

学位論文

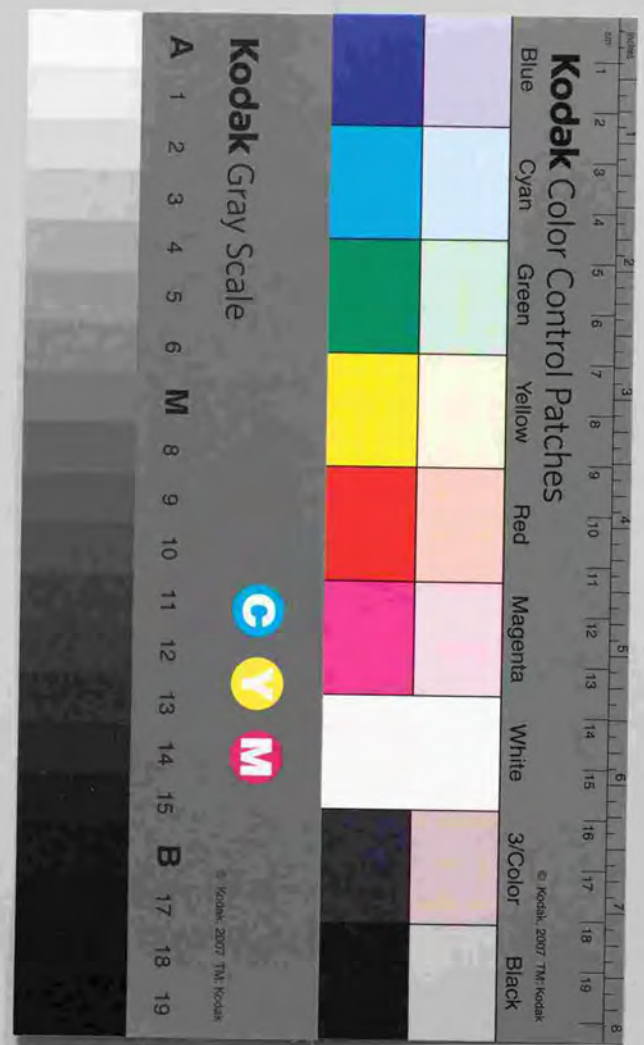
亀裂を含む媒質中の波動伝播の
理論的研究



平成6年4月 博士(理学)申請

東京大学 大学院 理学系研究科
地球物理学専攻

河原 純



①

亀裂を含む媒質中の波動伝播の
理論的研究

Theoretical Study on Wave Propagation
in Cracked Media

東京大学大学院理学系研究科 地球物理学専攻

河原 純

Jun Kawahara

学位論文 平成6年4月14日博士(理学)申請

D. Sc. Thesis, the University of Tokyo, 1994

要旨

地球の地殻は極めて不均質性に富んでいることが知られており、地殻を伝播する地震波に散乱を生じさせ、結果的に地震波の減衰や速度分散などを引き起こすと考えられている。本論文では、そのような不均質性の実体の候補の一つとして亀裂の空間分布を取り上げ、それによる弾性波の散乱を理論的に考察する。地殻が実際に多数の亀裂を含むことは周知の事実であるので、このような問題設定には十分な現実性がある。

亀裂を含む媒質中の波動伝播の問題は、これまで多数の研究者により理論的に扱われてきた。しかしながらそのほとんどは、数学的困難のゆえに何らかの意味で問題を単純化しており、得られた結果の応用範囲は限られたものであった。例えば、著者はその修士論文において、2次元亀裂分布モデルに基づいて散乱現象を解明した。同論文は、従来の研究で多用されてきた長波近似に基づかず、有限波長の弾性波の散乱を扱っている点に特色があるが、簡単のため1次散乱のみを考慮し、かつ亀裂が開口変位を生じないという特殊な境界条件を仮定している。理想的には(i)3次元モデルに基づき、(ii)より一般的な境界条件を扱い、かつ(iii)多重散乱の効果を考慮することが望ましいが、これらをすべて満足する有限波長散乱理論はまだ存在しない。本論文では、上記の3つの要請を個別に検討する。将来的にはすべての要請を満足する理論の構築が望まれるが、本論文はそのための足がかりを与えるものである。

本論文は3つの独立した部分から成る。そのいずれにおいても、一貫して亀裂の確率論的分布を仮定し、平均波の概念を導入することにより、亀裂分布領域を伝播する弾性波の減衰と位相速度を評価する。各亀裂の形状などはすべて同一であり、その空間分布はランダムかつ一様とする。分布密度は十分小さいと仮定し、高次の多重散乱の影響を無視する。

本論文の第1部では、著者の修士論文を拡張し、より一般的な境界条件を導入する。同修士論文で仮定した非開口の仮定は、亀裂が非圧縮性の間隙流体を含む場合に相当する。これに対し本論文では、現実の地殻亀裂の間隙流体の圧縮性を考慮する必要性が示唆される。さらに、対極的な場合として亀裂が間隙流体を含まない場合の結果を修士論文のものと比較することにより、流体の圧縮性が散乱に及ぼす影響の重要性が示される。前者の場合、入射角の大きいSV波が短波長領域で特異な振る舞いを示すことが明らかにされた。また有限の圧縮性間隙流体の場合も検討され、散乱の圧縮性依存性が調べられる。

第2部では、2次散乱の効果について検討する。今回、問題を2次元亀裂によるSH波散乱に限定した上で、有限波長領域において2次散乱の効果を評価することに初めて成功した。その結果は、長波近似に基づく過去の3次元散乱理論と定性的ながら調和的であることが示される。また、3次以上の高次散乱が無視できるための条件についても若干の考察を加える。そのような条件が満たされる範囲内では、2次散乱の効果は意外に小さく、従来の1次散乱理論が有効な近似であることが結果として明らかになった。

第3部では、従来の著者らの手法を3次元円形亀裂の場合に拡張する。2次元の場合と同様、問題を解くための鍵は、弾性波の入射によって孤立円形亀裂に生じる相対変位をいかにして評価するかであり、これまでさまざまな方法が提案されてきた。今回著者が新たに開発した数値計算法は、数学的な見通しのよさの点で従来の半解析的方法よりも優れており、超特異性の処理に関して有限部分の概念を導入した点に特色がある。その精度の高さは従来の方法との比較により確かめられる。さらに、この方法を亀裂群1次散乱理論に応用した例が示され、2次元亀裂に関する第1部の結果や、同じ円形亀裂を扱った過去の研究

と比較される。2次元の場合との相違は専ら減衰係数の長波極限での波数依存性に認められ、それを除けば高い類似性が成り立つことが示される。

目次

1 はじめに	1
2 モデルと定式化	5
2.1 亀裂分布モデル	5
2.2 場の定式化	5
2.2.1 基礎方程式	5
2.2.2 平均波に関する定式化	8
2.2.3 亀裂の希薄分布の仮定	9
2.3 座標系について	10
3 2次元亀裂分布・1次散乱モデル	13
3.1 修士論文のレビュー	13
3.2 境界条件についての再考	16
3.3 開口亀裂群による1次散乱	20
3.4 結果と考察	22
4 2次散乱の効果	33
4.1 剛体球近似	33
4.2 2次散乱項の評価	36
4.2.1 基礎方程式の解	36
4.2.2 相対変位の計算	41
4.3 結果と考察	42
5 3次元亀裂分布モデル	51
5.1 表現定理	51
5.2 場の Fourier 級数展開	55
5.3 数値計算法	57
5.3.1 境界条件の離散化	57
5.3.2 係数行列の評価	58
5.3.3 計算精度の検証	62
5.4 円形亀裂群による1次散乱	63
5.4.1 理論	63
5.4.2 結果と考察	67
6 おわりに	73

