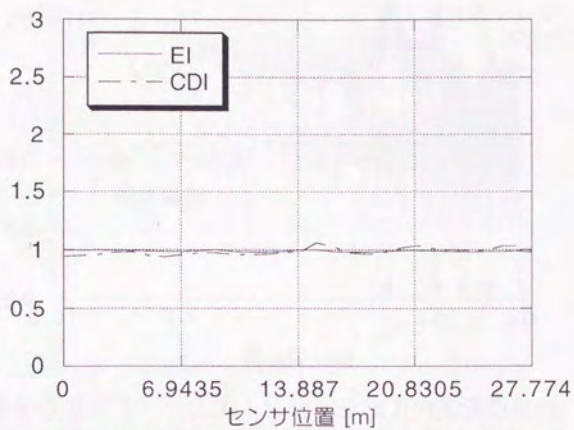


図5.18 (3) 入力2を用いた同定の例  
(雑音レベル0%、打ち切りスレッシュホールド $10^{-5}$ )



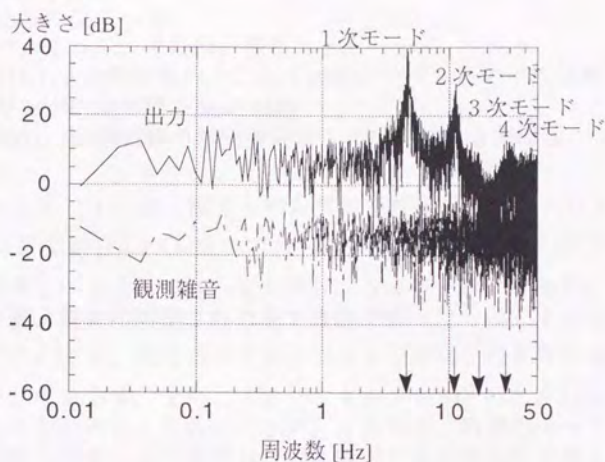


図 5.1 9 (1) 入力 1 に対する出力の周波数特性  
(センサ  $x=5.0$ [m]、5 %レベルの観測雑音も併せて示した。)

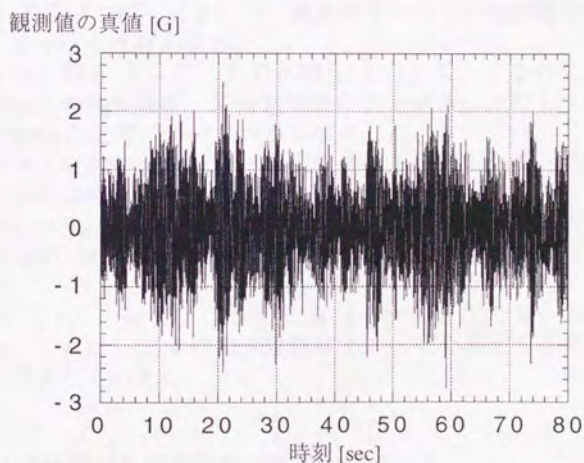


図 5.1 9 (2) 入力 1 に対するセンサ出力の時間履歴  
(センサ  $x=5.0$ [m])

ARMA次数:  $p=30$

パルス応答の数:  $q=30$

雑音レベル: 0%, または、5%

((5.7)式の期待値のところで1000サンプル点の平均値をとった。)

サンプリング時間間隔:  $\Delta t=0.01$ 秒

未知の剛性、減衰係数の初期推定値: 真値の約35%の値

である。図5.18(1)は、雑音レベル5%で打ち切りスレッショルド $10^{-3}$ 、図5.18(2)で雑音レベル5%で打ち切りスレッショルド $10^{-5}$ 、図5.18(3)で雑音レベル0%で打ち切りスレッショルド $10^{-5}$ である。各図で横軸はセンサ位置、縦軸は同定された値を真値で割ったもので1になるべきもの、である。これより、打ち切りスレッショルドが $10^{-3}$ のときには、同定は正確には行われておらず、また、スレッショルドが $10^{-5}$ のときには大幅に改善していることがわかる。これは、2次、3次など、高次のモードの加振が弱い、それらのモードに関係した特異値が小さくなったためと思われる。すなわち、このとき、スレッショルドを小さくし、そういった特異値を取り込むようにする必要がある、ということがわかる。

また、図5.18(2)と(3)を比較し、剛性の同定は比較的正確に行われているが、減衰係数の同定は、観測雑音に敏感であることがわかった。これは、図5.13(1)～(3)で、減衰係数のほうが観測雑音に敏感である傾向を示していたのに対応する。

参考のため、図5.19に、入力図5.4のとき、すなわち入力1を使用したときの出力の時間履歴、周波数特性の例を示す。ただし、センサは加速度計で、 $x=5[m]$ の位置についているものとした。

入力1が与えられたとき、1～4次のモードに対応して、出力の周波数応答にピークが生じていることがわかる。ただし、入力2同様、3次のモードのピークがわかりにくくなっている。また、図5.14(1)と比較し、入力1を用いた方が、たしかに、より高い周波数まで強く振動していることがわかる。

図5.17(1)、および、図5.19(1)で3次のモードのピークはわかりにくい。これは、完全に周波数領域でモードを同定する際に、困難が生じることを予見している。

#### 5.2.7 ARMAモデルの次数の決定方法について

以上の議論では、同定アルゴリズムに関係した様々なパラメータを変えたときの同定結果の変化を真値との比較を元に行ってきた。しかし、実際の同定においては、このような結果を用いて、パラメータを決定することはでき



ない。というのも、真値はそもそも不明であるので、上記の議論はそのまま持ち込むことはできない。そこで、パラメータを如何にして決定するのか、ということが問題となる。ここでは、ARMAモデルの次数を例にその方策を示す。

さて、ARMAモデルの次数の決定方法であるが、上記の議論では、図5.7(4)より指針が得られる。しかし、既に述べたように実際の同定に際してはこの図を用いることはできない。そこでまず考えられるのが、予め得られているノミナル値を元に数値シミュレーションを行い、図5.7(4)に相当する図を得ることである。しかし、この方法は、計算機への負担が大きい方法であり、必ずしも簡便なものではない。

また、システムの線形性を仮定して、観測雑音の影響を軽減することも考えられる。すなわち、線形系においては、その系の2つの入出力時系列の和もまた、その系の入出力時系列となることを、利用する。観測データの時系列を時間を適当にずらして重ね合せ、その平均をとると、観測雑音の影響は軽減される。そのようにして、雑音の減少した時系列を(5.2)式に代入して、図5.7(4)に相当する図を得る方法である。

以上の議論は、3.6.2節のARMAモデル化誤差の議論と相関を持つ。以下で、3.6.2節の、iii)の方法と対応して、ARMA次数の決定法を考える。

観測データを用いて

$$\frac{1}{E\left(\|y(k)\|^2\right)} E\left\{\left(y(k) + \sum_{i=1}^p A_i y(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i u(k-i)\right)\left(y(k) + \sum_{i=1}^p A_i y(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i u(k-i)\right)^T\right\} \quad (5.12)$$

を計算する。ここで、

- ・ ARMAモデルに式誤差が存在しない
- ・ 各観測量間で観測雑音は無相関
- ・ 異なる時刻間で観測雑音は無相関

と仮定すると、これは、

$$R_{ee} = \frac{1}{E\left(\|y(k)\|^2\right)} \left( R_{yy} + \sum_{i=1}^p A_i R_{yy} A_i^T - \sum_{i=0}^p B_i R_{yy} B_i^T \right) \quad (5.13)$$

ただし、

$$R_{yy} : y(k) + \sum_{i=1}^p A_i y(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i u(k-i) \text{の共分散行列}$$



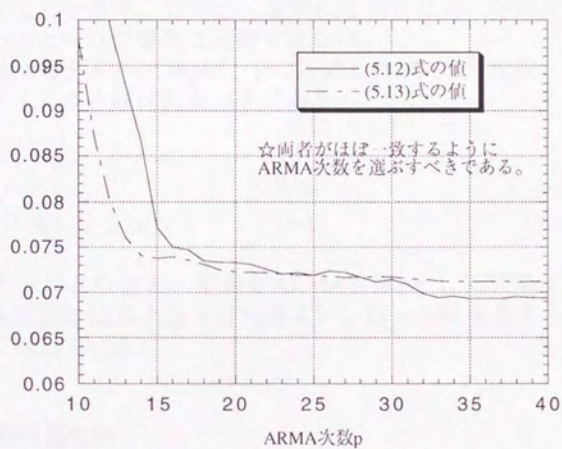


図 5.2 0 ARMA次数の簡略な決定方法について

$R_{out}$  : 出力の観測雑音の共分散行列

$R_{inp}$  : 入力 of 観測雑音の共分散行列

を用いて推定される。すなわち、(5.12)式は、観測雑音の影響とARMAモデル化誤差のふたつの要因によって起こされる誤差を表わしており、(5.13)式は、そのうちの観測雑音の影響を表わしている。よって、両者が一致するとき、ARMA誤差はないものと考えられる。ここで、(5.13)式より(5.12)式の方が大きいとき、それはARMAモデル化誤差が存在することを示し、また、逆に、(5.13)式の方が大きいとき、ARMAモデルが観測雑音にまでフィッティングしていることを示す。ただし、実際には両者は共に行列であるので、大きい、小さい、といった議論は正確ではない。

さて、ARMAモデルの次数 $p$ は、(5.12)式と(5.13)式を比較し、それらがだいたい一致するように選ばれるべきである。

図5.20に

雑音レベル : 5 %

打ち切りスレッショルド :  $10^{-3}$

としたときの、両者の値を、横軸をARMA次数 $p$ としてプロットした。この図は、ARMA次数は15以上ならば大体よい、25~30程度とするのが理想的である、ことを示している。

