

有限要素法によるシェル構造物の非線形座屈

およびその感度解析手法に関する研究

野 口 裕 久

有限要素法によるシェル構造物の非線形座屈
およびその感度解析手法に関する研究

Study of Finite Element Analysis Methods
for
Nonlinear Buckling of Shell Structures and its Sensitivity

東京大学先端科学技術研究センター

野口 裕久

目 次

第1章 序 論	1
1.1 本研究の目的	2
1.2 従来の研究	4
1.2.1 座屈解析のための幾何学的非線形有限要素法に関する従来の研究	4
1.2.2 シェル要素の開発に関する従来の研究	12
1.2.3 非線形有限要素感度解析手法に関する従来の研究	17
1.3 本研究の概要と意義	23
第2章 幾何学的非線形問題のための total/updated Lagrange 統合型有限要素法定式化	27
2.1 緒 言	28
2.2 仮想仕事の原理	29
2.2.1 仮想仕事式の増分分解	30
2.2.2 接線剛性の作成	32
2.2.3 内力(等価節点力)の算出	34
2.3 プログラミングにおける total-Lagrange 法と updated-Lagrange 法の同一性	35
2.3.1 \mathbf{B} マトリックス ($\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$)	35
2.3.2 接線剛性マトリックス (\mathbf{K} マトリックス)	35
2.3.3 内力(等価節点力)ベクトル	36
2.4 離散化およびプログラミング手順	38
2.4.1 3次元ソリッド要素(連続体要素)	38
2.4.2 アインパラメトリックシェル要素(構造要素)	41
2.4.3 従来の手法との比較	46
2.5 結 言	48
第3章 有限回転増分を考慮した効率的シェル要素の開発およびその評価 ...	49
3.1 緒 言	50
3.2 幾何学的非線形(MITC)シェル要素の基礎式	51

3. 2. 1	形状および変位補間式	51
3. 2. 2	面外せん断ひずみ成分補間式	52
3. 2. 3	ラグランジェ未定乗数法を用いたポテンシャルエネルギーの原理	52
3. 2. 3	仮想仕事式の増分分解	54
3. 3	有限回転テンソルの導入	58
3. 3. 1	軸性ベクトルおよび有限回転テンソル	59
3. 3. 2	幾何学的非線形シェル要素への応用	60
3. 4	接線剛性マトリックスの作成	63
3. 4. 1	有限回転を考慮した付加接線剛性マトリックス	63
3. 4. 2	構成則の変換	64
3. 5	有限要素解析例	65
3. 5. 1	板の 'rolling - up' 解析 (Ex. 3.1)	65
3. 5. 2	円筒シェルの大変形解析 (Ex. 3.2)	65
3. 5. 3	'shallow-roof' の飛び移り座屈解析 (Ex. 3.3)	66
3. 5. 4	半球シェルの大変形解析 (Ex. 3.4)	66
3. 6	接線剛性マトリックスによる応答感度の精度に関する検討	75
3. 6. 1	摂動法による感度解析手法の概要	75
3. 6. 2	各接線剛性より得られる感度の比較	75
3. 7	結 言	78
第 4 章 Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発		79
4. 1	緒 言	80
4. 2	従来の座屈解析	83
4. 2. 1	座屈の定義と分類	83
4. 2. 2	座屈点の探索	85
4. 2. 3	分岐経路への誘導	89
4. 3	Scaled Corrector を用いた分岐解析手法	92
4. 3. 1	座屈点における基礎解法式の考察	92
4. 3. 2	$\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ のスケールリング	93
4. 3. 3	有限要素法における解析手順	94

4. 3. 4	SC法による有限要素分岐解析に関する補足	95
4. 4	有限要素分岐解析例	97
4. 4. 1	正方形板の分岐座屈解析 (Ex.4.1)	97
4. 4. 2	円筒の'diamond-buckling'解析 (Ex.4.2)	101
4. 4. 3	円筒のせん断座屈解析 (Ex. 4.3)	105
4. 5	結 言	109
第5章 座屈後解析における感度解析手法の開発		111
5. 1	緒 言	112
5. 2	弧長法 (arc-length method) の概要	113
5. 2. 1	基礎解法式	113
5. 2. 2	超平面型拘束条件 (Riks, Ramm)	114
5. 2. 3	超平面の更新 (modified Ramm)	115
5. 2. 4	超球面型拘束条件 (Crisfield)	116
5. 2. 5	radial-return による超球型拘束の提案	117
5. 2. 6	scaled arc-length method	117
5. 2. 7	有限要素解析における手順	118
5. 3	静的非線形問題における感度解析手法	122
5. 3. 1	感度解析手法の定式化 (経路依存性のない場合)	123
5. 3. 2	感度解析手法の定式化 (経路依存性のある場合)	124
5. 4	静的座屈後挙動解析における感度解析手法の開発	130
5. 4. 1	座屈後挙動における感度解析の基礎式	130
5. 4. 2	本手法の効率性、実用性について	131
5. 5	有限要素座屈後感度解析例	133
5. 5. 1	正方形板の分岐座屈解析 (Ex. 5.1)	133
5. 5. 2	'shallow-roof' の飛び移り座屈解析 (Ex. 5.2)	136
5. 6	結 言	139
第6章 幾何学的非線形解析における座屈荷重感度解析手法の開発		140
6. 1	緒 言	141

6. 2	座屈解析の概要	142
6. 2. 1	座屈解析の基礎方程式	142
6. 2. 2	座屈点の分類	143
6. 3	従来の座屈感度解析	144
6. 3. 1	Linearized One-point Eigenvalue 解析	144
6. 3. 2	座屈荷重の感度解析手法 (方法 1)	145
6. 3. 3	座屈荷重の感度解析手法 (方法 2)	146
6. 3. 4	両手法の検討	146
6. 4	total 変位拘束条件を用いた座屈荷重感度解析手法の定式化	148
6. 4. 1	弧長法に基づく感度解析手法の概要	148
6. 4. 2	total 変位拘束条件を用いた感度解析手法	149
6. 4. 3	本座屈感度解析手法に対する検討	150
6. 5	有限要素座屈荷重感度解析例	155
6. 5. 1	'Shallow folded frame' の飛び移り座屈解析 (Ex. 6.1)	155
6. 5. 2	'Shallow roof' の飛び移り座屈解析 (Ex. 6.2)	158
6. 5. 3	Williams-Yoshida's Toggle の分岐解析 (Ex. 6.3)	161
6. 5. 2	円筒の 'diamond-buckling' 解析 (Ex. 6.4)	165
6. 6	結 言	170
第 7 章 結 論		172
参考文献		174
付 録		193
謝 辞		200

第 1 章

序 論

Introduction

1. 1 本研究の目的

近年の先端技術の発展は、構造システムに対する経済的な要請に応えるべく、より洗練された工業材料や製造方法を生みだし、最新の宇宙航空機器あるいは原子力施設などの例を挙げるまでもなく、構造物の薄肉化を進めている。これは同時に構造応答の強い非線形性を生みだし、座屈現象の解析が構造設計や信頼性評価に不可欠なものになることを意味している。座屈現象は、応答の飛び移りや分岐によって構造物が安定性を失うことであるが、このような薄肉構造物の終局耐力をあらかじめ知るためには、スケール試験を行なう以外には有限要素法に代表される数値解手法を用いて評価することになる。この時、次の2点について留意しなければならない。

まず1点は、従来行なわれていた線形座屈理論の仮定に基づく解析では正確な座屈荷重が予測できないことである。これは構造応答の非線形性が増すためであり、その結果平衡経路を忠実に追従する増分型の幾何学的非線形解析を実施し座屈点を求めなければならない。この点についてはすでに多くの研究により線形座屈理論に基づいた予測値が実際の座屈荷重よりも高くなることが指摘されている。もう1点は、このような非線形座屈現象に対しては主平衡経路だけの解析では不十分なことである。これは、通常の数値解析法ではエネルギー的に不安定な分岐経路よりも安定な主経路が求められるが、実際の薄肉構造物は殆どの場合なんらかの初期不整によって分岐経路に沿った応答を示すためである。このような場合、実際に初期不整を与えて解析し座屈点を求めることも多いが、初期不整の任意性を考慮すれば効率の良い方法ではない。むしろ厳密に分岐解析を行なったうえで、逆に適切な初期不整を評価する方が本質的である。

以上の手順にしたがって正確な座屈荷重が得られ、同時に構造物に含まれる任意のパラメータに対する荷重の感度が求められれば、それによって従来行なわれていた座屈現象に対する最適設計や信頼性評価の効率や精度を、より向上させることが可能になる。現実には最適設計の分野においては、線形座屈理論に基づく解析ではあるが、例えば部材の断面積を変動を考慮するパラメータとし負荷荷重が座屈荷重となるような拘束条件下での全重量を最小化する解析が実施されており、この場合は断面積に対する座屈荷重の感度が必要とされる。また信頼性の分野においては、期待構造系における入力情報の不確からしさ、すなわち物理的な不確からしさや統計的な不確からしさ、あるいはモデル化における不確からしさが構造応答に与える影響を評価するために構造応答の感度が用いられ、座屈解析においては、期待構造系における座屈荷重の分散値や、破壊条件に対する信頼性指標や破壊確率等が求められることになる。このように応答感度も評価することによって、より合理的な非線形座屈解析システムを構築することが可能となると考えられる。

一方、有限要素法を中心とした数値計算による構造解析技術も計算機の発展と共に成長し、現在では、静的・動的、線形・非線形を問わず、あらゆる領域での定式化がなされているといっても過言ではない。しかしながら、構造設計を担うエンジニアが、実用規模の非線形解析を実用的な時間とコストで実施できるようになったのはここ1~2年のことであり、それまでは計算速度および記憶容量の面からのさまざまな制約下で非線形解析が行なわれていた。そのような環境における非線形有限要素解析は必ずしも厳密性を保持していたわけではなく、むしろ複雑化を避けるために簡易化された解析モデル、数学・物理モデルあるいは解析手法に基づいた、いわば線形解析の単なる延長のような非線形有限要素解析であった場合も多く、また簡易化された手法が「効率的」あるいは「工学的」な手法と考えられていた。逆に言えば、計算環境上の制約は受けなくなった現時点が、非線形有限要素定式化を見直し、より厳密な非線形解析を実施できる出発点であり、厳密性を保持したうえでの数値計算アルゴリズムの効率化がこれからの非線形有限要素法の一つの課題であると考えられる。

本研究においては、薄肉構造物すなわちシェル構造物を対象として、感度解析を含めた有限要素法による非線形座屈解析手法の開発を行なう。非線形有限要素座屈解析に関しては従来の研究においても実施されているが、以上に述べたように、本研究では新たに厳密な非線形連続体力学に基づいた非線形有限要素定式化、幾何学的非線形シェル要素の開発、および弧長法、分岐解析等の座屈解析手法の開発を行なう。この時、従来の解析手法を見直して問題点を明確にし、それに対する改良を施すだけでなく、常に実用規模の問題に対する適用性も考慮した解析手法を確立する。一方、このような非線形座屈現象に対する感度解析手法は、世界的に見てもまだ開発の途上であり、シェル構造物の座屈に対する適用はほとんど行われていないのが現状である。これは、かかる非線形有限要素座屈解析が座屈点という数学上の特異点を取り扱うからに他ならない。本研究では、この問題に対しても座屈点を特別に扱うことなく、座屈後の挙動も含めた荷重経路上の任意の平衡点において、荷重感度を評価できる解析手法の開発を行なう。

本研究の最終的な目的は、以上の手法を統合し、'厳密性'と'効率性'を兼ね備えた'robust'なシェル構造物の非線形座屈解析システムを開発することである。

1. 2 従来の研究

本節では、本研究のテーマである「シェル構造物の有限要素座屈解析」および「同座屈感度解析」に関連する従来の研究について調査検討し、より厳密かつ効率的な解析手法の確立に資することを目的とする。ここでは、「座屈解析のための幾何学的非線形有限要素法」、「シェル要素の開発」および「非線形有限要素感度解析手法」の3つに大きく分け、それぞれにおける従来の研究について示す。

最初の、「座屈解析のための幾何学的非線形有限要素法に関する従来の研究」においては、まず、基礎となる幾何学的非線形有限要素法の定式化および非線形方程式の解法について述べ、次いで座屈後解析のような不安定な平衡経路の解析に不可欠な弧長増分法や、座屈点の判別、分類および分岐経路への誘導を行うための有限要素座屈解析手法について詳しく示す。

「シェル要素の開発に関する従来の研究」においては、現在の主流となっている C^0 連続性シェル要素、特に Ahmad 型の degenerated シェル要素の開発背景、現在に至るまでの改良の経緯について述べる。特に、シェル要素にとって歴史的な命題ともいえる shear locking 現象に関する研究について詳しく示す。また、Ahmad 型のシェル要素の非線形問題への適用についても調査し、本研究で開発改良すべき機能について検討する。

最後に、「非線形有限要素感度解析手法に関する従来の研究」について示す。ここでは、摂動法による一般的な非線形問題に対する感度解析手法の定式化について調査する。特に、座屈荷重感度解析手法について詳しく示し、従来の手法の問題点、現在取り組まれている課題について明らかにする。

1. 2. 1 座屈解析のための幾何学的非線形有限要素法に関する従来の研究

(1) 幾何学非線形問題の有限要素法定式化に関する従来の研究

幾何学的非線形問題に初めて有限要素法を応用したのは Turner ら¹⁾である。彼らが飛行機構造に対して有限要素法を適用したように、当初はある特定の構造(要素)のみに限定され、線形問題の延長として取り扱われていた^{2),3)}。一方、有限要素法においてアイソパラメトリック要素の考え方が整備され⁴⁾、アイソパラメトリック要素を用いた有限要素離散化の効率性が認められるにしたがい、一般問題における、連続体力学に基づいた非線形有限要素法定式化が1970年前後から活発に進められる。

基本的には、幾何学的非線形問題に対する有限要素法定式化は'Eulerian'型定式化と'Lagrangian'型定式化の2種類に分けることができる。Eulerian型定式化は、例えば'山田の方法'⁵⁾に見られるように、変形後の形状を参照してその時点での情報から接線剛性マトリックスを作成する。この時接線剛

性マトリックスには新たに「幾何剛性マトリックス」が含まれる。また、常に増分変位により節点座標値を更新するため 'moving coordinate' あるいは 'updated' 型定式化とも呼ばれている。'Lagrangian' 型定式化は Mallet ら⁶⁾、Hibbit ら⁷⁾の研究に見られるように、常に初期状態を参照しながら接線剛性マトリックスが作成される。この時 Eulerian 型定式化により得られる接線剛性マトリックスと比較すると、更に「初期変位マトリックス」が加えられる。

幾何学的非線形問題の解析が始まった当初は、初期安定問題として、先に述べたマトリックスを用いて線形座屈固有値問題が多く解かれていた。しばらくして、増分型の非線形有限要素法方程式が解かれるようになるが、Eulerian 型定式化においては前進 Euler 型の解法で方程式が近似的に解かれ、その時点の増分荷重ベクトルと接線剛性マトリックスがら反復することなく変位増分ベクトルを求めていた。そのため増分数が増えるにしたがって誤差が蓄積する。一方 Lagrangian 型定式化を行っていた Oden²⁾、Mallet ら⁸⁾は Newton-Raphson 法あるいは modified-Newton 法を用いた反復解法により非線形方程式を解き始める。この場合は平衡方程式を満足する精度の良い解が得られるため、現在でも非線形有限要素法の解法の主流として用いられている。

Bathe ら⁹⁾は、現時刻の平衡解が得られているものとし、次時刻の Green-Lagrange ひずみと 2nd Piola-Kirchhoff 応力を、現時刻の形状および初期形状を参照した場合の 2 種類の方法で表わし、それぞれに対して仮想仕事式を示している。次に、この仮想仕事式を離散化し、平衡方程式と接線剛性マトリックスを求め、前者を updated-Lagrangian 定式化、後者を total-Lagrangian と名付けた。また、両手法は全く等価であり、応力とひずみを関係付ける構成式が適切に変換されているならば、両手法による解は全く同じものになると述べている。Bathe ら以降には、これといった新しい定式化はなく、現在では幾何学的非線形有限要素法は、多くの場合どちらかの定式化に基づいて導かれている。

(2) 非線形方程式の解法

一般的に、非線形方程式の解法としては Newton-Raphson 法が用いられることが多い。これはいわゆる '残差荷重ベクトル' に、同時刻の '接線剛性マトリックス' の逆マトリックスを乗じることにより '変位補正ベクトル' を求め、変位ベクトルを更新しつつ残差がある許容量以下になるまで反復を繰り返す方法である。この方法は非常に収束性がよい反面、反復毎に接線剛性マトリックスを作成し、三角分解をおこなわなければならない。1990 年より以前では現在 (1992 年) ほど高速な計算機が普及しておらず、有限要素法等の大規模自由度系の非線形問題においては、この接線剛性マトリックスの作り替えならびに三角分解自体の '計算効率性' が問題視されていた。

非線形有限要素法解析の初期のころは、接線剛性マトリックスの作り替えは全く行なわない初期定

方法と呼ばれる方法や、収束時点での接線剛性マトリックスのみ用い反復の間はマトリックスの更新を行なわない、modified-Newton 法等が広く用いられていた^{2),9)}。しかしながら、この方法は非線形性の強い問題に対しては収束回数が飛躍的に増加し、必ずしも計算の効率化が達成されていたとはいえない。

次いで、BFGS 法に代表される quasi-Newton 法が Matthies ら¹⁰⁾により初めて有限要素法に導入された。この方法は、反復毎に接線剛性マトリックスの更新を行なうものであるが、full-Newton 法のように要素レベルで完全に作り替えるのではなく、反復間の残差荷重増分ベクトルおよび変位増分ベクトルで構成される quasi-Newton 方程式を満たすように接線剛性マトリックスを更新する。この時、接線剛性マトリックスの逆行列も直接更新することが可能なため、計算の効率化を計ることができる。

以上の方法は、Line-Search 法と呼ばれる最適化の分野で開発された手法¹¹⁾と組み合わせることにより、収束速度を加速することができる。これは残差荷重ベクトルと接線剛性マトリックスより求めた変位増分ベクトルを、そのまま既知変位ベクトルに加えるのではなく、ある比例パラメータを導入して変位増分ベクトルに乘じ、そのパラメータに関してポテンシャルエネルギーが最小になるように比例パラメータを定めてから変位を更新するものである。有限要素法においては、Crisfield¹¹⁾が工学的な側面からの実用化をおこなっている。

先にも述べたように、現在では計算機の高性能化、大容量化がすすみ、計算速度の観点からは 10 年前と比較し 10 倍以上の能力を有している。したがって、Newton-Raphson 法により要素レベルで完全に接線剛性マトリックスを作り替えたとしても、2 次収束性が保証されている点を考えれば、十分実用的な計算時間で非線形有限要素解析が可能である。

(3) 弧長増分法に関する従来の研究

典型的な幾何学的非線形問題である座屈解析は、構造応答における特異点、すなわち極限点や分岐点を求めるものである。有限要素法の増分解析によりこの種の問題を取り扱う場合、例えば極限点に関しては、極限荷重よりも大きな荷重を付加することができないため、通常の荷重制御法では解を得ることが困難である。この時、極限点付近の荷重増分を細かくして解析したとしても、極限点の極めて近傍では接線剛性マトリックスの特異性が増すため、通常の Newton-Raphson 法では収束解が得られにくい。仮に得られた場合でも座屈後の荷重の低下まで解析することはできない。分岐点については、一次経路 (primary path) において分岐点を飛び越えるくらいの適当な荷重増分をとった場合には安定に解析が進むが、分岐経路 (secondary path) に平衡点を求めようとする場合等、分岐点の極めて近傍を解析する場合には同様に解析が不安定になることが多い。

これに対して、幾何学的非線形解析の初期の頃には、特異点近傍で剛性マトリックスに人工的なバネ (artificial spring) を挿入したり、反復計算を行わないことによって、特異点付近での不安定性を回避していた。その他、荷重制御法から強制変位法に転じることにより剛性マトリックスが特異になることを防ぐ方法も用いられていた。この強制変位法は現在でもしばしば用いられるが、実際に強制変位を付加しているような実験解析には有効であるが、実用レベルの複雑な荷重モードの問題に対しては適用が困難である。また、'snap-through' のような飛び移り座屈問題に対しては有効な場合が多いが、'snap-back'、すなわち同変位値で荷重レベルだけが突然下がる様な場合には適用することができない。

Riks^{13), 14)} および Wempner¹⁵⁾ は、このような座屈問題の解析手法として、それぞれ独立に弧長法 (arc-length) と呼ばれる経路追従型のアルゴリズムを開発した。この方法は解析に際し、外力ベクトルがある荷重ベクトル (以下参照荷重ベクトル) に比例すると仮定し、その (比例) 係数も未知数とするもので、増えた自由度を含む未知ベクトルの長さに対する拘束条件式を、新たに有限要素方程式に加えて解を求める。一般には、非線形方程式の増分法に合わせ、未知増分ベクトルの長さ、すなわち弧長増分を規定して解の探索を行ない、極限点や分岐点の近傍においても平衡経路に沿った解が比較的安定して得ることができる。これは、新たな拘束条件式を加えたことにより増えた自由度も含めた系の接線剛性マトリックスがもはや特異ではなくなるからである。更に Riks¹⁴⁾ および Keller¹⁶⁾ は、弧長を規定する 2 次の非線形方程式を線形化した方程式を拘束条件式とする、線形化弧長法 (linearized arc-length method) を示しており、現在 Riks-Wempner 法として参照される弧長法はこの線形化弧長法を示していることが多い。

以上で述べた弧長法あるいは線形化弧長法では、接線剛性マトリックスがもはや特異ではなくなるものの、マトリックスの対称性が損なわれるため、有限要素法の数値計算においては計算容量、時間の観点から効率的ではなくなる。そこで、Batoz¹⁷⁾ らは外力ベクトルの参照荷重ベクトルに対する線形性を利用した、two-stepping アルゴリズムを提案した。この方法は、各反復計算における変位増分 (補正) ベクトルを 2 つのベクトル、すなわち残差荷重ベクトルに従来の接線剛性マトリックスの逆マトリックスを乗じて得られるベクトルと参照荷重ベクトルに同逆マトリックスを乗じて得られるベクトル、の線形結合で表わし、この変位増分ベクトルを弧長を規定する拘束条件式に代入して最初に比例荷重係数を求めるものである。この手法の利点は、増えた自由度も含めた全体の剛性マトリックスを作るのではなく、従来の接線剛性マトリックスをそのまま使用できるため、剛性マトリックスの対称性を保持したまま解が求められる。また、既存の有限要素法解析プログラムからの拡張も容易であるため、現在では弧長法に対してはこの解法手順が主として用いられている。

一方、Ramm¹⁸⁾ は、幾何学的に明瞭かつ数値的な取り扱いが幾分簡便な拘束条件式を示した。この

方法は、最初の反復時のみ規定された弧長になるように荷重増分および変位増分ベクトルを定め (predictor)、それ以降の反復時にはその増分ベクトルに垂直な超平面上に解を探索するものである。

(これは先に述べた線形化弧長法の特別な場合に相当する。) 当然のことながら、超平面と荷重変位曲線の交点が平衡点となるが、初期の predictor が長すぎる場合には交点が得られなかったり、極限点、分岐点から遠く離れたところに解を求める可能性がある。したがって predictor を反復毎に更新する方法も種々提案されており^{19, 20)}、解の収束性は改善される。例えば弾塑性解析において、反復前は弾性状態、反復後は塑性状態のような反復途中で接線剛性の大きさが極端に変化する場合に有効である。またこのような線形化弧長法は次にのべる超球拘束、超円筒拘束と比して増分解が唯一求められるという利点がある。

弧長法の基本的な概念である弧長一定の条件は、直前の収束点を中心とした超球と荷重変位曲線との交点に解を求めることに相当するが、Riks, Wempner 以降においてもこの条件式を用いた解析はしばしば見受けられる^{21, 22)}。Crisfield²¹⁾は、超球拘束条件と先に述べた two-stepping アルゴリズムを用いて、比例荷重係数 (の増分) に関する 2 次方程式を解くことにより弧長一定を満たす平衡点を求められることを示した。本手法の欠点は、2つの解が求められるために解の適切な選択をおこなわなければならないこと、必ずしも 2 次方程式が実根をもつことが保証されない、点である。しかしながら、反復の間は、常に同じ平衡点を目指している点で、線形化弧長法よりも安定であると言えよう。また Crisfield は、極限点の近傍では比例荷重係数の増分が極めて小さくなることに着目して、拘束条件式から比例荷重係数を省略する、超円筒拘束型弧長法 (cylindrical arc-length method) も提案している。

その他、弧長法のバリエーションとして、例えば Heisler²³⁾, Batoz¹⁷⁾らは、ある荷重モード下で、着目した点の変位量を拘束することにより解析を安定に進める変位制御法を示した。また、拘束条件式の中の自由度には互いに次元の違うものも含まれているため (例えば並進自由度、回転自由度、比例荷重係数)、大きさが極端に違うものを同等に扱っている可能性がある。このことが収束性に与える悪影響をさけるために、各自由度に適切なスケール係数を乗じる、scaled arc-length method も提案されている^{20), 24) 25)}。特に Simo ら²⁰⁾はスケール係数の与えかたで通常の弧長増分法、荷重制御法および変位制御法と見なせる汎用的な scaled arc-length method を示している。

(4) 有限要素座屈解析に関する従来研究

1) 座屈点の定義

先に述べた弧長法 (arc-length method) は座屈解析には不可欠な手法ではあるが、弧長法自体にはそのような座屈点の判断する機能がないために、有限要素法で座屈解析を行なう際にはなんらかのアル

ゴリズムを併用してその判定を行わなければならない。数学的には、座屈点は平衡経路上における特異点となる。すなわち、有限要素法ではその点に於ける接線剛性マトリックスの行列式が零になる。このことは接線剛性マトリックスが零固有値を持つことと同等であり、零固有値に対応する固有モードは座屈固有モードと呼ばれている。

座屈モードを必要としない場合は、以上で述べたように接線剛性マトリックスの行列式の値を調べるだけで座屈点の判定ができる。非線形有限要素法の増分解析において Newton-Raphson 法等の反復解法を用いている場合は、接線剛性マトリックスを三角分解する際に得られる対角マトリックスの各成分をかけあわせたものが行列式となるため、非常に簡便に求められる。求めた行列式について、Gallagher²⁶⁾は各平衡点での値を外挿あるいは内挿することにより座屈点を求めている。しかしながら、大規模自由度の問題では、行列式の値および増分間での行列式の値の変動量は極めて大きくなり、もはや補間の意味が希薄となる。また計算機の取り扱いえる限界を越えると数値的にとり扱えなくなるので、Wagner²⁷⁾は線形の剛性マトリックスの対角項で正規化する方法を示している。その他、対角成分の対数を取る方法等があるが、行列式自体の大きさよりも、その正負符号を符号の変化の方が重要な意味合いを持つため、例えば北川らは²⁸⁾、常に対角マトリックスの各成分の正負符号をモニターして行列式の正負符号を判定し、符号の反転するところを座屈点としている。また、Needleman²⁹⁾、Wagner²⁷⁾は対角マトリックスのある成分の絶対値が適当な許容量よりも小さくなったときを座屈点と判断している。

