

論文審査の結果の要旨

論文提出者氏名 高邊 賢史

組合せ最適化問題は離散変数で定義されるコスト関数を複数の制約条件の元で最小化する問題とまとめることができる。今日知られている多くの組合せ最適化問題は問題の規模に対して多項式程度の計算時間で解を導くアルゴリズムは知られていない。計算量理論では問題の難しさのクラス分けがされる一方、近似アルゴリズムの提案やその性能評価が応用数学を中心に様々な分野で研究されてきた。この近似アルゴリズムに注目し、統計力学の観点からその性能評価やアルゴリズムの提案を行うことが本論文で考察される問題である。

本論文は七章と付録からなり、第一章では組合せ最適化問題のこれまでの研究を概観し、本論文の位置づけを明確にしている。第二章では、本論文での中心的解析手法となる統計力学のキャビティ法が詳しく解説されている。また、第三章では、組合せ最適化問題の一つである最小頂点被覆問題に対する三種類の異なる近似アルゴリズムの典型性能を評価し、第四章では、問題の難しさと問題を解くために必要な計算時間の関係について、数値的に研究している。第五章では、より複雑な組合せ最適化問題である最大カバー問題における近似アルゴリズムの典型性能の統計力学的評価の議論を展開している。さらに、第六章では、統計力学的アプローチの応用として集団検査法と呼ばれる統計的推論問題を考察し、最後に、第七章にて本論文のまとめと今後の展望について述べている。

第一章では、これまでの組合せ最適化問題の研究の中で、特に本論文に関連する先行研究が紹介される。アルゴリズムの性能評価は最悪評価と典型評価の二つの考え方に大別される。後者では、同じ最適化問題に対してサンプル群を導入し、その典型的な性能に注目するが、近年、その典型性能において相転移現象が見出され、ランダム系の統計力学の概念であるレプリカ対称性の破れと関係することが指摘されている。しかしながら、それは最適化問題そのものの持つ性質か、解法としてのアルゴリズムの持つ性質かは明らかになっていない。その点を指摘しながら、アルゴリズムそのものの性質を解析することを目的とする本論文の立場が明確にされている。

第二章では、最適化問題の例が紹介され、それらの問題が定義されるグラフ構造やその集団が導入される。さらに本論文で中心的な解析手法となる確率伝搬法とそのグラフ集団での典型評価に相当するキャビティ法がレプリカ対称性を仮定したレベルで解説される。第三章では、任意の次数分布で定義されるランダムグラフ上の最小頂点被覆問題に対して、確率伝搬法、枝葉除去法、線形計画法の全く異なる三種類の近似アルゴリズムの典型性能の比較が行われた。典型性能評価は最適化問題と任意の次数分布で定義されるランダムグラフを設定し、平均次数を変化させながら近似アルゴリズムが正確な解を導く閾値を解析することにより、アルゴリズムの性能の優劣を議論した。その結果、三種類の近似アルゴリズムの優劣関係は三つのパターンしか存在しないことが明らかになった。これまでに調べられた単純なランダムグラフでは全てのアルゴリズムが同じ閾値を示し、それが最小頂点被覆問題のレプリカ対称性の破れる点と一致したことから、レプリカ対称性と解法性能の悪化が密接に関係することが示唆されてきたが、その結果とは定性的に異なる結果を示す

ランダムグラフの存在が明らかになった．このことは，系統的な典型性能評価の重要性を明確にした意義のある成果といえる．

第四章では，近似アルゴリズムの一つである線形計画法の分析に取り組んだ．線形計画法標準的な解法である単体法において，解法性能の悪化と解に到達するまでの計算量の関係を数値的に調べることにより，組合せ最適化問題の物理的描像と数理的構造を関連付けることを目指した．得られた結果は両者が相関することを強く示唆しており，ここで示したような数値的アプローチが多くの問題における物理的描像と数理的構造の解明のための重要なツールを提供しうることを示した．

続く第五章では，最大カバー問題における三種類の近似アルゴリズムの典型性能評価を行った．この問題は二部グラフとカバー個数を入力とする点で統計力学的に研究されてきた従来の組合せ最適化問題よりも複雑である．情報科学では最大カバー問題は貪欲法や線形計画法等の近似アルゴリズムが理論的な最悪近似性能の限界を達成することが知られている．本章では最悪性能が同等な近似アルゴリズムでもその典型性能は異なることが統計力学的解析により明示的に示されている．この事実是最悪性能と典型性能の両者が近似アルゴリズムの性能評価基準としてどちらも重要であることを改めて示唆している．

第六章では，統計力学的アプローチの応用として，集団検査法におけるブーリアン圧縮センシングを取り上げている．確率伝搬法に基づく近似アルゴリズムを提案し，集団検査法の非線形性に対応して，キャビティ法を拡張した．その結果，提案手法は既存手法よりも効率の良い推定を可能とし，従来のアルゴリズムとの典型性能を比較し，提案手法が有意に優れていることを示した．

本論文の内容の一部は，福島孝治氏との共同研究であるが，論文提出者が主体になって解析を行ったものであると判断される．また，本論文の第三章の内容は学術論文として出版されており，第六章は投稿中であり，第四章と第五章の内容は投稿準備中である．

以上のように，本論文中の各研究は，様々な組合せ最適化問題及び統計的推論問題において近似アルゴリズムの典型性能評価法を確立し，近似アルゴリズムの典型性能に関して多面的な数理的理解の深化に寄与したことが認められる．

したがって，本論文は博士(学術)の学位を授与するにふさわしい内容であると審査委員会は全員一致で判定した．