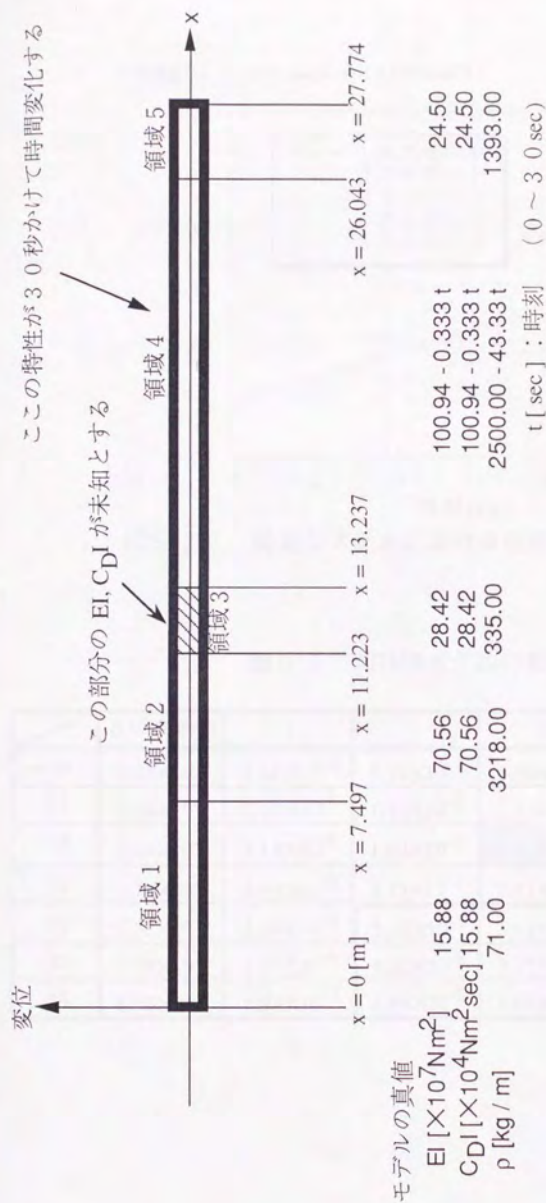
### 5.3 時変系の同定例

以上で時不変系の場合の同定例を示したが、本節では時変系の同定を考える。まず使用したモデルを示し、次いで本論文で提案している状態遷移行列の近似、時変ARMAモデルの近似について検討する。最後に、同定結果の例を載せる。

#### 5.3.1 使用したモデル

使用したモデルを図5.21に示す。時不変の場合とはほぼ同様であるが、1段目推薬タンクに相当する部分の特性が時間とともに変化している。時不変系の場合と同様に、「真値」を発生させるモデルは変位分布をノードが70個のスプライン関数で近似したもの、同定アルゴリズム内部で使用するモデルはノードが50個のものとした。

ところで時変系の場合には、時不変系の場合と異なり運動の伝播を陽に書き下すことはできない。よってここでは、1/500秒ごとに、その時点の物理量



★両端自由の梁である。

図 5.2.1 使用したモデル



(自然周波数) / (時刻 0sec における自然周波数)

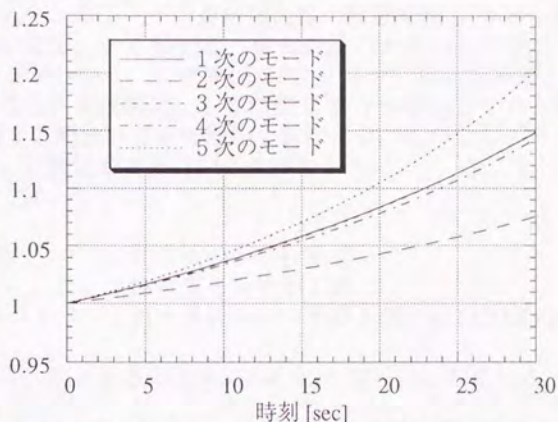


図 5.2.2 時変システムにおける自然周波数の時間変化

表 5.1 ARMAモデルの表現精度

<div><div></div><div>B<sub>i</sub>の次数=0</div></div>	1	2	3	4	5	
p = 09	7.93×10 <sup>-4</sup>	5.68×10 <sup>-4</sup>	5.58×10 <sup>-4</sup>	5.50×10 <sup>-4</sup>	5.44×10 <sup>-4</sup>	5.37×10 <sup>-4</sup>
14	2.94×10 <sup>-4</sup>	2.90×10 <sup>-5</sup>	1.28×10 <sup>-5</sup>	1.23×10 <sup>-5</sup>	1.22×10 <sup>-5</sup>	1.20×10 <sup>-5</sup>
19	2.26×10 <sup>-4</sup>	1.18×10 <sup>-5</sup>	1.63×10 <sup>-6</sup>	9.96×10 <sup>-7</sup>	1.86×10 <sup>-6</sup>	1.83×10 <sup>-6</sup>
24	1.78×10 <sup>-4</sup>	4.03×10 <sup>-6</sup>	3.73×10 <sup>-7</sup>	2.93×10 <sup>-7</sup>	2.86×10 <sup>-7</sup>	2.80×10 <sup>-7</sup>
29	1.32×10 <sup>-4</sup>	1.36×10 <sup>-6</sup>	5.35×10 <sup>-8</sup>	3.13×10 <sup>-8</sup>	3.01×10 <sup>-8</sup>	2.84×10 <sup>-8</sup>
34	1.19×10 <sup>-4</sup>	1.11×10 <sup>-6</sup>	4.32×10 <sup>-8</sup>	2.97×10 <sup>-8</sup>	2.89×10 <sup>-8</sup>	2.74×10 <sup>-8</sup>
39	1.15×10 <sup>-4</sup>	8.94×10 <sup>-7</sup>	2.56×10 <sup>-8</sup>	1.08×10 <sup>-8</sup>	1.01×10 <sup>-8</sup>	1.51×10 <sup>-8</sup>

を元に時不変系近似して計算を進めた。すなわち、1/500秒ごとに、システムを時不変近似したときの状態遷移行列、入力行列、出力行列を計算し、それを用いて、状態量を更新した。

この時変システムのモードの自然周波数の変動を図5.22に示す。10秒間で高々5%の変動、30秒間で、最も変動の大きいモードで20%程度の変動であることがわかる。これを図5.6と併せて考えてみる。図5.22で、1次のモードの自然周波数は、10秒間で3.6%増加しているが、これは図5.6で、領域3の剛性の30%増加を意味する。このことより、時変効果を無視すると正しい同定ができないことがわかる。

なお、以下では、

観測期間	: はじめの10秒間
センサ	: 加速度センサが1個
アクチュエータ	: 力アクチュエータが1個で $x=27.773[m]$ の位置

とした。これは、時不変系のときにおいた仮定と対応している。

### 5.3.2 状態遷移行列の近似

本論文で提案する時変ARMAモデルの近似を導出する際、状態遷移行列を(4.12)式のように表わすことが重要な役割を果たす。ここでは、状態遷移行列が実際に(4.12)式のように表わされるのか確認するための数値シミュレーションを行った。図5.23にその結果を示す。遷移行列を(4.12)式の無限和を有限打ち切りしたことによる影響を調べた。図は、センサは加速度センサ1個で、 $x=5.0m$ の位置に設置、また、アクチュエータも力アクチュエータ1個で、 $x=27.773m$ の位置に設置、という場合のシステムのパルス応答を示す。図中で横軸はパルス発生からの経過時間、縦軸は、図5.23(1)ではパルス応答そのもの、図5.23(2)では、有限打ち切りしたことによる誤差ととった。図より、有限打ち切りの数を増やすほど近似の精度が上がること、および、はじめの2項までが含まれていれば、運動はほぼ正確に近似できることがわかる。

### 5.3.3 時変ARMAモデルの近似

次に時変ARMAモデルを4章の(\*\*\*\*)の記述のように近似することについて考察した。表5.1にその結果を示す。表中で各列はARMA次数 $p$ を表わし、各行はMA部分の行列、すなわち(4.1)式で $B_i(k)$ と記述されているもの、を近似する多項式の次数 $n_b$ を表わす。表の第1行目は、時不変のARMAモデルのケースを示すことになる。

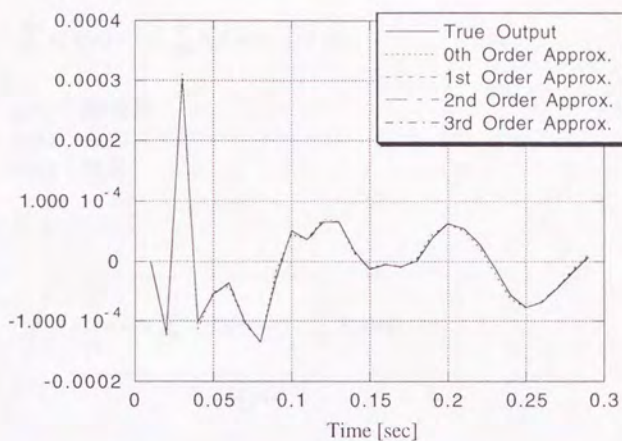


図 5.2.3 (1) 状態遷移行列の近似とパルス応答の再現  
(再現例)

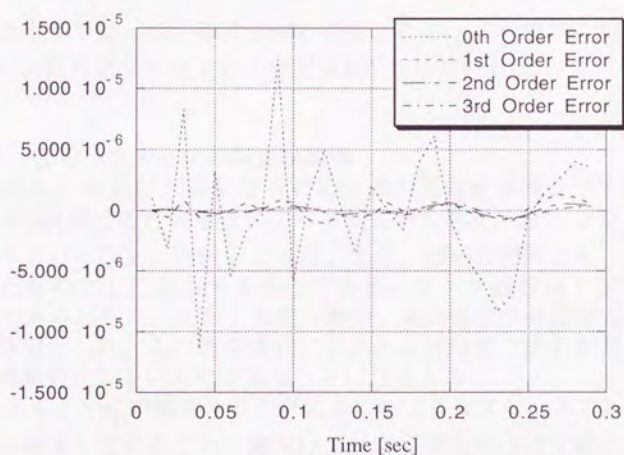


図 5.2.3 (2) 状態遷移行列の近似とパルス応答の再現  
(再現誤差例)



表中の値は、ARMAモデルの誤差を表わしており、これは時不変系の場合と同様で、ARMAモデルを

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p A_i(k)y(k-i) + \sum_{i=0}^p B_i(k)u(k-i) + v(k) \quad (5.14)$$