11) 線形座屈固有値解析

実用的な立場でもっとも用いられている手法は、線形固有値解析である。これは基本的に、接線剛性マトリックスを線形部と非線形部に分け、非線形部（初期応力マトリックスあるいは幾何剛性マトリックスとも呼ぶ）が外荷重にたいして線形に変化するものとして固有値解析をおこなうものである。この時、外力ベクトルに対する比例係数が固有値として求められ、近似的な座屈荷重が推定される。非線形解析がまださほど実施されていなかった頃は、線形静解析より得られる応力値を用いて初期応力マトリックスを作り線形解析の剛性マトリックスとの間で固有値解析が行われていた³⁰⁾。この手法は Euler-Buckling 問題のように座屈前の荷重変位曲線が比較的線形になる問題に対しては精度よく座屈固有値が求められる。

近年になり非線形解析が行なわれるようになってからは、増分解析の途中で固有値解析をおこなうことにより、座屈荷重の予測がなされている。Mallet³¹⁾は弾性構造体に対して、極限点ではトータルポテンシャルエネルギーの二階変分が零になることを示し、座屈固有値解析を実施した。また、Brandel³²⁾、Borri³³⁾は座屈点にいたるまでの荷重変位経路上の1点で固有値解析を行ない座屈荷重

を求めている。この方法は one-point linear eigenvalue analysis と呼ばれる。更に Bathe ら³⁴⁾ は、経路上の近接 2 点の接線剛性マトリックス (微分剛性マトリックス) の差をとり、最初の点の接線剛性マトリックスとの間で固有値解析を行なう手法を用いている。この方法は先の手法に対して、two-point eigenvalue analysis と呼ばれる。いずれの手法も、外荷重に対する初期応力マトリックスや微分剛性の線形性を仮定することにより、座屈点での接線剛性マトリックスを近似しており、座屈点においてのみこれらの手法は厳密となる。

III) 'extended systems' による解析手法

Wriggers ら³⁵⁾ は数学的手法であった extended systems による解析手法を初めて有限要素解析に導入し、固有値解析を行わずに座屈点における荷重値および固有モードを厳密に求める手法を開発した。これは座屈点における固有ベクトルと接線剛性マトリックスの積が零ベクトルになることを利用して、平衡方程式、および固有ベクトルの大きさを規定する方程式と連立させて解くものである。方程式の解法には Newton-Raphson 法を用い、厳密な extended system の接線剛性マトリックスを得ているため、非常に安定かつ精度のよい座屈点が求められる。この時のマトリックスは非対称マトリックスとなるが、Keller¹⁶⁾ の bordering algorithm に基づいて、部分マトリックスの対称性を利用した効率の良い解法を示している。また、通常の解析と比較すれば、接線剛性マトリックスの微分等の付加計算が増える、反復計算での初期値が収束回数に影響を与えるという短所があるものの、extended systems による解法は、固有値解析を行わずに厳密に座屈点および固有モードが求められる優れた解法のひとつであると考えられる。Wriggers らはその後、座屈点付近での接線剛性マトリックスの安定化および接線剛性マトリックスの微分の簡便な計算手法を、新しい extended system において示している³⁶⁾。

IV) 座屈点の分類

一般に座屈点は極限点と分岐点に分けることができる。極限点においては平衡経路はひとつであるが、分岐点では複数の経路が存在する。分岐点を有する構造系の有限要素解析では、弧長法を用い数値的に安定した解が得られたとしても、主経路のみの平衡解が求められている可能性が高い。一方、主経路と 2 次経路を比較すると 2 次経路の方が不安定で終極耐力が下がることが多いが、実際のシェルや梁構造物では初期不整等の影響で、初めから 2 次経路が主経路となっている場合がありうる。したがって期待構造系に対する有限要素解析では、単に座屈点を探索するだけでなくそれらを極限点と分岐点に分類し、分岐点の場合はしかるべき手法で分岐経路に誘導して新しい平衡経路を求めることが不可欠である。

Bergan³⁷⁾ は、単位荷重モードに対するエネルギーの増加率を各平衡点で求め、初期状態におけるエネルギー増加率が正規化したものの逆数を 'stiffness parameter' と定義し、極限点付近ではこの値が零

に近づくことを示している。分岐点においては零とならないので stiffness parameter と行列式の値を調べるにより座屈点の分類を行なうことができる。

Endo, Hangai ら³⁸⁾は、座屈点における平衡方程式を摂動展開することにより、座屈固有モードと荷重モードの内積値を計算することで座屈点の分類が可能であることを示している。この場合は内積値が零でないときは極限点、零の時は分岐点となる。更に高次の摂動方程式より導かれる二次方程式を解くことにより分岐経路の方向性を定めており、分岐モードは座屈点における座屈固有モードだけでなく、すべての固有ベクトルおよび固有値に関する関数として表わされる。なお、分岐モードが座屈固有モードと一致するときを、対称分岐座屈（それ以外是非対称分岐）として分類している。

Wriggers ら³⁶⁾は、Spence ら³⁹⁾の数学的な手法に基づいて分類を行なっている。基本的には Endo, Hangai らとおなじ分類方法であるが、極限点、分岐点に分類した後、更にそれぞれを細かく分類している。また、分岐モードに関しては、座屈固有モードと主経路に沿う変形モードとの線形結合であり、Endo, Hangai らの方法と比してすべての固有値、固有モードを用いないが、各モードに対する比例定数を定めるためには、接線剛性マトリックスの変位に関する微分を求めなければならない。

V) 有限要素分岐解析

有限要素法において分岐経路に解を誘導するもっとも簡便な方法は、あらかじめ構造系に初期不整量あるいは分岐モードの方向に摂動荷重を与えて⁴⁰⁾解析を行ない、分岐経路での挙動を擬似評価する方法である。この場合、期待構造系で分岐点以降の平衡経路が不安定 (unstable) ならば、実際の座屈荷重よりも低いところで極限点として評価される。また、初期不整量を与える場合には、初期形状に対する線形座屈固有値解析により得られた座屈固有モードを用いることが多い。しかしその固有モードが実際の座屈モードと一致している保証はなく^{41), 42)}、初期不整量の大きさにより応答が変化するため、かならずしも確実に分岐経路に誘導されるわけではない。その他、北川ら²⁸⁾、Liu ら⁴¹⁾は特に初期不整量等を考慮しなくても、強制変位法により分岐点付近の変位増分を十分に細かくすることにより分岐経路に誘導できることを報告している。

基本構造系に対して厳密に分岐経路を求め解を誘導する方法は、先の分類方法にしたがい分岐モードを計算し、座屈点あるいは近傍での平衡方程式に対する反復解に適当にスケールして重ね合わせ収束解を求めるものである。このときのスケール係数の選び方は Wagner ら²⁷⁾に詳しい。分岐モードを厳密に求めるには、先に述べたように相当な計算量を要し余り現実的ではないが、工学的な問題には対称座屈が多い³⁹⁾、平衡方程式に対する初期値としての精度があればよい、との点で座屈点における座屈固有モードのみを用いて、分岐経路に誘導している場合が多い^{27), 35), 36)}。

1. 2. 2 シェル要素の開発に関する従来の研究

(1) Ahmad 型 'degenerated' シェル要素開発の背景

シェル要素は、3次元薄肉（シェル）曲面構造物の解析のために開発された要素で、並進3自由度のみをもつ3次元ソリッド要素（連続体要素：continuum element）に対して、並進3自由度以外に回転2あるいは3自由度を有している構造要素（structural element）である。薄肉構造物の肉厚方向に節点をとる必要がないため構造物の有限要素メッシュ分割が簡易になり、現在では先の3次元ソリッド要素と共に実用の場でもっとも使用されている。

しかしながら、シェル要素を定式化する際に導入する仮定によって、絶えずなんらかのデメリットが生じるため（たとえば、非常に複雑な要素剛性マトリックス、あるいはある種の条件化での構造応答特性の劣化等）、シェル要素が開発されて以来20数年たった今でも依然としてその開発、改良が続けられている。

歴史的には、開発当初は C^1 連続性要素が用いられていた¹⁾。これは要素間において、変位（並進自由度）ならびに変位の空間微分が連続になるように定式化される要素で、薄肉要素に対するKirchhoff-Loveの仮定、すなわちシェル曲面に対する法線ベクトルは変形後も中立面に対し垂直を保つ（要素の面外せん断変形を許さない）、が厳密に導入されている。しかしながら、1) C^1 連続性要素を満たすためには高次の内挿関数を要しその結果要素剛性マトリックスが複雑化する、2) 要素の面外せん断変形が許されないため厚肉構造に対しては適用されない、等の制約により現在ではほとんど用いられていない。

代わって現われたのがReissner-Mindlin^{2), 3)}型（一般には単にMindlin型と参照されていることが多い）の要素である。これは要素の面外せん断変形を考慮した C^0 連続性要素で、有限要素法においては、並進自由度と回転自由度がそれぞれ独立に同じ関数で内挿される。この要素の最大の利点は、1) 面外せん断変形を考慮しているために厚肉シェルまで取り扱える、2) 並進と回転をそれぞれ独立に内挿しているために要素の定式化が容易である、の二点である。Reissner-Mindlin型の板曲げ要素に通常の平面応力要素を加えて、（平板）シェル要素としている場合も多い。

1970年にAhmadら⁴⁾が発表したいわゆる'degenerated'シェル要素は、ある特定のシェル理論から構築されたものではなく、3次元ソリッド要素をmechanicallyに明瞭な仮定、1) 中立面に対する法線ベクトルは変形後も直線を保ち変形後は必ずしも中立面に垂直である必要はない、2) 肉厚は変化しない、

3) 肉厚方向の応力成分は零とする、の下に degenerate した、連続体力学に基づく変位型の曲面シェル要素である。この要素は平面要素として用いると、先に述べた Reissner-Mindlin 型の板曲げプラス平面応力要素に完全に一致し、換言すれば、曲面を取り扱える Reissner-Mindlin 型シェル要素ということになる。現在世の中に知られているシェル要素は、ほとんどがこの Ahmad 型の degenerated シェル要素を原型としている。

(2) shear locking に関する研究

この Ahmad 型の degenerated シェル要素、すなわち Reissner-Mindlin 型の要素は、肉厚が薄くなるにしたがい、曲げ問題に対し非常に解が固くなることで知られている。要素分割を細かくするにしたがい解は収束傾向を示すものの、理論解を得るには非現実的な数の要素分割を行わなければならない。これは一般に 'shear-locking' と呼ばれている現象で、現在にいたるまで、さまざまな数学的、工学的な検討が継続されており、シェル要素開発のテーマがこの 'shear-locking' の解明、回避にあるといっても過言ではない。

Ahmad 型の degenerated シェル要素が発表された翌年に Zienkiewicz ら⁵⁾は、各要素における領域積分について 'reduced integration' (次数低減積分)をおこなうことにより、解が大幅に改善されることを示した。この時点では理論的な裏付けはほとんどなく、一種の数値計算上でのテクニックのような印象を与えていた。その後 Hughes⁶⁾らは Mindlin 型の板曲げ要素における shear-locking と reduced integration について深く検討し、1) トータルポテンシャルエネルギーにおいて、せん断ひずみが寄与する項は Kirchhoff 条件を課すためのペナルティ項、肉厚の自乗の逆数はペナルティ乗数の役割をはたしており、2) 板厚が薄くなると面外せん断エネルギーが過剰に評価されることが shear-locking の原因であり、3) reduced integration によりそれを緩和する、と述べている。一方、Pugh ら⁷⁾、Hinton ら⁸⁾は、面外せん断エネルギーの過剰評価が locking の一因であることを認めながらも、数値実験においては、9, 16 特に 16 節点 Lagrange 要素は reduced integration を行わなくても、薄肉要素に対して十分に理論解が得られることを示しており、必ずしも厳密な理由付けになっていないわけではない。また、同じ数値実験では 8, 12 節点 serendipity 要素は reduced integration を行っても shear-locking が生じている。一方 Arnold⁹⁾は、面外せん断ひずみの内挿関数の次数が並進自由度と回転自由度で異なるため、Kirchhoff 条件を満足するには高い次数の関数が低い次数の関数に等しくならざるを得ず、そのために生じる誤差のために理想的なひずみ分布が得られない、ことを原因として挙げている。例えば純曲げ状態でも要素内部のすべての点で面外せん断ひずみが零とならないわけである。この場合 reduced integration は次数の低い内挿関数にあわせた領域積分と解釈される。

このAhmad型の degenerated シェル要素プラス reduced integration あるいはせん断剛性のみ reduced integration をおこなう 'selective-reduced integration' (選択型次数低減積分) は、数値積分アルゴリズムのみを変えるだけで効率的に良好な解が得られるため、1980年の前後では、これを少し改良、あるいは付加機能をつけた要素が始め^{10, 11, 12}、汎用有限要素法コードである NASTRAN や ADINA 等にも取り入れ初められる。しかし一方で、reduced integration をおこなうために、剛性マトリックスのランクが下がる、すなわち剛体モード以外の零エネルギーモード (hour-glass モード) を有する^{6, 7, 8}、というデメリットが生じ、要素分割の荒さや境界条件によっては虚偽の解が得られてしまう。さらに、Ahmad 型の degenerated シェル要素は要素のゆがみにより解の精度が落ちる、すなわち patch test^{13, 14} に合格しない、ことが指摘された。この2点は実用的な立場 (すなわち経済的な面から要素を荒く切りざるを得ない、解析構造が複雑でゆがんだ要素分割は避けられない等) で有限要素法を (black-box として) 用いるエンジニアにとっては本質的な問題であったため、1980年代はこれに対応するシェル要素の開発がおこなわれる。興味深いことに、この時点で reduced integration をそのまま使用する立場と使用しない立場に別れることになる。

(3) 'locking-free' 要素の開発に関する従来の研究

I) 'discrete-Kirchhoff' (離散型 Kirchhoff) 要素

Reissner-Mindlin 型の要素以外では、要素内のあるポイントについてのみ Kirchhoff 条件を課す 'discrete-Kirchhoff' (離散型 Kirchhoff) 要素が平行して開発されていた。著名なのは Iron¹⁵ が開発した 'semiloof' 要素と呼ばれるもので、Gauss の積分点において discrete-Kirchhoff 条件が満たされる。後に改良されたものが汎用有限要素法コード ABAQUS の初期のシェル要素として取り入れられ、また近年でも新しいバージョンの定式化がソースコードと共に公開されている^{16, 17}。しかしこの要素も同様に hour-glass モードを有しており、メッシュのゆがみに対して解の精度が損なわれる。続いて Batzou, Bathe¹⁸⁻²¹ は、節点において discrete-Kirchhoff 条件を満たす 3, 4 角形シェル要素を開発した。この要素は、厚肉シェル要素に対しては精度が落ち、場合によって artificial bending stiffness が生じるといふ欠点を有している。さらに Dhat^{22, 23} は、近年新しい 6 節点 3 角形 discrete-Kirchhoff シェル要素を提案している。また Kui^{24, 25} らの方法は面外せん断ひずみを要素内で積分したものが 0 になるように Kirchhoff 拘束条件をいれるもので、拘束条件のある変位空間から拘束条件のない空間に写像して変位解を求めるために 'generalized displacement' 法と呼ばれている。この要素も shear-locking は生じないが、Ahmad 要素の直接改良ではないため patch test には合格しない。

II) 'heterosis' 要素

再び Reissner-Mindlin 型に着目すると、Hughes²⁶⁾により開発された'heterosis'要素は並進自由度と回転自由度に異なる内挿関数を用いる9節点要素で、1980年前半まではbest elementと評価されていた²⁷⁾。この要素は通常のfull integrationでも精度の良い解が得られ(lockingしない)、hour-glassモードは存在しない。しかしながら、節点、積分点の数が多く要素定式化も複雑なために計算効率性が優れず、patch testにも合格しないため現在ではほとんど用いられていない。同種の要素はCrisfieldも開発している²⁷⁾。

III) 'mixed interpolation' 要素

一方、shear-lockingの一因が面外せん断ひずみの内挿関数にあることが明らかになり、面外せん断ひずみの内挿方法が見直され始めた。Hughes, Tezduyar²⁸⁾により最初に提案された方法、Macneal²⁹⁾が用いた'assumed-strain' method、Dvorkin, Bathe^{30), 31), 32)}による'mixed interpolation' method、Hintonら^{33), 34)}による'substitute shear strain field' methodは互いにはほぼ等価な方法で、基本的には面外せん断ひずみを従来の方法にしたがい変位から内挿するのではなく、新たにあるサンプリング点の面外せん断ひずみの値と再定義した内挿関数から求めるものである。(この時サンプリング点における面外せん断ひずみに関しては従来通り変位から内挿したものが用いられる。) Hughesら、Macnealの要素、Batheらが最初に発表したものはいずれも4節点要素であり、矩形で用いた場合にはAhmad型のdegenerated要素をselective-reduced integrationして得られる要素と同等になる。またHintonらの要素はこの4節点要素を8節点要素以上に拡張したものである。いずれの要素もfull integrationをしてもshear-lockingしないためにhour-glassモードを持つことはない。また、面外せん断ひずみを内挿する際に、直交座標系におけるひずみ成分でなく、アインパラメトリック要素の自然(埋め込み)座標系における成分を用いることにより、要素のゆがみによる解の精度の低下を防いでおり、patch testにも合格している。近年Brezziら^{36), 37)}はmixed interpolation methodの数学的な検討を行ない、要素の安定性、収束性に関して良好な結果を示している。

IV) 'projection' 要素

Storalskiら³⁸⁾が提案した'projection' method ('mode-decomposition', 'Kirchhodd-mode' method)は、変形モードを曲げモードと面外せん断モードに分解し、分解した面外せん断モードからせん断エネルギーを適切に評価することにより、shear-locking、要素のゆがみによる解の精度の低下、hour-glassモード等の問題点を回避している。この方法は、以降reduced integrationをおこなった要素の要素のゆがみによる解の精度の低下を防ぐために用いられる。

V) 'reduced integration + stabilization' 要素

以上に述べたReissner-Mindlin型の改良要素はいずれも、hour-glassモードを回避するためにfull

integrationを行ないかつ shear-locking しない要素であるが、一方で、面外せん断ひずみの再定義等の改良を施さず、むしろ reduced integration をしたことにより生じる剛性マトリックスのランク低下を要素の '安定化' (stabilization) により防ぐ要素も開発されている。

Belytscko ら^{39),40),41)} は現在まで一貫してこの reduced integration プラス stabilization マトリックスの方法を用いている。stabilization マトリックスは、剛体モードに対しては零となり、hour-glass モードに対しては零でない一般化ひずみを導入することにより求められる^{39),40)}。この時点ではまだ、人為的な hour-glass コントロールパラメータが stabilization マトリックスに用いられていたが、近年 Belytscko ら⁴¹⁾ は Hellinger-Reissner の変分原理より人為的なパラメータを用いない stabilization マトリックスを導いている。いずれの要素も shear-locking は生じないものの、patch test には合格しないため先に述べた projection method によりメッシュのゆがみによる解の精度の劣化を防いでいる。またこの手法は、4 節点要素の場合、面内 1 点の領域積分となり非常に計算効率にすぐれているため、特に衝撃問題等の explicit 型の動的非線形問題に対して使用されている⁴²⁾。

(4) 非線形シェル要素の開発に関する従来の研究

さて、Ahmad 型 degenerated 要素は連続体力学に基づく要素であるため、幾何学および材料非線形問題に対しても容易に拡張することができる。Bathe ら¹²⁾ は、1980 年に古典的な Ahmad 型 degenerated 要素の total-Lagrangian 法、updated-Lagrangian 法による幾何学および材料非線形問題に対する定式化を示した。同様に、Owen ら⁴³⁾ は 'layered approach' に基づく異方性シェル要素を開発している。Surana⁴⁴⁾ は Bathe らの定式化を拡張し total-Lagrangian 法において有限回転増分を取り扱えるようにした。更に Chao ら⁴⁵⁾ は、積層構造に対する定式化を示し動的幾何学的、材料非線形解析を行なっている。弾塑性以外の材料非線形では、Paricsh⁴⁶⁾ が Moony-Rivlin 体を対象としたシェル要素を開発している。以上の要素は shear-locking に対しては (selective)-reduced integration で対応している。

また先に述べた mixed interpolation method による Ahmad 型 degenerated 要素の非線形問題への拡張は 1984 年に Dvorkin ら³⁹⁾ が行っており、後に Stander ら⁴⁷⁾、Parisch⁴⁸⁾ が有限回転増分を取り扱えるように改良している。

一方、Hughes ら⁴⁹⁾ は、1981 年に Ahmad 型 degenerated 要素に対して、共回転系 (co-rotational system)、すなわち要素とともに回転する座標系でのひずみ増分 (速度) および 3 次元構成則を用いたシェル要素を開発した。この要素においては、shear-locking を回避するために selective-reduced integration が用いられている。更に Liu ら⁵⁰⁾ は、Hughes らの要素を 4 節点要素として用い、要素面内は一点積分、肉厚方向には解析的積分を行なうことで explicit に剛性マトリックスを求め、計算精度、効率性を論じ

た。この時、幾何学的非線形問題における接線剛性マトリックスに対応する stabilization マトリックスについても示している。Belytchko ら⁴²⁾の方法も同様に co-rotational approach であるが、Hughes らの方法と異なる点は degenerated 要素ではなく基本的に平面応力を仮定した平板要素である点である。この要素も 1 点積分を行ない stabilization マトリックスを用いて解の安定化を図っている。この要素は初期形状がゆがんでいる要素に対して精度が悪くなるため、Belytchko ら⁵¹⁾は任意初期形状を扱えるように degenerated 要素に対して一点積分をおこない projection method プラス stabilization マトリックスにより解の精度を向上させている。

幾何学的非線形の立場から見た Ahmad 型 degenerated 要素のひとつの問題点は、回転増分が微小であるという仮定のもとに定式化が行なわれていることである。これは、定式化の出発点が線形要素のため、その結果幾何学的非線形問題の場合は接線剛性マトリックスが正しく求められない。従って非線形性問題に対して増分ステップの大きさや収束性に大きな影響を与える。これに関する研究は、古くは Euler 角を用いたシェル要素^{44), 47)}があるが、後に Euler 角よりも幾何学的に明瞭な Argyris⁵²⁾の有限回転テンソルを用いたシェル要素が多く提案されており^{48), 53)~57)}、近年のシェル要素のテーマの一つとなっている。

(5) シェル要素開発に関するその他の研究

以上に述べた方法は、すべて変位型の有限要素法であるが、混合/ハイブリッド法に基づいた (mixed/hybrid method) 要素を用いることも shear-locking に対応する一方法であることは古くから知られており^{58), 59)}、1980年代後半から急速に研究が進められている。これらに関する研究は文献に詳しい^{60)~72)}。その他の近年の話題としては、シェル要素の面内回転自由度の導入^{73)~75)}、9 節点 Lagrange 要素の改良^{76)~80)}が挙げられる。

1. 2. 3 非線形有限要素感度解析手法に関する従来研究

(1) 非線形有限要素感度解析手法定式化に関する従来研究

感度解析とは、構造系に含まれるパラメータ (設計変数) の変動に対して構造応答の変動を求めるものであり、有限要素法においても最適設計の立場から^{1)~18)}、信頼性設計の立場から^{19)~37)}、あるいは両方の立場から^{38)~43)}それぞれ研究開発が進められている。感度解析手法には大別して2つの手法があり、一つは直接差分法であり、もう一つは摂動法あるいは直接微分法である。前者は、基本系

(感度評価の対象とする系)で解析した後で、変動を考慮するパラメータに摂動量を与えて再解析し、得られた応答と基本系での応答との差を感度として求めるものである。この方法は、再解析を行なうため計算効率が悪く、またパラメータの摂動を含んだ剛性マトリックスの逆行列を計算しなければならないため、計算精度の点でも優れていない。したがって、応答の一次感度を求める観点からは直接差分法を用いることは少なく、一次感度の適用範囲を越えてパラメータが変動するような場合についてのみ有用である。摂動法は、構造応答における平衡方程式を、変動を考慮するパラメータで直接微分することにより感度を求めるもので、直接微分法とも呼ばれている。変位法に基づく有限要素法においては、ある変位におけるパラメータに対する不平衡力(釣合状態にある基本系では零)の感度(摂動量)を、その点での接線剛性で除すことにより変位感度を求めることができ、次いで得られた変位感度より応力、ひずみおよび反力の感度が評価される。この方法は、有限要素法でもっとも計算時間を要する剛性マトリックスの三角分解を、感度を求める際には行なう必要がないために計算効率の面で優れており、また、解析的に不平衡力の感度を計算している場合には厳密な応答感度を得ることができる。この場合はすべての変位自由度に対する感度を求めた後で着目量(例えば応力等)の感度を得られるが、adjoint variable method(随伴法)を用いるならば、その時点の接線剛性マトリックスを含む随伴構造の線形方程式を平衡方程式と同時に解くことによって、変位感度を求めることなく着目量の感度を評価することができる。この方法は着目量の数が少なく、変動を考慮するパラメータの数が多き場合に効率的である。以下ではadjoint variable methodを含む摂動法/直微分法による感度解析手法に関する従来の研究についてのみ述べる。

最適設計の分野では、例えばある種の拘束条件下で重量等の最小化を行なう場合に、設計変数に対する構造応答の感度が利用されるが、この分野において最初に有限要素感度解析の定式化をおこなったのは、Zienkiewiczら¹⁾であり、応答感度と線形計画法を用いることにより形状最適化を試みている。その後線形領域を中心に研究が進められ、Aroraら²⁾、Hsiehら³⁾により、静的、動的問題における感度解析手法および最適化手法が体系付けられ、またDems⁴⁾⁻⁶⁾らによって、随伴構造を含む変分原理から線形構造体に対する感度解析手法の定式化が行なわれている。非線形領域においては、Kanekoら⁷⁾が除荷が生じないトラス構造の弾塑性感度解析を行なっているが、一般的な非線形問題に対して摂動法による感度解析定式化を示したのはRyuら⁸⁾であり、次いでMrozら^{9),10)}も同様の定式化を示している。この頃より計算機の性能が飛躍的に向上し非線形有限要素法自体が積極的に実施されるに伴い、このような非線形感度解析手法を汎用コードに取り入れ、最適化手法と組み合わせたシステムとしての開発も行なわれるようになる^{11),12)}。また、Choi, Santos^{13),14)}は非線形感度解析手法においてadjoint variable methodを用いた定式化を示している。上述の非線形感度解析手法は、幾何学的非線形問題お

よび非線形弾性等の経路依存のない材料非線形問題に対してのみ適用可能である。経路依存のある問題に対する感度解析の定式化は Tsay, Arora¹⁵⁹⁻¹⁸⁾ により行なわれているがこれに関しては最後に述べる。