参考文献	75
A 多重散乱の評価に関するいくつかの方法論について	81
B 亀裂面上の境界条件について	83
B.1 剪断応力場に関する境界条件	83
B.2 法線応力場に関する境界条件	84
B.3 亀裂の形状の効果について	85
C 第4章の補遺	87
C.1 (4.13) - (4.15) 式の導出	87
C.2 (4.21), (4.22) 式の成立条件	87
C.3 (4.23) 式の導出	88
C.4 (4.38) 式の導出	88
C.5 (4.40) 式の証明	90
C.6 (4.42) 式中の諸量の計算	91
C.6.1 $\hat{F}_n _{C \rightarrow 1}$, および $[\partial \hat{F}_n / \partial C]_{C \rightarrow 1}$	91
C.6.2 $J_m^* _{C \rightarrow 1}$	92
C.6.3 $[\partial J_m^* / \partial C]_{C \rightarrow 1}$	92
D 第5章の補遺	95
D.1 入射応力場の Fourier 級数展開	95
D.2 超特異積分とその評価法について	96
D.3 Cauchy の主値の近似計算法	97
D.4 円筒座標形における Φ_2 の表現	98
E Lipschitz-Hankel 型積分	99
E.1 $I^0(n, n; 0)$	99
E.2 $I^0(n, n; 2)$	100
E.3 $I^0(n+1, n; -1)$	101
E.4 $I^0(n+1, n; 1)$	102
E.5 $b/\alpha \rightarrow 0$ および $a/b \rightarrow 0$ での漸近形	103
謝辞	105

Chapter 1

はじめに

地球の地殻は極めて不均質性に富んでいることが知られており、地殻を伝播する地震波に散乱を生じさせると予想される (Wu and Aki, 1988)。このような散乱は、地震波にまつわる種々の観測事実 (例えば、コーダ波の存在、直達波自体の減衰、S 波偏光異方性など) を説明づける有力なメカニズムと考えられている (Aki, 1969, 1980; Aki and Chouet, 1975; Sato, 1977, 1990; Crampin, 1987)。しかし、散乱の原因である地殻の不均質性の実体は必ずしも明らかではない。本論文では、そのような不均質性の実体の候補の一つとして亀裂の空間分布を取り上げる。地殻が実際に多数の亀裂を含むことは、例えば坑井内壁の直接観測などにより確かめられる (e.g., Kuwahara, *et al.*, 1991)。工学の分野では、防災や資源開発などの観点から地殻亀裂の研究が極めて重要な課題となっている (資源・素材学会, 1990, 1992)。それゆえ、亀裂群を取り扱うことには十分な現実性がある。

一般に、多数の亀裂群を含む媒質 (一般的には不均質な媒質) に弾性波の波束が入射すると、以下の現象が定性的に予想される (図 1.1)。まず、波束が領域内を伝播するにつれ、エネルギーの一部を散乱波の励起に消費されていくので、直達波の振幅が減衰するであろう。これは、媒質自体の非弾性による減衰とは本質的に異なる見かけ上の減衰であり、散乱減衰と呼ばれる。一方、各亀裂から生じた散乱波は、さらに複雑に散乱を繰り返しながら、直達波より遅れて様々な時刻に観測点に到達し、全体として位相の乱れた後続波、すなわちコーダ波を生成するであろう。このような波の存在は、非弾性の効果が無視できるならエネルギー保存則から直ちに保証される。また、亀裂の存在は媒質の巨視的な弾性定数を低下させ、実効的な波動伝播速度を減少させるであろう。もし、亀裂面の方向分布が全くの一律ではなく、何らかの方向性があるなら、媒質は全体として速度異方性を示す。これは S 波のスプリッティングの原因となり得る。なお、波動の減衰と伝播速度は一般に波長の関数であり、その関数形は互いに独立ではない。このことは因果律から直ちに要請される (Aki and Richards, 1980)。

亀裂による散乱問題を理論的に取り扱い、上述の諸現象を定量的に評価する努力は、これまで多くの研究者によりなされてきた。それらの論文において最もしばしば用いられてきた方法は、亀裂が確率的にランダムな空間分布をしているという仮定の下で、媒質内の波動伝播を周波数領域で確率論的に取り扱うものである (次章参照)。この方法はコーダ波の時間発展を扱えないという弱点があるものの、個々の亀裂による散乱の周波数特性を簡単に取り入れることができ、かつ多数の亀裂群を扱うのに適している (コーダ波を扱った研究に関するレビューとしては、例えば佐藤, 1991 を参照されたい)。この方法に基づいた研究は、大別して以下の 3 グループに分類することができるであろう。

1. 静力学的アプローチに基づくもの (e.g., Anderson *et al.*, 1974; O'Connell and Budiansky, 1974; Hoening, 1979; Yamamoto *et al.*, 1981; Nishizawa, 1982)。このグループは、静的な条件下で亀裂を含む媒質が巨視的に示す弾性定数の評価を目的とする。

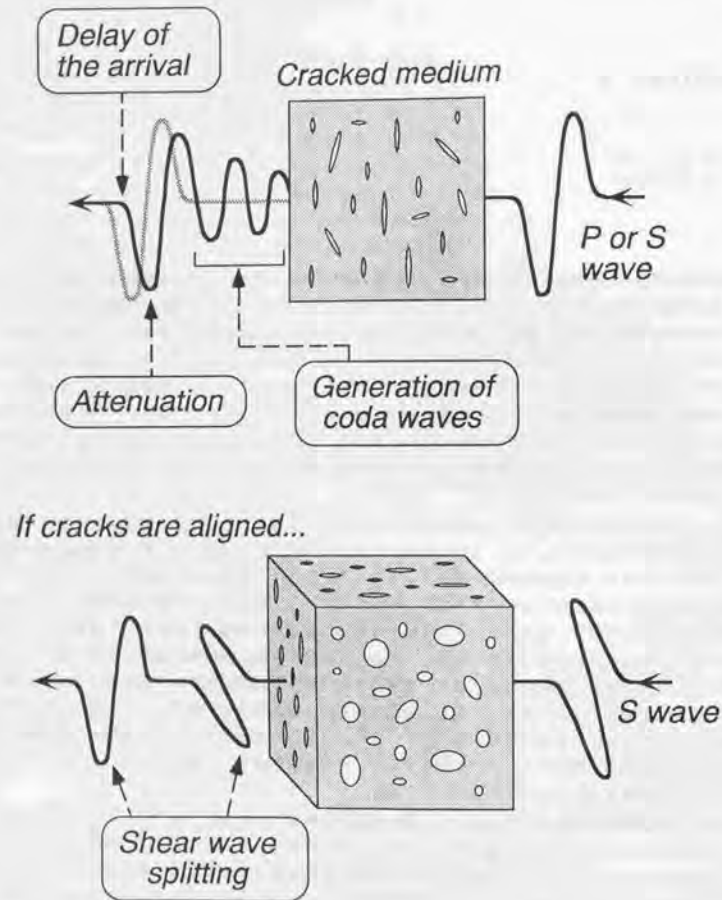


図 1.1 亀裂群による散乱に起因する諸現象の概要。一般に、亀裂分布領域を伝播した波束は波形を崩し、結果として直達波の到着の遅れと振幅の減衰、およびコーダ波の生成が観測される。特に、亀裂面の方向分布に方向性がある場合には速度異方性が生じ、S 波スプリットングの原因となる。