ただし、

$y(k)$ ：観測量

$u(k)$ ：入力

$v(k)$ ：雑音

と記述したとき、

$$e \equiv \sqrt{\frac{E\left\{\left(y(k) + \sum_{i=1}^p A_i(k)y(k-i) - \sum_{i=0}^p B_i(k)u(k-i)\right)^2\right\}}{E\{y(k)^2\}}} \quad (5.15)$$

によって定義される。

表中で2箇所の例外はある（ハッチングした部分）が、 $p$ 、 $n_b$ を大きくすればするほどARMA誤差は減少し、また、

$$n_b \geq 2$$

で誤差は小さくなっていることがわかる。なお、この検討では、雑音はないものとし、打ち切りスレッシュホールドは $10^{-7}$ としている。

#### 5.3.4 未知パラメータの同定結果例

図5.24、および、図5.25に時変系の同定結果例を示す。横軸は、図5.24でMA部分の行列を近似する多項式の次数 $n_b$ 、図5.25で同定値を更新するイタレーション回数ととった。また、縦軸は両図とも、同定値を真値で割ったもので1になるべきものである。センサ個数は1個とし、位置は $x=5.0m$ であるとした。また、未知の剛性、減衰係数の初期推定値は真値の約35%の値とした。この例の場合、システムは時変であるが同定するパラメータは時間変化しないものであることに注意する。

図5.24より $n_b$ の値は2以上が望ましいこと、また、イタレーションは4回でほぼ収束していること、剛性は、減衰係数ともほぼ正確に同定されていることがわかる。なお、このときの検討の条件は、

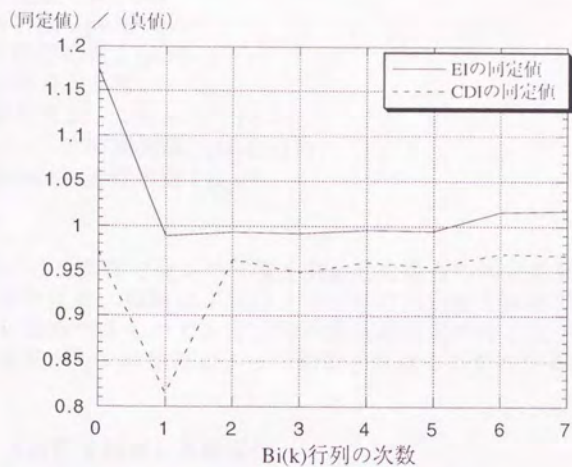


図 5.2 4 時変系の同定結果例  
Bi(k)行列の多項式近似によるARMAの時変効果について

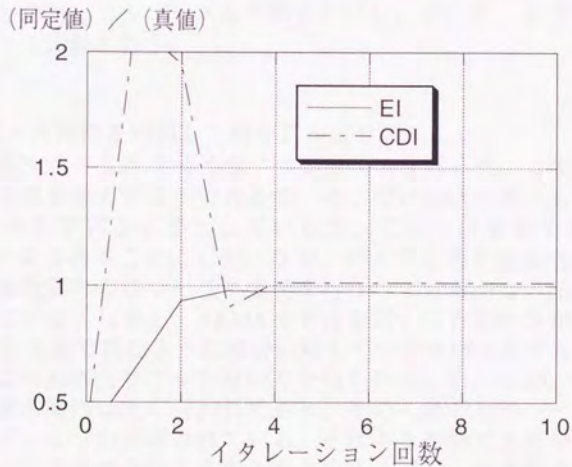


図 5.2 5 時変系の同定例  
イタレーションの収束について

センサ位置： $x=5.0\text{m}$   
ARMA次数： $p=30$   
パルス応答の数： $q=30$   
雑音レベル：5 %  
打ち切りスレッシュホールド： $10^{-7}$   
サンプリング時間間隔： $\Delta t=0.01\text{秒}$   
時変ARMAの近似次数： $n_b=3$

である。

図5.2.6にこの条件でセンサ位置を動かした場合の同定結果を示す。図中で横軸はセンサ位置、縦軸は未知パラメータの同定値を真値で割ったもので、その値は1になるべきものである。時不変系の同定の時と比べて、特に減衰係数の同定結果がセンサ位置によって影響されることがわかる。

#### 5.4 モード特性を利用した同定例

以上、提案する同定法を検証してきたが、時不変系の場合には、従来のような、モード特性を利用した同定法も考えることができる。本節で、提案する方法とモードを利用する方法を数値的に比較する。まずはじめに、モード特性を利用した同定アルゴリズムを明らかにし、次いで、5.2節で使用したモデルによって比較を行う。

##### 5.4.1 モード特性を利用した同定アルゴリズム

ここで、図5.2.7に示すようなアルゴリズムを考えた。まず、観測データよりモード特性を導出するのであるが、ここではERAを用いることとした。ERAはパルス応答列を必要としているが、ここでは提案する方法同様、ARMAモデルより得ることとした。なお、パルス応答を得る方法としてはこのほか、周波数応答の逆フーリエ変換を行うことも有力な方法であり、従来よく行われている。しかし、ARMAモデルを用いる方法の方が計算負担が少ないこと、5.2節で見たように雑音に対して十分ロバストであること、の2点の理由によりARMAモデルを用いた方法を利用した。なお、システムの周波数応答を得る操作は広く行われており、そのための専用ハードウェア、ソフトウェアがいくつか市販されている。それらを使用できる場合には、周波数応答の逆フーリエ変換をとるやりかたを行っても、計算量の負担の軽減が期待できる。

さて、ERAにより得られたモード特性を数値計算モデルと比較し、未知パ



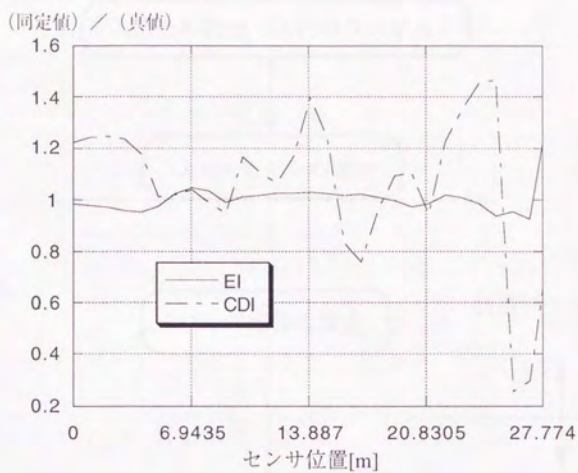


図 5.26 時変系の同定  
センサ位置の影響について

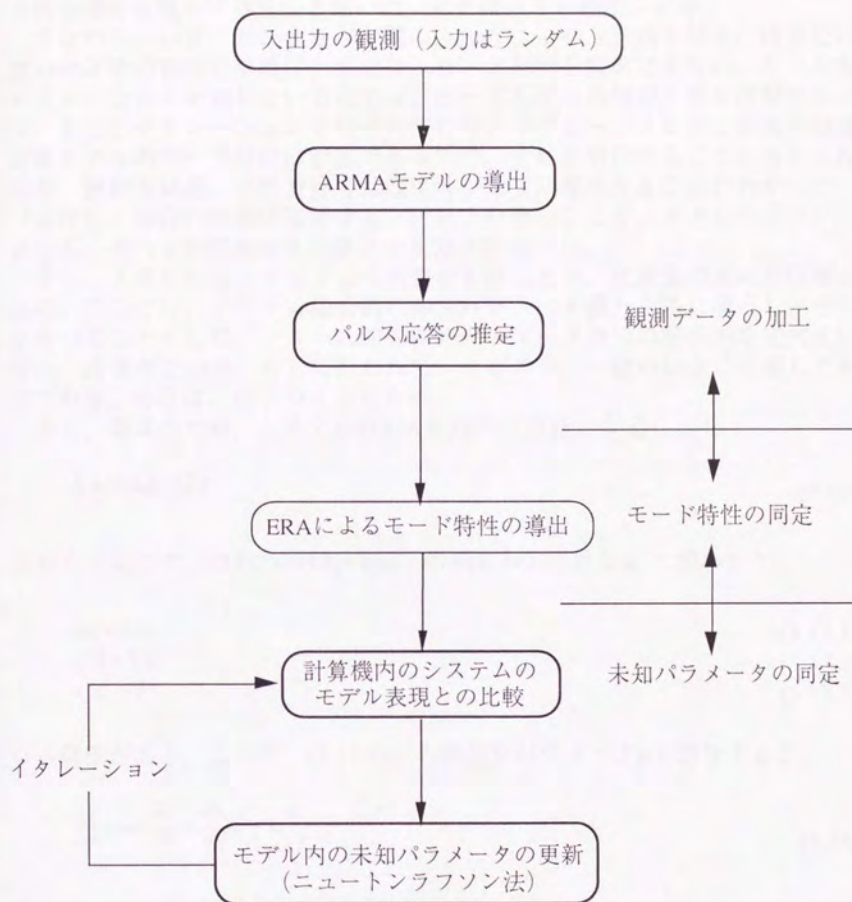


図 5.2 7 モードを利用した物理量の同定アルゴリズム

ラメータを同定するのであるが、ここではイタレーションによって、モードの固有値を合致させる方法を用いた。それは以下の理由による。

すなわち、いま、センサ数が1個のみなど、モード形状を得るには少ない数のセンサの利用を前提にしており、モード形状を利用できない。ところが、イタレーションを要しない方法では、モード形状の利用が主要な役割を果たす。また、イタレーションを行う方法でも、イタレーションの1回前の数値計算モデルのモード形状は計算できるので、それを利用することも考えられるが、検討の結果、この方法では収束性が非常に悪化することがわかった。

(ただし、検討の詳細は省略する。) 以上の理由により、イタレーションによって、モードの固有値を合致させる方法を用いた。

さて、イタレーションによって同定値を得るとき、更新量の決定が問題となる。ここでは、システム固有値の未知パラメータ微分を陽に導出し、それを用いることとした。システム固有値のパラメータ微分の解析的な定式化は、従来、減衰がない系に対して行われていたものを、一般の場合に拡張したものである。それは、以下のようである。