一方信頼性の分野では、期待構造において入力情報の不確からしさ、すなわち物理的な不確からしさ (physical uncertainty)、統計的な不確からしさ (statistical uncertainty) あるいはモデル化における不確からしさ (model uncertainty) が構造応答に与える影響を評価するために感度が用いられる。すなわち、得られた感度と一次近似二次モーメント法と組み合わせることによって、構造応答の統計的な評価を行なうことができる。このような解析手法を有限要素解析に取り入れたのは Combou¹⁹⁾, Handa²⁰⁾ であり Hisada, Nakagiri²¹⁾ によって確率有限要素法 (stochastic finite element method) として体系づけられている。また、Der Kiureghian²²⁾ は、これらの手法を一般的な信頼性解析に応用することによって、信頼性指標を評価する手法を開発している。以上の手法は線形領域におけるものであり、非線形領域においては Liu, Belytsko³⁵⁾⁻³⁸⁾ が先に述べた Ryu⁸⁾ の静的問題に対する感度解析手法を動的問題に拡張する定式化を試みているが、この方法は実際は陽解法を反復し直接差分的に感度を評価しているに過ぎない。Liu³⁵⁾ は感度を求めたあとで一次近似二次モーメント法で構造応答の平均値及び分散値を求めモンテカルロ法による結果と比較している。また Liu, Der Kiureghian^{27), 28)} は幾何学的非線形を考慮した弾性体に対して Ryu⁸⁾ の方法で感度を求め、その後で AFORM (Advanced First Order Reliability Method) 法による信頼性解析を実施している。Hisada^{29), 30)} および Hisada^{31), 32)} は、除荷を含む経路依存性の問題にも適用できる静的非線形感度解析手法を示した上で動的問題に拡張し^{33), 34)}、AFORM を用いて動システムの信頼性解析を実施している^{35), 36)}。

最後に、経路依存性も考慮できる非線形感度解析法の定式化に関する研究について述べる。多くの非線形感度解析手法が Ryu⁸⁾ の方法に基づいて定式化が行なわれているが、Ryu⁸⁾ の定式化は現時点の変位のみを用いて感度を求めているため、弾塑性問題のように構造応答が変位履歴にも依存するような解析には適用することができない。現在まで、経路依存も含めた一般的非線形有限要素感度解析の定式化に関する研究は Hisada²⁹⁾, Tsay^{15), 16)}, Kleiber⁴¹⁾⁻⁴³⁾, Zhang³⁷⁾ が行なっている。有限要素法においては、このような経路依存性の問題に対しては荷重ステップを細分化し、各ステップの間では経路依存性は無視できるものとして解析をおこなうため、いずれの方法もそのような増分方程式に対して感度解析の定式化を行なっている。このような弾塑性問題における問題は、Hisada²⁹⁾ が指摘しているように、変位増分の間で弾性から塑性に移るような場合にその点およびその点の近傍では接線剛性の変分が評価できないことである。この問題に対し Tsay^{15), 16)}, Kleiber⁴¹⁾⁻⁴³⁾ は、増分内では剛性すなわち構成則テンソルが一定、すなわち弾性から塑性に入るような変遷状態はないという仮定のもとで定式化を行なうことにより対応している。また彼らは、control volume method や adjoint

variable method も併用して一般的な感度解析手法の定式化を試みている。しかしながらこの方法は、荷重あるいは変位増分の前後において構造の状態を弾性あるいは塑性状態に固定し、その状態下での感度を評価するため、摂動系において必ずしも正確に降伏点が扱われていない可能性がある。Hisada²⁹⁾は先の問題点を指摘した上で、変位感度を求めるのに必要な不平衡力の感度(摂動)については直接差分法を用いて評価している。この方法は数値的に微分を行なうため、常に実際に与える摂動量と得られる感度の精度について慎重にならなければならないが、Tsay ら^{15), 16)}, Kleiber⁴¹⁾⁻⁴³⁾の方法と比べると、基本系と摂動系で consistent に応力積分を行なえ、かつ材料非線形のみならず幾何学的非線形問題に対しても有限要素法プログラムに容易に取り入れられるという利点がある。Zhang ら³⁷⁾の方法も基本的には Hisada の方法と同じであるが、弾塑性における応力積分アルゴリズムに対して直接差分法を用いて不平衡力の感度を求め、ついで変位感度を求めている。この方法は解析的な微分であるため、弾塑性問題のような複雑な構成則に対しては定式化が複雑になり、また構成則が変わると定式化を再び行なわなければならない点で汎用的ではない。

(2) 座屈荷重感度解析手法に関する従来の研究

座屈荷重に対する感度解析は、1. 2. 1 (4) 項で述べた座屈解析手法を設計変数で微分することによって基本的には定式化が可能であるが、基礎方程式が複雑なこともあり現実には厳密な座屈荷重に対する感度解析は簡単な構造要素を除いてはほとんど行われてない。

まず最初に、線形座屈固有値解析に対する定式化は、最適設計の分野において Kiusalass⁴³⁾、Khot ら⁴⁴⁾、Khot⁴⁵⁾等が、信頼性の分野では久田⁴⁶⁾ら等が行っている。線形座屈固有値解析は、線形静解析における剛性マトリックスとその時の応力から得られる初期応力マトリックス(幾何剛性マトリックス)との間で固有値解析を行うもので、得られた固有値を静解析での荷重に乗じたものが座屈荷重として求められる。線形座屈固有値の感度は、振動固有値解析の場合と全く同様の手順で⁴⁷⁾、剛性マトリックスの逆行列を用いることなく効率良く求めることができる。Kiusalass⁴³⁾、Khot ら⁴⁴⁾、Khot⁴⁵⁾らはトラス、フレーム構造物の座屈固有値解析を行っており、先に述べた剛性マトリックスのみが設計変数に比例し、初期応力マトリックスは設計変数の影響を受けないと仮定して座屈荷重感度を算出している。一方久田⁴⁶⁾はフレーム構造物に対して、初期応力マトリックスは応力の関数であり設計変数に対して陰関数となることを考慮して定式化を行っている。いずれにせよ、線形座屈固有値解析が適用できるのは、Euler buckling のような変形が極めて小さくかつ応答の線形性が強い構造物のみであり、従って、得られる座屈荷重感度もそのような前提のもとでの感度となることに注意しなければならない。

次に、Khotら⁴⁸⁾、Kamat^{49),50)}らは、簡易なトラス構造物に対して幾何学的非線形問題の増分解析で厳密に座屈点を求めて感度解析を実施している。Khotら⁴⁸⁾は、与えられた荷重値が座屈荷重となるような拘束条件の下で、全体の重量を最小になるようなトラス構造物の最適設計解析を実施している。彼らの解析ではトラスの断面積を設計変数とし、幾何学的非線形解析によって厳密に座屈点を探索した後で、ポテンシャルエネルギーの感度を求めて最適化を行なっている。そのため解析においては座屈荷重の感度は評価されていない。一方、Kamatら⁴⁹⁾は、座屈点においては接線剛性マトリックスが特異になることを直接考慮した感度解析をおこなっている。すなわち、平衡方程式と接線剛性マトリックスの行列式が零になる式を連立させて設計変数で微分することにより、座屈荷重の感度を求めている。また同じくKamatら⁵⁰⁾は、2つおよび4つの要素からなるトラス構造物の座屈荷重値の厳密解を求めて座屈荷重感度を評価している。いずれの場合も理想的な解析手法ではあるが、トラス構造物という簡易な要素に対し、設計変数を限定して（例えば断面積）定式化を行なっているため、3次元要素に対する任意の設計変数に対して定式化を行なうにはあまり現実的でないと考えられる。

増分型の幾何学的非線形有限要素解析に基づいた座屈荷重感度評価の一般的な定式化は、Wu & Arora⁵¹⁾、Park & Choi⁵²⁾により行われているが、何れも座屈点以前の平衡点での線形化固有値解析（Linearized One-point Eigenvalue analysis: 以下LOE）から予測される近似的な座屈荷重に対する感度を評価するものである。したがって座屈荷重の精度は、系の非線形性の強さ、あるいは解析点がいかに座屈点に近いかに依存しており、座屈荷重感度もそれに応じたものが得られることになる。これらの感度解析手法が先に述べた線形座屈固有値に対する感度解析手法と異なる点は、固有値解析を行なうマトリックスがそれぞれ変位の関数となっているため、座屈荷重感度が変位感度を含む形で表わされることである。その結果、接線剛性マトリックスの設計変数および変位に関する偏微分を計算する必要が生じ、定式化が複雑なものになり、彼らが解析に使用しているトラスや梁要素以外の要素、例えば3次元シェル要素等を対象に定式化を行なう場合の効率性が懸念される。また、変位感度を求めるにあたっては、座屈点では接線剛性マトリックスが特異になるため、座屈点の極めて近傍でも非常に零に近いpivotでの除算が生じ数値的な不安定が生じる。実際、Park & Choiの例題⁵²⁾では、座屈点に近づくに従い座屈荷重感度が発散する傾向を示している。これに対しPark & Choiは、最適設計の観点からはむしろ、座屈点ではなく座屈以前での予想座屈荷重およびその感度を用いる方が良いとしているが、先に述べたようにLOE解析に基づくかぎり、非線形性の強い問題では、座屈点の近傍でしか精度の高い座屈荷重値を得ることはできない。Wu & Aroraは別の方法として、座屈点上でのみ適用できる効率的な座屈荷重感度式を固有モードを用いて示しているが、極限点に対しては適用できないものの、分岐点に対しては適用することができない。極限点においては、Wu & Aroraらが実施している

簡単なトラス構造の'snap-through'問題の場合、非常に精度の良い座屈荷重感度が得られている。また、Wu & Arora⁵¹⁾, Park & Choi⁵²⁾とも座屈点という'特異点'を数値計算上とり扱う際の困難を指摘しており、まだ研究の余地があると考えられる。

1. 3 本研究の概要と意義

本研究は、大別して有限要素座屈解析手法の開発および有限要素座屈感度解析手法の開発の2つの内容で構成されている。有限要素座屈解析手法に関しては、幾何学的非線形有限要素法の定式化について第2章で、幾何学的非線形シェル要素の開発について第3章で、座屈解析手法について第4、5章で、それぞれ開発を行なっている。また有限要素座屈感度解析手法に関しては、非線形問題に対する感度解析手法の定式化ならびに座屈後挙動のための感度解析手法について第5章で、座屈荷重のための感度解析手法について第6章で、それぞれ開発を行なっている。本研究の構成を図1.3.1に示す。

次に本研究の各章の概要について述べる。

第2章では、テンソル解析の観点から新しい幾何学的非線形有限要素法定式化について示しプログラミングの際の効率化について言及する。現在幾何学的非線形方程式の定式化には total-Lagrange 法と updated-Lagrange 法が主流として用いられており、有限要素プログラミングにおいてはあたかも2通りの別の解法として取り扱われているが、現実にはこの2つの手法はまったく等価な方法で、手法の違いはその構成式の参照している時刻によって決定される。したがって、有限要素プログラミングにおいても、構成則のみの適切なテンソル変換によりプログラミングがひとつにまとめられる可能性がある。第2章では、アインパラメトリック要素の自然座標系を埋め込み座標系とみなし、その成分を持ちいた定式化により total-Lagrange 法と updated-Lagrange 法の統合化を試みる。

第3章では、有限回転を考慮した幾何学的に厳密なシェル要素の開発を行なう。本研究では全章を通じてシェル構造物を対象に解析をおこなうため、開発に先立ち20年来開発が続けられているシェル要素について詳細に調査し(1, 2, 2参照)、基盤とする要素について検討した。その結果、1) 薄肉、厚肉双方のシェルに適用できる(薄肉 Shell 要素においてもロッキングが生じない)、2) 任意の形状のシェルを取り扱える、3) 剛体モード以外の虚偽のゼロ固有値を持たない、4) 要素のゆがみに対して解の精度が損なわれない、5) 要素内の任意の点においてゼロを含む一定ひずみを表現できる、の観点から MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) 要素が理想に近いシェル要素だと考えられる。しかしながら MITC 要素は基本的に微小回転増分を前提としているために完全な接線剛性マトリックスが得られていない。その結果、Newton-Raphson 法の収束性、後に述べる感度解析の精度が劣化すると考えられるため、第3章ではこの点を改良し MITC 要素対して有限回転増分を厳密かつ効率的に取り扱える定式化について示す。

第4章では新しい有限要素分岐座屈座屈解析手法について述べる。厳密な非線形座屈解析を実施するためには、1) 増分型の幾何学的非線形方程式を解き、2) 行列式の値等から座屈点と判断される場

合には、3) 固有値解析を行なって座屈モードを得、4) そのモードと荷重モードより座屈点の分類を行ない、5) 分岐点であれば、分岐解析をおこない分岐経路に解を誘導する、という手順が不可欠である。しかしながら、実用の場においてこのような分岐解析が敬遠されがちなのは、大規模問題の固有値解析の不経済性によるところが大きいと考えられる。したがって、厳密性を損わずに1) から5) までの手順を簡易に行なえる方法が望まれる。第4章では、Newton-Raphson法の反復解法式と座屈点における固有方程式の類似性に着目した、新しい有限要素分岐解析手法を開発する。

第5章の前半部では、弧長増分法の改良と座屈後解析のための感度解析手法の開発を行なう。有限要素座屈解析では、それが飛び移り座屈であれ分岐座屈であれ、座屈後の不安定経路を解析するためには弧長増分法とよばれる経路追従型のアルゴリズムが不可欠である。この時使用する弧長法のアルゴリズムとしては、効率性を重視するならば predictor に垂直な超平面に解を探索しかつ predictor を更新する一種の線形化弧長法が優れているが、長い弧長増分を用いるとは解が発散したり、全く別の経路に解が求められることもあり解が安定的に得られない場合がある。一方安定性を重視するならば超球拘束型弧長法が適しているが、この場合は非線形方程式を解かねばならないため、解が存在しない可能性があり、また複数の解からの適切な解を選択しなければならないため、効率性に欠けている点がある。第5章前半部では、両解析手法の共通性を幾何学的に示し、両者の利点を生かすように改良された robust な弧長法について提案する。

第5章後半部および第6章においては、摂動法に基づく非線形有限要素座屈感度解析手法の開発を行なう。従来の感度解析手法では、不平衡力（釣合状態では零）の変動パラメータに対する摂動量に接線剛性マトリックスの逆行列を乗じることにより、最初に指定荷重下における変位感度が得られ、次いで反力、応力およびひずみの感度が求められる。しかしながら座屈解析においては、座屈点において接線剛性マトリックスが特異になるため変位感度が安定には得ることができない。また、座屈解析の場合は着目する量は終局耐力などの荷重値であるから、変位感度よりも荷重感度が求められる方が望まれる。この場合、荷重も未知数として取り扱うため通常の平衡方程式になんらかの拘束条件式を加えた構造系での感度を評価しなければならない。ここで、固有方程式等の座屈点を定義する拘束条件式を用いると、非線形座屈に対する一般的な定式化は非常に複雑なものになるため、シェル要素等の3次元要素に対しては実用性が少なくこれまでほとんど実施されていない。また、その適用範囲は座屈点のみに限られる。一方本研究においては、固有値解析を使用しない座屈解析手法を提案しているため、感度解析手法においても固有方程式を拘束条件としては取り扱わない。かわりに種々の拘束条件を考慮することにより、座屈形態によらずまた平衡経路上の任意の点で荷重感度を評価でき、かつ座屈点では座屈荷重感度が求められる手法を提案する。本研究第5章後半部においては、弧長法

で用いる一定孤長増分を拘束条件式とした、座屈後解析のための感度解析手法について述べる。次いで第6章においては、超円筒型の total 変位拘束条件を考慮することによって、座屈荷重感度を効率よく求める手法について示す。

本研究の意義は、以上で述べた解析手法を統合した非線形座屈解析システムによって、現在行なわれている座屈挙動を考慮した最適設計や信頼性評価の効率や精度を、より向上させる可能性があることだと考える。

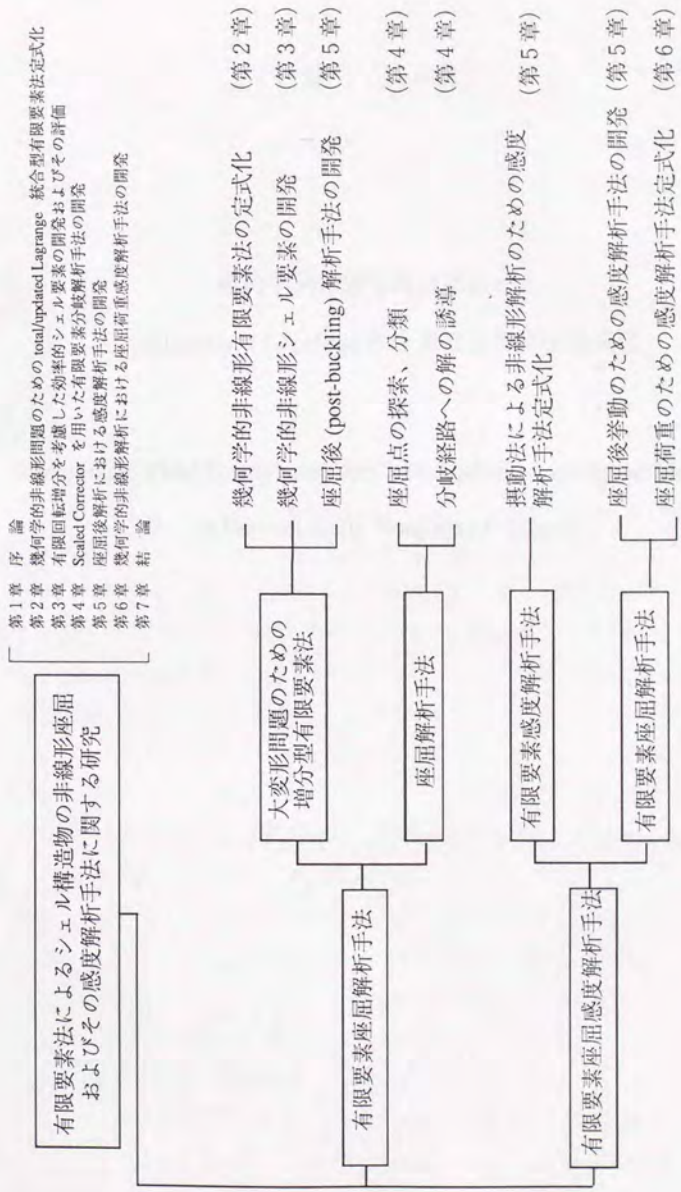


図 1.3.1 本研究の構成

第 2 章

幾何学的非線形問題における

total/updated Lagrange 統合型有限要素法定式化

Integrated FEM Formulation for Total/Updated-Lagrangian Method
in Geometrically Nonlinear Problems

2. 1 緒 言

現在、幾何学的非線形問題に対する解法としては、total-Lagrange 法および updated-Lagrange 法の二つが主として用いられているが、両者の違いは定式化の出発点となる仮想仕事の原理において、応力テンソル、ひずみテンソルなどが参照する基準配置を、時刻 0 あるいは現時刻 t のいずれにとるかによっている。当然のことながら、いかなる幾何学的非線形問題も両手法による有限要素法の定式化が可能であり、得られる接線剛性マトリックスおよび数値解は一致しなければならない。

現実には両手法の使い分けは、応力テンソルとひずみテンソルを関係づける構成式が参照している基準配置 (の時刻) によって決定される。すなわち構成式が、時刻 0 の配置に基づき記述されているならば total-Lagrange 法が、時刻 t ならば updated-Lagrange 法が用いられるわけである。例えば金属材料の弾塑性構成式は、通常は現時刻 t を基準配置とした応力速度とひずみ速度を用いて記述されるので、この場合は updated-Lagrange 法を用いる方が簡便である。また時刻 0 からの変形勾配を参照する弾性体、あるいは Mooney-Rivlin 体等の超弾性体の場合は、total-Lagrange 法が広く用いられている。

汎用的な観点からは、両手法による有限要素解析プログラムを完備し構成式により適切な手法を選択するのが望ましいが、従来からの手法に従い直交デカルト座標系での基底ベクトルで分解された応力やひずみテンソルの成分を用いて有限要素法の定式化を行なうと、接線剛性マトリックス等を導く手順は両者で明らかに異り¹⁾、2通りのプログラミングが必要になる。また同じ問題を両手法で解析した場合、得られる接線剛性マトリックス等が一致することを見つけて判断することは困難である。

一方、埋め込み座標系における基底ベクトルで分解したテンソル成分を用いて定式化を行なう場合は、変形状態などを基底ベクトルのみで簡潔に表わすことができる²⁾。しかしながら、基底ベクトルそのものが空間的に変化し、また三つの基底ベクトルは一般には直交しない等、別種の複雑さがあるため、近年では Bathe³⁾らが total-Lagrange 法によるシェル要素を示しているものの、汎用的な解析手法として数値計算に用いられていることは比較的少ない。

本章では、埋め込み座標系を用いることにより、適切な構成式の変換を行なうだけで total-Lagrange 法、updated-Lagrange 法いずれの手法にも対応できる統一なプログラミングが可能であることを示す。以下では、まずアインパラメトリック要素における自然座標系をその要素の埋め込み座標系としてとらえ、その基底ベクトルにより応力、ひずみテンソルを分解する。そして、その成分を用いて両手法による接線剛性マトリックス等を導けば、両者の同一性が容易に確認できることを示す。またプログラミングにおいても共有性が高いことを示す。最後に具体例として、本手法を三次元ソリッド要素および三次元シェル要素に適用し、従来の手法と比較した場合の長所、短所を論じる。

2. 2 仮想仕事の原理

本節では、埋め込み座標における成分を用いた場合の、total-Lagrange 法および updated-Lagrange 法による仮想仕事式について概説する。なお以下に本章で用いる記号について示す。

${}^t_0\mathbf{S}, {}^t_0\dot{\mathbf{S}}$ 時刻 0, t を基準配置とする時刻 t' における 2nd Piola-Kirchhoff 応力テンソル

${}^t_0\dot{\mathbf{S}}, {}^t_0\ddot{\mathbf{S}}$ 時刻 t における 2nd Piola-Kirchhoff 応力速度および Truesdell 応力速度

${}^t\mathbf{T}$ 時刻 t における Cauchy 応力テンソル ($= {}^t_0\mathbf{S}$)

${}^t\mathbf{u}$ 時刻 t での変位ベクトル

\mathbf{u} 時刻 t から t' までの変位増分ベクトル

${}^t_0\mathbf{E}, {}^t_0\dot{\mathbf{E}}$ 時刻 0, t を基準配置とする時刻 t' における Green-Lagrange ひずみテンソル

${}^t_0\dot{\mathbf{E}}, {}^t_0\ddot{\mathbf{E}}$ 時刻 0, t を基準配置とする時刻 t における Green-Lagrange ひずみテンソル速度

${}^0\mathbf{C}, {}^t\mathbf{C}$ それぞれ ${}^t_0\dot{\mathbf{S}}$ と ${}^t_0\dot{\mathbf{E}}$, ${}^t_0\ddot{\mathbf{S}}$ と ${}^t_0\ddot{\mathbf{E}}$ の間に仮定する四階の構成則テンソル

\mathbf{F}, \mathbf{D} 変形勾配テンソルおよび変形速度テンソル

$\mathbf{G}_i, {}^i\mathbf{g}_i$ 時刻 0, t における埋め込み座標系の共変基底ベクトル

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^i}, \quad {}^i\mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^i\mathbf{x}}{\partial r^i}$$

$\mathbf{G}^i, {}^i\mathbf{g}^i$ 時刻 0, t における埋め込み座標系の反変基底ベクトル

$$\mathbf{G}^i = \frac{\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_k}{\mathbf{G}_i \cdot (\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_k)}, \quad {}^i\mathbf{g}^i = \frac{{}^i\mathbf{g}_j \times {}^i\mathbf{g}_k}{{}^i\mathbf{g}_i \cdot ({}^i\mathbf{g}_j \times {}^i\mathbf{g}_k)}$$

ただし $(i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$

$\mathbf{X}, {}^i\mathbf{x}$ 時刻 0, t での物質点の位置ベクトル

r^i 埋め込み座標系における i 方向成分

$V, {}^i v$ 時刻 0, t における物体の占める領域

J 体積変化率 ($= \det \mathbf{F} = \frac{d^i v}{dV}$)

2. 2. 1 仮想仕事式の増分解

一般に任意の時刻における仮想仕事式は、Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} および微小ひずみテンソル \mathbf{e} を用いて次のように書くことができる。

$$\int_V \mathbf{T} : \delta \mathbf{e} \, dv = \delta R \quad (2.2.1)$$

δ は仮想変位に起因する変分、 δR は外力のなす仮想仕事を表わしている。ここで、式 (2.2.1) を 2nd Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} および Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} を用いて書き表わす。まず変形勾配テンソル \mathbf{F} および変形速度テンソル \mathbf{D} により Green-Lagrange ひずみテンソル速度 $\dot{\mathbf{E}}$ は

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.2.2)$$

と書けるので、 $\mathbf{D}\delta t = \delta \mathbf{e}$ の関係を用いれば式 (2.2.2) より

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \delta t \cdot \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

を得る。式 (2.2.3) を式 (2.2.1) に代入して

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T} : \delta \mathbf{e} \, dv &= \int_V \mathbf{T} : (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \, dv \\ &= \int_V \text{tr} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \, dv \\ &= \int_V \text{tr} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E}) \, dv \\ &= \int_V \text{tr} \left(\frac{1}{J} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \right) \, dv \\ &= \int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

となる。ここで式の変形においては、 $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ 、 $J = dv / dV$ の関係を用いた。

従って、total-Lagrange 法および updated-Lagrange 法で用いられる時刻 $t' = t + \Delta t$ における仮想仕事式は、それぞれ時刻 0, t を基準配置値として、式 (2.2.5) および (2.2.6) のように書くことができる。

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV = {}^t \delta R \quad (2.2.5)$$

$$\int_{t'} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, d^t v = {}^t \delta R \quad (2.2.6)$$

Green-Lagrange ひずみを埋め込み座標系における反変基底ベクトル G^i, G^j および ${}^t g^i, {}^t g^j$ でそれぞれ分解すると、

$${}^t_0 E = \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot {}^t g_j - G_i \cdot G_j) G^i \otimes G^j \quad (2.2.7)$$

$${}^t_0 E = \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot {}^t g_j - G_i \cdot G_j) G^i \otimes G^j \quad (2.2.8)$$

$${}^t_1 E = \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot {}^t g_j - {}^t g_i \cdot {}^t g_j) {}^t g^i \otimes {}^t g^j \quad (2.2.9)$$

と表わせる。式 (2.2.7), (2.2.8) および (2.2.9) より Green-Lagrange ひずみの増分 ${}_0 E, {}_1 E$ はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} {}_0 E &= {}_0 E_{ij} G^i \otimes G^j \\ &= {}^t_0 E - {}^t_0 E \\ &= \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot {}^t g_j - {}^t g_i \cdot {}^t g_j) G^i \otimes G^j \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} {}_1 E &= {}_1 E_{ij} {}^t g^i \otimes {}^t g^j \\ &= {}^t_1 E - {}^t_1 E \\ &= \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot {}^t g_j - {}^t g_i \cdot {}^t g_j) {}^t g^i \otimes {}^t g^j \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