- 波動論的アプローチと長波近似を併用するもの (e.g., Garbin and Knopoff, 1973, 1975a, 1975b; Kuster and Toksöz, 1974a; Hudson 1980, 1981)。ここでは、亀裂群による入射弾性波の散乱を動力学的に解析し、長波極限 (波長 \gg 亀裂の大きさ) における媒質中の弾性波速度の評価を試みる。このグループに関しては、Hudson がそれ以前の研究を包括する理論を打ち立てた。
- 上と同じアプローチを有限波長にも適用し、速度分散と散乱減衰の評価をおこなうグループ (e.g., Kikuchi, 1981a, 1981b; Yamashita, 1990; 河原, 1990; Kawahara and Yamashita, 1992)。

これらのうち、1. と 2. は速度の計算に関して本質的に同じ結果を与える (Garbin and Knopoff, 1973, 1975a, 1975b; Douma, 1988) が、これは極めて当然なことである。しかし、Hudson の理論はその数学的簡明さ、および 2 次散乱の効果 (次節参照) を容易に取り込めることなどの点で従来の理論より優れていることから、S 波偏光異方性を説明するための Crampin (1984) の理論の基礎となっている。また、厳密に波数 = 0 を仮定する 1. のアプローチからは散乱減衰の概念が生じないのに対し、Hudson の理論からは減衰係数の波数 $\rightarrow 0$ での漸近形が導かれ、この点でも後者の方が理論としての汎用性に優れている。しかしながら、散乱減衰は本質的に有限波長の現象であり、一般に入射波長と散乱体が同程度のスケールのときに顕著になると予期される。それゆえ、これを深く理解するためには 2. の長波近似は決して適当でなく、かなり広範囲の波長にわたって散乱問題を扱うことが必要である。そのような試みは、これまで 3. のグループに属する研究者達によってなされてきた。しかし、著者の修士論文 (河原, 1990) を含め、そのほとんどが数学的困難のため 2 次元亀裂分布モデルを扱い、かつ 1 次散乱を扱うにとどまっている。散乱現象の全体的な理解のためには、3 次元亀裂分布による有限波長の弾性波の散乱を、多重散乱の効果を含めて解明することが望ましいが、そのような試みに成功した例は残念ながらまだない。

著者はかつて修士論文において、2 次元亀裂による SH 波の散乱を数理的に扱う優れた方法である Yamashita (1990) の方法を、P, SV 波の場合に拡張することに成功した。しかし同論文では 1 次散乱のみを考慮し、かつ簡単のため亀裂の開口変位が無視できると仮定したので、その応用範囲はかなり限られたものであった。これに対し本論文では、同修士論文の成果を基に、より一般的な亀裂面の境界条件を扱うとともに、2 次散乱の効果についても検討を加える。さらに、2 次元問題で成功を治めた著者らの方法を新たに 3 次元へ拡張することを試みる。本論文は、亀裂群による散乱の理論的理想像、すなわち 3 次元モデル・有限波長・多重散乱の 3 点をすべてクリアする理論を与えるものではないが、そのような目標への重要なステップとして位置づけられるであろう。

本論文は 3 つの部分から成る (第 3~5 章)。これらは基本的に独立性の高い内容ではあるが、上述のようにいずれも亀裂による散乱現象を明らかにするという共通の目標を持つものである。それらに先立ち、本論文で一貫して採用する亀裂分布モデル、波動場を決定する基礎方程式、および座標系の定義を次章で与える。場の定式化にあたっては、従来通り確率論的な取り扱いをおこない、平均波の概念を導入する。各亀裂の形状などはすべて同一であり、その空間分布はランダムかつ一様とする。分布密度は十分小さいと仮定し、高次の多重散乱の影響を無視する。

第 3 章は、著者の修士論文の補遺もしくは拡張に相当する。まず 3.1 節において同修士論文のレビューをおこなう。同論文では亀裂面上の境界条件として、亀裂の内部が粘性流体で満たされているというイメージに基づき、剪断変位に関しては粘性摩擦法則を仮定するとともに、上述のように開口変位は無視できるとした。3.2 節ではこのような仮定の有効性について再考する。地殻浅部にはアスペクト比がある程度大きい亀裂、すなわち開口亀裂が存在する可能性があるが、その場合には間隙流体の持つ圧縮性のため開口変位を無視できないであろう。3.3 節ではそのような場合を扱うことにより、著者の修士論文で構築した 2 次元亀裂群による 1 次散乱理論を境界条件に関して一般化する。SH 波の場合について確かめられた著者の数値計算法の精度の高さは、今回は P, SV 波の場合についても検討される。

一般に、亀裂分布が密になるにつれて多重散乱の効果が増大する。特に、分布密度がそれほど高くない場合には、2 次散乱の効果がとりわけ重要であると予想される。第 4 章ではこの問題を取り上げる。上

述のように、亀裂による多重散乱を扱った従来の研究は専ら長波極限のみを扱ってきた。これに対し、亀裂以外の散乱体、例えば楕円(体)形の内包物(inclusion)の分布モデルに関しては、Varadanらのグループ(Varadan *et al.*, 1978, 1985, 1989, etc.)が有限波長における多重散乱の評価を試みているが、彼らの方法は亀裂群を扱うには適さないことが指摘されている(Weaver and Pao, 1979)。本論文では、2次元亀裂・SH波入射という制約はあるものの、有限波長に対する2次散乱の効果を取り入れることに初めて成功した。今回得られた結果は、3次元亀裂分布モデルに関するHudson(1980)の理論によるものと比較され、定性的ながら調和的であることが示される。また、3次以上の高次散乱を無視できる亀裂分布密度の上限についても若干の考察を加える。

第5章は、いままでの手法を3次元の場合に拡張する。具体的にはHudson(1980, 1981)と同様、平行な円形(penny-shaped)亀裂群による散乱問題を扱う。2次元の場合と同様、問題を解くための鍵は、弾性波の入射によって孤立円形亀裂に生じる相対変位をいかにして評価するかにある。この問題はこれまで多くの研究者によって取り扱われ、さまざまな方法が提案されてきた(第5章冒頭参照)が、今回著者は新たな数値計算法を開発したので、それを紹介する。この方法は、これまで2次元亀裂に対して著者が用いていた方法の拡張に相当し、Martin and Wickham(1983)らと同様な半解析的方法に属するが、数学的な見通しのよさの点で従来のものより優れている。同方法の最大の特徴は、いわゆる超特異性(hypersingularity)の処理に関して有限部分の概念を導入した点にある。その精度の高さは従来の方法との比較により確かめられる。本章ではさらに、この方法を亀裂群による1次散乱理論に応用した例も示すとともに、2次元亀裂に関する第3章の結果、および同じ円形亀裂を扱った他の研究との比較も試みる。2次元の場合との相違は専ら減衰係数の長波極限での波数依存性に認められ、それを除けば高い類似性が成り立つことが示される。

Chapter 2

モデルと定式化

本章では、次章以降で採用する亀裂分布モデル、波動場を決定する基礎方程式、および座標系を定義する。散乱問題に関する従来の研究の多くと同様、場の定式化においては確率論的な立場から平均波の概念を導入する(Hudson, 1980, 1981; Kikuchi, 1981a, 1981b; Yamashita, 1990; Kawahara and Yamashita, 1992)。