さて、簡単のため、システム行列Aを対角化可能と仮定し、

$$A \equiv T \operatorname{diag}[\lambda_i] T^{-1} \quad (5.16)$$

とおく。ここで、行列Tのi列目を $\mathbf{x}_i$ 、行列 $T^{-1}$ のi列目を $\mathbf{x}_i^{-}$ と表わすと、

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (5.17.1)$$

$$\mathbf{x}_i^{-} A = \lambda_i \mathbf{x}_i^{-} \quad (5.17.2)$$

$$\mathbf{x}_i^{-} \mathbf{x}_i = 1 \quad (5.17.3)$$

なる関係がある。ここで、(5.17.1)式の両辺をパラメータpで微分すると、

$$\frac{\partial A}{\partial p} \mathbf{x}_i + A \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p} \mathbf{x}_i + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p} \quad (5.18)$$

となる。この両辺に左から $\mathbf{x}_i^{-}$ を掛けて、

$$\mathbf{x}_i^{-} \frac{\partial A}{\partial p} \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^{-} A \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p} \mathbf{x}_i^{-} \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{x}_i^{-} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p} \quad (5.19)$$

となる。この左辺第2項に(5.17.2)式を、右辺第1項に(5.17.3)式を適用すると、



$$x_i \frac{\partial A}{\partial p} x_i + \lambda_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial p} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p} + \lambda_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial p} \quad (5.20)$$

となる。これより結局、

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = x_i \frac{\partial A}{\partial p} x_i \quad (5.21)$$

となる。

未知パラメータ同定において、イタレーションの更新は(5.21)式を用いてニュートンラフソン法を用いて行うものとした。

#### 5.4.2 同定結果例

上述のようなアルゴリズムを図5.3に示したようなシステムに適用した例を示す。検討の条件は5.2節と同一である。まず、図5.28に同定結果例を示す。図で、横軸は、同定のイタレーション回数、縦軸は、各イタレーション時の同定値を真値で割ったもので、1になるべきものである。

これの(1)図と(2)図は、ともに雑音レベルは5%であるが、異なる雑音を加えた場合を表わしている。すなわち、この両図で、加えている雑音そのものは違ったものであるが、大きさ、周波数特性など、統計的性質は同じとなっている。また、これらの図は、提案する同定法での例を示した図5.11(1)に対応している。これらの図を比較することにより、

- ・イタレーションの所要回数はほぼ同じ  
(図5.11(1)と図5.28(1)、(2)より)
- ・モードを使用した方法は、同定結果が雑音の与え方に敏感である  
(図5.26(1)と図5.28(2)より)

がわかる。剛性より、減衰係数の同定誤差の方が大きくなりがち傾向は、図5.11、図5.28に共通した特徴である。

また、図5.29にセンサ位置に対する同定誤差の数値シミュレーション例を載せる。これは、図5.13に対応している。図で、横軸は、センサ位置、縦軸は図5.28同様、同定値を真値で割ったものである。この図は、同定のシミュレーションを、センサ位置を梁の全長にわたって変えながら、行った結果をプロットしたものである。ここでの検討条件は、アクチュエータ位置、その他5.2節の図5.13と同じである。

さて、図5.29(1)、および(2)に、入力1、すなわち図5.4のような入力、を加えた場合の同定結果を示す。ここで図5.29(1)は観測雑

(同定値) / (真値)

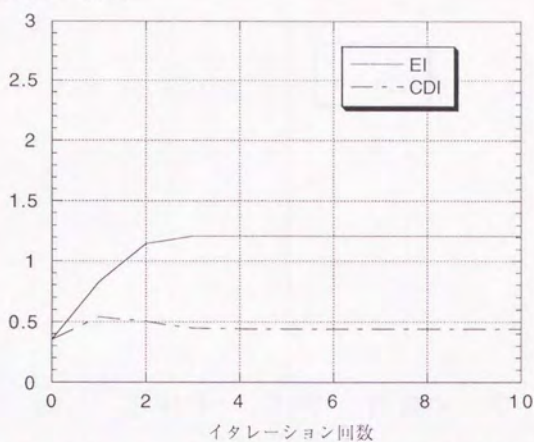


図 5.28 (1) モード特性を利用した同定結果例 (1)

(同定値) / (真値)

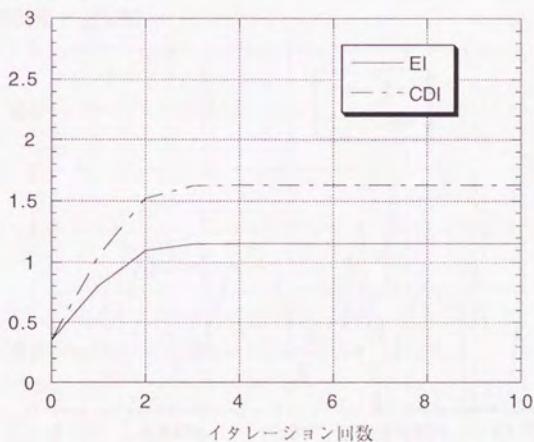


図 5.28 (2) モード特性を利用した同定結果例 (2)

(同定値) / (真値)

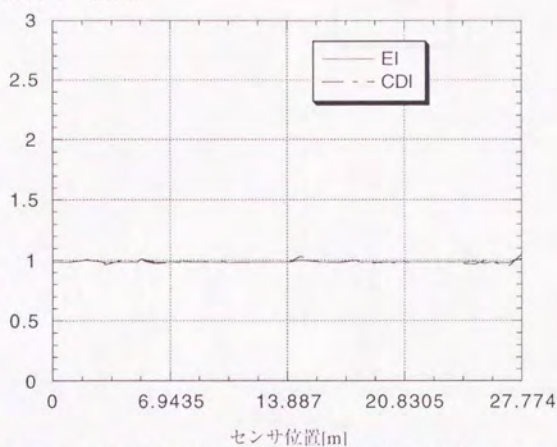


図 5.29 (1) センサ位置によるモード特性を利用した同定結果例  
(入力1、観測雑音なし)

(同定値) / (真値)

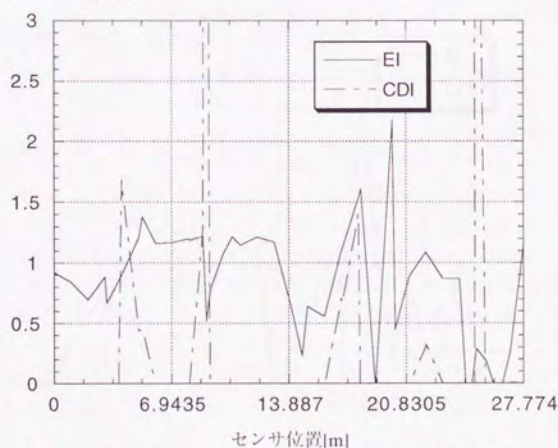


図 5.29 (2) センサ位置によるモード特性を利用した同定結果例  
(入力1、観測雑音5%)



(同定値) / (真値)



図 5.29 (3) センサ位置によるモード特性を利用した同定結果例  
(入力 2、観測雑音なし)

(同定値) / (真値)

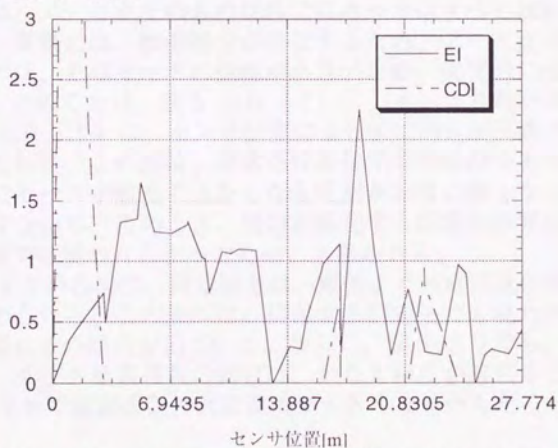


図 5.29 (4) センサ位置によるモード特性を利用した同定結果例  
(入力 2、観測雑音 5%)

音がないとした場合、図5.29(2)は5%の観測雑音がある場合である。雑音がない場合には、ほぼ正確に同定できること、同定結果は雑音に敏感であることがわかる。

また、図5.29(3)、および(4)に入力2、すなわち図5.16のような入力を加えた場合の同定結果を示す。ここで、図5.29(3)は観測雑音がないとした場合、図5.29(4)は5%の観測雑音がある場合である。図5.29(1)と(3)を比べると、後者の方が、同定結果のセンサ位置依存性が高くなっている。また、図5.29(1)と(2)、図5.29(3)と(4)を比較すると、観測雑音があるときの方が、同定結果のセンサ位置依存性が高くなっている。これより、この方法では、加振が十分高い周波数まで行われない、観測雑音がある、など条件が悪くなると、同定結果のセンサ位置依存性が高くなることを示している。

本節で行った同定は、図5.27にもあるように、未知パラメータそのものの同定に先だって、モード特性を導出している。図5.30にその導出精度を示す。図で、横軸はセンサ位置、縦軸は、「1」図で導出されたモードの自然周波数を真値で割ったもの、「2」図で導出されたモード減衰係数を真値で割ったもの、であり、ともに1になるべきものである。

図5.30の各図は、図5.29に対応している。この図は、図5.29と同様の傾向を有することがわかる。すなわち、モード特性の同定精度と未知パラメータの同定精度は直接的な関係があることがわかる。

なお、図5.29と図5.5を参照すると、同定精度が悪化するの、各モード形状のノード点付近であることがわかる。すなわち、観測雑音がないとき、理想的には、ノード点そのもの以外ではモードはすべて現われるはずである。しかし、実際には、観測雑音が存在するため、ノード点そのものでなくとも、近傍では、そのモードの振幅が小さいため、実質的にモードが観測できなくなる。このことは、図5.30(2)、(4)よりわかる。

なお、図5.29(1)は、センサ位置によらずに同定が正確であることを示している。これは、この図は、非常な好条件下でのものであり、ノード近傍で、実質的にモードが観測できなくなる区間が非常に狭くなっているためと思われる。すなわち、このとき、同定が悪化する区間が非常に小さくなり、この図の解像度では現われなかったため、と思われる。

また、図5.29の各図で、同定誤差は、剛性より減衰係数の同定で大きな傾向が認められる。この傾向は、提案する同定法でも現われたが、ここでは、より顕著にその傾向が出ている。さらに、図5.30でも、観測雑音が存在する場合、モード減衰係数の同定は、かなり精度が落ちることがわかる。これは、図5.29で減衰係数の同定誤差が大きくなりがちだったことに対応している。