${}_0 E$ および ${}_1 E$ は当然異なるテンソルであるが、それぞれ適当な基底ベクトルで分解することによって、その成分の値が一致することを上式は示している。一方時刻 t における ${}^t g_i$ は、 ${}^t g_i$ および時刻 t から t' までの変位増分ベクトル u を用いて

$${}^t g_i = {}^t g_i + \frac{\partial u}{\partial r^i} \quad (2.2.12)$$

となるので、これを式 (2.2.10), (2.2.11) の最右辺に代入し整理すれば次式を得る。

$${}_0 E_{ij} = {}_1 E_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad (2.2.13)$$

但し

$$e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot \frac{\partial u}{\partial r^j} + {}^t g_j \cdot \frac{\partial u}{\partial r^i}), \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r^i} \frac{\partial u}{\partial r^j} \quad (2.2.14)$$

更に式 (2.2.13) の変分をとり

$$\delta_0 E_{ij} = \delta_1 E_{ij} = \delta e_{ij} + \delta \eta_{ij} \quad (2.2.15)$$

但し

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t g_i \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial r^j} + {}^t g_j \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial r^i}), \quad \delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial \delta u}{\partial r^i} \frac{\partial u}{\partial r^j} + \frac{\partial u}{\partial r^i} \frac{\partial \delta u}{\partial r^j}) \quad (2.2.16)$$

いま、時刻 t での状態量を既知とすると、 ${}^t_0\mathbf{E}$, ${}^t_1\mathbf{E}$ の変分は ${}_0\mathbf{E}$, ${}_1\mathbf{E}$ の変分であると見なすことができる。よって、

$$\begin{aligned} \delta_0^t \mathbf{E} &= \delta_0^t E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \delta_0 \mathbf{E} \\ &= (\delta e_{ij} + \delta \eta_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} \delta_1^t \mathbf{E} &= \delta_1^t E_{ij} {}^t\mathbf{g}^i \otimes {}^t\mathbf{g}^j \\ &= \delta_1 \mathbf{E} \\ &= (\delta e_{ij} + \delta \eta_{ij}) {}^t\mathbf{g}^i \otimes {}^t\mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

次に時刻 t の 2nd Piola-Kirchhoff 応力を、埋め込み座標系における共変基底ベクトル \mathbf{G}_i , \mathbf{G}_j および ${}^t\mathbf{g}_i$, ${}^t\mathbf{g}_j$ でそれぞれ次のように分解する。

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{S} &= {}_0\mathbf{S} + {}_0\mathbf{S} \\ &= ({}_0\mathbf{S}^{ij} + {}_0\mathbf{S}^{ij}) \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} {}_1\mathbf{S} &= {}_1\mathbf{T} + {}_1\mathbf{S} \\ &= ({}^t\mathbf{T}^{ij} + {}_1\mathbf{S}^{ij}) {}^t\mathbf{g}_i \otimes {}^t\mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

ただし ${}^t\mathbf{T}$ ($= {}_1\mathbf{S}$) は時刻 t における Cauchy 応力テンソルを表わしている。式 (2.2.17) ~ (2.2.20) を式 (2.2.5), (2.2.6) に代入すると次の仮想仕事の増分解式が得られる。

$$\int_V {}_0\mathbf{S}^{ij} (\delta e_{ij} + \delta \eta_{ij}) dV + \int_V {}_1\mathbf{S}^{ij} \delta \eta_{ij} dV = {}^t\delta R - \int_V {}_0\mathbf{S}^{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2.2.21)$$

$$\int_{iv} {}_1\mathbf{S}^{ij} (\delta e_{ij} + \delta \eta_{ij}) d^iv + \int_{iv} {}^t\mathbf{T}^{ij} \delta \eta_{ij} d^iv = {}^t\delta R - \int_{iv} {}^t\mathbf{T}^{ij} \delta e_{ij} d^iv \quad (2.2.22)$$

2. 2. 2 接線剛性の作成

増分解された仮想仕事式 (2.2.21), (2.2.22) の左辺を Δt で除し $\Delta t \rightarrow 0$ として線形化を行なうことにより、非線形方程式を解く際の接線剛性を求めることができる。すなわち、 ${}_0\mathbf{S}^{ij}/\Delta t \rightarrow {}_0\mathbf{S}^{ij}$, ${}_1\mathbf{S}^{ij}/\Delta t \rightarrow {}_1\mathbf{S}^{ij}$, $\mathbf{u}/\Delta t \rightarrow \dot{\mathbf{u}}$ を考慮して各式の左辺から次式が得られる。

$$\text{式(2.2.21)左辺} \rightarrow \int_V \mathfrak{b}\dot{S}^{ij} \delta e_{ij} dV + \int_V \mathfrak{b}S^{ij} (\delta\eta_{ij})' dV \quad (2.2.23)$$

$$\text{式(2.2.22)左辺} \rightarrow \int_{iv} \mathfrak{t}\dot{S}^{ij} \delta e_{ij} d^iv + \int_{iv} \mathfrak{t}T^{ij} (\delta\eta_{ij})' d^iv \quad (2.2.24)$$

但し

$$(\delta\eta_{ij})' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \quad (2.2.25)$$

今、応力速度テンソルとひずみ速度テンソルの間に次のような構成式を仮定する。

$$\mathfrak{b}\dot{S} = {}_0C : \mathfrak{b}\dot{E} \quad (2.2.26)$$

$$\mathfrak{t}\dot{S} = {}_tC : \mathfrak{t}\dot{E} \quad (2.2.27)$$

$$\mathfrak{b}\dot{E} = \dot{e}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.2.28)$$

$$\mathfrak{t}\dot{E} = \dot{e}_{ij} \mathfrak{t}g^i \otimes \mathfrak{t}g^j \quad (2.2.29)$$

但し

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \mathfrak{t}g^j + \mathfrak{t}g^i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \quad (2.2.30)$$

よって ${}_0C$ および ${}_tC$ を式(2.2.31), (2.2.32) のように分解すれば式(2.2.33), (2.2.34) が得られる。

$${}_0C = {}_0C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (2.2.31)$$

$${}_tC = {}_tC^{ijkl} \mathfrak{t}g_i \otimes \mathfrak{t}g_j \otimes \mathfrak{t}g_k \otimes \mathfrak{t}g_l \quad (2.2.32)$$

$$\mathfrak{b}\dot{S}^{ij} = {}_0C^{ijkl} \dot{e}_{kl} \quad (2.2.33)$$

$$\mathfrak{t}\dot{S}^{ij} = {}_tC^{ijkl} \dot{e}_{kl} \quad (2.2.34)$$

これより式(2.2.23), (2.2.24) はそれぞれ次のようになる。

$$\text{式(2.2.23)} = \int_V {}_0C^{ijkl} \dot{e}_{kl} \delta e_{ij} dV + \int_V \mathfrak{b}S^{ij} (\delta\eta_{ij})' dV \quad (2.2.35)$$

$$\text{式(2.2.24)} = \int_{iv} {}_tC^{ijkl} \dot{e}_{kl} \delta e_{ij} d^iv + \int_{iv} \mathfrak{t}T^{ij} (\delta\eta_{ij})' d^iv \quad (2.2.36)$$

一方、一般に成立する次の関係

$$\mathfrak{t}\dot{S} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathfrak{b}\dot{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.37)$$

$$\mathfrak{t}T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot {}_0\dot{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.38)$$

$$\mathbf{F} = \delta_{ij}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.2.39)$$

から次式が導かれる。

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{S}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j &= \frac{1}{J} \delta_{il}^k (\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^l) \delta^{mn} (\mathbf{G}_m \otimes \mathbf{G}_n) \delta_{,p}^o (\mathbf{G}^p \otimes \mathbf{g}_o) \\ &= \frac{1}{J} \delta^{ko} (\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_o) \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

$$\therefore {}^i\mathbf{S}^{ij} = \frac{1}{J} \delta^{ij} \quad (2.2.41)$$

同様にして

$${}^t\mathbf{T}^{ij} = \frac{1}{J} \delta^{ij} \quad (2.2.42)$$

更に、式 (2.2.33), (2.2.34) および (2.2.40) より

$${}_o\mathbf{C}^{ijkl} = J {}_t\mathbf{C}^{ijkl} = \frac{d^t v}{dV} {}_t\mathbf{C}^{ijkl} \quad (2.2.43)$$

結局、式 (2.2.41), (2.2.42), (2.2.43) により式 (2.2.35), (2.2.36) の与える接線剛性はまったく同一のものであることが容易に確認できる。

2. 2. 3 内力 (等価節点力) の算出

時刻 t における内力 (等価節点力) は式 (2.2.5), (2.2.6) で時刻 t' を t と置くことにより求められる。

これらは、式 (2.2.21), (2.2.22) 右辺第 2 項と等値でき、

$$\int_V \delta \mathbf{S} : \delta_0^t \mathbf{E} \, dV = \int_V \delta \mathbf{S}^{ij} \delta e_{ij} \, dV \quad (2.2.44)$$

$$\begin{aligned} \int_{t'v} {}^i\mathbf{S} : \delta_i^t \mathbf{E} \, dt'v &= \int_{t'v} {}^t\mathbf{T} : \delta_i^t \mathbf{E} \, dt'v \\ &= \int_{t'v} {}^t\mathbf{T}^{ij} \delta e_{ij} \, dt'v \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

となる。

また、(2.2.42) より

$${}^t\mathbf{T}^{ij} \, dt'v = \delta \mathbf{S}^{ij} \, dV \quad (2.2.46)$$

であるから、(2.2.44), (2.2.45) の右辺が同一であることは容易に確認できる。

2. 3 プログラミングにおける total-Lagrange 法と updated-Lagrange 法の同一性

2. 3. 1 B マトリックス ($\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$)

ここでは、有限要素法での慣例にしたがい、B マトリックスを、有限要素離散化の過程において節点変位から要素内のひずみ値や変位の空間的微分値を計算するための変換マトリックスとし、厳密には次項で定義するが、 $\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$ をそれぞれ $\mathbf{e}_{ij}, \eta_{ij}$ に対応するものとする。このうち \mathbf{B}_L マトリックスは、接線剛性マトリックスだけでなく、内力（等価節点力）の評価にも用いられる。

前節で示したように、埋め込み（自然）座標系において成分表示を行なうと、total-Lagrange 法および updated-Lagrange 法に基づく仮想仕事式で用いられるひずみ成分に区別はないので、 \mathbf{B}_L および \mathbf{B}_{NL} マトリックスは両手法とも同じものになる。

なお本手法によれば、直交座標系における成分を用いて離散化する場合に total-Lagrange 法で必要となる初期変位マトリックス (\mathbf{B}_{L1}) が陽な形では現われないが、これについては次のように解釈することが可能である。すなわち、式 (2.2.30), (2.2.16) に ${}^t\mathbf{g}_i = \mathbf{G}_i + \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial r^i}$ を代入すると、 \mathbf{e}_{ij} の速度と変分は

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial^i \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} + \mathbf{G}_j \cdot \frac{\partial^j \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial^j \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} + \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial r^j} \cdot \frac{\partial^i \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \right) \quad (2.3.1)$$

$$\delta \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} + \mathbf{G}_j \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} + \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial r^j} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \right) \quad (2.3.2)$$

のように2つの項に分けることができる。それぞれを離散化すると、第一項は微小変形解析の \mathbf{B}_{L0} マトリックスを、第二項は通常の total-Lagrange 法における初期変位 (${}^t\mathbf{u}$) の寄与による \mathbf{B}_{L1} マトリックスを生じる。

2. 3. 2 接線剛性マトリックス (\mathbf{K} マトリックス)

前項で示したように、接線剛性マトリックスは式 (2.2.35), (2.2.36) より作ることができる。この時の領域積分は埋め込み座標系上で行なうが、アインパラメトリック要素自然座標系と埋め込み座標系を一致させれば、通常の数値積分により剛性マトリックスが求められる。今 $[\]$ はスカラー3重積を表わすものとするれば、

$$dV = [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.3.3)$$

$$d^t v = [{}^t\mathbf{g}_1 {}^t\mathbf{g}_2 {}^t\mathbf{g}_3] dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.3.4)$$

であるから結局次式を得る。

$$\begin{aligned} \text{式 (2.2.35)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_1 G_2 G_3] {}_0C^{ijkl} \dot{e}_{kl} \delta e_{ij} dr^1 dr^2 dr^3 \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_1 G_2 G_3] {}_1S^{ij} (\delta \eta_{ij})' dr^1 dr^2 dr^3 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G_1 G_2 G_3] (B_L^T {}_0\bar{D} B_L + B_{NL}^T \bar{S} B_{NL}) dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{式 (2.2.36)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [{}^1g_1 {}^1g_2 {}^1g_3] {}_1C^{ijkl} \dot{e}_{kl} \delta e_{ij} dr^1 dr^2 dr^3 \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [{}^1g_1 {}^1g_2 {}^1g_3] {}^1T^{ij} (\delta \eta_{ij})' dr^1 dr^2 dr^3 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [{}^1g_1 {}^1g_2 {}^1g_3] (B_L^T {}_1\bar{D} B_L + B_{NL}^T \bar{T} B_{NL}) dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.3.8)$$

式 (2.3.5), (2.3.6) の最右辺は前項で述べた B マトリックスを用いて表記している。なお式中 ${}_0\bar{D}$, ${}_1\bar{D}$ は構成則マトリックス、 \bar{S} , \bar{T} は応力マトリックスを表わしているがテンソルと区別するために上線を施している。以上により、埋め込み（自然）座標系における成分を用いれば、total-Lagrange 法及び updated-Lagrange 法に基づく接線剛性マトリックスは全く同様な手順で得られ、またプログラミングにおいては B マトリックスの共有化が可能であること、換言すれば、基底ベクトルの選択により一つのプログラムを total-Lagrange 法、updated-Lagrange 法のいずれとも見なすことが可能であることが示された。なお基底ベクトルの選択の判断は、従来と同様、対象とする物質の構成式から ${}_0C^{ijkl}$, ${}_1C^{ijkl}$ を求める際の効率を考慮して行なえばよい。

2. 3. 3 内力（等価節点力）ベクトル

内力（等価節点力）ベクトルの作成は式 (2.2.44), (2.2.45) より作ることができる。この時の領域積分は埋め込み座標系上で行なうが、アインパラメトリック要素自然座標系と埋め込み座標系を一致させれば、通常の数値積分により内力（等価節点力）ベクトルが求められる。式 (2.3.3), (2.3.4) を式 (2.2.44), (2.2.45) に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \text{式 (2.2.44)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3] \delta S^{ij} \delta e_{ij} \, dr^1 dr^2 dr^3 \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3] \mathbf{B}_L^T \widehat{\mathbf{S}} \, dr^1 dr^2 dr^3
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{式 (2.2.45)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [{}^t \mathbf{g}_1 {}^t \mathbf{g}_2 {}^t \mathbf{g}_3] {}^t T^{ij} \delta e_{ij} \, dr^1 dr^2 dr^3 \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [{}^t \mathbf{g}_1 {}^t \mathbf{g}_2 {}^t \mathbf{g}_3] \mathbf{B}_L^T \widehat{\mathbf{T}} \, dr^1 dr^2 dr^3
 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

式 (2.3.7), (2.3.8) の最右辺は前節で述べた \mathbf{B} マトリックスを用いて表記している。なお式中 $\widehat{\mathbf{S}}, \widehat{\mathbf{T}}$ は応力ベクトルを表わしているがテンソルと区別するために \wedge を施している。以上により、 $\widehat{\mathbf{S}}, \widehat{\mathbf{T}}$ が得られている場合、埋め込み（自然）座標系における成分を用いれば、total-Lagrange 法及び updated-Lagrange 法に基づく内力（等価節点力）ベクトルは全く同様な手順で得られ、またプログラミングにおいては \mathbf{B} マトリックスの共有化が可能である。なお $\widehat{\mathbf{S}}, \widehat{\mathbf{T}}$ の各応力成分は、変位増分 \mathbf{u} が得られた後、対象とする物質の構成式に依存した応力積分方法により求められる。

2. 4 離散化およびプログラミング手順

前節では埋め込み（自然）座標系におけるテンソル成分を用いることにより、total-Larange 法、updated-Lagrange 法、いずれの手法で定式化を行なっても、統一的なプログラミングが可能であることを示した。本節では、更に具体的に3次元ソリッド要素、シェル要素に対してプログラミングにおける実際の手順を示す。なお従来の手法によるプログラミングについては Appendix に示す。

2. 4. 1 3次元ソリッド要素（連続体要素）

ここでは、時刻 t での状態量が既知であるものとして、接線剛性マトリックスおよび等価節点力の作成手順について述べる。

(1) 時刻 t における共変基底ベクトル ${}^t\mathbf{g}_i$ を求める。

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{g}_i &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^i} = \frac{\partial N^k}{\partial r^i} \mathbf{x}^k \\ &= \mathbf{G}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} = \mathbf{G}_i + \frac{\partial N^k}{\partial r^i} \mathbf{u}^k \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

ここで

$$\mathbf{x} = N^k \mathbf{x}^k, \quad \mathbf{u} = N^k \mathbf{u}^k \quad (2.4.2)$$

N は形状関数、右肩の k は節点 k における値を表わしており、要素を構成するすべての節点に関して総和規約を適用するものとする。

(2) 求めた ${}^t\mathbf{g}_i$ よりスカラー3重積 $[{}^t\mathbf{g}_1 \ {}^t\mathbf{g}_2 \ {}^t\mathbf{g}_3]$ 及び反変基底ベクトル ${}^t\mathbf{g}^i$ を計算する。必要に応じて $[\mathbf{G}_1 \ \mathbf{G}_2 \ \mathbf{G}_3]$ も計算する。

(3) ${}^t\mathbf{g}_i$ を用いて \mathbf{B}_L マトリックスを作成する。ここで

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{B}_L \bar{\mathbf{u}} \quad (2.4.3)$$

であり、 $\bar{\mathbf{e}}$ は式(2.2.30)の $\dot{\epsilon}_{ij}$ をベクトル表示したもので、 $\bar{\mathbf{e}}^T = \{\dot{\epsilon}_{11} \ \dot{\epsilon}_{22} \ \dot{\epsilon}_{33} \ 2\dot{\epsilon}_{12} \ 2\dot{\epsilon}_{23} \ 2\dot{\epsilon}_{31}\}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ は節点変位ベクトルを節点ごとに並べたもので、 $\bar{\mathbf{u}}^T = \{\dot{u}_1^1 \ \dot{u}_2^1 \ \dot{u}_3^1 \ \cdots \ \dot{u}_1^k \ \dot{u}_2^k \ \dot{u}_3^k \ \cdots \ \dot{u}_1^n \ \dot{u}_2^n \ \dot{u}_3^n\}$ である。したがって、 \mathbf{B}_L は $6 \times 3n$ (n は要素あたりの節点数) の大きさで次式のように書くことができる。

$$\mathbf{B}_L = [\mathbf{B}_L^1 \mathbf{B}_L^2 \cdots \mathbf{B}_L^k \cdots \mathbf{B}_L^n] \quad (2.4.4)$$

$\mathbf{B}_L^k (L, M)$ が部分マトリックス \mathbf{B}_L^k の L 行 M 列目の成分を表わすものとすれば、式 (2.2.30)、(2.4.2)₂ から得られる

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N^k}{\partial r^i} \dot{\mathbf{u}}^k \cdot {}^i \mathbf{g}_j + {}^i \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial N^k}{\partial r^j} \dot{\mathbf{u}}^k \right) \quad (2.4.5)$$

を参照して、

$$\mathbf{B}_L^k (L, M) = ({}^i \mathbf{g}_L)_M \frac{\partial N^k}{\partial r^L} \quad (L, M = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{B}_L^k (L, M) = ({}^i \mathbf{g}_{L2})_M \frac{\partial N^k}{\partial r^{L1}} + ({}^i \mathbf{g}_{L1})_M \frac{\partial N^k}{\partial r^{L2}} \quad (L = 4, 5, 6, M = 1, 2, 3) \quad (2.4.6)$$

と与えられる。ただし $L1, L2$ はそれぞれ $L=4, 5, 6$ に対し $(L1, L2) = (2, 1), (3, 2), (1, 3)$ であり、 $(\mathbf{g}_L)_M$ はベクトル \mathbf{g}_L の空間に固定した直交デカルト座標における第 M 成分を表している。

(4) 同様に \mathbf{B}_{NL} を求める。前項と同様にして式 (2.2.25) を離散化すれば

$$(\delta \eta_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N^k}{\partial r^i} \delta \mathbf{u}^k \cdot \frac{\partial N^m}{\partial r^j} {}^i \dot{\mathbf{u}}^m + \frac{\partial N^k}{\partial r^i} {}^i \dot{\mathbf{u}}^k \cdot \frac{\partial N^m}{\partial r^j} \delta \mathbf{u}^m \right) \quad (2.4.7)$$

であるから、 $\bar{\mathbf{d}}^T = \left\{ \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial r^1} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial r^1} \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial r^1} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial r^2} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial r^2} \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial r^2} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial r^3} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial r^3} \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial r^3} \right\}$ と置き

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{B}_{NL} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.4.8)$$

を満たすように \mathbf{B}_{NL} を定める。 \mathbf{B}_{NL} は $9 \times 3n$ の大きさになり、次式のように書くことができる

$$\mathbf{B}_{NL} = [\mathbf{B}_{NL}^1 \mathbf{B}_{NL}^2 \cdots \mathbf{B}_{NL}^k \cdots \mathbf{B}_{NL}^n] \quad (2.4.9)$$

更に \mathbf{B}_{NL}^k を 3×3 の 3 つの小行列に分け、

$$\mathbf{B}_{NL}^k = [\mathbf{B}_{NL,1}^k \mathbf{B}_{NL,2}^k \mathbf{B}_{NL,3}^k]^T \quad (2.4.10)$$

とし、 $\mathbf{B}_{NL,J}^k (L, M)$ が部分マトリックス $\mathbf{B}_{NL,J}^k$ の L 行 M 列目の成分を表わすものとすれば

$$\mathbf{B}_{NL,J}^k (L, M) = \frac{\partial N^k}{\partial r^J} \delta_{LM} \quad (J, L, M = 1, 2, 3) \quad (2.4.11)$$

と与えられる。

(5) 構成則テンソルの反変成分を求める。

ここで \mathbf{e}_i を直交デカルト座標系での単位基底ベクトルとし、 \mathbf{e}_i で分解した成分には \sim を付けて区別する。

$$\begin{aligned}
{}_0C &= {}_0\tilde{C}_{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \\
&= {}_0C^{mnop} G_m \otimes G_n \otimes G_o \otimes G_p
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

であるから

$${}_0C^{mnop} = {}_0\tilde{C}_{ijkl} (e_i \cdot G^m)(e_j \cdot G^n)(e_k \cdot G^o)(e_l \cdot G^p) \tag{2.4.13}$$

となる。同様に、

$${}_iC^{mnop} = {}_i\tilde{C}_{ijkl} (e_i \cdot {}^i g^m)(e_j \cdot {}^i g^n)(e_k \cdot {}^i g^o)(e_l \cdot {}^i g^p) \tag{2.4.14}$$

である。物性値として ${}_0\tilde{C}_{ijkl}$ あるいは ${}_i\tilde{C}_{ijkl}$ が定められれば式 (2.4.13), (2.4.14) を用いて反変成分に変換する。

(6) 接線剛性マトリックスを作成する。

式 (2.4.13) あるいは (2.4.14) で求めた構成則テンソル反変テンソル成分を用いて構成則マトリックス \bar{D} を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= [G_1 G_2 G_3] {}_0\bar{D} \\
&= [G_1 G_2 G_3] \begin{pmatrix} {}_0C^{1111} & {}_0C^{1122} & {}_0C^{1133} & {}_0C^{1112} & {}_0C^{1123} & {}_0C^{1131} \\ {}_0C^{2211} & {}_0C^{2222} & {}_0C^{2233} & {}_0C^{2212} & {}_0C^{2223} & {}_0C^{2231} \\ {}_0C^{3311} & {}_0C^{3322} & {}_0C^{3333} & {}_0C^{3312} & {}_0C^{3323} & {}_0C^{3331} \\ {}_0C^{1211} & {}_0C^{1222} & {}_0C^{1233} & {}_0C^{1212} & {}_0C^{1223} & {}_0C^{1231} \\ {}_0C^{2311} & {}_0C^{2322} & {}_0C^{2333} & {}_0C^{2312} & {}_0C^{2323} & {}_0C^{2331} \\ {}_0C^{3111} & {}_0C^{3122} & {}_0C^{3133} & {}_0C^{3112} & {}_0C^{3123} & {}_0C^{3131} \end{pmatrix} \\
&= [{}^i g_1 {}^i g_2 {}^i g_3] {}_i\bar{D} \\
&= [{}^i g_1 {}^i g_2 {}^i g_3] \begin{pmatrix} {}_iC^{1111} & {}_iC^{1122} & {}_iC^{1133} & {}_iC^{1112} & {}_iC^{1123} & {}_iC^{1131} \\ {}_iC^{2211} & {}_iC^{2222} & {}_iC^{2233} & {}_iC^{2212} & {}_iC^{2223} & {}_iC^{2231} \\ {}_iC^{3311} & {}_iC^{3322} & {}_iC^{3333} & {}_iC^{3312} & {}_iC^{3323} & {}_iC^{3331} \\ {}_iC^{1211} & {}_iC^{1222} & {}_iC^{1233} & {}_iC^{1212} & {}_iC^{1223} & {}_iC^{1231} \\ {}_iC^{2311} & {}_iC^{2322} & {}_iC^{2333} & {}_iC^{2312} & {}_iC^{2323} & {}_iC^{2331} \\ {}_iC^{3111} & {}_iC^{3122} & {}_iC^{3133} & {}_iC^{3112} & {}_iC^{3123} & {}_iC^{3131} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

次に、応力の反変成分を用いて応力マトリックス $\bar{\Sigma}$ を次のように定義する。 $\bar{\Sigma}_{ij}$ は 3×3 の部分マトリックス、 \mathbf{I} は単位マトリックスである。

$$\bar{\Sigma} = [G_1 G_2 G_3] \bar{S} = [{}^i g_1 {}^i g_2 {}^i g_3] \bar{T} \tag{2.4.16}$$

ここで

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & \bar{\Sigma}_{12} & \bar{\Sigma}_{13} \\ \bar{\Sigma}_{21} & \bar{\Sigma}_{22} & \bar{\Sigma}_{23} \\ \bar{\Sigma}_{31} & \bar{\Sigma}_{32} & \bar{\Sigma}_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

$$\bar{\Sigma}_{ij} = [G_1 G_2 G_3]_0^t S^{ij} \mathbf{I} = [{}^t\mathbf{g}_1 {}^t\mathbf{g}_2 {}^t\mathbf{g}_3] {}^t\mathbf{T}^{ij} \mathbf{I} \quad (2.4.18)$$

結局、式(2.3.5)、(2.3.6)を参照して接線剛性マトリックスは、total-Lagrange法、updated-Lagrange法の区別なく次式で求められる。

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \bar{\Sigma} \mathbf{B}_{NL} \} dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.4.19)$$

