

論文の内容の要旨

論文題目 最適化問題に対する近似アルゴリズムの典型性能に関する統計力学的解析

氏名 高 邊 賢 史

本博士論文では、組合せ最適化問題に対する近似アルゴリズムに着目し、その典型性能を主に統計力学的手法を用いて解析した結果について報告する。

組合せ最適化問題の多くは厳密に最適解を求めることが困難な NP 困難と呼ばれるクラスに属する。このため、組合せ最適化問題に対しては、多項式時間で近似解を探索する近似アルゴリズムの開発と、その性能評価が行われてきた。近似アルゴリズムの性能評価の尺度は、すべての入力における最悪の近似精度と、ランダムな入力に対する平均の近似精度の 2 種類に大別される。前者の最悪近似性能評価はアルゴリズムの近似保証を与えるため、主に情報科学の文脈で研究されている。一方で、実用的な観点から後者も数学的に研究されてきた。典型近似性能解析の興味深い結果として、ランダム化した組合せ最適化問題自体の平均的な性質や近似アルゴリズムの典型的な近似精度が急激に変化する threshold phenomena と呼ばれる相転移現象が導かれることがある。このため、スピングラス理論をはじめとするランダム系を扱う統計力学によって、ランダム化した組合せ最適化問題やその近似アルゴリズムに関する研究が行われてきた。

本論文でも、組合せ最適化問題、近似アルゴリズム、入力のランダム化、の 3 つ組で定義される典型近似性能を解析の対象とする。特に、グラフ上で定義される組合せ最適化問題を考察するため、ランダムな入力としてランダムグラフと呼ばれる数理モデルを導入する。本論文では、組合せ最適化問題に対する近似アルゴリズムの典型性能に関する数理を深化する目的で、次のような先行と異なる観点から研究を行った。

第一に、従来のアルゴリズムの解析から前進し、近似アルゴリズム間の典型性能を可能な限り解析的に比較するという観点である。その意味では本論文は最適化問題の物理的描像の解明を目指す

立場よりも、近似アルゴリズムの threshold phenomena を研究してきた情報科学側の立場に近い。これにより近似アルゴリズムの比較の尺度としての典型性能評価法の確立を目指す。その達成のため、本論文では必要に応じて数学的な議論によりアルゴリズムの典型性能評価を行っている（3, 5章）。

第二に、従来統計力学の文脈で解析されてきた“典型的な”設定を解析が可能な限り拡張することを目指した。レプリカ対称性とその破れをはじめとする最適化問題の物理的描像の解明を目指す立場では、典型的な問題設定は他の設定での定性的な成立を予想する上で重要な解析対象である。一方、上述したような近似アルゴリズム間の典型性能比較を目指す立場では、ランダムグラフのような設定の変更が定性的な変化を生じさせる（3章）。また、解析の都合上、対象とする最適化問題も単純な目的関数や制約をもつ問題が選択されることが多い。これも統計力学的解析のベンチマークとして重要ではあるものの、典型性能比較の観点からはそのような問題だけでは不十分である。そのため、本論文では比較的複雑な組合せ最適化問題に対する近似アルゴリズムの統計力学的典型性能評価を行っている（5,6章）。

第三に、最適化問題における物理的描像と最適化問題の数理構造を近似アルゴリズムを介して関連付けるという観点である。先行研究では専ら全探索的な厳密なアルゴリズムの数理構造とレプリカ対称性の関連性に着目してきた。従来解析されてきた発見的近似アルゴリズムは典型性能が解析可能であるものの、解析結果がレプリカ対称性の破れた相における問題の数理構造を反映しているかという点には疑問が残る。本論文では線形計画緩和が組合せ最適化問題の構造を直接的に反映していることに着目し、その挙動とレプリカ対称性の相関を検証する（4章）。

最後に、レプリカ対称仮定のもとでの統計力学的解析を平均場解析としてだけでなく確率伝搬法の典型性能評価とみなす（3章）。このため、本論文ではレプリカ対称性の破れを仮定した解析を重視しない反面、必要に応じて従来のキャビティ法の枠組みを適切に拡張し、確率伝搬法に基づく近似アルゴリズムの提案やその典型性能評価に重点を置く。このような統計力学的アプローチが NP 困難な組合せ最適化問題に対して有効であることを提示する（5, 6章）。

次に本論文の構成について述べる。

まず、1章で歴史的経緯の概説と本論文の目的を述べ、続く2章で本論文における主要な解析手法であるキャビティ法の各種手法について整理した。

3章では、任意の次数分布で定義されるランダムグラフ上の最小頂点被覆問題に対する3種類の近似アルゴリズム（確率伝搬法、線形計画緩和、leaf removal アルゴリズム）の典型性能比較を行った。本章では網羅的な典型性能評価を目指し、任意の次数分布で定義されるランダムグラフという一般的な状況を設定した。解析の結果、3種類の近似アルゴリズムの典型性能が悪化するランダムグラフの平均次数の閾値の大小関係が、3つの場合に分類されることを提示し、実際に各場合に相当するランダムグラフが存在することを数値的に検証した。本章の結果から、従来統計力学的解析で用いられてきたような単純なランダムグラフでの状況とは定性的に異なる結果を示すランダムグラフの存在が明らかになったことで、網羅的な典型性能評価の重要性が明確になったといえる。

4章では、線形計画緩和における単体法が組合せ最適化問題の数理構造を反映することに着目し、単体法を介して組合せ最適化問題の物理的描像と数理的構造を関連付けることを目指した。特

に、単体法が解に至るステップ数の頻度分布を高精度に見積もるため、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いてレアイベントサンプリングを行った。さらに、線形計画緩和にとっての入力の難度ごとにステップ数の条件付頻度分布を求め、それらの全変動距離を測定した。その結果、その結果、対象のレプリカ対称性の破れる転移点を境にして全変動距離の有限サイズにおける単調性が変化することが明らかになり、単体法の緩和へ至るステップ数とレプリカ対称性の破れる転移点に相関が存在することが示唆された。この結果はソルバーに関する依存性がなく、これらの事実は上述した線形緩和と最適化問題の数理構造の密接な関係の存在を示唆している。

続く5章では最大カバー問題における3種類の近似アルゴリズム（確率伝搬法、線形計画緩和、貪欲法）の典型性能評価を行った。この問題は2部グラフとカバー個数を入力とする点で従来統計力学的に研究されてきた組合せ最適化問題よりも複雑である。情報科学では最大カバー問題は貪欲法や線形計画緩和等の近似アルゴリズムが理論的な最悪近似性能の限界を達成することで知られている。本章では結果として最悪性能が等しい近似アルゴリズムでもその典型性能は異なるということが示される。この事実は最悪性能と典型性能の両者が近似アルゴリズムの性能評価基準として重要であることを示唆している。

6章では、統計力学的アプローチの統計的推論問題への応用として、集団検査法におけるブーリアン圧縮センシングを取り上げた。確率伝搬法に基づく近似アルゴリズムを提案し、集団検査法の非線形性からキャビティ場の条件付分布に関して閉じるようにキャビティ法を拡張した。その結果、提案手法は既存手法よりも効率の良い推定を可能とし、その典型的な性能が解析的に予測可能であることを示した。さらに、キャビティ方程式の漸近解析を行うことで、パラメタに関する特殊な極限を実現し、従来のアルゴリズムとの典型性能を解析的に比較した。以上の結果は、確率伝搬法による近似アルゴリズムの提案とキャビティ法による典型性能解析という統計力学的アプローチの非凸最適化問題に対する有効性を示している。

7章では、これらの研究のまとめと今後の展望に関して記している。