この方法による同定と提案する方法による同定を比較する。比較する図は、図5.29(1)と図5.13(1)の打ち切りスレッシュホールド $10^{-3}$ の図、図

(導出された自然周波数) / (真値)

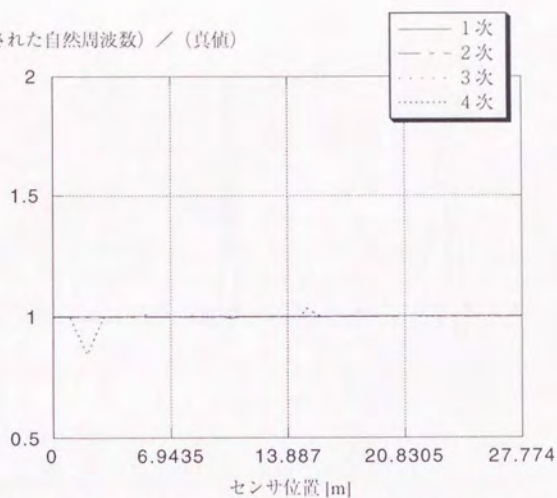


図 5.30 (1) .1 モード自然周波数の導出精度  
(入力1、観測雑音なし)

(導出されたモード減衰係数) / (真値)

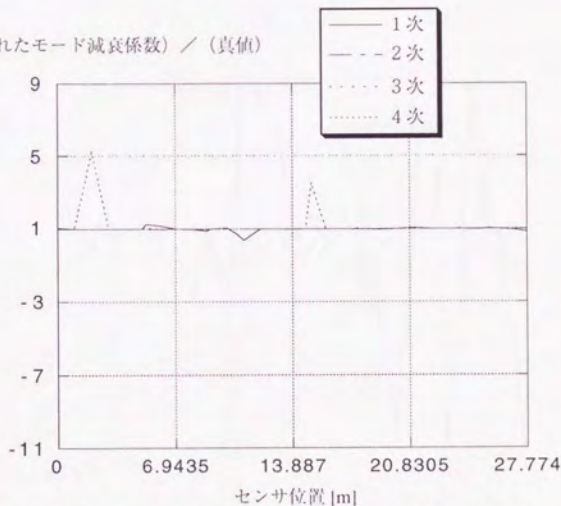


図 5.30 (1) .2 モード減衰係数の導出精度  
(入力1、観測雑音なし)



(導出された自然周波数) / (真値)

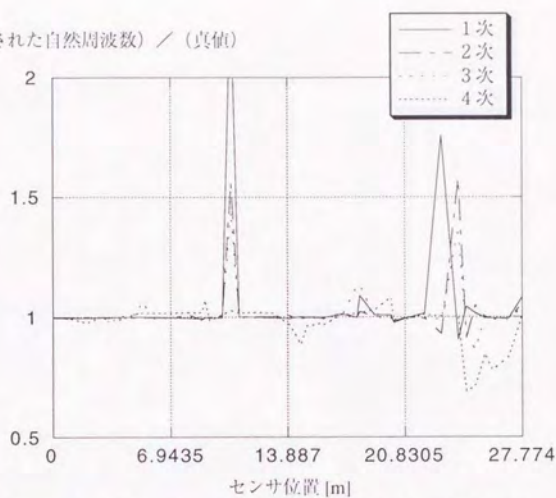


図 5.3.0 (2).1 モード自然周波数の導出精度  
(入力 1、観測雑音 5%)

(導出されたモード減衰係数) / (真値)

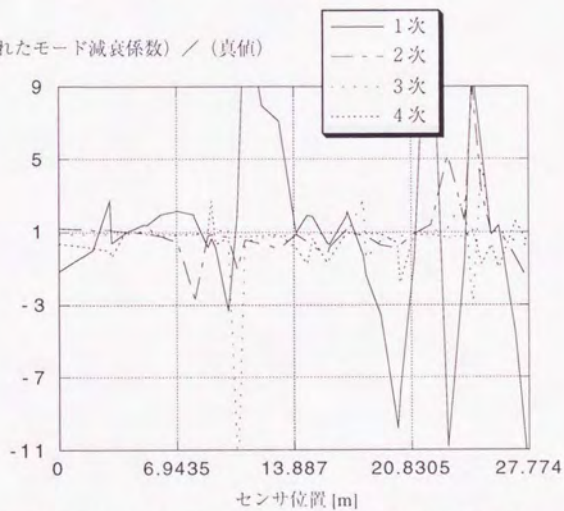


図 5.3.0 (2).2 モード減衰係数の導出精度  
(入力 1、観測雑音 5%)

(導出された自然周波数) / (真値)

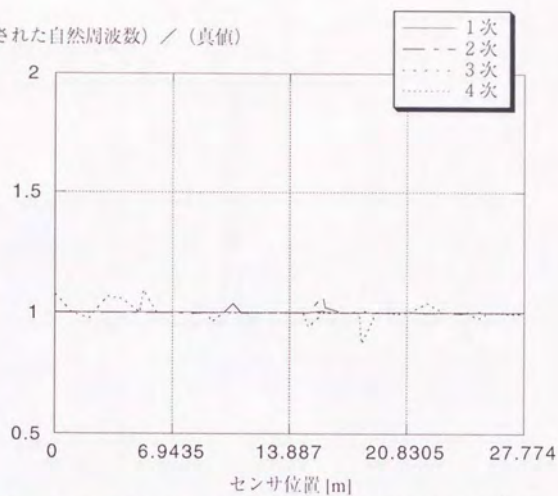


図 5.30 (3).1 モード自然周波数の導出精度  
(入力2、観測雑音なし)

(導出されたモード減衰係数) / (真値)

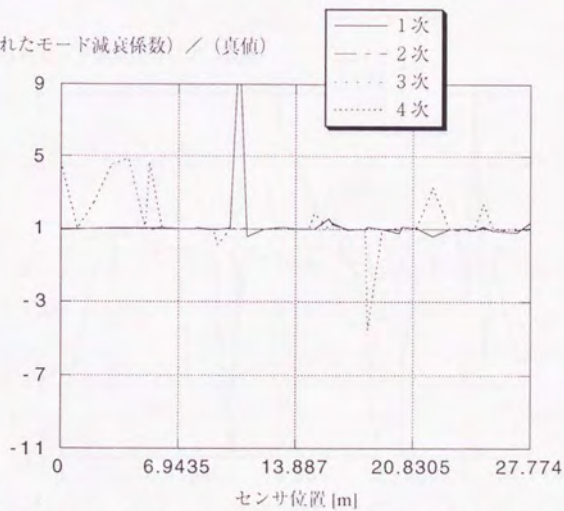


図 5.30 (3).2 モード減衰係数の導出精度  
(入力2、観測雑音なし)

(導出された自然周波数) / (真値)

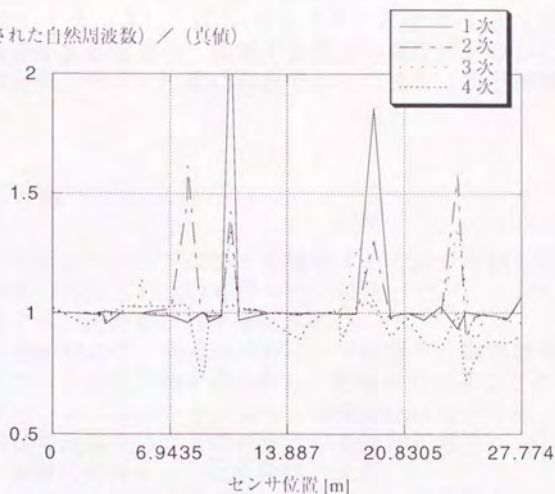


図 5.3 0 (4) .1 モード自然周波数の導出精度  
(入力 2、観測雑音 5%)

(導出されたモード減衰係数) / (真値)

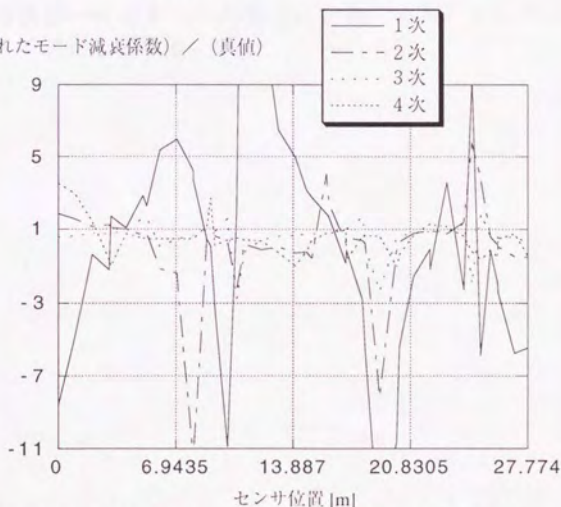


図 5.3 0 (4) .2 モード減衰係数の導出精度  
(入力 2、観測雑音 5%)



5.29 (2) と図 5.13 (2) の打ち切りスレッシュホールド  $10^{-3}$  の図、図 5.29 (3) と図 5.18 (3)、図 5.29 (4) と図 5.18 (2) である。これより特に雑音がある場合の、提案する方法の優位性がわかる。すなわち、提案する方法の方が、センサ位置に鈍感であり、また、同定精度そのものも高くなっている。

## 5.5 本章のまとめ

以上、数値シミュレーションによって提案する方法を考察した。時不変系の同定では、従来の方法との比較も行った。使用したシミュレーションの範囲内での、提案する方法の有効性が確認された。

まず、時不変系の同定で、同定結果がセンサ位置や、観測誤差に対して鈍感であるが、入力の周波数帯域を狭めると、影響を受けることがわかった。

また、時変系のシミュレーションより、時変 ARMA モデルを、提案するように時間の多項式で近似することの正当性が数値的に示された。また、同定アルゴリズムが正常に動作することも確認できた。

さらに、モード特性を利用する従来の方法では、観測雑音、センサ位置に対してロバストでないことがわかった。

なお、これは数値シミュレーションによる検討であるので、このことより即、提案する方法が一般のすべての場合に有効である、ということにはならない。この点には注意を要する。