(7) 等価節点力を求める。

次式のように応力ベクトル $\hat{\mathbf{S}}$ を定めれば

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} &= [G_1 G_2 G_3] \{ {}_0^t S^{11} \quad {}_0^t S^{22} \quad {}_0^t S^{33} \quad {}_0^t S^{12} \quad {}_0^t S^{23} \quad {}_0^t S^{31} \}^T \\ &= [{}^t\mathbf{g}_1 {}^t\mathbf{g}_2 {}^t\mathbf{g}_3] \{ {}^t\mathbf{T}^{11} \quad {}^t\mathbf{T}^{22} \quad {}^t\mathbf{T}^{33} \quad {}^t\mathbf{T}^{12} \quad {}^t\mathbf{T}^{23} \quad {}^t\mathbf{T}^{31} \}^T \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

等価節点力ベクトルは次のように求められる。

$$\mathbf{F}_{int} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} dr^1 dr^2 dr^3 \quad (2.4.21)$$

2. 4. 2 アイソパラメトリックシェル要素 (構造要素)

ここでは Ahmad type⁹⁾の 'degenerated' シェル要素を例にとり離散化、プロミング手順を示す。第3章で示すシェル要素定式化に対するプログラミングも基本的には本手順に従っている。先のソリッド(連続体)要素のとの大きな相違は1) 並進自由度だけでなく回転自由度も有し、要素内の任意の点における変位の補間式が異なる、2) 平面応力を仮定した構成則が通常要素上の局所直交座標系で定義され、またこのためすべての応力成分は考慮しない、の2点である。以下では前項と異なる点についてのみ記す。

(1') 時刻 t における共変基底ベクトル ${}^t\mathbf{g}_i$ を求める。

図 2.4.1 を参照して、時刻 t における要素内の任意点における位置ベクトル ${}^t\mathbf{x}$ 、および Δt の間の変位増分 \mathbf{u} は次のように書くことができる。

$${}^t\mathbf{x} = N^k {}^t\mathbf{x}^k + \frac{r^3}{2} a N^k {}^t\mathbf{V}_3^k \quad (2.4.22)$$

$$\mathbf{u} = N^k \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a N^k (-{}^t\mathbf{V}_2^k \alpha^k + {}^t\mathbf{V}_1^k \beta^k) \quad (2.4.23)$$

式(2.4.2)より ${}^i\mathbf{g}_i$ は

$${}^i\mathbf{g}_i = \frac{\partial N^k}{\partial r^i} {}^t\mathbf{x}^k + \frac{r^3}{2} a \frac{\partial N^k}{\partial r^i} {}^t\mathbf{V}_3^k \quad (i=1,2) \quad (2.4.24)$$

$${}^i\mathbf{g}_i = \frac{1}{2} a N^k {}^t\mathbf{V}_3^k \quad (i=3) \quad (2.4.25)$$

となる。なお式(2.4.22)~(2.4.25)で、 N^k は形状関数(r^1, r^2 の関数)を表わし、 k に関して前項同様総和規約を適用する。また式(2.4.23)では Δt 間の回転増分は微小であると仮定している。

(3') ${}^i\mathbf{g}_i$ を用いて \mathbf{B}_L マトリックスを作成する。

シェル要素では面内は平面応力状態を仮定するので板厚方向の応力は0に仮定される。したがって接線剛性を評価するにあたってはひずみは板厚方向を除く5成分を考慮する。式(2.4.23)より

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} = \frac{\partial N^k}{\partial r^i} \dot{\mathbf{u}}^k + \frac{r^3}{2} a \frac{\partial N^k}{\partial r^i} (-{}^t\mathbf{V}_2^k \dot{\alpha}^k + {}^t\mathbf{V}_1^k \dot{\beta}^k) \quad (i=1,2) \quad (2.4.26)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} = \frac{1}{2} a N^k (-{}^t\mathbf{V}_2^k \dot{\alpha}^k + {}^t\mathbf{V}_1^k \dot{\beta}^k) \quad (i=3) \quad (2.4.27)$$

これを式(2.2.30)に代入し、

$\bar{\mathbf{e}}^T = (\dot{\epsilon}_{11} \quad \dot{\epsilon}_{22} \quad 2\dot{\epsilon}_{12} \quad 2\dot{\epsilon}_{23} \quad 2\dot{\epsilon}_{31})$ 、 $\bar{\mathbf{u}}^T = \{\dot{u}_1^1 \quad \dot{u}_2^1 \quad \dot{u}_3^1 \quad \dot{\alpha}^1 \quad \dot{\beta}^1 \dots \dot{u}_1^k \quad \dot{u}_2^k \quad \dot{u}_3^k \quad \dot{\alpha}^k \quad \dot{\beta}^k \dots \dot{u}_1^n \quad \dot{u}_2^n \quad \dot{u}_3^n \quad \dot{\alpha}^n \quad \dot{\beta}^n\}$ と置けば、式(2.4.3)で定義される \mathbf{B}_L マトリックスは $5 \times 5n$ の大きさとなり、式(2.4.4)と同様に n ブロックに分けると各成分は次式のように求められる。

$M=1,2,3$ に対し

$$B_L^k(L, M) = ({}^i\mathbf{g}_L)_M \frac{\partial N^k}{\partial r^L} \quad (L=1, 2)$$

$$B_L^k(3, M) = ({}^i\mathbf{g}_2)_M \frac{\partial N^k}{\partial r^1} + ({}^i\mathbf{g}_1)_M \frac{\partial N^k}{\partial r^2}$$

$$B_L^k(4, M) = ({}^i\mathbf{g}_3)_M \frac{\partial N^k}{\partial r^2}$$

$$B_L^k(5, M) = ({}^i\mathbf{g}_3)_M \frac{\partial N^k}{\partial r^1}$$

M=4,5 に対し

$$B_L^k(L, M) = \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^L} ({}^t g_L \cdot {}^t V_M^k) \quad (L=1, 2)$$

$$B_L^k(3, M) = \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} ({}^t g_2 \cdot {}^t V_M^k) \\ + \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} ({}^t g_1 \cdot {}^t V_M^k)$$

$$B_L^k(4, M) = \frac{a}{2} N^k ({}^t g_2 \cdot {}^t V_M^k)$$

$$B_L^k(5, M) = \frac{a}{2} N^k ({}^t g_1 \cdot {}^t V_M^k)$$

以上 (2.4.28)

式 (2.4.28) では、表記の便宜上 ${}^t V_4^k = -{}^t V_2^k$, ${}^t V_5^k = {}^t V_1^k$ と置いている。また面外せん断ひずみは板厚方向一定と仮定している。これをマトリックス表示すれば、

$$B_L^k = \left[\begin{array}{cccccc} ({}^t g_{1,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & ({}^t g_{1,2}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & ({}^t g_{1,3}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} ({}^t g_1 \cdot {}^t V_2^k), & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} ({}^t g_1 \cdot {}^t V_1^k) \\ ({}^t g_{2,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & ({}^t g_{2,2}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & ({}^t g_{2,3}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} ({}^t g_2 \cdot {}^t V_2^k), & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} ({}^t g_2 \cdot {}^t V_1^k) \\ ({}^t g_{2,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & ({}^t g_{2,2}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & ({}^t g_{2,3}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} ({}^t g_2 \cdot {}^t V_2^k), & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} ({}^t g_2 \cdot {}^t V_1^k) \\ + ({}^t g_{1,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & + ({}^t g_{1,2}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & + ({}^t g_{1,3}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} ({}^t g_1 \cdot {}^t V_2^k), & + \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} ({}^t g_1 \cdot {}^t V_1^k) \\ ({}^t g_{3,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & ({}^t g_{3,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & ({}^t g_{3,3}) \frac{\partial N^k}{\partial r^2}, & -\frac{a}{2} N^k ({}^t g_2 \cdot {}^t V_2^k), & \frac{a}{2} N^k ({}^t g_2 \cdot {}^t V_1^k) \\ ({}^t g_{3,1}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & ({}^t g_{3,2}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & ({}^t g_{3,3}) \frac{\partial N^k}{\partial r^1}, & -\frac{a}{2} N^k ({}^t g_1 \cdot {}^t V_2^k), & \frac{a}{2} N^k ({}^t g_1 \cdot {}^t V_1^k) \end{array} \right] \quad (2.4.29)$$

となる。

(4') 同様に B_{NL} を求める。

$$\bar{d}^T = \left\{ \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial r^1}, \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial r^1}, \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial r^1}, \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial r^2}, \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial r^2}, \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial r^2}, \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial r^3}, \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial r^3}, \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial r^3} \right\}$$

$$\bar{u}^T = \{ \dot{u}_1^1 \dot{u}_2^1 \dot{u}_3^1 \dot{\alpha}^1 \dot{\beta}^1 \dots \dot{u}_1^k \dot{u}_2^k \dot{u}_3^k \dot{\alpha}^k \dot{\beta}^k \dots \dot{u}_1^n \dot{u}_2^n \dot{u}_3^n \dot{\alpha}^n \dot{\beta}^n \}$$

と置き、式 (51) で定義される B_{NL} を求める。 B_{NL} は $9 \times 5n$ の大きさで、前項と同様に部分マトリク

ス B_{NL}^k を 3×5 の 3 つの小行列に分けると、その成分は式 (2.4.26), (2.4.27) を参照して

M=1,2,3 に対し

$$B_{NL,J}^k(L,M) = \frac{\partial N^k}{\partial r^J} \delta_{LM} \quad (L=1, 2, 3, J=1, 2)$$

$$B_{NL,J}^k(L,M) = 0 \quad (L=1, 2, 3, J=3)$$

M=4,5 に対し

$$B_{NL,J}^k(L,M) = -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^J} (V_M^k)_L \quad (L=1, 2, 3, J=1, 2)$$

$$B_{NL,J}^k(L,M) = -\frac{a}{2} N^k (V_M^k)_L \quad (L=1, 2, 3, J=3)$$

(2.4.30)

これをマトリックス表示すれば、

$$B_{NL}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^k}{\partial r^1} & 0 & 0 & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} (V_2^k)_1 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} (V_1^k)_1 \\ 0 & \frac{\partial N^k}{\partial r^1} & 0 & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} (V_2^k)_2 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} (V_1^k)_2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^k}{\partial r^1} & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} (V_2^k)_3 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^1} (V_1^k)_3 \\ \frac{\partial N^k}{\partial r^2} & 0 & 0 & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} (V_2^k)_1 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} (V_1^k)_1 \\ 0 & \frac{\partial N^k}{\partial r^2} & 0 & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} (V_2^k)_2 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} (V_1^k)_2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^k}{\partial r^2} & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} (V_2^k)_3 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^2} (V_1^k)_3 \\ \frac{\partial N^k}{\partial r^3} & 0 & 0 & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^3} (V_2^k)_1 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^3} (V_1^k)_1 \\ 0 & \frac{\partial N^k}{\partial r^3} & 0 & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^3} (V_2^k)_2 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^3} (V_1^k)_2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^k}{\partial r^3} & -\frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^3} (V_2^k)_3 & \frac{a}{2} r^3 \frac{\partial N^k}{\partial r^3} (V_1^k)_3 \end{bmatrix}$$

以上 (2.4.31)

となる。

(5') 構成則のテンソル成分分解を行う。

シェル要素は本項冒頭で触れたように、シェル要素の r^1, r^2 方向に対して平面応力状態を仮定し、

応力ひずみテンソルのすべての成分を考慮しない点で連続体要素と異なっている。そのため、変換する構成式には板厚方向の応力を0と仮定したものを使用しなければならない。また、成分分解の際には、式(2.4.12)~(2.4.14)における \mathbf{e}_i をシェルの局所直交基底ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_j$ に置き換えて計算しなければならない。構成式がHooke則に従う場合、構成則テンソル \mathbf{C} を局所直交基底ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_j$ で分解し、マトリックス表示したものを式(2.4.30)に示す。ただし E はヤング率、 ν はポアソン比、 κ はせん断修正係数を表わしている。

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & (1-\nu)/2 & & \\ 0 & & & \kappa(1-\nu)/2 & \\ & & & & \kappa(1-\nu)/2 \end{pmatrix} \quad (2.4.32)$$

(6') 接線剛性マトリックスを作成する。

シェル要素における構成則マトリックス $\bar{\mathbf{D}}$ は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3] \begin{pmatrix} {}_0\mathbf{C}^{1111} & {}_0\mathbf{C}^{1122} & {}_0\mathbf{C}^{1112} & 0 & 0 \\ {}_0\mathbf{C}^{2211} & {}_0\mathbf{C}^{2222} & {}_0\mathbf{C}^{2212} & 0 & 0 \\ {}_0\mathbf{C}^{1211} & {}_0\mathbf{C}^{3122} & {}_0\mathbf{C}^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}_0\mathbf{C}^{2323} & {}_0\mathbf{C}^{2331} \\ 0 & 0 & 0 & {}_0\mathbf{C}^{3123} & {}_0\mathbf{C}^{3131} \end{pmatrix} \\ &= [{}^i\mathbf{g}_1 {}^i\mathbf{g}_2 {}^i\mathbf{g}_3] \begin{pmatrix} {}^i\mathbf{C}^{1111} & {}^i\mathbf{C}^{1122} & {}^i\mathbf{C}^{1112} & 0 & 0 \\ {}^i\mathbf{C}^{2211} & {}^i\mathbf{C}^{2222} & {}^i\mathbf{C}^{2212} & 0 & 0 \\ {}^i\mathbf{C}^{1211} & {}^i\mathbf{C}^{3122} & {}^i\mathbf{C}^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^i\mathbf{C}^{2323} & {}^i\mathbf{C}^{2331} \\ 0 & 0 & 0 & {}^i\mathbf{C}^{3123} & {}^i\mathbf{C}^{3131} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

次に応力マトリックス $\bar{\Sigma}$ を作成する。式(2.4.16)の記号を用いると

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & \bar{\Sigma}_{12} & \bar{\Sigma}_{13} \\ \bar{\Sigma}_{21} & \bar{\Sigma}_{22} & \bar{\Sigma}_{23} \\ \bar{\Sigma}_{31} & \bar{\Sigma}_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.34)$$

となる。

(7') 等価節点力を求める。

応力ベクトル $\hat{\mathbf{S}}$ は次のように定められる。

$$\begin{aligned}\hat{S} &= [G_1 G_2 G_3] \{ {}^1_0S^{11} \quad {}^1_0S^{22} \quad {}^1_0S^{12} \quad {}^1_0S^{23} \quad {}^1_0S^{31} \}^T \\ &= [{}^1g_1 \quad {}^1g_2 \quad {}^1g_3] \{ {}^1T^{11} \quad {}^1T^{22} \quad {}^1T^{12} \quad {}^1T^{23} \quad {}^1T^{31} \}^T\end{aligned}\quad (2.4.35)$$

2. 4. 3 従来の手法との比較

(1) 本手法におけるプログラミングでは、total-Lagrange 法 updated-Lagrange 法の区別なく統一的に取り扱える。

(2) 従来の手法では、total-Lagrange 法の場合、ひずみ変位マトリックス (B_I) において初期変位マトリックス (B_{I0}) を陽な形で考慮しなければならないが、本手法ではその必要はない。

(3) アイソパラメトリック要素の場合、従来の手法では、空間微分を行なう際には、最初に自然座標系上でおこない、次に chain-rule を用いて直交座標上の成分への変数変換しなければならないが、本手法では埋め込み座標系と自然座標系を一致させているため、自然座標系上での微分をそのまま使用することができる。

(4) シェルや梁などの構造要素の場合、通常、構成則は各要素内の局所直交座標系に対して定義される。したがって従来の方法では、ひずみ、応力テンソル成分に対して全体から局所へ、あるいは局所から全体への座標変換を要する¹⁾。これに対し本手法では、埋め込み座標系における応力、ひずみ成分を座標変換を行なうことなく直接用いるが、式 (2.4.13), (2.4.14) による構成則四階テンソルの成分変換を、一般には各荷重増分毎に行なう必要がある。

(5) 本手法に基づく数値計算より直接得られる応力やひずみテンソルの成分は、埋め込み座標系での共変基底ベクトルや反変基底ベクトルで分解した成分であるため、有限要素メッシュの形、大きさに依存し、直感的な把握が困難である。

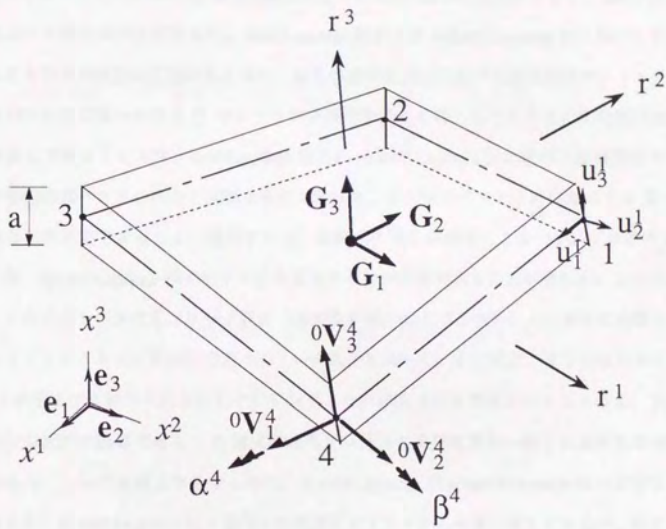


図 2.4.1 アイソパラメトリックシェル要素⁵⁾

2. 5 結 言

本章では従来の total-Lagrange 法、updated-Lagrange 法による幾何学的非線形問題解析手法に対して、埋め込み座標系におけるテンソル成分を用いて両手法の定式化を行ない、プログラミング化における効率性について検討した。その結果以下のことが明らかになった。

アインパラメトリック要素における自然座標系をその要素の埋め込み座標系とし、埋め込み（自然）座標系において成分表示を行なうと、total-Lagrange 法および updated-Lagrange 法に基づく仮想仕事式で用いられるひずみ成分に区別はなくなり、通常の有限要素法において接線剛性マトリックスおよび等価節点力の算出に用いられる \mathbf{B} マトリックスは両手法とも同じものになる。また領域積分も埋め込み座標系上で行なうならば、total-Lagrange 法及び updated-Lagrange 法に基づく接線剛性マトリックスおよび等価節点ベクトルは全く同様な手順で得られ、またプログラミングにおいては \mathbf{B} マトリックスの共有化が可能であること、換言すれば、基底ベクトルの選択により一つのプログラムを total-Lagrange 法、updated-Lagrange 法のいずれとも見なすことが可能であることが明らかになった。

次に、この手法を、3次元ソリッド要素（連続体要素）および3次元シェル要素に適用し、具体的に剛性マトリックスおよび等価節点力ベクトルの成分を求めた。その結果、本手法は従来の手法と較べて、1) 本手法で直接得られる応力やひずみテンソルの成分は有限要素メッシュの形、大きさに依存し直感的な把握が困難である、2) 構成則四階テンソルの成分変換を一般には各荷重増分毎に行なう必要がある、という問題点があるものの、3) total-Lagrange 法 updated-Lagrange 法の区別なく統一に取り扱える、4) total-Lagrange 法の場合に初期変位マトリックス考慮しなくてもよい、5) アインパラメトリック要素において空間微分を行なう際に自然座標系から直交座標上の成分への変数変換を行なう必要がない、という利点があることがわかった。シェル要素等の構造要素に対しては、従来の手法を用いても 2) の構成則四階テンソルの成分変換を行わなければならない点を考慮すると、従来の手法で total-Lagrange 法により定式化されたシェルや梁要素に本手法を適用するのがもっとも効率的であると考えられる。

第 3 章

有限回転増分を考慮した効率的シェル要素の開発
およびその評価

An Efficient Formulation for a Shell Element Considering
Finite Rotation Increments and its Assessment

3. 1 緒 言

本章では、本研究におけるシェル構造物の有限要素解析に用いる、有限回転増分を考慮した'完全な接線剛性を有し、かつ効率的なシェル要素の定式化について示す。

シェル要素の開発は過去 20 数年にわたって多くの研究者により行なわれてきたが、現在もまだ高精度、高信頼性かつ（計算）効率のよい要素を目指して開発が続けられていると言っても過言ではない。その中で、優れた「シェル要素」の条件とされている、

- (1) 薄肉、厚肉双方のシェルに適用できる（薄肉 Shell 要素においてもロッキングが生じない）、
- (2) 任意の形状のシェルを取り扱える、
- (3) 剛体モード以外の虚偽のゼロ固有値を持たない、
- (4) 要素のゆがみに対して解の精度が損なわれない、
- (5) 要素内の任意の点においてゼロを含む一定ひずみを表現できる、

の観点から、従来のシェル要素について第 1 章で詳細に検討したところ、理論の明解さ、定式化の容易さの点で、Bathe ら^{1), 2), 3)} が 1984 年以降に発表している MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) 要素がもっとも優れていると考えられる。そこで、本研究ではこの要素を基盤として新しい要素の開発を行なう。

一方、MITC 要素に限らず、Ahmad ら⁴⁾ が開発したシェル要素を出発点とした 3 次元 'degenerated' タイプのシェル要素は、基本的に「1 増分内でシェル要素の節点における回転角の増分は微小である」という仮定のもとに定式化が行なわれている。その結果、幾何学的非線形解析に必要な接線剛性マトリックスのうち、幾何剛性（初期応力）マトリックスが'完全'な（:= 要素の変形挙動に consistent な）マトリックスとはならない。このような不完全な接線剛性マトリックスを用いて幾何学的非線形解析を行なった場合、大回転が生じるような問題では、Newton-Raphson 法による反復解法における解の収束性が懸念される。また、接線剛性マトリックスによって直接評価される座屈固有値や、任意の設計パラメータに対する感度の精度が損なわれる可能性もある。このように、有限回転に対する取り扱い、非線形有限要素解析のみならず非線形有限要素感度解析に対しても多大な影響を及ぼす。

以上の点より、本論文では有限回転を考慮した MITC 要素を開発し、各章におけるシェル構造物の有限要素解析に用いるものとする。本章では、まず MITC 要素の基礎定式化について述べ、次いで効率的に有限回転増分を取り入れる定式化を提案する。数値解析例においては、他の類似要素と比較すると同時に、従来の MITC 要素を用いた解析結果と収束性および応答感度の点から比較検討をおこなう。また、種々の解析例題に適用した場合の解析精度についても検討する。

3. 2 幾何学的非線形 (MITC) シェル要素の基礎式

本節では、定式化の基礎とした Bathe らの MITC 要素の概要を示す。この要素の特長としては、(1) アイソパラメトリック (degenerated) シェル要素である、(2) 面外せん断ひずみに関しては、あるサンプリング点の面外せん断ひずみの値から内挿するように再定義する、(3) ひずみ成分および応力成分には自然座標系での共変成分、反変成分を使用する、等が挙げられる。上記(2)、(3)が Mixed Interpolation of Tensorial Components 要素と呼ばれる所以であり、Assumed-Strain 要素と参照されている場合もある。

3. 2. 1 形状および変位補間式

図 3.2.1 に時刻 0 におけるシェル要素の形状を示す。以下特に記載がない場合は図中の記号でもって説明をおこなう。図 3.2.1 より、時刻 0 における要素内の任意の点の位置ベクトル \mathbf{X} は形状関数 $h(r^1, r^2)$ を用いて

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \mathbf{X}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) {}^0\mathbf{V}_3^k \quad (3.2.1)$$

で表わされる。式 (3.2.1) で ${}^0\mathbf{V}_3^k$ はシェルの厚み方向を示すベクトル (左肩の添字は時刻を表わす、以下: ディレクター) であり、解折面に対する法線としてひとつの節点に唯一つ定義され、その節点を有する要素間で共有される。

ここでシェルの変形に関し次の 2 つの仮定を設ける。

- (a) 時刻 0 において直線を仮定した、各節点におけるディレクターは変形の間も直線を保つが、必ずしも中立面に垂直である必要はない。(面外せん断変形を許す。)
- (b) シェルの肉厚 a は変形の間も変化しない。(大ひずみ領域は取り扱わない。)

このとき時刻 t における要素内の任意の点 $t\mathbf{x}$ の位置ベクトルは

$$t\mathbf{x} = \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) t\mathbf{x}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) t\mathbf{V}_3^k \quad (3.2.2)$$

となる。したがって、時刻 t における変位 $t\mathbf{u}$ 、時刻 t から $t' (= t + \Delta t)$ までの変位増分 \mathbf{u} はそれぞれ $t\mathbf{u} = t\mathbf{x} - \mathbf{X}$ 、 $\mathbf{u} = t'\mathbf{x} - t\mathbf{x}$ であるから

$$t\mathbf{u} = \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) t\mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) (t\mathbf{V}_3^k - {}^0\mathbf{V}_3^k) \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) (t'\mathbf{V}_3^k - t\mathbf{V}_3^k) \quad (3.2.4)$$

となる。ここで各節点のシェルディレクターの時刻 t から t' までの有限回転を表わすテンソルを ${}^t\mathbf{R}$ とすると、 ${}^t\mathbf{V}_3^k = {}^t\mathbf{R} {}^t\mathbf{V}_3^k$ であるから式 (3.2.4) は式 (3.2.5) のように書き直される。

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) ({}^t\mathbf{R} - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{V}_3^k \quad (3.2.5)$$

(\mathbf{I} は単位テンソル)

3. 2. 2 面外せん断ひずみ成分補間式

通常のアイソパラメトリック要素では、要素内の任意の点のひずみ、ひずみ増分は式 (3.2.3)、(3.2.4) で表わされる変位、変位増分の空間微分をとることにより直接求められるが、MITC 要素では、面外せん断ひずみ成分についてのみ、あるサンプリング点における面外せん断ひずみ（通常の方法から求める）から内挿関数を再定義して求める。図 3.2.2 にサンプリング点位置 (点A~D) を、式 (3.2.6) に面外せん断ひずみ成分の補間式を示す。

$$E_{13} = \frac{1}{2} (1 + r^2) E_{13}^A + \frac{1}{2} (1 - r^2) E_{13}^C \quad (3.2.6)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} (1 + r^1) E_{23}^D + \frac{1}{2} (1 - r^1) E_{23}^B \quad (3.2.7)$$

ここで

E_{13}, E_{23} : 要素内の任意点のせん断ひずみ

E^{A-D} : サンプリング点におけるせん断ひずみ

である。

3. 2. 3 ラグランジェ未定乗数法を用いたポテンシャルエネルギーの原理

弾性構造体では、最小にすべきポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V S^{ij} E_{ij} dV - W \quad (3.2.8)$$

で表わされる。

ここで、

S^{ij} : 2nd Piola-Kirchhoff 応力テンソルの反変成分

E_{ij} : Green-Lagrange ひずみの反変成分

W : 外力によるポテンシャルエネルギー
である。

一方、式 (3.2.6), (3.2.7) で定義されるせん断ひずみ E_{13}, E_{23} は変位との関係が確立していないため、次の拘束条件式をラグランジェ未定乗数を用いて式 (3.2.7) に付加することにより両者を関係付ける。
すなわち

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_V S^{ij} E_{ij} dV + \int_V \lambda^{13} (E_{13} - E_{13}^{DI}) dV + \int_V \lambda^{23} (E_{23} - E_{23}^{DI}) dV - W \quad (3.2.9)$$