2.1 亀裂分布モデル

本論文では、以下に述べるような亀裂分布モデルを一貫して仮定する(図2.1)。まず、亀裂はすべて同一の形と大きさを持ち、また互いに平行とする。具体的には、2次元の場合は長さ $2a$ のGriffith亀裂を、3次元の場合は直径 $2a$ の円形(penny-shaped)亀裂をそれぞれ仮定する。また、亀裂面上の境界条件もすべて同一と仮定する。このような亀裂が十分大きな領域に多数分布しているとし、分布はランダムかつ一様とする。ここで領域の体積(2次元の場合は面積)を V 、亀裂数を N とすると、亀裂分布の平均数密度 ν は

$$\nu = N/V$$

で定義される。このような領域の無限遠方から弾性波が入射したときに、領域内でどのような散乱のされ方をし、その結果としてどのような波動場が観測されるかを考える。

2.2 場の定式化

2.2.1 基礎方程式

いま、領域外部からの入射波を u^0 、内部で観測される波動場を u と表すことにする。これらの量はスカラーでもベクトルでもよい。このとき、ある観測点における u は、 u^0 および各亀裂で励起される散乱波の合計であり、以下のように書き表せる(図2.2)。

$$u_A = u_A^0 + \sum_{i=1}^N S_A^i u_i^E \quad (2.1)$$

ここで添え字 A は観測点の位置を、 i は i 番目の亀裂(以下、単に亀裂 i と略称)の位置を表している。また、式中の u_i^E は亀裂 i に入射する波動場の総計を表し、それにより励起される散乱波を $S_A^i u_i^E$ という記号で表す。ここで S_A^i は一種の演算子である。さらに、亀裂 i への実効入射波 u_i^E 自体も同様な表現が可能で

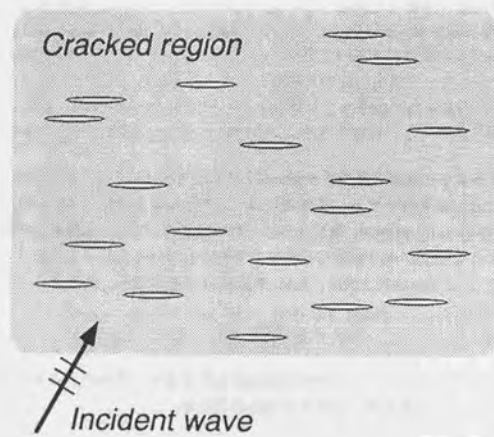


図 2.1. 亀裂分布モデル (2次元の場合)。形状・大きさ・方向ともすべて同一の亀裂がランダムかつ一様に空間分布すると仮定する。2次元の場合は Griffith 亀裂を、3次元の場合は円形 (penny-shaped) 亀裂をそれぞれ仮定する。

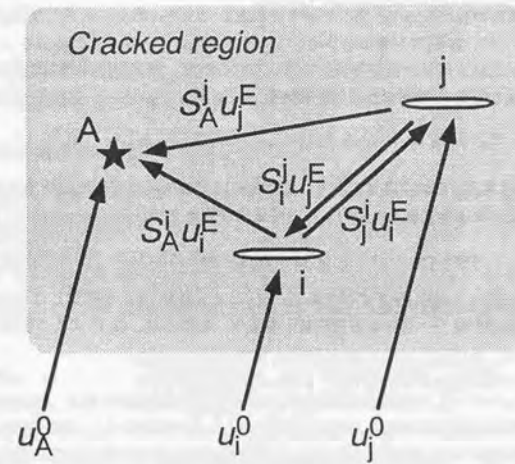


図 2.2. 亀裂による散乱の模式図。灰色の部分が亀裂分布領域を表す。同領域内部の点 A は観測点を、点 i , j はそれぞれ i および j 番目の亀裂の位置を表す。

あり、

$$u_i^E = u_i^0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S_{ij}^E u_j^E \quad (2.2)$$

となる。この場合は前式と異なり、級数項は亀裂 i 自身を除いてとらなければならない。(2.1) および (2.2) 式は、形式的ながら場の表現として閉じた形をしており、場を記述する基礎方程式系を構成する。

2.2.2 平均波に関する定式化

基礎方程式系 (2.1), (2.2) を解くための最も直接的な方法は、予め適当な亀裂分布を与えてやり、波動計算を厳密におこなうことであろう (e.g., Murai *et al.*, 1994; see also Benites *et al.*, 1992)。しかし、このような方法で一度に多数の亀裂を扱うことは、計算機の発達した現在においても高度に困難な問題である。ここではそのような決定論的な方法を放棄し、代わりに確率的な方法を採用する (Foldy, 1945; Lax, 1951; Twersky, 1964; Keller, 1964; Ishimaru, 1978)。すなわち、個々の亀裂の属性 (位置や形状、境界条件など) が何らかの確率密度関数に従って分布していると仮定した上で、観測される波動場の統計平均値 (または期待値) を考えることにする。

本研究では 2.1 節で述べたように単一種の亀裂を仮定しているので、確率密度関数は亀裂の位置のみに依存する。これを $p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ と表すと、 u の平均値 $\langle u \rangle$ は

$$\langle u_A \rangle = \int u_{AP}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N \quad (2.3)$$

で定義される。ただし \mathbf{r}_i は亀裂 i の位置座標であり、また積分区間は亀裂分布領域全体である。いま、 \mathbf{r}_i の従うべき確率密度関数を $p(\mathbf{r}_i)$ とすると、次のような関係式が成り立つ。

$$p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N) = p(\mathbf{r}_i) p(\text{avb } \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i).$$

ここで、avb \mathbf{r}_i は "all variables besides \mathbf{r}_i " の略であり、 $p(\text{avb } \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i)$ は、「 \mathbf{r}_i が確定したという条件下で、それ以外の全亀裂の位置座標が従うべき確率密度関数」を表す。このとき、(2.1) 式より次式が得られる。

$$\langle u_A \rangle = u_A^0 + \sum_{i=1}^N \int S_{Ai}^E \langle u_i^E \rangle_i p(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i. \quad (2.4)$$

ただし、

$$\langle u_i^E \rangle_i = \int u_i^E p(\text{avb } \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i) d(\text{avb } \mathbf{r}_i) \quad (2.5)$$

は、 \mathbf{r}_i が確定したという条件下での u_i^E の平均値を表す。同様に、「 \mathbf{r}_i が確定したという条件下で \mathbf{r}_j が従うべき確率密度関数」を $p(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)$ と表すと、(2.2) 式より、

$$\langle u_i^E \rangle_i = u_i^0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int S_{ij}^E \langle u_j^E \rangle_j p(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_j \quad (2.6)$$

が得られる。ここで、

$$\langle u_j^E \rangle_j = \int u_j^E p(\text{avb } \{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j\} | \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) d(\text{avb } \{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j\}) \quad (2.7)$$

は、 \mathbf{r}_i および \mathbf{r}_j が確定したという条件下での u_j^E の平均値を表す。

ここでさらに、すべての亀裂が統計的な意味において等価であると仮定しよう。

$$p(\mathbf{r}_i) = p(\mathbf{r}_j), \quad p(\mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j) = p(\mathbf{r}_k | \mathbf{r}_l) \quad \text{for all } i, j, k, l.$$

いまの場合は特に、亀裂の一様分布を仮定しているから (2.1 節)、

$$p(\mathbf{r}_i) = \nu/N = 1/V \quad (2.8)$$

である。このとき、(2.4), (2.6) 式中の散乱波の項は、すべての亀裂にわたって和をとる代わりに、特定の亀裂により代表させることができ、次に帰着する。

$$\langle u_A \rangle = u_A^0 + \nu \int S_{Ai}^E \langle u_i^E \rangle_i d\mathbf{r}_i, \quad (2.9)$$

$$\langle u_i^E \rangle_i = u_i^0 + \int S_{ij}^E \langle u_j^E \rangle_j \mu(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_j. \quad (2.10)$$

