

論文審査の結果の要旨

氏名 加藤 晃太郎

量子多体系の基底状態に現れる量子相の分類における近年の大きな発展として、対称性の自発的な破れなどの伝統的な概念で記述することができないトポロジカル秩序相が「トポロジカルエンタングルメントエントロピー」(TEE)と呼ばれる量で特徴づけられることが見出された。しかし、TEE自体の量子情報理論的な意味は明らかにされていなかった。本論文は、このような背景のもと、量子多体系におけるTEEを量子情報の観点から論じたものであり、6章からなる。

第1章では、序論として、研究の背景および論文の構成を示している。第2章では、本論文の基礎として量子情報についてレビューを行い、特に、本論文で重要となる既約相関を導入している。 n 個の領域からなる系と、その上での状態を表す密度行列を考える。このとき、 k 個($k \leq n$)の領域上でのみ値を持つハミルトニアンを k -局所的と呼び、 k -局所的なハミルトニアンの指数関数として定義される密度行列を k -局所的なギブス状態と呼ぶ。与えられた密度行列について k 次の既約相関とは、 $(k-1)$ -局所的なギブス状態との距離を相対エントロピーを用いて定義したものである。

第3章では、量子多体系の基底状態に現れるトポロジカル秩序相、およびそれを特徴づけるTEEについてレビューを行っている。量子多体系を2つの領域に分割したとき、これらの間のエンタングルメントエントロピーは、領域間の境界の面積（2次元系では、境界の長さ）に比例する。この「面積則」に加え、トポロジカル秩序相においては定数の補正が存在する。この定数に負符号をつけたものがTEEであり、トポロジカル秩序相の種類を反映した普遍的な値を持つ。

第4章および第5章が本論文の主要部分であり、独自の研究成果の報告が行われている。第4章では、空間2次元の量子多体系についてTEEの量子情報理論的な意味を論じている。TEEの幾何学的な意味付けとして、Liuらはギャップの開いたトポロジカル秩序相ではTEEは3次の既約相関に一致すると予想した。本章では、任意の物理量について相関距離がゼロの状態について、Liuらの予想を証明した。さらにこのとき、TEEには領域A、B、Cのうち2領域からなる部分系から隠すことのできる最大の秘密ビット数という、操作論的な意味があることを明らかにした。量子状態において任意の物理量について相関距離がゼロであることは、領域A、Cが隣接しないとき、領域A、C間の、領域Bに関する条件付き相互情報量がゼロであることと等価である。このとき、領域A、B、C上の密度行列は量子マルコフ鎖と呼ばれる。本章の議論では、相関距離がゼロであるという仮定、すなわち密度行列が量子マルコフ鎖であることが本質的に重要な役割を果たす。これは数学的には強い仮定であるが、励起ギャップを持つ基底状態の属する量子相の分類を行う上では物理的に自然な問題設定である。一方で、ギャップの開いた基底状態も一般的には有限の相関距離を持ち、量子マルコフ性が破れている。

そこで第5章では、量子マルコフ性の破れが小さい1次元鎖を記述する理論的枠組みを議論している。1次元鎖の密度行列が量子マルコフ鎖であるとき、この密度行列は隣接領域間の相互作用のみを含む近距離ハミルトニアンにより定義されるギブス状態で与えられることが知られている(量子Hammersley-Clifford定理)。本章では、1次元鎖の密度行列が近似的な量子マルコフ鎖である場合に、量子Hammersley-Clifford定理の一般化を証明している。すなわち、領域A、Cが隣接しないとき、領域A、C間の、領域Bに関する条件付き相互情報量が高々 ε である場合に、全領域の密度行列が近距離ハミルトニアンにより定義されるギブス状態で近似的に与えられることを示した。これは第4章の結果を一般的な状態にただちに拡張するものではないが、それに向けた重要な一步となる。さらに、本章では、局所的なハミルトニアンによって定義されるギブス状態が近似的なマルコフ鎖となることも証明され、このようなギブス状態を準備するための効率的なアルゴリズムを提案している。第6章は全体のまとめと結論にあてられている。

以上のように、本論文では量子多体系におけるトポロジカル秩序相を特徴づけるTEEについて、量子情報理論の観点から幾何学的小よび操作論的な意味を与えた。そのためには密度行列の量子マルコフ性を仮定しているが、これが近似的にしか成立しない場合の理論の拡張も論じた。これらの結果は、量子多体問題と量子情報理論の境界領域における重要な独創的な貢献である。なお、本論文はBrandao氏らとの共同研究に基づいているが、本人の寄与は主体的で十分であると認められる。よって、論文審査委員会は全員一致で博士(理学)の学位授与が適当であると結論した。