ここで

E_{13}^{DI}, E_{23}^{DI} : 変位から内挿されて求められるせん断ひずみ

$\lambda^{13}, \lambda^{23}$: ラグランジェ未定乗数

である。

更に、付加した拘束条件が過剰にならないようにラグランジェ未定乗数を次のように定義する。 $\delta(\cdot)$ を Dirac-delta 関数とすれば、

$$\lambda^{13} = \lambda^A \delta(r^1) \delta(1 - r^2) + \lambda^C \delta(r^1) \delta(1 + r^2) \quad (3.2.10)$$

$$\lambda^{23} = \lambda^D \delta(r^2) \delta(1 - r^1) + \lambda^B \delta(r^2) \delta(1 + r^1) \quad (3.2.11)$$

$\delta\Pi^* = 0$ として Π を停留させる条件を求めると、ラグランジェ未定乗数に関して

$$E_{13}^A = E_{13}^{DI, A} \quad (3.2.13)$$

$$E_{13}^C = E_{13}^{DI, C} \quad (3.2.14)$$

$$E_{23}^D = E_{23}^{DI, D} \quad (3.2.15)$$

$$E_{23}^B = E_{23}^{DI, B} \quad (3.2.16)$$

の条件式が得られる。よって、ポテンシャルエネルギーは最終的に次のようになる。すなわち

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_V S^{ij} E_{ij} dV - W \quad (3.2.17)$$

ただし、面外せん断ひずみに関しては、式 (3.2.6), (3.2.7) および (3.2.13 ~ 16) で計算されるものを用いるものとする。

3. 2. 3 仮想仕事式の増分解

total-Lagrange 法に基づく仮想仕事の原理は、式 (3.2.17) を参照して、

$$\int_V \delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV \equiv \int_V \delta S^{ij} \delta E_{ij} \, dV = {}^t \delta R \quad (3.2.18)$$

で表わされる。

ここで

$\delta \mathbf{S}$: 時刻 0 を基準配置とする時刻 t における 2nd Piola-Kirchhoff 応力テンソル

δS^{ij} : $\delta \mathbf{S}$ の反変成分、すなわち $\delta \mathbf{S} = \delta S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$

$\delta \mathbf{E}$: 時刻 0 を基準配置とする時刻 t における Green-Lagrange ひずみテンソル

δE_{ij} : $\delta \mathbf{E}$ の共変成分、すなわち $\delta \mathbf{E} = \delta E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$

${}^t \delta R$: 外力による仮想仕事

$\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j$: 時刻 0 における共変および反変基底ベクトル

ただし、 δ は変分、 \otimes はテンソル積を表わす。

式 (3.2.18) の仮想仕事式を増分解するために、応力、ひずみ成分変分を次のように時刻 t での成分 (既知項) と $t-t = \Delta t$ における増分 (未知項) に分解する。

$$\delta S^{ij} = \delta S^{ij} + {}_0 S^{ij} \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} \delta_0^t E_{ij} &= \delta({}_0 E_{ij} + {}_0 E_{ij}) \\ &= \delta_0 E_{ij} \\ &= \delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

${}_0 e_{ij}, {}_0 \eta_{ij}$ はそれぞれ ${}_0 E_{ij}$ の線形部および非線形部を表わすものとする。式 (3.2.19), (3.2.20) を (3.2.18) に代入し既知項を右辺に移すと

$$\int_V {}_0 S^{ij} \delta_0 E_{ij} \, dV + \int_V \delta S^{ij} \delta_0 \eta_{ij} \, dV = {}^t \delta R - \int_V \delta S^{ij} \delta_0 e_{ij} \, dV \quad (3.2.21)$$

が得られる。式 (3.2.21) 左辺の線形化 ($\Delta t \rightarrow 0$) を行ない、ひずみが微小であるとの前提のもとに $\delta S^{ij} = {}_0 C^{ijkl} \delta E_{kl}$ の形の構成則を導入すると、

$$\text{式 (3.2.21) 左辺} \rightarrow \int_V {}_0 C^{ijkl} {}_0 \delta e_{kl} \delta_0 e_{ij} \, dV + \int_V \delta S^{ij} (\delta_0 \eta_{ij}) \, dV \quad (3.2.22)$$

を得、これより接線剛性マトリックスが求められる。

次に時刻 0 を基準配置とする時刻 t における Green-Lagrange ひずみテンソル \mathfrak{E} は定義により

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.2.23)$$

であるから Green-Lagrange ひずみテンソル増分 ${}_0\mathbf{E}$ は

$${}_0\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j - {}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (3.2.24)$$

となる。ここで、 $\mathbf{G}_i, {}^t\mathbf{g}_i, {}^t\mathbf{g}_j$ はそれぞれ自然 (埋め込み) 座標系における時刻 0, t, t での共変基底ベクトルである。したがって定義により

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{g}_i &= \frac{\partial {}^t\mathbf{x}}{\partial r^i} = \frac{\partial (t\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r^i} \\ &= {}^t\mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

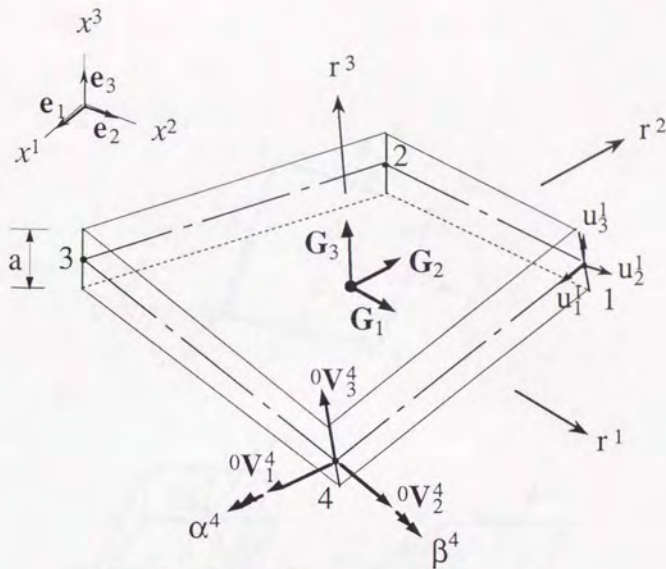
であるから、式 (3.2.25) を式 (3.2.24) に代入してさらに線形部と非線形部にわけると、 ${}_0\mathfrak{e}, \delta_0\mathfrak{e}_{ij}, (\delta_0\eta_{ij})'$ はそれぞれ

$${}_0\mathfrak{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \cdot {}^t\mathbf{g}_j + {}^t\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} \right) \quad (3.2.26)$$

$$\delta_0\mathfrak{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot {}^t\mathbf{g}_j + {}^t\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \quad (3.2.27)$$

$$(\delta_0\eta_{ij})' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \quad (3.2.28)$$

のように求められる。式 (3.2.5) を代入した式 (3.2.26-28) 及び ${}_0\mathbf{S}^{ij}, {}_0\mathbf{C}^{ijkl}$ の値より具体的に式 (3.2.22) が計算される。



- a shell thickness
- x^i Cartesian coordinates
- e_i orthonormal base vector in global coordinate system
- r^i natural coordinates ($-1 \leq r^i \leq 1$)
- G_i covariant base vector of natural coordinate r^i
- V_i^k orthonormal base vector in local coordinate system at node k
- (V_3^k shell director vector)
- u^k displacement vector at node k
- α^k, β^k rotations of the director vector about V_1^k and V_2^k

図 3.2.1 4 節点アイソパラメトリックシェル要素

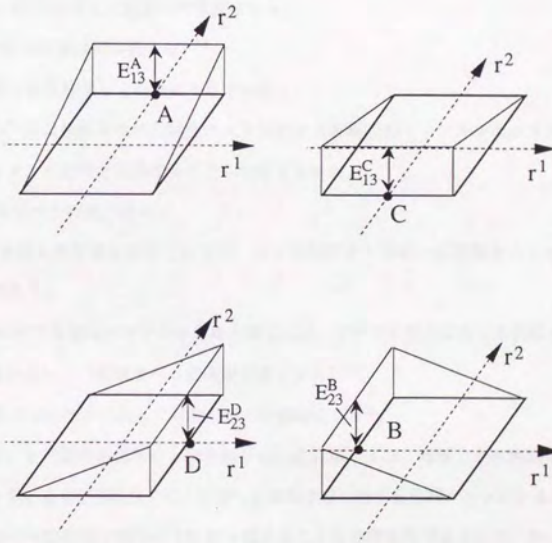
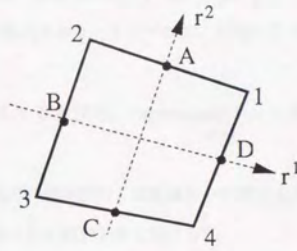


図 3.2.2 面外せん断ひずみのサンプリング点

3. 3 有限回転テンソルの導入

有限要素法に有限回転を導入する方法としては、現在まで、主として、次の2つの方法が用いられている。一つは、オイラー角の導入であり、もう一つは、軸性ベクトルによる有限回転テンソルの導入である。

古典的なオイラー角を導入する方法は、"degenerated" シェル要素に対しては過去に Surana⁹⁾、Stander⁶⁾ が応用しているが、

- (1) オイラー角の値からは直観的に幾何学的な位置関係が把握できない、
- (2) 基準とする座標軸の取り方により解が影響を受ける⁹⁾、
- (3) マトリックスの対称性が損なわれる可能性がある⁷⁾、
- (4) 三角関数の演算が増えて定式化が複雑になる、
- (5) 90度以上の大回転は取り扱えない⁸⁾、

等の問題点があり余り好ましくないとされている。

一方、Argyris⁷⁾ により提案された軸性ベクトルにより有限回転テンソルを求める方法は、シェルの場合、ディレクターの回転を定義することに他ならないが、

- (a) 幾何学的な意味が明瞭である、
- (b) 回転角の更新は角度増分の和ではなく、シェルのディレクターに回転テンソルを作用させることにより行なう、
- (c) 初期形状に対する回転テンソルを求める場合には、すべての節点における回転テンソルを保存しなければならない、(記憶すべき情報量が多くなる)⁹⁾、
- (d) 180度以上の回転増分に対しては取り扱いが複雑になる⁹⁾、

等の指摘がある。上記項目中短所だと思われる(c),(d)に関しては、時刻 t から時刻 t' ($= t + \Delta t$) までの増分解を求める有限要素法では、必ずしも初期形状に対する回転テンソルを求める必要はなく、またステップ間での回転角の増分が180度を越えることは非現実的であるため、特に問題点になるとは考えられない。以上より、有限要素法においては軸性ベクトルを用いて有限回転を定義する方が望ましいと考える。

Parish⁸⁾ は Bathe らの MITC 要素に軸性ベクトルを導入して、有限回転(増分)を考慮したシェル要素を開発している。この要素の信頼性は文献の示すところであるが、著者自身が述べているように、

- (I) 軸性ベクトルが常に3自由度有するため、元来5自由度のシェル要素が1自由度分 singularity を有し、全体自由度数も増える、

(II) 完全な形の回転テンソルの変分を直接とるため、接線剛性の定式化が、三角関数の計算を含むためより複雑なものとなる、また Bathe らによる標準的な定式化との関わりが不明確である、の2点で効率性を欠いているように考えられる。

本節では、ある時間増分における有限回転をあらわすテンソルを、増分間での軸性ベクトルは一定であると仮定し、一種のスピンテンソルを用いてテイラー展開を行ない、その2次項までを考慮することにより、singularity を回避しながら効率よく有限回転テンソルを取り扱えることを示す。

3.3.1 軸性ベクトルおよび有限回転テンソル

シェルのディレクター ${}^i\mathbf{v}_3^k$ の時刻 t までの有限回転に関して、回転の間は(回転)軸は変化しないものと仮定する。このとき回転軸を表わすベクトルを ${}^i\boldsymbol{\theta}^k$ (軸性ベクトル)、その大きさ ω が有限回転角を表わすものとする。(図 3.3.1 参照) この時

$${}^i\boldsymbol{\theta}^k = {}^i\theta_i^k \mathbf{e}_i \quad (3.3.1)$$

$$\omega = |{}^i\boldsymbol{\theta}^k| \quad (3.3.2)$$

と書くことができる。次に軸性ベクトルの成分を用いて反対称マトリックス

$${}^i\boldsymbol{\Phi}^k = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i\theta_3^k & {}^i\theta_2^k \\ {}^i\theta_3^k & 0 & -{}^i\theta_1^k \\ -{}^i\theta_2^k & {}^i\theta_1^k & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

を定義する。式(3.3.3), (3.3.1)を $\Delta t = t' - t$ で除したものが、いわゆるスピンテンソルとその軸性ベクトルとなり、

$$\frac{1}{\Delta t} {}^i\boldsymbol{\Phi}^k {}^i\mathbf{v}_3^k = \frac{1}{\Delta t} {}^i\boldsymbol{\theta}^k \times {}^i\mathbf{v}_3^k = {}^i\dot{\mathbf{v}}_3^k \quad (3.3.4)$$

の関係がある。従って \mathbf{I} を単位テンソルとすれば、式(3.3.4)より $\mathbf{I} + \frac{1}{n} {}^i\boldsymbol{\Phi}^k$ は、 ω/n を回転角とする、 $\Delta t/n$ の間の微小回転テンソルを表わしている。有限回転は無数の微小回転の集まりと考えることができるから結局、前節で定義した有限回転テンソル ${}^i\mathbf{R}$ は次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{n} {}^i\boldsymbol{\Phi}^k \right)^n \\ &= \mathbf{I} + {}^i\boldsymbol{\Phi}^k + \frac{1}{2!} ({}^i\boldsymbol{\Phi}^k)^2 + \frac{1}{3!} ({}^i\boldsymbol{\Phi}^k)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

一方有限回転テンソル ${}^i\mathbf{R}$ は、Argyris⁷⁾ によって幾何学的関係から厳密に求められており、

$${}^i\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} {}^i\boldsymbol{\Phi}^k + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 ({}^i\boldsymbol{\Phi}^k)^2 \quad (3.3.6)$$

となる。ω が微小の場合 $\sin \omega$, $\sin(\omega/2)$ をテイラー展開すれば、

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{R} = & \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\omega^2}{3!} + \frac{\omega^4}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m+1)!} \pm \dots\right) {}^i\Phi^k \\ & + \left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{\omega^2}{4!} + \frac{\omega^4}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m+2)!} \pm \dots\right) ({}^i\Phi^k)^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

となる。ここで、 ${}^i\Phi^k$ と ω の間には

$$({}^i\Phi^k)^{2m-1} = (-1)^{m-1} \omega^{2(m-1)} {}^i\Phi^k \quad (3.3.8)$$

$$({}^i\Phi^k)^{2m} = (-1)^{m-1} \omega^{2(m-1)} ({}^i\Phi^k)^2 \quad (3.3.9)$$

の関係があるので、式 (3.3.8), (3.3.9) を式 (3.3.7) に代入すれば式 (3.3.5) を得ることができ、式 (3.3.6) が式 (3.3.5) と同等であることが分かる。

本研究における有限要素法定式化では、接線剛性マトリックスを導く際には式 (3.3.5) を、内力 (等価節点ベクトル) を計算する際には式 (3.3.6) を用いて厳密にディレクターの更新を行なう。

3. 3. 2 幾何学的非線形シェル要素への応用

式 (17) で得られた ${}^i\mathbf{R}$ を式 (3.2.5) に代入するとシェル要素における変位ベクトルの離散形が得られる。同種の方法を Dvorkin らはビーム要素に適用しているが¹⁰⁾、ビーム要素が回転3自由度であるのに対して、シェル要素の場合はディレクターまわりの回転を考慮しないために回転2自由度である。したがってベクトル ${}^i\theta^k$ の3成分を未知数にすると、回転1自由度分の singularity を有する要素となる。本研究では、以上のことを考慮し、「軸性ベクトルはシェルのディレクターに直交する面内の任意の2つのベクトルによってのみ分解される」と定義することによって singularity を回避する。

ここで任意の2つのベクトルとして ${}^i\mathbf{V}_1^k$ および ${}^i\mathbf{V}_2^k$ を選ぶと ${}^i\theta^k$ は

$${}^i\theta^k = \alpha^k {}^i\mathbf{V}_1^k + \beta^k {}^i\mathbf{V}_2^k \quad (3.3.10)$$

となる。この場合 ${}^i\mathbf{R}$ は ${}^i\theta^k$ のまわりの $\sqrt{(\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2}$ だけの有限回転を表わしている。回転が微小な時には、ディレクター ${}^i\mathbf{V}_3^k$ の ${}^i\mathbf{V}_1^k$, ${}^i\mathbf{V}_2^k$ のまわりの回転角をそれぞれ α^k , β^k と見なすことができ、ディレクター自身のまわりの回転は考慮されていない。

次に式 (3.3.4), (3.3.5) および (3.3.10) より式 (3.2.5) の ${}^i\mathbf{R}$ を消去する。3. 4. 1項でその手順を示すように、接線剛性を求める観点からは式 (3.3.5) でテイラー展開の2次の項まで考慮すれば十分であるので、結局次式を得る。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) {}^i\Phi^k {}^i\mathbf{V}_3^k \\
&\quad + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \frac{1}{2!} ({}^i\Phi^k)^2 {}^i\mathbf{V}_3^k \\
&= \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) ({}^i\theta^k \times {}^i\mathbf{V}_3^k) \\
&\quad + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \frac{1}{2!} \left\{ {}^i\theta^k \times ({}^i\theta^k \times {}^i\mathbf{V}_3^k) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \mathbf{u}^k + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) (-{}^i\mathbf{V}_2^k \alpha^k + {}^i\mathbf{V}_1^k \beta^k) \\
&\quad + \frac{r^3}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \frac{-1}{2!} \left\{ (\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2 \right\} {}^i\mathbf{V}_3^k \quad (3.3.11)
\end{aligned}$$

式(3.3.11)最右辺の第1,2項を \mathbf{u}_s 、第3項を \mathbf{u}_{ex} とすると \mathbf{u}_s は通常の"degenerated"シェル要素の式に他ならず、一方、 \mathbf{u}_{ex} が有限回転寄与項となる。図3.3.2に $\beta^k=0$ の場合の \mathbf{u}_{ex} の近似的な幾何学的意味を示す。

なお、平面や連続曲面あるいは複数の面の交差角が小さい場合は、式(3.3.11)のような回転2自由度の定式化が可能であるが、交差角が大きい場合やビーム要素が結合する場合は、要素毎に節点でのディレクターを定義する必要がある。この場合は、両要素に共通の基底ベクトルで ${}^i\theta^k$ を分解して回転3自由度とすることで対応できるが、式(3.3.11)のような簡潔な表記とはならない。しかしながら、実際のプログラミングでは、式(3.3.11)に基づく回転2自由度シェル要素の剛性マトリックスを作った後、各節点に対し次式に基づく座標変換を行なうことにより回転3自由度シェル要素の剛性マトリックスを得ることができる。式(3.3.10)において ${}^i\theta^k$ 、 ${}^i\mathbf{V}_1^k$ および ${}^i\mathbf{V}_2^k$ を全体座標系における直交基底ベクトルで成分分解すると次式を得る。()_kは、直交基底ベクトルで分解した成分を表わす。)

$$\begin{pmatrix} {}^i\theta_1^k \\ {}^i\theta_2^k \\ {}^i\theta_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({}^i\mathbf{V}_1^k)_1 & ({}^i\mathbf{V}_2^k)_1 \\ ({}^i\mathbf{V}_1^k)_2 & ({}^i\mathbf{V}_2^k)_2 \\ ({}^i\mathbf{V}_1^k)_3 & ({}^i\mathbf{V}_2^k)_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{pmatrix} \quad (3.3.12)$$

よって

$$\begin{pmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({}^i\mathbf{V}_1^k)_1 & ({}^i\mathbf{V}_2^k)_1 & ({}^i\mathbf{V}_1^k)_3 \\ ({}^i\mathbf{V}_2^k)_1 & ({}^i\mathbf{V}_2^k)_2 & ({}^i\mathbf{V}_2^k)_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^i\theta_1^k \\ {}^i\theta_2^k \\ {}^i\theta_3^k \end{pmatrix} \quad (3.3.13)$$

となる。回転2自由度を有する剛性マトリックスに対し、式(3.3.13)を各節点の回転自由度に作用させることによって回転3自由度を有する剛性マトリックスを得ることができる。

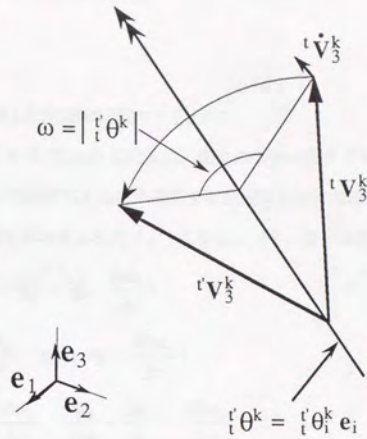


図 3.3.1 ${}^tV_3^k$ の軸性ベクトル $\dot{\theta}^k$ まわりの有限回転

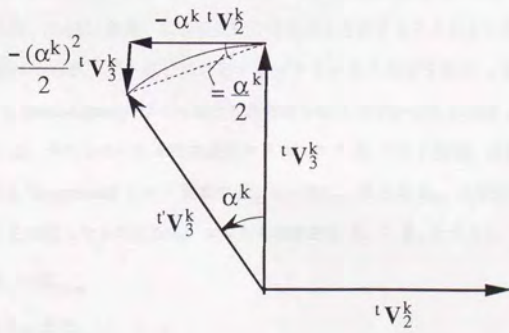


図 3.3.2 付加項 u_{cx} の近似的な幾何学的意味

3. 4 接線剛性マトリックスの作成

3. 4. 1 有限回転を考慮した付加接線剛性マトリックス

3. 3節式(3.3.10)の \mathbf{u} を式(3.2.25)に代入し、変位の2次の項まで考慮して(変位の3次以上の項は接線剛性を導く線形化の際消滅するため考慮する必要はない)式(3.2.24)のGreen-Lagrangeひずみ増分を線形部と非線形部にわけると次式ようになる。(2. 2. 2項参照)

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot \mathbf{t} \mathbf{g}_j + \mathbf{t} \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} \right) \quad (3.4.1)$$

$$\delta_0 e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot \mathbf{t} \mathbf{g}_j + \mathbf{t} \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} \right) \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} (\delta_0 \eta_{ij}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex})}{\partial r^i} \cdot \mathbf{t} \mathbf{g}_j + \mathbf{t} \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex})}{\partial r^j} \right) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

これからひずみ・変位マトリックス、いわゆる \mathbf{B} マトリックスが得られる。式(3.2.26)~(3.2.28)と式(3.4.1)~(3.4.3)を比較すると、有限回転を考慮したことによる差違は式(3.4.3)第2項のみであるから、面外せん断ひずみの再定義を行なわない通常のシェル要素の場合は、第2章で示した \mathbf{B} マトリックス(式(2.4.29),(2.4.31)参照)に有限回転の寄与項を付加することにより得られる。(MITC要素の場合は、面外せん断ひずみ成分に対応するマトリックス成分を修正しなければならない。MITC要素におけるGreen-Lagrangeひずみ増分の具体的な形はAPPENDIXに示す。)

従って、式(3.2.22)から求められる接線剛性マトリックス \mathbf{K} の第1項 \mathbf{K}_L は回転を微小として取りあつかう標準的な"degenerated"シェル要素の \mathbf{K}_L と一致し、第2項 \mathbf{K}_{NL} は標準的な形($\mathbf{K}_{NL,s}$)に有限回転項($\mathbf{K}_{NL,ex}$)を付加したものになる。すなわち標準的な \mathbf{K} を \mathbf{K}_s とすると

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{NL,ex} \quad (3.4.4)$$

と書くことができる。また、

$$(\delta \mathbf{u}_{ex}) = -\frac{r_3^2}{2} a \sum_{k=1}^4 h_k(r^1, r^2) \left(\delta \alpha^k \dot{\alpha}^k + \delta \beta^k \dot{\beta}^k \right) \mathbf{t} \mathbf{v}_3^k \quad (3.4.5)$$

であるから、有限回転を取り扱うことにより加えられる項は、回転自由度の対角項のみとなる。

したがって、標準的なシェルの剛性マトリックスがすでに得られていれば、式(3.4.1)~(3.4.5)により容易に有限回転増分を考慮した剛性マトリックスを作成することができる。実際のコーディングに

おいては、約 20 行程度の FORTRAN statements の追加でプログラム化可能で、またこれによる計算時間の増加はほとんど無視できる。

3. 4. 2 構成則の変換

式 (3.2.22) では構成則テンソル ${}_0C$ の反変成分 ${}_0C^{ijkl}$ が用いられているが、これはシェルの局所直交座標系におけるテンソル成分 ${}_0\tilde{C}_{mnop}$ より次のように求めることができる。ただし、 \tilde{e}_m はシェルの局所座標系における単位直交基底ベクトルとする。

すなわち

$$\begin{aligned} {}_0C &= {}_0C^{ijkl} G_i \otimes G_j \otimes G_k \otimes G_l \\ &= {}_0\tilde{C}_{mnop} \tilde{e}_m \otimes \tilde{e}_n \otimes \tilde{e}_o \otimes \tilde{e}_p \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

より

$${}_0C^{ijkl} = {}_0\tilde{C}_{mnop} (G^i \cdot \tilde{e}_m) (G^j \cdot \tilde{e}_n) (G^k \cdot \tilde{e}_o) (G^l \cdot \tilde{e}_p) \quad (3.4.7)$$

となる。

ひずみが微小であるとの前提のもとでは、弾性解析の場合 ${}_0\tilde{C}_{mnop}$ は近似的に直交座標系でのフック則のそれと等置でき (式 2.4.32 参照)、弾塑性解析では、2nd Piola-Kirchhoff 応力で表わされた弾塑性構成則テンソルと等置できる。なお通常のシェルの仮定に従い、面内は平面応力状態を仮定する。

3. 5 有限要素解析例

本節では開発したシェル要素を用いて大変形解析を実施し、本要素の有用性について検討する。この時、有限回転問題の検証例としてしばしば取り上げられている4つの問題を対象として、'完全な'接線剛性マトリックスを用いたことによる Newton-Raphson 法の収束性への影響について調べる。ただし、ここではシェル要素の材料特性は弾性とした。

3. 5. 1 板の 'rolling-up' 解析 (Ex. 3.1)

この例題は大回転ベンチマーク問題として、しばしば取り上げられるものである。本解析では Simo¹¹⁾らの解析条件と同じものを用いている(図 3.5.1 参照)。片端を完全固定して他端にモーメントを加えると、モーメントと回転角は比例関係になる。解析では 4, 10 および 20 要素分割で解析をおこない 20 分割ではほぼ理論解が得られている(図 3.5.2 参照)。この時強制変位による解析では、わずかに 6 ステップで図 3.5.1 に示すような板の 'rolling-up' ($\phi = 2\pi$) 状態が得られた。表 3.5.1 に、(1) 荷重制御により $\phi = \pi$ までを 10 ステップで解析した場合、(2) 強制変位により $\phi = 2\pi$ までを 6 ステップで解析した場合(いずれも 20 要素)の収束解が得られるまでの反復回数を示す。通常の \mathbf{K} (以下 \mathbf{K}_s と表す)を用いた場合、回転角が大きくなるにつれ収束状態が悪化するのに対し、有限回転増分を考慮した \mathbf{K} (以下 \mathbf{K}_c と表す)の場合は安定した収束解が得られていることがわかる。なお収束の判定には以下の解析を含め相対エネルギー誤差 (ETOL) を用いている。