ここで、

$$\mu(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i) = (N-1)p(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i) \quad (2.11)$$

は「点 \mathbf{r}_i が亀裂 i によって占められている場合の、点 \mathbf{r}_j における亀裂の平均数密度」を表す。

(2.9) および (2.10) 式は平均波 $\langle u \rangle$ の満たす基礎方程式系を成すが、(2.1), (2.2) 式の場合と異なり表現形式としては閉じていない。なぜなら、(2.9) 式中の $\langle u_i^E \rangle_i$ の表現式である (2.10) 式に含まれる $\langle u_j^E \rangle_j$ がさらなる表現式を必要とするからである。しかもその表現式は明らかに $\langle u_k^E \rangle_{ijk}$ のような項を含み、その項もまた同様であるから、結局 $\langle u \rangle$ を完全に表現するためには N 個の方程式が必要となる。従って、実際に平均波 $\langle u \rangle$ を求めるためには何らかの新たな仮定が必要である。

2.2.3 亀裂の希薄分布の仮定

前述の基礎方程式系を解くためのおそらく最初の試みは Foldy (1945) に遡る。彼は、「ある亀裂への平均実効入射波は、その亀裂がその場所に存在しなかった場合に観測されるべき平均波に等しい」、すなわち

$$\langle u_i^E \rangle_i \approx \langle u_i \rangle \quad (2.12)$$

という近似を提案した。これを (2.9) 式に代入することにより、基礎方程式系は次のような積分方程式に帰着する。

$$\langle u_A \rangle = u_A^0 + \nu \int S_{Ai}^E \langle u_i \rangle d\mathbf{r}_i. \quad (2.13)$$

Foldy の近似 (2.12) は、亀裂 i の存在が周囲の亀裂に及ぼす影響とそのフィードバック、すなわち亀裂間相互作用の効果を考慮しないことを意味する。このような近似は、亀裂の数密度が非常に小さく、従って亀裂間距離が十分大きい場合にのみ有効と予想される。一方、Lax (1952) はより密な亀裂分布に対して「準結晶近似 (quasi-crystalline approximation)」

$$\langle u_j^E \rangle_j \approx \langle u_j^E \rangle_j \quad (2.14)$$

を提案した¹。この近似は Foldy の近似に比べ、2 次の相互作用 (2 個の亀裂間の相互作用) を考慮した形になっている。ここで (2.9), (2.10) 式から u^0 を消去した後、この近似を適用すると、次式が得られる。

$$\langle u_i^E \rangle_i = \langle u_i \rangle - \int S_{ij}^E \langle u_j^E \rangle_j [\nu - \mu(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)] d\mathbf{r}_j.$$

さらに、Foldy の近似 (2.12) を 1 次近似として同式を逐次近似すると、次のような近似式が得られる。

$$\langle u_i^E \rangle_i \approx \langle u_i \rangle - \int S_{ij}^E \langle u_j \rangle [\nu - \mu(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)] d\mathbf{r}_j. \quad (2.15)$$

¹ 散乱体がランダム分布ではなく結晶構造を成している場合には、ある 1 個の散乱体の位置が確定すれば残りの位置も確定するので、(2.14) 式は厳密に成り立つことになる。これが quasi-crystalline と呼ばれるゆえである (Lax, 1952)。

これを再び (2.9) 式に代入すれば、(2.13) 式に代わる積分方程式として

$$\langle u_A \rangle = u_A^0 + \nu \int S_A^i \langle u_i \rangle dr_i - \nu^2 \int S_A^i S_A^j \langle u_j \rangle [1 - g(r_j | r_i)] dr_i dr_j \quad (2.16)$$

が得られる。ただし、無次元量

$$g(r_j | r_i) = \mu(r_j | r_i) / \nu \quad (2.17)$$

は対相関関数 (pair-correlation function) (e.g., Varadan *et al.*, 1989) と呼ばれる。(2.16) 式の右辺第 3 項は 2 次の相互作用の効果を表しており、これを無視したものが (2.13) 式に他ならない。

これらの近似は、 $\langle \cdot \rangle_i$, $\langle \cdot \rangle_{ij}$, $\langle \cdot \rangle_{ijk}$, ... と続く基礎方程式系の階層構造を途中で打ち切るというやり方であるが、その物理的根拠は自明ではない。この問題は Keller (1964) により解決された。彼は、元の基礎方程式系 (2.1), (2.2) を

$$u_A = u_A^0 + \sum_{i=1}^N S_A^i u_i^0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N S_A^i S_A^j u_j^0 + \dots \quad (2.18)$$

と書き直した上で、右辺に関して

第 1 項 (入射波) > 第 2 項 (1 次散乱波) > 第 3 項 (2 次散乱波) > ...

という尤もな条件を仮定して散乱波を摂動として扱うことにより、独立に (2.16) 式を導くとともに以下のことを証明した (この方法の詳細については、平明な解説が Hudson, 1980 により与えられているので参照されたい)。

- Foldy の近似 (2.12) は、2 次以上の散乱 (すなわち多重散乱) の無視と等価である。
- Lax の準結晶近似 (2.14) は、3 次以上の散乱の無視と等価である。
- これらの近似に基づく (2.13) および (2.16) 式の解 $\langle u \rangle$ は、それぞれ ν および ν^2 の精度まで保証される。

それゆえ Lax の近似が有効なのは、 ν がある程度大きい (すなわち Foldy の近似が適用できない) が ν^2 は微量にとどまる場合であり、高度に密な亀裂分布には適用できない。なお、Lax の近似に関するこのような摂動論的解釈に対しては異論が存在する (Varadan *et al.*, 1985, 1989) が、これについては付録 A を参照されたい。

前章で述べたように、本研究では亀裂分布は十分希薄であるとし、Foldy または Lax の近似に基づく (2.13) または (2.16) 式を基礎方程式として採用する。なお、(2.16) 式を採用する場合には適当な $g(\cdot)$ の関数形を与えねばならないが、これについては第 4 章で検討する。

2.3 座標系について

本章を終わるに当たり、座標系を定義し、2.1 節で述べた亀裂分布モデルを数学的により明確にする。

2 次元の場合 (第 3 章・第 4 章) は、図 2.3a のように X_1, X_2 軸を定義し、 X_3 軸は紙面に関して表側に垂直にとるものとする。亀裂群は半無限領域

$$-\infty < X_1 < \infty, \quad X_2 > 0$$

の全域にわたって平均数密度 ν で無限個分布すると仮定する。これは 2.1 節において $\nu = N/V$ を一定値に保ちつつ $V, N \rightarrow \infty$ の極限をとることを意味する。また、亀裂面はすべて X_1 軸に平行とする。このよう