## 第6章 結論

離散時間・分布定数系の未知パラメータ同定について検討を加え、パルス応答列を使用した同定法を提案した。この方法は完全に時間領域でのみ議論されているので、時変系への拡張も自然になされる。また、同定誤差の推定も比較的容易に行うことが可能である。本論文では、以上を明示的に示すとともに、数値シミュレーションによって確認した。その結果、提案する方法の有効性が確認された。特に、サンプリング時間間隔が長く、従来のようにモード特性を利用した同定では結果が得られないような場合でも提案する方法では同定は正確に行われることがわかった。ただし、サンプリング時間間隔が長いとき、未知パラメータの初期推定値が真値から大幅にずれていると、誤った同定値に収束した。これは、同定値の解空間は、エリアシングの効果の分、多数のローカルミニマムを持つためと思われる。

また、入力周波数帯域が狭いときには、同定精度が悪化し、また、観測雑音に敏感になることがわかった。

さらに、従来のモードを用いた方法では、モード形状のノード点付近にセンサを配置すると同定精度が落ちるのに対して、提案する方法では、同定精度はセンサ配置にはあまり依存しないこともわかった。

なお、従来の方法との比較は数値シミュレーションを通して行っている。よって、この傾向がいかなる場合でも必ず成立することが証明されているわけではない。

近年、柔軟マニピュレータや大変形する構造物など、単一の線形方程式では表わせないシステムに関する研究が注目されている。このようなシステムの同定にも、本研究の結果は反映できるものと思われる。すなわち、提案する同定法は、時変系の同定にも使用できることが確認されているが、そのようなシステムを時変系とみなせるように定式化すれば、本論文のアルゴリズムを直接利用することができる。

本論文では、分布定数系の定式においてスプライン関数を用いているが、このほか、有限要素法を使用することも有力な手段である。提案した同定アルゴリズムは、いずれの場合にも対応可能である。スプライン関数の使用は分布定数系を有限次元化することであり、その根本的な考え方は有限要素法と同じである。ここでは、B-スプライン関数を利用し、境界条件を機械的に取り込む方法を示したが、この概念はまさしく有限要素法の技法である。

この手法は、偏微分方程式を常微分方程式近似しており、得られる解はい



わゆる弱解である。今後、分布定数系をより直接的に扱えるような表現の開発が望まれる。

本同定手法は、オフラインで同定を行うものであるが、ARMA導出部分をオンラインの手法に切り替えればオンラインの同定法にもなりうるものである。ただし、その場合には、収束性や定常誤差などが問題となる可能性がある。その点には注意を要する。また、その際、ARMAをアップデートするタイミングと、未知パラメータを逐次的に同定するタイミングを同期させるのか否かも考慮する必要がある。

提案する方法はシステムを構成している物の物理量を同定するので、例えば供試体と支持台が連結したような系で同定を行っても、供試体単体時の挙動を予測することができる。本論文の数値シミュレーションにおいては、いわば梁が宙に浮かんだような対象を中心に考えたが、梁が何かに支持されているような場合、すなわち供試体・支持体連結系、でも同定は可能である。本論文でもそのことについて、簡単に触れたが、文献78では、供試体・支持体連結系を用いて検討がなされている。なお、供試体と支持台が連結している場合、その連結部の支持の一般化力を直接観測、もしくは何らかの形で推定し、検討に用いるモデルを供試体単体系にするなど、計算機内で参照するシステムのモデル表現を単純化することが考えられる。

ただし、物理量の同定を行うと、例えばその同定結果を制御系設計に活用する場合、制御系設計に必要な量は改めて計算し直す必要がある。モード特性を同定する場合にはその必要はなく、その点には注意を要する。

ARMAモデルの安定性に関する研究が最近行われている。一方、本手法は、途中で得られるARMAモデルが安定であるか否かを問わずに駆動できるが、不安定である場合にはARMAモデルの次数を大きく超えた個数のパルス応答列を計算すると、値が発散することになる。今後、これに関連した詳細な検討がなされるべきである。例えば、構造物の振動のように、その挙動が安定であることが予めわかっているような場合、それを積極的に同定アルゴリズムの中で活用するような枠組みが望まれる。

本研究では、入力、既知、もしくは観測できる、という場合を扱っているが、入力の値そのものがわからないケースも考えられる<sup>(64-65, 79)</sup>。今後、同定法のような場合への拡張も議論されるべきと思われる。



## 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教官の松尾弘毅教授には、終始、適切なご助言をいただき、研究の進むべき方向について多大のご指導を賜わった。また、文部省宇宙科学研究所の川口淳一郎助教授にも本研究のスタート時点より常にお心配りいただき、また、研究の節目節目において、細部にわたって、深い洞察を元にご指導いただいた。併せて深く感謝する次第である。また、同研究所の小野田淳次郎教授、V. J. Modi客員教授（当時）も、忙しい中、長時間にわたる議論に応じていただいた。両教授の深い専門知識に基づく見解は非常に有益であった。特に小野田淳次郎教授には、本論文に関係した各分野の研究の現状をご教授いただいたのみならず、本論文の方法を実際の構造物へ適用する際の、具体的な手法や問題点などに関しても貴重なご助言を賜わった。さらに、同研究所石井信明助教授、山川宏助手にも、直接研究に関わりない分野を含め、いろいろお骨折りいただいた。井上寧子嬢には、本論文の印刷、コピーの労をお願いした。

本論文は、この他、宇宙科学研究所松尾研究室、雛田研究室の学生一同の有形無形の協力など、多くの人々の尽力の上で完成したものである。ここに、このことを記し、感謝の念を表する。

## 参考文献

- 1) D. B. Schaechter and D. B. Eldred, "Experimental Demonstration of the Control of Flexible Structures", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 7, No. 5, pp.527-534, Sept.-Oct. 1984
- 2) D. B. Schaechter, "Hardware Demonstration of Flexible Beam Control", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 1, pp.48-53, Jan.-Feb. 1982
- 3) D. B. Schaechter, "Estimation of Distributed Parameter System", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 1, pp.22-26, Jan.-Feb. 1982
- 4) D. B. Schaechter, "Estimation of Distributed Parameter Systems: Some Closed-Form Solutions", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, No. 4, pp.408-412, July-Aug. 1986
- 5) H. B. Hablani, "Constrained and Unconstrained Modes: Some Modeling Aspects of Flexible Spacecraft", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 2, pp.164-173, March-April 1982
- 6) H. Baruh and K. Choe, "Sensor Placement in Structural Control", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 13, No. 3, pp.524-533, May-June 1990
- 7) 砂原善文編、「特集 LSSと近未来制御理論」、計測と制御、Vol. 26, No. 10, 1987年10月
- 8) 柔軟宇宙構造物研究会、「大型宇宙構造物の制御 — 研究の現状と展望 '86」、東京都立科学技術大学、1987年
- 9) LSS定式化手法調査チーム、「柔軟宇宙構造物ダイナミクスの定式化について」、航空宇宙技術研究所、1985年2月
- 10) D. J. Mook and J. L. Junkins, "Minimum Model Error Estimation for Poorly Modeled Dynamic Systems", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 11, No. 3, pp.256-261, May-June 1988
- 11) E. E. Denman, T. K. Hasselman, J. N. Juang, J. L. Junkins, M. Kamat, C. T. Sun, F. Udawadia, V. B. Venkayya, "Identification of Large Structures on Orbit A Survey", Acta Astronautica, Vol. 20, pp. 21-27, 1989
- 12) 相良節夫編、「特集 システム同定 — 最近の理論と応用」、計測と制御、Vol.

28, No. 4, 1989年4月

- 13) 砂原善文、「地下資源開発のためのシステム理論的考察」、計測と制御、Vol. 23, No. 7, pp.606-613, 1984年7月
- 14) 砂原善文、「分布定数システムにおける逆問題」、システム／制御／情報、Vol. 35, No. 10, pp.626-633, 1991年10月
- 15) 相良節夫、秋月影雄、中溝高好、片山徹、「システム同定」、計測自動制御学会、1981年2月
- 16) R. S. Pappa, A. Schenk, and C. Noll, "Eigensystem Realization Algorithm Modal Identification Experiences With Mini-Mast", NASA TM-4307, Feb. 1992
- 17) S. R. Ibrahim and E. C. Mikulick, "The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses", Shock and Vibration Bulletin, No.46, Part 5, pp.187-196, Aug. 1976
- 18) S. R. Ibrahim and E. C. Mikulick, "A Method for the Direct Identification of Vibration parameters from the Free Response", Shock and Vibration Bulletin, No.47, Part 4, pp.183-198, Sep. 1977
- 19) S. R. Ibrahim, "An Approach for Reducing Computational Requirements in Modal Identification", AIAA Journal, Vol. 24, No. 10, Oct. 1986
- 20) S. R. Ibrahim, "Time-Domain Quasilinear Identification of Nonlinear Systems", Vol. 22, No. 6, June 1984
- 21) S. R. Ibrahim and R. S. Pappa, "Large Model Survey testing Using Ibrahim time Domain Identification Technique", Journal of Spacecraft and rockets, Vol. 19, No. 5, Sept.-Oct. 1982
- 22) J. N. Juang and R. S. Pappa, "An Eigensystem Realization Algorithm Modal Parameter Identification and Model Reduction", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 5, Sept.-Oct. 1985
- 23) L. G. Horta and J. N. Juang, "Frequency Domain System Identification Methods: Matrix Fraction Description Approach", AIAA-93-3839-CP, 1993
- 24) 山口功、木田隆、「大型宇宙構造物の同定実験 — 矩形波入力による時間領域での同定 —」、計測自動学会論文集、Vol. 28, No. 8, pp.982-990, 1992年8月
- 25) 山口功、佐々修一、木田隆、「加速度計出力を用いた宇宙構造物の時間領域での同定」、計測自動制御学会論文集、Vol. 29, No. 6, pp.721-723, 1993年6月
- 26) R. W. Longman and J. N. Juang, "Recursive Form of the Eigensystem Realization Algorithm for System Identification", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 12, No. 5, pp.647-652, Sept.-Oct. 1989
- 27) M. J. Roemer and D. J. Mook, "Robust Modal Identification /Estimation of the Mini-Mast



Testbed", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 15, No. 3, pp.642-647, May-June 1992