3. 5. 2 円筒シェルの大変形解析 (Ex. 3.2)

本例題は局部集中荷重を受ける円筒シェルの大変形解析であり、解析モデル (1/4 モデル, 16 x 16 分割) および有限回転を考慮した他の要素 (SA4⁹⁾, SHEL4¹⁰⁾; 共に MITC 要素)との解析結果の比較を図 3.5.3, 4 に示す。解析結果は 3 者ともほぼ一致している。また SA4, SHEL4 による解析が $P = 700$ あたりまでに約 10 ステップ要しているのに対し、本要素では弧長増分法を用いており 6 ステップで到達している。図 3.5.5 に 1, 3 および 5 ステップ目における変形図を示す。この問題は曲げ力と膜力の複合荷重状態となり要素の回転は余り大きくないが、収束までの反復回数は \mathbf{K}_c の場合平均 9.3 回 (合計 56 回)であったのに対し \mathbf{K}_s の場合平均 13 回 (合計 78 回)であり、この場合でも \mathbf{K}_c の有用性が認められた。表 3.5.2 に 6 ステップ目での反復計算毎の相対エネルギー誤差を示す。 \mathbf{K}_c を

用いた方が安定に2次収束していることがわかる。

3. 5. 3 'shallow-roof' の飛び移り座屈解析 (Ex. 3.3)

本例題はいわゆるスナップスルー解析である。解析は1/4モデル(6x6分割)で行い弧長増分法を用いた。解析モデルおよび荷重変位曲線を図3.5.6, 7に示す。比較のために汎用有限要素解析コードABAQUSの結果も合わせて示しているが、両者の結果は良好に一致している。本例題は曲げ力だけでなく、変形と同時に膜力(面内力)が増加する複合荷重状態下での解析となるが、本要素および弧長増分法を用いることによって安定した飛び移り座屈を示す荷重変位曲線が得られている。(参考までに、最大荷重点 $P=600$ における膜力は約 $R=8000$ であった。)本問題はそれほどの大変形問題ではなく、また座屈点付近では膜力が支配的であるため、有限回転増分を考慮した効果はほとんどなく、 K_c と K_s による収束までの反復回数は共に3回程度であった。

3. 5. 4 半球シェルの大変形解析 (Ex. 3.4)

この例題は、曲面シェル要素の線形解析用例題として用いられていたものをStander⁶⁾らが幾何学的非線形問題に拡張したものである。図3.5.8, 9に解析モデル(1/4モデル, 16x16分割)および他の要素(SA4⁶⁾, Simo¹¹⁾)との解析結果の比較を示す。図3.5.10に $P=200$ での変形図を示すが、ここまでに要したステップ数は7であった。これはSA4と同等のステップ数である(Simoは $P=100$ まで10ステップ)。本解析の場合収束までに要した反復回数は K_c の時平均7.8回(合計55回)、 K_s の時平均9回(合計63回)であり若干の効果が見られた。(ETOL = 1×10^{-7})

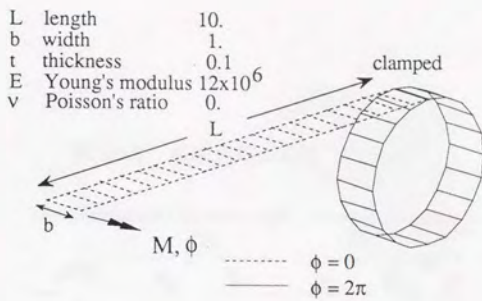


図 3.5.1 解析モデル図 (Ex. 3.1)

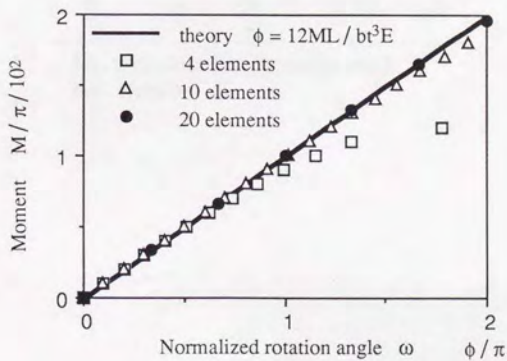


図 3.5.2 荷重変位曲線図 (Ex. 3.1)

表 3.5.1 収束回数の比較 (Ex. 3.1)

step	(1)		(2)	
	Kc	Ks	Kc	Ks
1	5	5	8	8
2	5	6	10	10
3	5	8	8	14
4	5	10	8	16
5	5	14	8	17
6	5	18	8	19
7	5	20		
8	5	23		
9	5	26	ETOL = 1×10^{-5}	
10	5	30		

Kc: complete K by present work

Ks: standard K

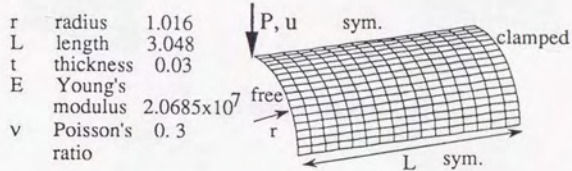


図 3.5.3 解析モデル図 (Ex. 3.2)

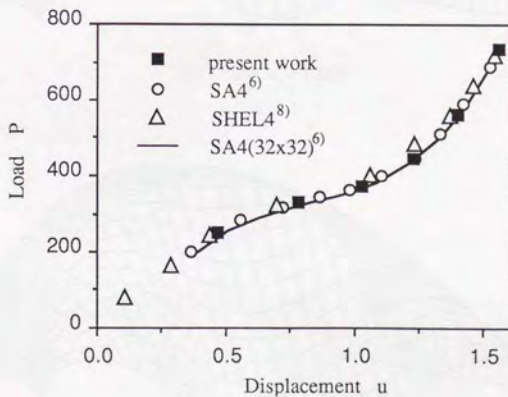
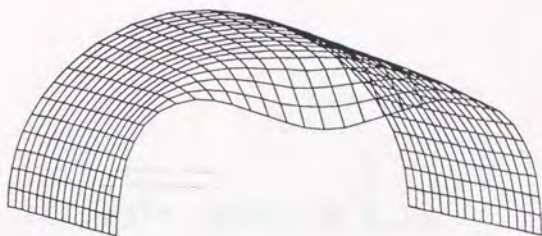
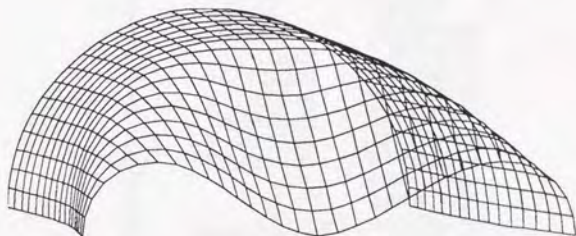


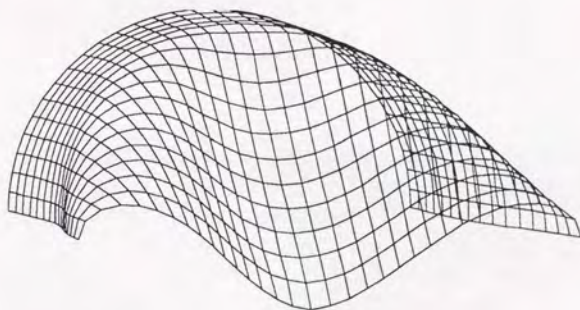
図 3.5.4 荷重変位曲線図 (Ex. 3.2)



(a) 1 step, $u = 0.467$



(b) 1 step, $u = 1.030$



(c) 1 step, $u = 1.404$

图 3.5.5 变形图 (Ex. 3.2, 1/2 model)

表 3.5.2 収束状況の比較 (Ex. 3.2)

iteration	unbalanced energy error	
	Kc	Ks
1	158.6509	15.25036
2	5.60536	.1618351
3	.7921444	4.00730E-02
4	5.92411E-02	2.35301E-02
5	1.08853E-02	1.45956E-02
6	2.33367E-03	8.66873E-03
7	1.68958E-04	3.96334E-03
8	9.14161E-07	1.52792E-03
9	3.18384E-11	4.64952E-04
10		1.20870E-04
11		2.88082E-05
12		6.66199E-06
13	ETOL = 1×10^{-7}	1.52551E-06
14		3.47945E-07
15		7.92077E-08

Kc: complete K by present work

Ks: standard K

r radius 2.54
 L length 0.254
 t thickness 6.35×10^{-3}
 E Young's modulus 3.103×10^9
 ν Poisson's ratio 0.3

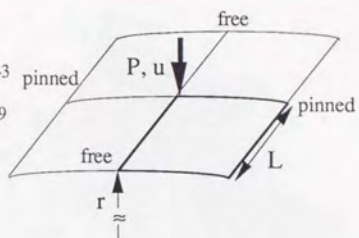


図 3.5.6 解析モデル図 (Ex. 3.3)

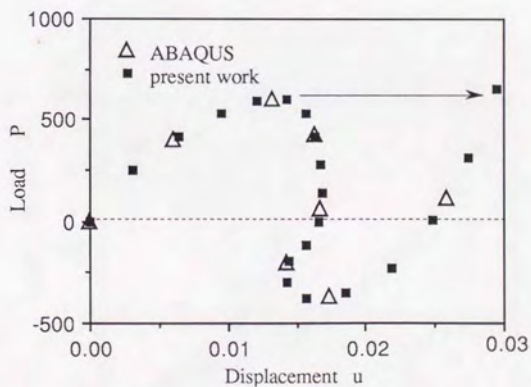


図 3.5.7 荷重変位曲線図 (Ex. 3.3)

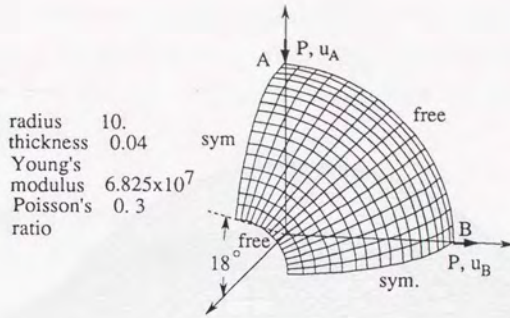


図 3.5.8 解析モデル図 (Ex. 3.3)

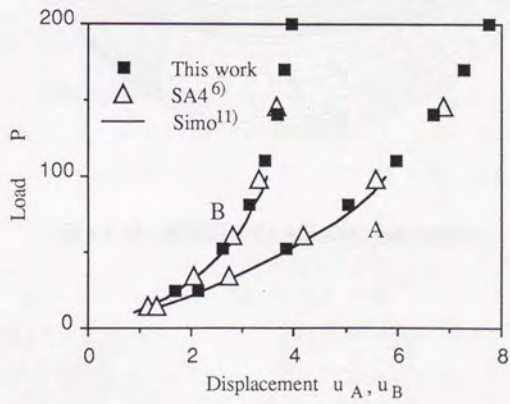


図 3.5.9 荷重変位曲線図 (Ex. 3.3)

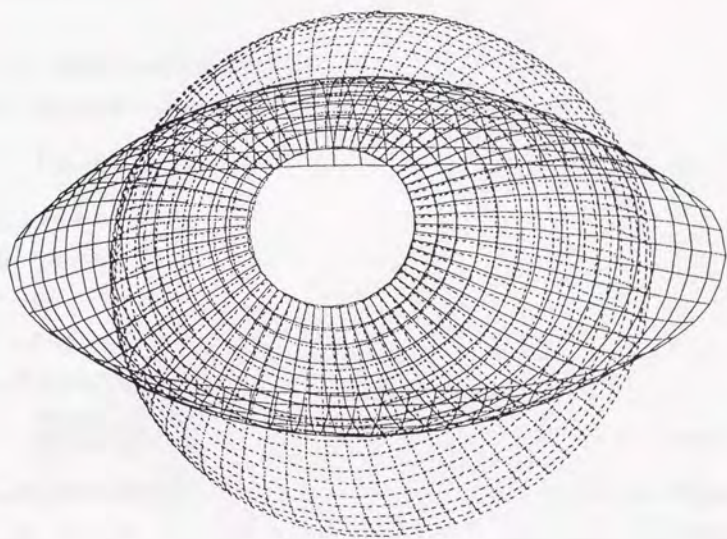


图 3.5.10 变形图 (Ex.4, p=200, full model)

3. 6 接線剛性マトリックスによる応答感度の精度に関する検討

本節では、本章で開発した有限回転を考慮した接線剛性マトリックス K_c 、および標準的な剛性マトリックス K_s が応答感度に与える影響について検討する。摂動法に基づく感度解析手法に関しては、第4章において詳しく述べるため、ここでは応答感度と接線剛性マトリックスの関係について簡単に示すだけにとどめる。

3. 6. 1 摂動法による感度解析手法の概要

一般に、変位法に基づく静的非線形有限要素法における平衡方程式は

$$F(\mathbf{b}) - Q(\mathbf{b}, \mathbf{U}) = 0 \quad (3.6.1)$$

と書くことが出来る。ここで

F, Q : 外力と内力

U : 変位

\mathbf{b} : 系に含まれるパラメータ

である。両辺を \mathbf{b} で微分すれば¹²⁾、

$$\frac{\partial Q}{\partial U} \frac{dU}{d\mathbf{b}} = \frac{dF}{d\mathbf{b}} - \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{b}} \quad (3.6.2)$$

となる。 $\partial Q / \partial U$ は接線剛性マトリックス K と一致し、 \mathbf{b} に対する U の感度 $dU/d\mathbf{b}$ は式 (3.6.2) の右辺に K^{-1} を乗じることにより得られる。変位感度が得られ後で、反力、応力、ひずみの感度が順に求められる。したがって、接線剛性の精度により、応答感度の精度が左右されるのは明白である。

3. 6. 2 各接線剛性より得られる感度の比較

有限回転増分を考慮した K_c と通常の K_s から得られる感度の差異について、先にあげた Ex. 3.1-3をもとに検討を行う。なお幾何学的非線形問題における式 (3.6.2) 右辺の計算¹³⁾については第4章に詳しく記されている。

(1) Ex. 3.1

まず Ex. 3.1 に関しては、荷重 $M = 100\pi$ における ω の板厚に対する感度を求めた。この時

$t = \bar{t}(1 + \alpha_t)$ とおき α_t に対する感度を求めている。表 3.6.1 に得られた感度を理論解とともに示す。なお表の中で DFDM (Direct Finite Differential Method) とあるのは有限要素解析を二回行い差分法により求めた感度である。 \mathbf{Kc} を用いて得られた感度は理論解とは誤差が 1% 程度生じているものの、DFDM とはほぼ一致している。一方 \mathbf{Ks} からは誤った感度が得られた。 $M = 100\pi$ はかなりの大回転 ($\phi = \pi$) が生じているところであり、先に示したように \mathbf{Ks} では解の収束性も悪くなっているため、有限回転を考慮していないことによる影響が大きく感度に現われている。

(2) Ex. 3.2

次に Ex. 3.2 については $u = 1.0$ の強制変位を与え、その時の等価節点荷重 P の板厚に対する感度を求めた。表 3.6.2 に解析結果を示す。 \mathbf{Kc} と \mathbf{Ks} で求められた P はほぼ同じであるが、感度の方は 1.2% ほどの誤差が生じている。このときも \mathbf{Kc} で求めた感度は DFDM で求めた感度と一致している。やはり解の収束性は \mathbf{Kc} の方が優れていた。

(3) Ex. 3.3

最後に Ex. 3.3 に関しても Ex.2 同様 $u = 0.015$ (極大点を少し越えた辺り) の強制変位を与え、その時の等価節点荷重 P の板厚に対する感度を求めた。この問題では、収束性に関しては \mathbf{Kc} と \mathbf{Ks} による違いは全く見られなかったが、感度に関しても同様で表 3.6.2 に示すように両者による感度は一致していた。

表 3.6.1 肉厚に対する感度の比較 (Ex. 3.1)

	theory	Kc	Ks	DFDM
ω	1.0	1.0045	1.0045	—
$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_t}$	-3.0	-3.0401	-0.9517	-3.0400

$$M = 100 \pi \quad t = \bar{t}(1 + \alpha_t)$$

Kc: complete K by present work

Ks: standard K

表 3.6.2 肉厚に対する感度の比較 (Ex. 3.2, Ex. 3.3)

	Ex. 3.2			Ex. 3.3		
	Kc	Ks	DFDM	Kc	Ks	DFDM
u	1.0	1.0	—	0.015	0.015	—
P	367.718	367.724	—	574.145	574.146	—
$\frac{\partial P}{\partial \alpha_t}$	981.856	969.254	981.854	1121.70	1121.71	1121.69

Kc: complete K by present work $t = \bar{t}(1 + \alpha_t)$

Ks: standard K

3. 7 結 言

本章では、Baheらが開発したMITC (Mixed Interpolation Tensorial Components) シェル要素に、有限回転増分を取り入れる新しい定式化を示し、有限要素解析を通じて要素の効率性、精度について検討した。その結果以下のことが明らかになった。

シェル要素の各節点におけるディレクターの有限回転増分を考慮することにより、シェル要素の大変形、大回転を厳密に取り扱うことができ、その結果'完全'(complete or consistent)な接線剛性マトリックスを得ることが出来る。定式化にあたってはArgyrisが提案した有限回転テンソルを用いたが、接線剛性マトリックスを導く際には、有限回転テンソルをテイラー展開した2次項までを用いること、および有限回転の回転軸となる軸性ベクトルを、ディレクターに直交する面内にある現時刻の単位局所座標系ベクトルで成分分解することにより、有限回転を取り扱った従来の複雑な定式化を回避できることを示した。その結果、従来の微小回転の場合の定式化により得られる接線剛性マトリックスとの関係が明確になり、有限回転を考慮した幾何剛性マトリックスを付加するだけで完全かつ対称な接線剛性マトリックスが得られることが明らかになった。また、本定式化に基づけば、有限回転の寄与項は回転自由度に対応する対角項のみとなるので、非常に容易にプログラム化することができる。

次に、板の'rolling-up'解析、円筒シェルの大変形解析、'shallow-roof'の飛び移り座屈解析、半球シェルの大変形解析の4つの有限要素解析例題を通じて、このシェル要素を用いることにより、曲げ変形が支配的で大回転が生じるような解析においては、通常の要素を用いた時よりも比較的大きな荷重増分がとれ、なおかつ収束性がよくなることを確認した。しかしながら、面内力が支配的になるような問題に対しては有限回転を考慮した効果はほとんど現われなかった。

最後に、接線剛性マトリックスによる応答感度の精度について先の例題を用いて検討した。摂動法に基づく感度解析手法では応答感度の導出に接線剛性マトリックスが用いられる。そこで有限回転増分を考慮した接線剛性マトリックス、および従来の接線剛性マトリックスから得られる感度を比較した。感度解析の結果、有限回転増分を考慮した接線剛性マトリックスを使用した場合には常に精度よく感度が求められたが、考慮しない接線剛性マトリックスでは、大回転が生じる解析に対して正しい感度が求められなかった。これは、有限要素解析で収束状況に差異が現われた場合と一致していた。

以上より、非線形有限要素解析、および非線形有限要素感度解析に対しては、有限回転増分を考慮した完全な接線剛性マトリックスが不可欠であることを結論とする。

第 4 章

Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発

Development of a New Branch-switching Algorithm in Nonlinear FEM
using Scaled Corrector

4. 1、緒 言

構造物の極限状態を解析するには幾何学的非線形解析が不可欠であり、特に座屈点を越えた後の挙動を解析するためには、弧長増分法 (arc-length method)¹⁾ と呼ばれている経路追跡型のアルゴリズムを用いなければならない。一般に座屈点は図 4.1.1 に示すように分岐点と極限点に分類されるが、弧長増分法自体はそのような座屈点の探索ならびに分類ができないため、弧長増分法のみを用いた解析では、複数の平衡経路が存在するにもかかわらず、二次経路 (secondary path) を無視し主経路 (primary path) における平衡状態のみを評価している場合が有り得る。また、梁やシェル構造物は初期形態になんらかの不整を有していることが多く、そのために期待構造系において二次経路であったものが不整構造系では主経路になっていることも少なくない。その場合分岐点であった点が極限点に変わり、構造物の限界荷重値が極端に下がることも考えられる (図 4.1.2 参照)。したがって、分岐経路での平衡状態を求めることは構造物の終局耐力を知るうえで大きな手掛かりとなる。

現在、実用的な側面から主流となっている解析手法は、あらかじめ構造系に初期不整量を加えて解析を行い分岐経路での挙動を擬似評価する方法である。この時初期不整量としては、初期形状に対する線形座屈固有値解析により得られた座屈固有モードを用いることが多い。しかしその固有モードが実際の座屈モードと一致している保証はなく^{2),3)}、また初期不整量の大きさにより大きく応答が変化するため、必ずしも確実に分岐経路に誘導されるわけではない。

一方、このような座屈点を正確に探索し、分岐経路へ誘導する解析手法についても、現在まで多くの研究がなされている³⁾⁻¹³⁾。座屈点の探索だけに限れば最も簡便な方法は、逐次平衡点での接線剛性マトリックスの行列式の値を計算し、零になる特異点を求めることである。Liu⁴⁾、北川⁵⁾は行列式の値を調べ、特異点近傍に到達したところで変位増分量を十分に小さくすることにより、分岐経路へ解を誘導しているが、一般には、分岐点の判別ならびに誘導については、さらに特異点での固有値解析を実施しなければならない。半谷⁶⁾の方法によれば、極限点か分岐点かについては、荷重モードと固有モードとの内積を調べることにより判断でき、分岐点の場合は内積値が零となる。更に、零固有値に対する固有モードを用いることにより分岐経路に沿った変位増分モードが求められ、これを用いて分岐経路へ解を誘導することができる。しかしながら、固有値解析自体が大きな計算容量、時間を要するため、実用的な立場からは敬遠されがちであった。

Wriggers^{7)-13),14)}は数学的手法であった Extended systems による解析手法を有限要素解析に導入し、固有値解析を行わないで座屈点における荷重値および固有モードを精度良く求める手法を開発した。これは座屈点においては、固有ベクトルと接線剛性マトリックスの積が零ベクトルになることを利用

して、平衡方程式、および固有ベクトルの大きさを規定する方程式と連立させて解くものである。しかしながら、この方法では後述するように計算量は相当増加する。

本章の目的は、分岐点を正確に探索し、固有値解析を用いなくて分岐経路に効率よく誘導する手法を開発することにある。その結果、座屈点における固有方程式と収束前後の Newton-Raphson 法による反復解法式の類似性に着目し、収束直後の変位修正ベクトルを適切にスケーリングすることにより、固有値解析を全くおこなわず、また初期不整を導入せずに、効率よく分岐経路へ誘導することができることを示す。

以下では、まず座屈解析の基礎式および従来の座屈解析手法について述べ、その後で本解析手法の手順および適用範囲について示す。最後に、本研究第3章で開発したシェル要素¹⁷⁾を用いた実用規模の解析結果も合わせて示しその有効性について確認する。

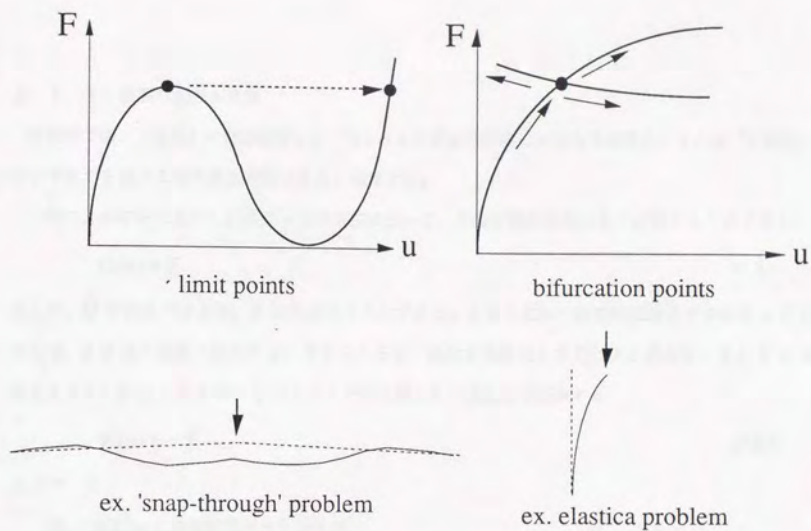


図 4.1.1 座屈点の分類図

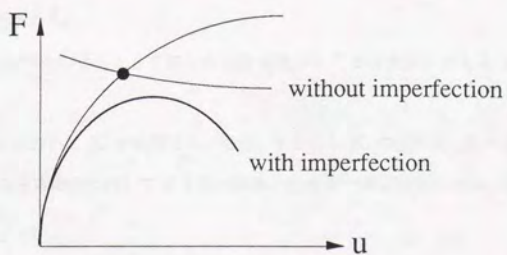


図 4.1.2 初期不整のある構造系の応答

4. 2 従来の座屈解析

4. 2. 1 座屈の定義と分類

本研究では、「座屈」は構造応答として得られる荷重変位曲線における「極限点」または「分岐点」のいずれかを越える際の構造挙動であると定義する。

一般に、変位法に基づく非線形有限要素法において、平衡方程式は次のように書くことができる。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (4.2.1)$$

ここで、 \mathbf{Q} は内力ベクトル、 \mathbf{F} は外力ベクトルである。なお内力は一般には現時点での変位 \mathbf{u} のみならず、 \mathbf{u} に至る履歴に依存すると考えられるが、表示を簡略化して $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ と表わす。また \mathbf{F} は保存力とする。式 (4.2.1) を変位 \mathbf{u} における平衡状態からの速度形で表わすと

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{F}} \quad (4.2.2)$$

ここで

$\mathbf{K} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{u}$: 接線剛性マトリックス

となり、荷重増分法の場合は式 (4.2.2) に基づいた反復計算により変位 \mathbf{u} が求められる。また、荷重モードが解析を通して一定の場合は、ある一定の荷重ベクトル \mathbf{f}_{cr} に対する荷重パラメータ λ を導入して、 $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{f}_{cr}$ と置けるから、式 (4.2.1), (4.2.2) はそれぞれ

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{f}_{cr} \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda} \mathbf{f}_{cr} \quad (4.2.4)$$

となる。なお座屈後解析の手法として知られる弧長増分法¹⁾では変位に加え λ も未知数として扱われる。

式 (4.2.2), (4.2.4) において \mathbf{K} が特異でない場合、すなわち \mathbf{K} の行列式 (以下 $\det(\mathbf{K})$ とする) が 0 でない場合、ある荷重増分に対して釣り合い経路上で $\dot{\mathbf{u}}$ が一意に決定される。逆に

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad (4.2.5)$$

の場合は、 $\dot{\mathbf{u}}$ が一意に定められず「座屈点」となる。

次に、座屈点の分類については、変位増分ベクトルと荷重モードの内積から求められる stiffness parameter の値を調べる方法⁷⁾、 \mathbf{K} の最小固有値が 0 の時の固有モードと荷重モードの内積の値を調べる方法^{8), 9), 10)}等が知られているが、ここでは半谷ら⁸⁾による分類手法に従い、その概要を示す。