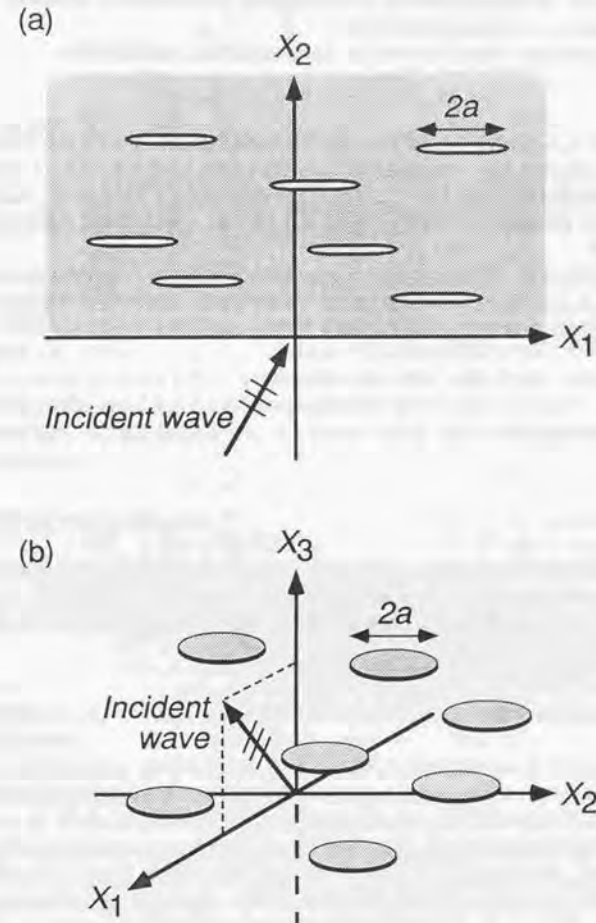


図 2.3. 座標系。(a) 2 次元の場合。 X_1 軸に平行な長さ $2a$ の Griffith 亀裂が半無限領域 $X_2 > 0$ に分布すると仮定し、無限下方からの入射波を考える。(b) 3 次元の場合。 $X_1 X_2$ 平面に平行な直径 $2a$ の円形亀裂が半無限領域 $X_3 > 0$ に分布すると仮定する。無限下方からの入射波は $X_1 X_3$ 平面に波線方向を持つと仮定する。

な領域の無限下方から、ある波数と入射角を持った単色平面波 (P, SV または SH 波) u^0 が入射するとき、領域内を伝わる平均波 $\langle u \rangle$ の減衰と分散を考える。

3次元の場合 (第5章) には、図 2.4b のように X_1, X_2, X_3 軸を定義し、亀裂分布領域は

$$-\infty < X_1 < \infty, \quad -\infty < X_2 < \infty, \quad X_3 > 0$$

で、亀裂面はすべて $X_1 X_2$ 平面に平行と仮定する。また 2次元の場合と同様、無限下方からの単色平面波 (P または S 波) の入射を考えるが、その波線方向は $X_1 X_3$ 平面内にあるものとする。なお、いまの場合入射 S 波は一般に任意の偏光角を持ち得るが、ここでは $X_1 X_3$ 平面内に偏光するものを SV 波、 $X_1 X_2$ 平面内に偏光するものを SH 波と定義し、この両者のみを考える。このとき、一般の S 波はこの両者の線形和で表現される。

上記のように座標をとると、SH 波の変位方向が 2次元の場合には X_3 軸方向、3次元では X_2 軸方向となり一貫性に欠ける。しかし、前者については修士論文との整合性を保ち、後者については後で円筒座標系を導入する際の便宜のため、敢えてこのままにする。

Chapter 3

2次元亀裂分布・1次散乱モデル

本章では 2次元亀裂分布モデルを仮定し、分布が非常に希薄である ($\nu a^2 \ll 1$) として (2.13) 式を基礎方程式として採用する。前章で述べたように、この場合は 2次以上の亀裂間相互作用、すなわち多重散乱を無視する場合に相当する。このようなテーマは著者の修士論文 (河原, 1990) でも扱ったが、その際亀裂の開口変位を便宜上無視した。これに対し本章では、亀裂が開口変位する場合をも含めた、より一般的な境界条件について扱い、修士論文の補遺とする。そこで本論に先立ち、まず 3.1 節において修士論文に関するレビューをおこなう。

3.1 修士論文のレビュー

著者の修士論文 (以下、単に修士論文と称) では、地殻内部において特に亀裂分布の発達している断層破砕帯に注目し、破砕帯内部における地震波の散乱に起因する減衰・分散、および破砕帯からの反射・透過波の振幅を評価した。その際、亀裂分布領域として図 2.3a のような半無限領域を考える代わりに、

$$-\infty < X_1 < \infty, \quad 0 < X_2 < L$$

なる帯状領域を仮定した。このとき、反射・透過波の振幅が明らかに L の関数であるのに対し、減衰・分散は L に依存しない。

一般に 2次元問題の場合、SH 波入射時には面外 (antiplane) 剪断変位のみ、P, SV 波入射時には面内 (inplane) 剪断変位と開口変位の両方が生じ得るので、前者はスカラー、後者はベクトル問題となり、互いに decouple する。SH 波入射の場合の亀裂面上の境界条件としては、剪断変位に対して Newton 型の粘性摩擦応力、すなわち変位速度に比例する抵抗力が働くと仮定した。これは亀裂の内部が粘性流体で満たされているというイメージに基づくものである (次節参照)。また P, SV 波入射の場合は、剪断変位に関しては前と同じ境界条件を仮定するとともに、簡単のため開口変位は生じないと仮定した。なおこの場合には、P-S 変換のため入射波によらず平均波は P, SV 波の両方が存在する。

減衰係数 Q^{-1} 、および媒質固有の (亀裂群がない場合の) P 波または S 波速度からの位相速度の遅れ Δv は、以下の手順で評価される。なお、反射・透過波については本研究の興味の対象外なので省略する。SH 波入射の場合、まず波数 k 、入射角 θ の入射波

$$u_A^0 = C_0 e^{ikX_1 \sin \theta + ikX_2 \cos \theta} \quad (3.1)$$

を与え、これに対し平均波の形を次のように仮定する。

$$\langle u_A \rangle = C_+ e^{ikX_1 \sin \theta + i(k \cos \theta + \kappa)X_2} + C_- e^{ikX_1 \sin \theta - i(k \cos \theta + \kappa)X_2} \quad (3.2)$$

ここで時間依存ファクター $\exp(-i\omega t)$ ($\omega = k\beta$; β は媒質の固有 S 波速度) は簡潔さのため省略した。次に、大域座標系 (X_1, X_2) における亀裂 i の中点の位置座標を $r_i = (p_1, p_2)$ とし、図 3.1 のように亀裂 i に固定された局所座標系 (x_1, x_2) を定義する。このとき、散乱波 $S_A^i < u_i >$ はいわゆる表現定理によって亀裂の相対剪断変位 Δu_i と結びつけられる (Achenbach, 1973; see also Yamashita, 1990)。

$$S_A^i < u_i > = -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-a}^a \Delta u_i(\xi_1, p_1, p_2) H_0^{(1)}(kR) d\xi_1. \quad (3.3)$$

ここで $R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2$ であり、また $H_0^{(1)}(\cdot)$ は第 1 種 Hankel 関数である ($\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\cdot)$ が Green 関数に相当する)。一方、境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x_2} < u_i > + \frac{\partial}{\partial x_2} S_A^i < u_i > = -i\sigma k \Delta u_i, \quad \sigma \geq 0, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0. \quad (3.4)$$

ここで無次元量 σ は粘性摩擦の比例係数であり、 $\sigma = 0$ で亀裂面は自由表面に帰着する。(3.2), (3.3) 式を (3.4) 式に代入すれば、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_{-a}^a D(\xi_1) H_0^{(1)}(kR) d\xi_1 \Big|_{x_2=0} + 4ie^{ikx_1 \sin \theta} = 4\sigma k D(x_1), \quad |x_1| < a \quad (3.5)$$

が得られる。ただし $D(\xi_1)$ は次式で定義される。

$$\Delta u_i(\xi_1, p_1, p_2) = iK_Y e^{ikp_1 \sin \theta} (C_+ e^{iK_Y p_2} - C_- e^{-iK_Y p_2}) D(\xi_1), \quad K_Y = k \cos \theta + \kappa. \quad (3.6)$$