28) J. N. Juang and R. S. Pappa, "Effects of Noise on Modal Parameter Identified by the Eigensystem Realization", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, No. 3, pp.294-303, May-June 1986

29) D. J. Mook and J. S. Lew, "A Robust Algorithm for System Realization/Identification", Journal of the Astronautical Sciences", Vol. 38, No. 2, pp.229-243, Apr.-June 1990

30) Y. Oshman and T. Mendelboim, "Maximum Likelihood Identification and Realization of Stochastic Systems", AIAA-93-3840-CP, 1993

31) 相良節夫編、「ミニ特集 システム同定 — モデリングと同定法の新傾向」、計測と制御、Vol. 32, No. 9, 1993年9月

32) J. K. Huang, J. N. Juang, and C. W. Chen, "Single-Mode Projection Filters for Modal Parameter Identification for Flexible Structures", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 12, No. 4, July-Aug. 1989

33) H. Baruh and H. P. Khatri, "Identification of Modal Parameters in Vibrating Structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 125, No. 3, pp.413-427, 1988

34) A. Berman and E. J. Nagy, "Improvement of a Large Analytical Model Using test Data", AIAA Journal, Vol. 21, No. 8, pp.1168-1173, Aug. 1983

35) N. G. Creamer and J. L. Junkins, "Identification Method for Lightly Damped Structures", Journal of guidance, Control and Dynamics, Vol. 11, No. 6, pp.571-576, Nov.-Dec. 1988

36) A. Berman and W. G. Flannelly, "Theory of Incomplete Models of Dynamics Structures", AIAA Journal, Vol. 9, No. 8, pp.1481-1487, Aug. 1971

37) M. Link and K. Badenhausen, "Identification and Dynamic Condensation of Physical system Matrices Using Incomplete Dynamic Response Data", the Second International Symposium on Aeroelasticity and Structural Dynamics (ESA-86-97411), pp.536-545, 1985

38) S. L. Hendricks, S. Rajaman, M. P. Kamat, and J. L. Junkins, "Identification of Large Flexible Structures Mass/Stiffness and Damping from On-Orbit Experiments", Journal of guidance, Control and Dynamics, Vol. 7, No. 2, pp.244-245, Mar.-Apr. 1984

39) S. Rajaman and J. L. Junkins, "Identification of Vibrating flexible Structures", Journal of guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 4, pp.463-470, July-Aug. 1985

40) R. L. Fox and M. P. Kapoor, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, pp.2426-2429, Dec. 1968

41) E. Bergmann and J. Dzielski, "Spacecraft Mass Property Identification with Torque-Generating Control", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 13, No. 1, pp.99-103, Jan.-Feb. 1990

- 42) B. Caesar and J. Peter, "Direct Update of Dynamic Mathematical Models from Modal Test Data", AIAA Journal, Vol. 25, No. 11, Nov. 1987
- 43) C. Stavrinidis, O. Brunner, B. Caesat, L. Eckert, and H. Wohler, "Recent Advances in Satellite dynamic Verification", paper for 43rd Congress of the International Astronautical Federation, IAF-92-0313, Aug. 1992
- 44) H. Baruh and L. Meirovitch, "Parameter Identification in Distributed Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol. 101, No. 4, pp. 551-564, 1985
- 45) M. A. Norris and L. Meirovitch, "On the Problem of Modeling for Parameter Identification in Distributed Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 2451-2463, 1989
- 46) J. C. Chen and J. A. Garba, "Analytical Model Improvement Using Modal Test Results", Vol. 18, No. 6, pp.684-690, June 1980
- 47) J. C. Chen, L. F. Peretti and J. A. Garba, "Spacecraft structural Model Improvement by Modal test Results", Journal of spacecraft and Rockets, Vol. 24, No. 1, pp.90-94, Jan.-Feb. 1987
- 48) L. Meirovitch and M. A. Norris, "Parameter Identification in Distributed Spacecraft Structures", Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 34, No. 4, pp.341-353, Oct.-Dec. 1986
- 49) K. Y. Lee and S. A. Hossain, "Distributed Systems Approach to the Identification of Flexible Structures", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, No. 6, pp.540-548, Nov.-Dec. 1987
- 50) H. T. Banks and J. M. Crowley, "Parameter Identification in Continuum Models", NASA CP-16394, May 1983
- 51) H. T. Banks and J. M. Crowley, "Parameter Estimation in Timoshenko Beam Model", Journal of Astronautical Sciences, Vol. XXXI, No. 3, pp.381-397, July-Sep. 1983
- 52) H. T. Banks and I. G. Rosen, "Computational Methods for the Identification of Spatially Varying Stiffness and Damping in Beams", Control-Theory and Advanced Technology, Vol. 3, No. 1, pp. 1-32, March 1987
- 53) A. K. Noor and M. M. Mikulas Jr., "Continuum Modeling of Large Lattice Structures", NASA TP-2767, Feb. 1988
- 54) J. N. Juang and C. T. Sun, "Identification of Large Flexible Structures by Using Simple Continuum Models", Journal of the Astronautical Sciences, Vol. XXXI, No. 1, pp.77-98, Jan.-Mar. 1983
- 55) M. Hoshiya and E. Saito, "Structural Identification by Extended Kalman Filter", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, No. 12, pp.1757-1770, Dec. 1984



- 56) V. I. Karlov, R. M. Glaese, D. W. Miller, and E. F. Crawley, "Physical Model-Set Identification for Robust Control of Flexible Structures", AIAA-93-3837, 1993
- 57) 葛西時雄、山口功、甲斐高志、佐野政明、木田隆、小松敬治、「振動制御を受ける構造物のシステム同定」、第37回宇宙科学技術連合講演会講演集、pp.547-548 (3D13)、1993年
- 58) Y. Z. Tsytkin and M. V. Bondarenko, "An Optimal Algorithm for Identification of Rapidly Time-Varying Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 2, pp.237-239, Feb. 1992
- 59) G. Davidov, M. Shpitalni, A. Shavit and Y. Koren, "A General Algorithm for Identification of Rapidly Time-Varying Systems", Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 8, pp.1129-1130, Aug. 1987
- 60) V. Havlena, "Adaptive Kalman Filter for A Time-Varying Multi-Input Multi-Output ARMAX System", Proceedings of 12th World Congress International Federation of Automatic Control, Vol. 9, pp.11-14, July 1993
- 61) L. Zheng, "Discrete-Time Adaptive Control of Deterministic Fast Time-Variant Systems", IEEE transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 5, pp.444-447, May 1987
- 62) L. Zheng, "Robust Identification of Time-Varying Systems Via An Auxiliary Variable", Proceedings of 12th World Congress International Federation of Automatic Control, Vol. 9, pp.15-18, July 1993
- 63) 小金澤銅一、「入力に未知のむだ時間をもつ連続時間システムのオンラインパラメータ推定法」、計測自動制御学会論文集、Vol. 29, No. 11, pp.1283-1292, 1993年11月
- 64) S. R. Ibrahim, "Random Decrement Technique for Modal Identification of Structures", Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, No. 11, pp.696-700, Nov. 1977
- 65) A. Cole Jr., "On-Line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by random Decrement Signatures", NASA CR-2205, March 1973
- 66) 中溝高好、「講座 線形離散時間システムの同定手法 I ~ V」、システムと制御、Vol. 25, No. 8 ~ Vol. 26, No. 2, 1981年8月 ~ 1982年2月
- 67) A. C. Lee and J. H. Chen, "Modal Analysis for Randomly excited Structural Systems with Unmeasured Input", Journal of Sound and Vibration, Vol. 132, No. 1, pp.101-113, 1989
- 68) W. Gersch and S. Luo, "Discrete Time Series Synthesis of Randomly Excited Structural System Response", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 51, No. 1(Part 2), pp.402-408, 1972
- 69) N. C. Mickleborough and Y. L. Pi, "Model Parameter Identification Using Z-Transforms", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp.2307-2321, 1989



- 70) F. Jabbari and J. S. Gibson, "Vector-Channel Lattice Filters and Identification of Flexible Structures", IEEE transactions on Automatic Control, Vol. 3, No. 5, pp.448-456, May 1988
- 71) F. Jabbari and J. S. Gibson, "Adaptive Identification of a Flexible Structure by Lattice Filters", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 12, No. 4, pp.548-554, July-Aug. 1989
- 72) N. Sundararajan, J. P. Williams and R. C. Montgomery, "Adaptive Modal Control of Structural Dynamic Systems Using recursive Lattice Filters", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 2, pp.223-229, Mar.-Apr. 1985
- 73) N. Sundararajan and R. C. Montgomery, "Identification of Structural Dynamics Using Least-Square Lattice Filters", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No. 5, pp.374-381, Sept.-Oct. 1983
- 74) 桜井明、「スプライン関数入門」、東京電機大学出版局、1981年6月
- 75) 児玉慎三、須田信英、「システム制御のためのマトリクス理論」、計測自動制御学会、1981年
- 76) SESデータセンター編、「M-3SII-1 / MS-T5 飛翔実験計画書」、宇宙科学研究所、SES-TD-84-014、1985年1月
- 77) 富士通編、「SSL II 使用手引書 (科学用サブルーチンライブラリ)」、富士通、1987年12月
- 78) S. Sawai, J. Kawaguchi, and H. Matsuo, "Identification of Uncertain Structural Parameters in Flexible Boosters", AAS / AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, AAS 93-122, Feb. 1993
- 79) 小野田淳次郎、「ランダム応答解析による翼の動特性推定の試み」日本航空宇宙学会誌、26巻、299号、pp.649-656、1978年12月

## 付録 主な用語の説明

以下で、本論文で使用している主な用語を概説する。非常に一般的で説明の必要性のないと思われるものは省略した。制御分野に属するものを前半部に、数学的な用語は後半部に、という順番で記した。

なお、ここで扱った用語は、以下のものである。

質量行列・剛性行列・減衰行列  
ARMA、ARMAX、VAR(1)モデル  
Lattice フィルター  
忘却因子  
モード特性  
モードの自然周波数、モード減衰係数  
ナイキスト周波数  
エリアシング  
コロケーション  
システムの実現  
最小実現  
マルコフパラメータ  
可観測指数  
自由応答  
インパルス応答  
パルス応答  
Hankel行列 (ハンケル行列)  
SVD分解  
特異値  
一般化逆行列  
擬似逆行列  
一般化最小2乗法、拡大最小2乗法  
完備  
ガラーキン法  
弱解  
ニュートンラフソン法  
列展開  
クロネッカ積  
白色雑音  
共分散  
核空間