まず \mathbf{K} に対するモーダルマトリックス Φ を用いて \mathbf{K} の対角化をおこなう。式 (4.2.4) の左から Φ^T を乗じると、 $\Phi^T = \Phi^{-1}$ より次式を得る。

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \Phi^T \dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda} \Phi^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \quad (4.2.6)$$

$$\Omega \dot{\mathbf{v}} = \dot{\lambda} \mathbf{g} \quad (4.2.7)$$

ここで、

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_i \ \dots \ \phi_n] \quad (4.2.8)$$

ϕ_i : \mathbf{K} の i 番目の固有値 ω_i に対する固有モード

$$\text{すなわち、} (\mathbf{K} - \omega_i \mathbf{I}) \phi_i = \mathbf{0} \quad (4.2.9)$$

Ω : ω_i を i 番目の対角項とする対角マトリックス

$$\dot{\mathbf{v}} = \Phi^T \dot{\mathbf{u}}: \text{一般化変位ベクトル} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_i \ \dots \ g_n]^T \\ &= [\phi_1^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \ \phi_2^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \ \dots \ \phi_i^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \ \dots \ \phi_n^T \mathbf{f}_{\text{ref}}]^T \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

: 一般化荷重ベクトル

簡単のために ω_1 は最小固有値、また重根はないと仮定すると、座屈点では式 (4.2.5) より

$$\omega_1 = 0 \quad (4.2.12)$$

となる。また、式 (4.2.7) における第 1 行目の方程式は

$$\begin{aligned} \omega_1 \dot{v}_1 &= \dot{\lambda} g_1 \\ &= \dot{\lambda} \phi_1^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

であるから、式 (4.2.12) を式 (4.2.13) に代入して、

$$\dot{\lambda} \phi_1^T \mathbf{f}_{\text{ref}} = 0 \quad (4.2.14)$$

が得られる。 ϕ_1 は最小固有値が 0 の時の固有モードに相当する。式 (4.2.14) が座屈点分類の際の基礎式となり、 $\phi_1^T \mathbf{f}_{\text{ref}}$ の値により極限点と分岐点に区別される。以下にその概要を示す。

a) $\phi_1^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \neq 0$ (極限点)

式 (4.2.14) より明らかに

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (4.2.15)$$

すなわち、変位増分 $\dot{\mathbf{u}}$ に対する荷重増分 $\dot{\lambda}$ が 0 となるので、この点は極限点となる。なお $\phi_1^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \neq 0$ は ϕ_1 と荷重モードが直交しないことを意味している。

一方、 $\omega_i \neq 0$, ($i=2 \sim n$) であるから式 (4.2.7) より

$$\dot{v}_i = \omega_i^{-1} \dot{\lambda} g_i \quad : i=2 \sim n \quad (4.2.16)$$

式 (15) を式 (16) に代入して

$$\dot{v}_i = 0 \quad : i=2 \sim n \quad (4.2.17)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Phi \dot{v} \\ &= \dot{v}_1 \phi_1 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

であるから、極限点を越えるときの変位増分モードは、 ϕ_1 と一致する。

b) $\phi_1^T f_{ref} = 0$ (分岐点)

この場合は分岐点となり(詳細は文献⁹⁾参照)、 ϕ_1 と荷重モードは直交する。この時式 (4.2.16) より

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Phi \dot{v} \\ &= \dot{v}_1 \phi_1 + \sum_{i=2}^n \omega_i^{-1} \dot{\lambda} g_i \phi_i \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

を得る。特に $\dot{\lambda} = 0$ の場合は対称分岐点と分類され、

$$\dot{u} = \dot{v}_1 \phi_1 \quad (4.2.20)$$

となり式 (4.2.18) と一致する。そして ϕ_1 は、分岐経路に入ったときの変位増分モードとなる。一方 $\dot{\lambda} \neq 0$ の時は非対称分岐点と分類され、 ϕ_1 は分岐経路に入ったときの変位増分モードとは一致しない。

(なお、有限要素解析では \dot{u} , $\dot{\lambda}$ は微小増分 Δu , $\Delta \lambda$ として取り扱う。)

4. 2. 2 座屈点の探索

本項では座屈点探索のための代表的手法の概要を示し、その精度および実用性について検討する。

(1) $\det(\mathbf{K}) = 0$ による座屈点の探索

$\det(\mathbf{K})$ の値は、非線形方程式の解法に Newton-Raphson 法を用いている場合には、 \mathbf{K} の三角分解の過程で求めることができる。すなわち

$$\det(\mathbf{K}) = \det(\mathbf{LDL}^T)$$

$$\begin{aligned}
 &= \det(\mathbf{D}) \\
 &= \prod_{i=1}^n D_{ii}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.21}$$

である。ここで

\mathbf{L} : 対角項が 1 の左下三角マトリックス

\mathbf{D} : 対角マトリックス (D_{ii} は i 番目の対角項)

式 (4.2.21) は実用規模の解析では極めて大きな値になり、ほとんどの場合計算機で取り扱える実数の上限値を越るため、そのまま乗算すれば overflow error が生じる。

これを回避するひとつの方法は $\det(\mathbf{K})$ に適切なスケールリングを施すことであり、Wagner¹²⁾ らは以下に示すように初期剛性 \mathbf{K}_L を用いて正規化している。

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{K}^*) &= \det(\mathbf{K}) / \det(\mathbf{K}_L) \\
 &= \prod_{i=1}^n (D_{ii} / \|\mathbf{D}_L\|)
 \end{aligned}
 \tag{4.2.22}$$

$$\|\mathbf{D}_L\| = \det(\mathbf{K}_L)^{1/n}
 \tag{4.2.23}$$

となる。ここで、

$\det(\mathbf{K}^*)$: スケールリングされた $\det(\mathbf{K})$

\mathbf{K}_L : 線形解析における接線剛性マトリックス

$\|\mathbf{D}_L\|$: \mathbf{K}_L を三角分解した対角マトリックスのノルム

また overflow error を回避するために一度対数をとることもあり、その場合は次式で $\det(\mathbf{K})$ が得られる。

$$\det(\mathbf{K}) = (-1)^m 10^\alpha
 \tag{4.2.24}$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \log(|D_{ii}|)
 \tag{4.2.25}$$

ここで m は \mathbf{D} の中の負の対角項の数、 $||$ は絶対値を表わしている。

実際には、増分解析の過程で、 $\det(\mathbf{K})$ あるいは $\det(\mathbf{K}^*)$ の値が厳密に 0 になることは稀であるため、ある tolerance 以下の値になった点¹²⁾ や前後の値から内挿あるいは外挿して得られる点⁶⁾ を座屈点とすることが多い。一例として図 4.2.1 に、後で示す平板の圧縮座屈解析 (Ex. 4.1) における $\det(\mathbf{K}^*)$ の荷重に対する変化を示す。この例では座屈点が $\det(\mathbf{K}^*)$ の値を補間することにより比較的精度良く近似できる。一方、表 4.2.1 には後で示す円筒の diamond buckling 解析 (Ex. 4.2) における最小座屈荷重値付近の $\det(\mathbf{K})$ の変化を示す。表中では $\det(\mathbf{K})$ は一度対数をとって求めている。この例題では、 \mathbf{K}_L と較べ \mathbf{K} の剛性変化が大きく、 $\det(\mathbf{K}^*)$ は計算機上では underflow error が生じ、少

なくとも表 4.2.1 に示す荷重の範囲 (座屈荷重の前後 2%) ではすべて 0 となるため、座屈点の判定に用いることはできない。また、このように数パーセントの荷重変化の間に $\det(\mathbf{K}^*)$ の値が何桁も変化し、かつ複数の座屈点があると予想される場合には、線形補間により座屈点を近似することも困難であると考えられる。

(2) 固有値解析による座屈点の探索

4. 2. 1 項で示したように、 \mathbf{K} の 0 固有値に対する固有ベクトルは、対称分岐点においては分岐経路に入ったときの変位増分に一致する。したがって、分岐経路に誘導したい場合には $\det(\mathbf{K}) = 0$ の点を探索するだけでなく固有値解析も併用されることが多い。

線形座屈固有値解析は、実用的な立場で最も用いられている手法であり、古典的な初期安定問題として座屈荷重を求めるものである¹⁶⁾。すなわち、初期状態から $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}_{ref}$ までの \mathbf{K} の変化量は、 \mathbf{f}_{ref} に対する初期変位マトリックス $\mathbf{K}_{u_{ref}}$ や初期応力マトリックス $\mathbf{K}_{\sigma_{ref}}$ に比例すると仮定される。この時式 (4.2.9) に $\omega = 0$ をあらかじめ代入すれば

$$\{ \mathbf{K}_L + \lambda (\mathbf{K}_{u_{ref}} + \mathbf{K}_{\sigma_{ref}}) \} \phi_1 = 0 \quad (4.2.26)$$

となり、 λ に関する固有値問題となる。この方法ではいわゆる Euler Buckling などのように座屈前の荷重変位曲線が比較的線形になる問題に対しては精度良く座屈固有値が求められる。また、この固有値解析で得た固有モードを初期不整量として初期形状に加えて、分岐経路に誘導する解析がしばしば行われるが、線形座屈固有値解析による固有モードは座屈点における \mathbf{K} の固有モードと必ずしも一致しないことも報告されており^{21), 22)}、その扱いには注意を要する。

その他、ある荷重値における接線剛性 $\mathbf{K}(\lambda)$ とその点における微分剛性 $\dot{\mathbf{K}}(\lambda)$ の近似を用いて、式 (4.2.27), (4.2.28) に示すような線形化固有値解析を行う方法もあり、汎用有限要素法コード¹⁸⁾などで用いられている。

$$\{ \mathbf{K}(\lambda) + \Delta\lambda \dot{\mathbf{K}}(\lambda) \} \phi_1 = 0 \quad (4.2.27)$$

$$\dot{\mathbf{K}}(\lambda) = (\mathbf{K}(\lambda + \delta\lambda) - \mathbf{K}(\lambda)) / \delta\lambda \quad (\delta\lambda \ll \lambda) \quad (4.2.28)$$

この時、座屈荷重は $\mathbf{f}_{cr} = (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{f}_{ref}$ で計算される。この方法では、座屈点付近で $\dot{\mathbf{K}}(\lambda)$ そのものが 0 に近づくにもかかわらず、それを式 (4.2.28) で近似する。したがって、精度の観点から、座屈解析の途中での予測程度に使われるのが望ましいと思われる。

最後に、弧長増分法等と並行して式 (4.2.9) の固有値解析を行う場合は、ある tolerance 以下の固有値になったときを座屈点と見なせるが、荷重ステップ毎に固有値解析を実施し 0 固有値を外挿等によ

り求めるのは、計算コストの面から不経済である。そのため、前に述べた線形固有値解析も併用し、予測される座屈荷重値の近傍、あるいは三角分解の過程で求められる $\det(\mathbf{K})$ の正負符号が変化する荷重値の近傍のみを対象に固有値解析を行えば効率的である。

(3) extended systems による座屈点の探索

これは Wriggers ら^{13), 14)}により有限要素法に初めて導入された解析手法であり、以下の連立非線形方程式を Newton-Raphson 法により直接解くことにより、厳密に座屈点が求められる。この時、平衡方程式 (4.2.29) と連立させる方程式として、式 (4.2.30) および (4.2.31) を用いている。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f}_{\text{ref}} = \mathbf{0} \quad (4.2.29)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda) \phi_1 = \mathbf{0} \quad (4.2.30)$$

$$|\phi_1| = 1 \quad (4.2.31)$$

式 (4.2.30) は式 (4.2.9) で $\omega = 0$ としたものであり、式 (4.2.31) では固有モードの大きさを規定している。これらの方程式で総自由度 $2n+1$ の "extended systems" が構成される。式 (4.2.29)~(4.2.31) を増分形で表わすと次のようになる。

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{f}_{\text{ref}} \Delta \lambda = -\mathbf{Q}(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{f}_{\text{ref}} \quad (4.2.32)$$

$$(\mathbf{K}\phi_1)_{,u} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{K}\phi_1)_{,\lambda} \Delta \lambda + \mathbf{K} \Delta \phi_1 = -\mathbf{K}(\mathbf{u}, \lambda) \phi_1 \quad (4.2.33)$$

$$(\phi_1 \cdot \Delta \phi_1) / |\phi_1| = 1 - |\phi_1| \quad (4.2.34)$$

ここで、

$$(\mathbf{K}\phi_1)_{,u} = \partial(\mathbf{K}\phi_1) / \partial \mathbf{u}, \quad (\mathbf{K}\phi_1)_{,\lambda} = \partial(\mathbf{K}\phi_1) / \partial \lambda$$

式 (4.2.32)~(4.2.34) が Newton-Raphson 法により式 (4.2.29)~(4.2.31) を解くための基礎方程式となる。式 (4.2.32)~(4.2.34) の左辺より得られる接線マトリックスは非対称マトリックスとなるが、Wriggers らは弧長増分法に似た手順で、マトリックスの対称性を保ったまま効率良く解く方法を示している。また、通常の解析と比較すれば、 \mathbf{K} の微分を別に計算しなければならず、 ϕ_1 の初期値が収束回数に影響を与えるという短所があるものの、extended systems による解法は、固有値解析を行わないで厳密に座屈点および固有モードが求められる優れた解法のひとつであると考えられる。

4. 2. 3 分岐経路への誘導

通常、初期不整量等を与えることなく分岐経路に解を誘導する場合（図 4.2.2 A 点から B' 点に平衡解を見つける場合）には次の手順が用いられる。

- 1) 座屈点の判定および分類を行う。
- 2) 分岐点の場合には \mathbf{K} の 0 固有値に対する固有モード ϕ_1 より適切な $\dot{\mathbf{u}}$ を求める。
- 3) 座屈点近傍の平衡点から $\dot{\mathbf{u}}$ を適切にスケーリングして得られる $\Delta \mathbf{u}$ を初期値として次の荷重増分に対する反復計算を行う。
- 4) 収束点が分岐経路上の平衡点となる。

すなわち、 $\det(\mathbf{K}) = 0$ となる点、およびその点の \mathbf{K} に関する ϕ_1 を精度良く求めることにより、特に対称分岐の場合は滑らかに分岐経路に誘導することができる（式 (4.2.20) 参照）。

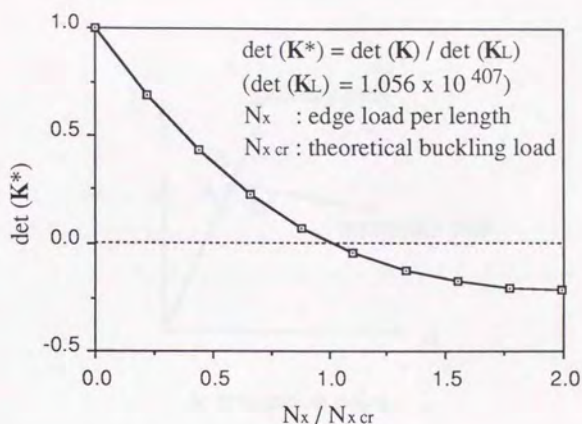


図 4.2.1 荷重に対する $\det(\mathbf{K}^*)$ の変化 (Ex. 4.1)

表 4.2.1 荷重に対する $\det(\mathbf{K})$ の変化 (Ex. 4.2)

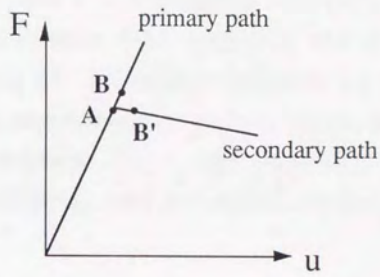
N_x / N_{xcr}	$\det(\mathbf{K})$	$\det(\mathbf{K}^*)$	m
0.9346	1.580×10^{3644}	-	0
0.9600	5.140×10^{3641}	-	0
0.9840	7.556×10^{3638}	-	0
1.0060	-6.662×10^{3635}	-	1
1.0253	-9.683×10^{3632}	-	1
1.0415	-3.405×10^{3628}	-	5

$\det(\mathbf{K}_L) = 1.349 \times 10^{3692}$, - : underflow error

N_x : edge load per length

N_{xcr} : theoretical buckling load

m : number of negative terms in \mathbf{D}



A: bifurcation point

B: point on
primary path

B': point on
secondary path

図 4.2.2 分岐経路への誘導

4. 3 Scaled Corrector を用いた分岐解析手法

本節では、前節で示した「座屈点」における諸特性および各種探索アルゴリズムに関する考察に基づき、新たに開発した "Scaled Corrector" を用いた分岐解析手法（以下 SC 法）について示す。本手法は、初期不整を考慮することなく、また固有値解析を併用することもなく、収束直後の変位修正ベクトル (displacement corrector vector) を適切にスケーリングすることにより効率よく分岐経路へ解を誘導するものである。本手法では $\det(\mathbf{K})$ の値により座屈点の探索を行うが、 $\det(\mathbf{K})$ が大きく変動する場合の取り扱いについても言及する。なおここでは対称分岐のみを対象とし、非対称分岐に対しては後で考察を加える。

4. 3. 1 座屈点における基礎解法式の考察

数値計算において座屈点と判断される点での時刻 $t' (= t + \Delta t)$ における基礎解法式を式 (4.3.1)~(4.3.8) に示す。

$${}^t\mathbf{K}^{(n)}\Delta\mathbf{u}^{(n+1)} = {}^t\mathbf{R}^{(n)} \quad (4.3.1)$$

$${}^t\mathbf{R}^{(n)} = -\mathbf{Q}({}^t\mathbf{u}^{(n)}) + {}^t\lambda^{(n)}\mathbf{f}_{nc} \quad (4.3.2)$$

$${}^t\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \Delta\mathbf{u}^{(i)} + {}^t\mathbf{u} \quad (4.3.3)$$

$$\|{}^t\mathbf{R}^{(n)}\| < (f\text{-tol}) \quad (4.3.4)$$

$$\|\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}\| < (u\text{-tol}) \quad (4.3.5)$$

$$|\det({}^t\mathbf{K}^{(n)})| < (d\text{-tol}) \quad (4.3.6)$$

$$({}^t\mathbf{K}^{(n)} - {}^t\omega_1\mathbf{I}){}^t\phi_1 = \mathbf{0} \quad (4.3.7)$$

$$|{}^t\omega_1| < (\omega\text{-tol}) \quad (4.3.8)$$

ここで、右肩の (i) は Newton-Raphson 法による反復回数を、n は収束条件を満たした回数、(-tol) はそれぞれ対応する許容誤差 (= 0) を表わしている。式 (4.3.4), (4.3.5) の収束条件を満たし得られた ${}^t\mathbf{u}$ を用いて $\det({}^t\mathbf{K}^{(n)})$ あるいは ${}^t\omega_1$ が計算され、式 (4.3.6) あるいは (4.3.8) より座屈点の判定が行われる。

さて、時刻 t' が座屈点である場合、式 (4.3.4), (4.3.8) より式 (4.3.1), (4.3.7) は次式のように近似できる。

$${}^t\mathbf{K}^{(n)}\Delta\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{0} \quad (4.3.9)$$

$${}^t\mathbf{K}^{(n)}{}^t\phi_1 = \mathbf{0} \quad (4.3.10)$$

これは、収束直後の変位修正ベクトル (displacement corrector vector) $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ が座屈固有モード ${}^t\phi_1$ を近似し得る可能性があることを示唆している。すなわち

$${}^t\phi_1 = \Delta\mathbf{u}^{(n+1)} \quad (4.3.11)$$

と書ける。もし座屈点が対称分岐点に分類されるならば式 (4.2.20) より分岐経路へ向かう変位増分モードは座屈固有モードに一致するから、固有値解析を全く行うことなく、4.3.2節に示すように適切にスケールされた $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ を分岐経路上の平衡点探索のための有力な初期値として用いることができる。

4.3.2 $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ のスケールリング

$\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ は収束直後の変位修正ベクトルであり、大きさは極めて小さい。ここでは、次式のようにスケールリングを施して分岐経路に誘導するための $\Delta\mathbf{u}$ とする。

$$\Delta\mathbf{u} = C \cdot |{}^t\mathbf{u}| \cdot \Delta\mathbf{u}^{(n+1)} / |\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}| \quad (4.3.12)$$

$$C = 0.01 \sim 0.1 \quad (4.3.13)$$

すなわち、時刻 t における変位の大きさを基準にスケールリングをおこなう。同様のスケールリングは Wagner¹²⁾ も行っている。またスケールリングファクター C の値は経験的なものであるが、この値によって収束回数が大きく作用されるため、分岐解析に際しては重要なパラメータのひとつとなる。

4. 3. 3 有限要素法における解析手順

有限要素法における SC 法の具体的な解析手順を以下に示す。座屈点は $\det({}^t\mathbf{K}) = 0$ の点を二分法 (bi-section method) により求めている。

1) 時刻 t' における変位を求める。

2) $\det({}^t\mathbf{K})$ の正負符号を調べる。

3) 符号に変化がない場合

3)-1 時刻 t' を更新して 1) に戻る。

符号に変化がある場合

3)-2 $\det({}^t\mathbf{K})$ の値を調べる。

十分な精度で $\det({}^t\mathbf{K}) = 0$ の場合

3)-2-a 4) に進む。

$\det({}^t\mathbf{K}) = 0$ とはいえない場合

3)-2-b 荷重方向を反転し、荷重増分値あるいは弧長が 1/2 になるように時刻 t' を更新して 1) に戻る。

4) 収束直後の $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ を式 (4.3.12), (4.3.13) によりスケーリングし $\Delta\mathbf{u}$ を求める。

5) $\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{ext}$ を計算し座屈点の分類を行う。

6) $\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{ext} \approx 0$ ではなく極大点となる場合

6)-1 新たな荷重増分値あるいは弧長を設定し、1) へ戻る。

$\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{ext} \approx 0$, 即ち分岐点で分岐経路を求める場合

6)-2 ある微小荷重増分値あるいは弧長を設定し、1) へ戻る。この時式 (4.3.12) の $\Delta\mathbf{u}$ を反復計算の初期値として用いる。収束点は分岐経路上の平衡点となる。

分岐点で分岐経路を求めない場合

6)-3 新たな荷重増分値あるいは弧長を設定し、1) へ戻る。この時 $\Delta\mathbf{u}$ を反復計算の初期値としては用いない。

4. 3. 4 SC法による有限要素分岐解析に関する補足

(1) 大きく変動する $\det(\mathbf{K})$ の取り扱い

2章でも示したように、 $\det(\mathbf{K})$ が大きく変動する場合には、直接 $\det(\mathbf{K})$ あるいは $\det(\mathbf{K}^*)$ の値で座屈点の判定を行うことが困難な場合がある。このような場合は、表 4.2.1 にも示したように、座屈点の前後では \mathbf{D} における負の項の数が増減し $\det(\mathbf{K})$ の正負符号が反転する性質を利用できる。即ち、 $\det(\mathbf{K})$ はその正負符号の変化のみに着目し、 \mathbf{D} における負の項の数が増減する際の荷重パラメータの相対的な変動幅が、ある tolerance 以下になった時の荷重値を座屈荷重とする。 λ 右肩の正負符号で $\det(\mathbf{K})$ の変化を表わすものとすれば、

$$(\lambda^+ - \lambda^-) / \lambda^- < (\lambda\text{-tol}) \quad (4.3.14)$$

or
$$(\lambda^- - \lambda^+) / \lambda^+ < (\lambda\text{-tol}) \quad (4.3.15)$$

となる。後の解析例では、この手法 ($\lambda\text{-tol} = 1 \times 10^{-4}$) により良好な結果を得ている。

(2) 誤差を含んだ $\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ に対する補正

元来式 (4.3.11) は近似式であるから $\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ については $\Delta \mathbf{u}$ は厳密な固有モードに対しある程度の誤差を生む。また緩い収束条件や 0~1 回の少ない反復回数で収束したときにも多くの誤差が含まれる。しかしながら収束点が座屈点と見なせるならば、 \mathbf{K} はすでに三角分解してあるので、 $\Delta \mathbf{u}$ を初期値とした逆反復法 (逆べき乗法) により、より精度の高い ϕ_1 を

$$\phi_1 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{u} \quad (4.3.16)$$

として得ることができる。筆者らの経験では、反復は 1 回で十分でありこれによる計算時間の増加は無視できた。

(3) SC法による簡易分岐解析

4. 4 節で示した解析手順は、厳密に座屈点を求めた上で分岐経路に誘導するものであるが、より簡便には次の方法で分岐経路に移行する場合がある。すなわち、時刻 t の解が n 回で収束しかつ $\det(\mathbf{K})$ の正負符号が反転しているなら、その時点でスケールリングした $\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ を用いて変位を更新し内力の再評価を行い、再び反復により収束点を求める。この時式 (4.3.3) は次のようになる。

$$r_{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n+1} C_i' \Delta \mathbf{u}^{(i)} + {}^i \mathbf{u} \quad (4.3.17)$$

$$C_i' = 1, \quad (i \neq n+1) \\ = C \cdot |{}^i \mathbf{u}| / |\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}| \quad (i = n+1) \quad (4.3.18)$$

この方法を既存の有限要素解析コードに取り入れる場合には、 $\det(\mathbf{K})$ の正負符号のチェックと式(4.3.18)の係数 C_i' を計算するだけで良い。したがって、試計算程度に分岐計算を行いたい場合等に有効だと考える。

(4) SC法の適用範囲について

非対称分岐点の場合は、式(4.3.19)で示したように ϕ_1 は必ずしも変位増分モードと一致しない。しかしながら、式(4.3.19)右辺第2項を正確に計算するには、 \mathbf{K} の固有値を全部求めるか、あるいは相当量の追加計算⁹⁾をしなければならないため、大規模解析の際には効率が悪い。一方非線形計算の場合、 $\Delta \mathbf{u}$ はあくまでも収束計算のための初期値であるから、必ずしも正確に求められている必要はない。また、解析対象によっては、式(4.3.19)において ϕ_1 に関する第1項の寄与が支配的であることも考えられ、その場合には本手法によっても分岐経路に移行できると考えられる。

次に、座屈点での \mathbf{K} の0固有値が重根である場合は、本手法により得られる座屈固有モードは重根に対応する固有ベクトルの線形結合となる。つまり、重根の個数分の固有ベクトルが個別に求められるわけではないため、選ばれる分岐経路はNewton-Raphson法のアルゴリズムに依存して求まり、解析者が制御することは困難である。

(5) 接線剛性 \mathbf{K} の特異性について

座屈点は特異点であり、厳密には座屈点における \mathbf{K} を三角分解することはできない。一方、弧長法等の現実の数値計算による探索では、結果的に $\det(\mathbf{K})=0$ の"極めて近傍"の平衡点を座屈点とみなしていることになる。このような点における \mathbf{K} は性質が悪く解析が発散することも考えられるが、筆者らが後に示す例等で座屈点と判定した点の近傍では、 \mathbf{K} が不安定になることはなかった。またそう言ったとしてもペナルティスプリング¹⁰⁾等を用いて \mathbf{K} の安定化をはかることが考えられる。この時も対角項を対象にすべての自由度に対して均等に安定化をする場合には、固有ベクトルは変化しないので、収束直前の変位修正ベクトルは座屈固有モードとして用いることができる。