ここで $D(\xi_1)$ は k の関数であるが、未知量 κ には依存せず、従って (3.5) 式を解くことにより一意に決定される。 $D(\xi_1)$ を既知とすれば、(3.1) - (3.3) および (3.6) 式を基礎方程式 (2.13) に代入して整理することにより、最終的に κ と C_{\pm} に関する方程式が得られる。これを解くと、 κ については

$$\kappa \simeq \frac{1}{2} \nu \Phi k \cos \theta \quad (3.7)$$

が得られる。ただし、

$$\Phi(k, \theta) = \int_{-a}^a D(\xi_1) e^{-ik\xi_1 \sin \theta} d\xi_1 \quad (3.8)$$

であり、 $\nu \Phi \sim O(\nu a^2) \ll 1$ を予め仮定して 2 次の微小量を無視した (C_{\pm} も同様にして求められるが、ここでは省略する)。このとき減衰係数 Q^{-1} および位相速度 v は次式により与えられる。

$$Q^{-1} = \frac{2\text{Im}\kappa}{k} \cos \theta = \nu \text{Im}\Phi \cos^2 \theta, \quad \frac{\beta - v}{\beta} = \frac{\text{Re}\kappa}{k} \cos \theta = \frac{1}{2} \nu \text{Re}\Phi \cos^2 \theta. \quad (3.9)$$

ここで、記号 'Re', 'Im' はそれぞれ複素数の実部と虚部を表す。残された問題は $D(\xi_1)$ を求めて $\Phi(k, \theta)$ を計算することであるが、ここでは Yamashita (1990) の方法を採用する。まず、(3.5) 式を以下のように離散化する。

$$\sum_{m=1}^{M-1} (H_{lm} - 4\sigma k \delta_{lm}) D_m = -4ie^{ikx_1 \sin \theta}, \quad l = 1, 2, \dots, M-1. \quad (3.10)$$

ここで δ_{lm} は Kronecker の δ 記号であり、また

$$s_m = -1 + m\Delta s, \quad \Delta s = 2/M, \quad D_m = \hat{D}(s_m).$$

かつ変数の頭の $\hat{\cdot}$ は a による規格化を意味する (e.g., $\hat{\xi}_1 = \xi_1/a$, $\hat{k} = ka$, etc.)。ここで行列要素 H_{lm} は、

$$H_{lm} = \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_2^2} \int_{s_m - \Delta s/2}^{s_l + \Delta s/2} H_0^{(1)}(\hat{k}R_l) d\hat{\xi}_1 \Big|_{\hat{x}_2=0}, \quad R_l^2 = (s_l - \hat{\xi}_1)^2 + \hat{x}_2^2 \quad (3.11)$$

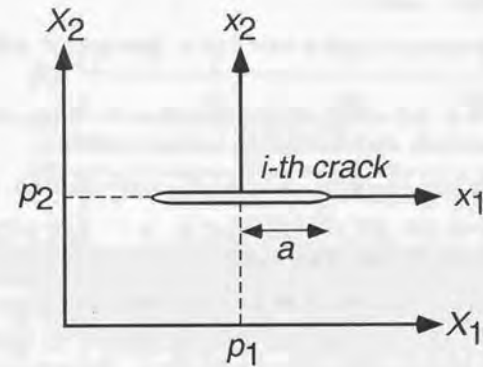


図 3.1. 大域座標系と局所座標系。局所座標系 (x_1, x_2) の原点は i 番目の亀裂 (長さ $2a$) の中点に一致し、その各座標軸の方向はそれぞれ大域座標系のもの (X_1, X_2) と一致する。

で定義され、対角成分と非対角成分に分けて計算される。すなわち、後者は微分と積分を交換して計算できるのに対し、前者は超特異性(付録 D.2 節参照)ゆえにそれが不可能である。その場合には、 $H_m^{(1)}(\cdot)$ を特異点の回りに Laurent 展開して微小項を切り捨てれば解析的に積分可能となる。 H_{lm} の具体形 (see 修士論文、付録 B; Kawahara and Yamashita, 1992, Appendix A) が与えられれば、(3.10) 式は数値的に容易に解ける。求められた D_m を用いて、 $\Phi(k, \theta)$ は

$$\Phi(k, \theta) = a^2 \Delta s \sum_{m=1}^{M-1} D_m e^{-i \tilde{\epsilon}_m \sin \theta} \quad (3.12)$$

で計算される。なお、P, SV 波入射の場合の計算方法も基本的に上と同様であるが、これについては次節以降に譲ることにする。

計算の結果、 Q^{-1} および位相速度の遅れ $\Delta v \equiv \beta - v$ について以下のことが示された(参考までに SH 波入射の場合を図 3.2 に示す)。

1. Q^{-1} および Δv は数密度 ν に比例する。
2. 一般に Q^{-1} はある(無次元化された)波数 ka でピークを持ち、低波数領域は k^2 、高波数領域では k^{-1} にほぼ比例する。
3. 一方 Δv は、対応する Q^{-1} のピーク波数と同程度の波数付近にコーナーを持ち、それを境にして低波数側ではほぼ一定値をとり、高波数側では波数とともに急速に 0 に漸近する。
4. これらのピーク波数およびコーナー波数は、 $\sigma=0$ の場合 $ka \sim 1$ のオーダーであり、 σ の増大とともに減少する。
5. Q^{-1} 、 Δv とも高波数領域に微小振幅の変動が見られる。
6. SH 波入射の場合、 Q^{-1} および Δv は $\theta=0^\circ$ で最大となり、 $\theta=90^\circ$ で 0 になる。

ここで 1. は Foldy の近似 (2.12) に固有の結果であり、厳密に成り立つ。2-4. は、自由表面の場合には入射 S 波波長が亀裂長の 2 倍程度のときに最も散乱の効果が大きいこと、および粘性摩擦が存在すると高周波の振動に対して亀裂の変位が抑制されることを示していると解釈される。5. は亀裂の相対変位に生じる一種の共鳴現象と見なされるべきものであり、様々な長さを持つ亀裂が分布する場合にはこのような微小変動は平滑化されることが知られている (Yamashita, 1990)。6. は入射 SH 波の変位方向を考えれば容易に理解できる。なお、P, SV 波については次節以降で取り上げるのでここでは省略した。

同修士論文の内容は投稿論文の形にまとめられた (Kawahara and Yamashita, 1992)。

3.2 境界条件についての再考

もし亀裂の間隙が単なる空洞であるなら、地殻浅部 (< 10km) は別として、一般には地殻内の高い封圧により押し潰されてしまうであろう (竹下・唐戸, 1989)。そうなれば亀裂面は固着を起し、不活性化してしまう。それゆえ実際の地殻亀裂は流体で満たされており、これにより面の固着が妨げられていると考えられている (金鶴, 1991)。水で満たされた亀裂の存在は地殻浅部では直接観測されており (e.g., Malin *et al.*, 1988)、また地殻深部においても地質学的見地から大量の水の存在が期待されるので (Fyfe *et al.*, 1978; 竹下・唐戸, 1989)、このような想定は十分現実的なものである。以上の理由に基づき、修士論文では流体で満たされた亀裂を想定し、前節で述べたような亀裂面上の境界条件を仮定した。本節では、そのような仮定についてもう少し詳細な検討を加える。