質量行列・剛性行列・減衰行列  
構造物の振動の方程式を

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$$

ただし、

$x(t)$  : 状態量

$f(t)$  : 入力

とおくとき、行列 $M$ 、 $C$ 、 $K$ をそれぞれ質量行列、減衰行列、剛性行列と呼ぶ。

### ARMA、ARMAX、VAR(1)モデル

ARMAは、AutoRegressive Moving Averageの略で、離散時間系の入出力関係を

$$y(k) = - \sum_{i=1}^p A_i y(k-i) + \sum_{i=0}^p B_i u(k-i)$$

ただし、

$y(k)$  : システムの出力

$u(k)$  : システムの入力

$k$  : サンプルング時刻を表わすパラメータ

と表わしたものである。この式に誤差項を加え、その存在を陽に表わしたとき、それをARMAXモデルと呼ぶことがある。

さらに、上述のARMAモデルの式で、右辺第2項を落としたものをARモデル、右辺第1項を落としたものをMAモデルと呼ぶ。

VAR(1)モデルとは、多変数系で1次のARモデルのことである。

### Latticeフィルター

フィルターの一種。現在の出力を、過去の出力が張る空間に写影したものを現在の推定値として使用するものである。



## 忘却因子

適応制御などの分野でよく用いられる因子。例えばオンラインで推定を行う場合、現在の観測量を元に推定を変更して行くのであるが、推定の真値が徐々に変化する場合、過去の観測量の影響を軽減する必要がある。忘却因子は過去の影響の軽減の度合を決定する因子である。

## モード特性

本論文では、モード周波数、モード減衰、モード形状、入力に対するモード感度を総称してモード特性と呼んでいる。モード周波数とは、システム行列の固有値の虚数部分であり、モード減衰は実部の符号をプラスマイナス逆にしたものである。なお、図5.2に現われる自然周波数は、減衰項がないとしたときのシステムの固有周波数である。

## モードの自然周波数、モード減衰係数

ある振動モードの運動が、

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f$$

ただし、

$x$  : モードの状態変数 (スカラ)

$f$  : 外力

とおくとき、

$\omega_n$  : 自然周波数

$\gamma$  : モード減衰係数

という。

## ナイキスト周波数

離散時間系のサンプリング時間間隔をTとおくとき、

$$f_s = \frac{1}{T}$$

をサンプル周波数という。このとき、ナイキスト周波数は、

$$\frac{f_s}{2}$$

によって定義される。ナイキスト周波数以上の周波数成分を有する信号は、時間間隔Tのサンプリングでは完全には再現できないことが証明されている。

### エリアシング

離散時間系でナイキスト周波数以上の周波数成分は、ナイキスト周波数以下の周波数成分と重なり合い、分離が不可能になる。この現象をエリアシングと言う。

### コロケーション

センサ、アクチュエータを同一位置に配置すること。コロケーション系の制御系は適用例が多く、研究も盛んに行われている。

### システムの実現

システムの伝達関数と同じ伝達関数を持つ状態方程式と出力方程式を得ること。例えば、状態方程式、出力方程式を

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

とおくとき、3個の行列の組(A, B, C)を実現と言うこともある。実現の行列(A, B, C)は一意には決まらないが、

$$\{CB, CAB, CA^2B, CA^3B, CA^4B, \dots\}$$

は一定となる。

以上で(A, B, C)は連続時間系であるが、離散時間系についても同様に用いる。

### 最小実現

実現のうち、状態変数の数が最小のものを言う。最小実現を達成する行列も一意には決まらない。

### マルコフパラメータ

システムの実現を(A, B, C) とおくと、

$$\{CB, CAB, CA^2B, CA^3B, CA^4B, \dots\}$$

をマルコフパラメータと呼ぶ。また、離散時間系での実現を(F, G, H) とおくと、

$$\{HG, HFG, HF^2G, HF^3G, HF^4G, \dots\}$$

をマルコフパラメータと呼ぶこともある。実現は一意には決定できなかったが、マルコフパラメータはシステムごとに一意に決まる。

### 可観測指数

システムの最小実現を(A, B, C) とおくと、可観測行列は

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

となる。このとき、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \end{bmatrix} = \text{rank } A$$



を満たす最小の $m$ を可観測指数と呼ぶ。

### 自由応答

システムの応答のうち、入力がない間の応答のこと。安定なシステムでは自由応答はやがて零に収束する。

### インパルス応答

自由応答の一種。完全に静止したシステムに単位インパルスを与えたときの応答のこと。

### パルス応答

自由応答の一種。完全に静止したシステムに単位パルスを与えたときの応答のこと。本論文では特に、パルス幅と同じ時間幅でパルス応答を観測していったものをパルス応答列と呼んでいる。パルス応答列は、離散時間系のマルコフパラメータとみなすことができる。

### Hankel行列 (ハンケル行列)

パルス応答列を

$$J_0, J_1, J_2, J_3, J_4, \dots$$

とおく。このとき、このパルス応答列を用いた、

$$H_k \equiv \begin{bmatrix} J_k & J_{k+1} & J_{k+2} & \cdots \\ J_{k+1} & J_{k+2} & J_{k+3} & \cdots \\ J_{k+2} & J_{k+3} & J_{k+4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

なる行列をHankel行列と呼ぶ。

拡張Hankel行列はこれを一般化したもので、

- ・パルス応答だけではなく、一般の自由応答を用いて構成する
  - ・各行、各列ごとの時間増分を1に固定するのではなく任意にする
- としたものである。

## SVD分解

特異値分解 (Singular Value Decomposition) のこと。任意の行列  $A \in C^{m \times n}$  を考え、

$$\text{rank } A = r,$$

準正定行列  $A^* A$  の固有値を

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$$

とする。このとき、あるユニタリ行列  $U \in C^{m \times m}$ 、 $V \in C^{n \times n}$  が存在して、

$$A = USV^*$$

ただし、

$$S \equiv \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in C^{m \times n}$$

$$S_0 \equiv \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_r^{1/2}) \in C^{r \times r}$$

となる。一般的にはこれを行列  $A$  の特異値分解と呼ぶ。

本論文では、特に

$$A = U_0 S_0 V_0^*$$

ただし、

$$U = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix} \quad U_0 \in C^{m \times r}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 \end{bmatrix} \quad V_0 \in C^{n \times r}$$

によって、特異値分解を定義している。

## 特異値

上記の行列 $S_0$ の対角項を特異値と呼ぶ。

### 一般化逆行列

行列 $A$ に対して、

$$AA^-A = A, A^-AA^- = A^-$$

を満たす行列 $A^-$ を一般化逆行列と呼ぶ。一般化逆行列は一意ではない。

### 擬似逆行列

一般化逆行列のひとつ。行列 $A$ に対して、以下の4つの性質を持つ行列 $A^+$ を擬似逆行列と呼ぶ。

$$\begin{aligned} & \cdot (A^+)^* = A \\ & \cdot (A^+)^T = (A^T)^+, (A^-)^* = (A^+)^+, (AA^+)^* = (A^+)^*A^+ \\ & \cdot (AA^+)^* = AA^+, (A^+A)^* = A^+A \\ & \cdot AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+ \end{aligned}$$

このような行列は行列のSVD分解を利用して表現できる。すなわち、行列 $A$ のSVD分解を

$$A = U_0 S_0 V_0^*$$

ただし、 $S_0$ ：対角項が非零の対角行列

とおくと、擬似逆行列は

$$A^+ = V_0 S_0^{-1} U_0^*$$

となる。

一般化最小2乗法、拡大最小2乗法



通常の最小2乗法は、誤差項が白色と仮定して定式化される。誤差項が白色でない場合、最小2乗法による答えは偏差を持つことになる。一般化最小2乗法、拡大最小2乗法は、誤差項が白色とみなせないときを扱っている。一般化最小2乗法は、誤差項を白色化したのちに通常の最小2乗法を適用する方法であり、拡大最小2乗法は、誤差項を含めて推定する方法である。

## 完備

ある点列 $M$ を考える。 $M$ の任意のコーシー列が必ず $M$ の中に極限点をもつとき、この $M$ は完備であるという。

本論文では、例えばある分布定数を有限次元化したとき、その近似次数を無限大にもっていくと必ず元の分布定数そのものに収束していく性質を意味するものとして使用している。

## ガラーキン法

重み付き残差法の1つ。一般に $R$ を領域 $V$ で零にする問題を考える。この問題そのものが解きにくい場合、その近似として、ある重み $W$ を用いて

$$\int WR dV = 0$$

を解くことがある。これを重み付き残差法という。このうち、特に、重み $W$ を空間 $V$ 上の座標関数にとったものをガラーキン法と呼ぶ。

## 弱解

重み付き残差法によって得られた近似解のこと。

## ニュートンラフソン法

簡単のため、1次元で、

$$f(x) = 0$$

を逐次的に解く問題を考える。ここで、 $k$ 回目の解候補 $x_k$ が得られたとき、

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

ただし、

$$f'(x) \equiv \frac{d f(x)}{dx}$$

によって、 $k+1$ 回目の解候補を得るとき、この方法をニュートンラフソン法と呼ぶ。

## 列展開

行列 $A$ を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

とおいたとき、その列展開は

$$\text{vec } A \equiv \left( a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm} \right)^T$$

と定義される。

## クロネッカ積

行列 $A$ 、 $B$ に対して、

$$A \otimes B \equiv \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

とおくとき、この演算 $\otimes$ をクロネッカ積という。

### 白色雑音

信号の自己相関関数がインパルス関数となるような信号のこと。この信号のスペクトル密度は一定となる。

### 共分散

ある信号 $x$ について、

$$P \equiv E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T]$$

ただし、

$E(*)$ : 期待値を表わす

$\bar{x}$ :  $x$ の平均値

とすると、この行列 $P$ のことを共分散（行列）と呼ぶ。

### 核空間

行列 $T$ に対して、

$$\{x | Tx = 0\}$$

なる空間のことを行列 $T$ の核空間と呼ぶ。