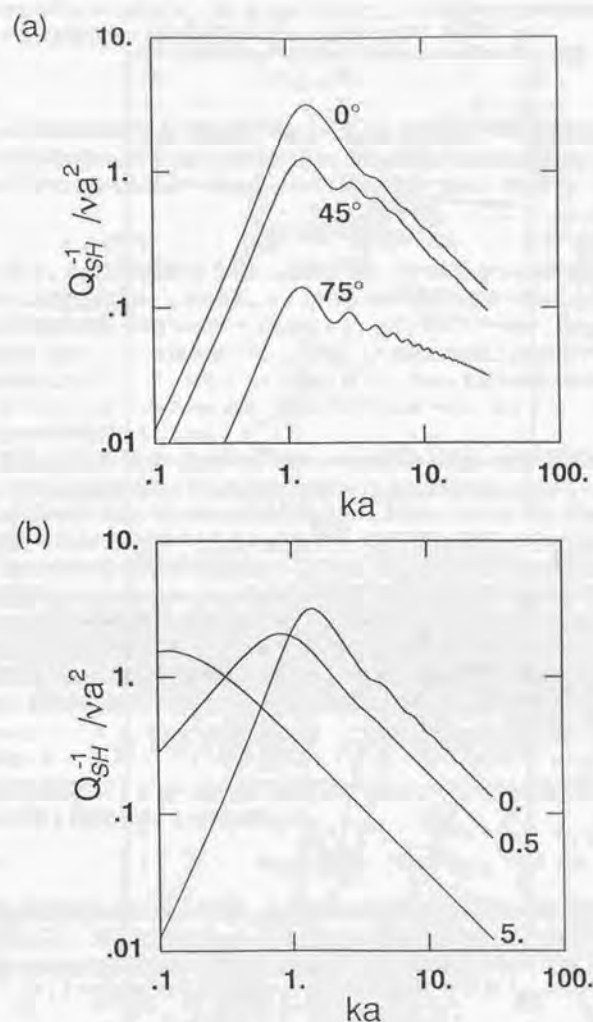


図 3.2. SH 波入射の場合の減衰係数 Q_{SH}^{-1} および位相速度の遅れ Δv_{SH} (Kawahara and Yamashita, 1992 より転載)。(a) Q_{SH}^{-1} の θ 依存性 ($\sigma=0$)。図中のパラメータは θ 値。(b) Q_{SH}^{-1} の σ 依存性 ($\theta=0^\circ$)。図中のパラメータは σ 値。(c) Δv_{SH} の θ 依存性 ($\sigma=0$)。図中のパラメータは θ 値。(d) Δv_{SH} の σ 依存性 ($\theta=0^\circ$)。図中のパラメータは σ 値。

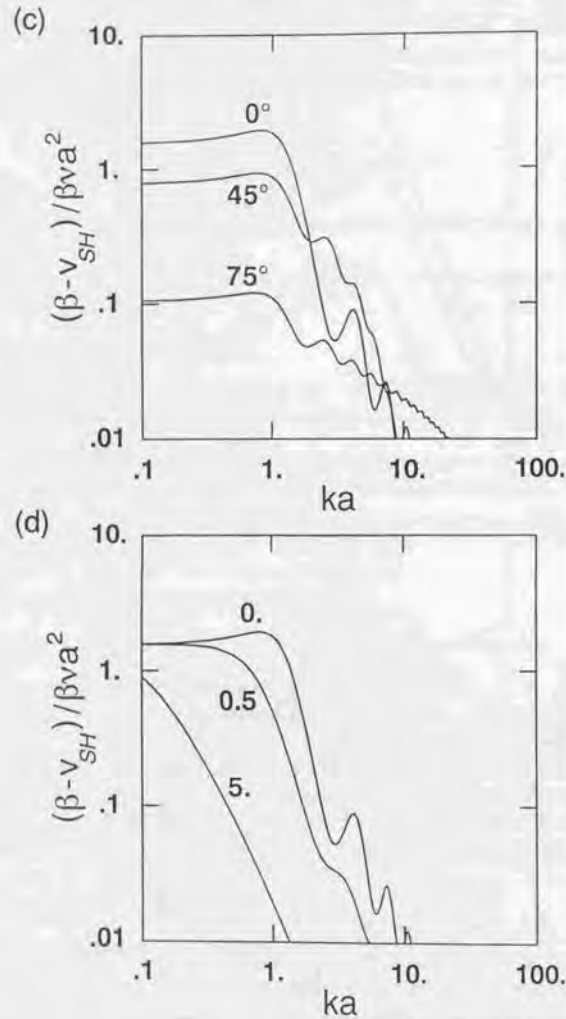


図 3.2. (続き)

いま、亀裂の間隙が一様な厚さ ε ($\ll a$) を持つと仮定し、そこを満たす流体の粘性率を η とすると、(3.4) 式中の粘性摩擦係数 σ は次式で与えられる (付録 B.1 節)。

$$\sigma = \frac{\beta\eta}{\mu\varepsilon}$$

ここで μ は媒質の剛性率である。修士論文では、 $\sigma = 0, 0.5, 5$ の場合について計算例を示した。しかし、そのような値の現実性は必ずしも自明ではない (菊地, 1992, 私信)。例として常温常圧下の水を考えると、 $\eta \approx 1 \times 10^{-3}$ Pa·s であるから、 $\beta \sim 4$ km/s, $\mu \sim 40$ GPa を仮定すると、

$$\sigma \sim 10^{-10} \text{ m} / \varepsilon$$

となる。ここで、 $\sigma > 0.1$ を仮定すると $\varepsilon < 1$ nm となるが、この値は分子レベルのスケールであり、地殻亀裂の値としては妥当でない。このことは、 $\sigma < 0.1$ では摩擦の効果が顕著でないことを考え合わせると、上記程度の粘性では散乱への寄与がほとんど無視できることを意味する。一般に、水の粘性は圧力とともに増大するが、温度については減少関数であり、結果として地殻深部の圧力温度条件下での水の粘性は上記の値と極度には違わないと思われる (Clark, 1966)。従って、流体の存在が実際に散乱に影響を及ぼすためには、単なる水ではなくもっと粘性の高いものを想定する必要がある。おそらく、ガウジと水の混合物のようなものならば適当かもしれない。

一方、粘性型の剪断摩擦法則を仮定すること自体への疑問もあり得る。現実の亀裂面は決して滑らかとは限らず、流体を含む亀裂であっても部分的には接触している可能性がある。そのような場合には、粘性摩擦よりも面の凹凸の接触による摩擦のほうが支配的かもしれない。しかしながら、現実の (特に地殻深部の) 亀裂の従う摩擦法則がどのようなものであるかについては不明な点が多い。従って上述の粘性型の摩擦法則は、流体の粘性の効果の直接の反映と考えるよりは、むしろより複雑な現実の摩擦法則の単純化された表現と見なすべきであろう (Kawahara and Yamashita, 1992)。実際、Yoshioka and Kikuchi (1993) は、乾燥した岩石資料の接触摩擦であっても、見かけ上粘性摩擦で近似可能な事例を報告しており、このような考え方には十分意味がある。ただしその場合にはパラメータ σ の物理的意味は必ずしも明確ではない。

亀裂間隙流体の粘性が剪断変位に影響を及ぼし得るのに対し、開口変位の場合は流体の圧縮性が問題になる。いま、間隙流体の体積弾性率を K とすると、法線応力の満たすべき境界条件は、

$$\tau_{22}^{inc} + \tau_{22}^{sc} = \gamma \mu a^{-1} [\Delta u_1]_2, \quad \gamma \geq 0, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0 \quad (3.13)$$

となる (付録 B.2 節)。ここで $\tau_{jk}^{inc}, \tau_{jk}^{sc}$ ($j, k = 1, 2$) はそれぞれ入射波と散乱波の応力場であり、記号 $[\cdot]_j$ はベクトルの第 j 成分を表す。また無次元量 γ は、

$$\gamma = \frac{Ka}{\mu\varepsilon} \quad (3.14)$$

で定義される弾性抵抗の比例係数である。修士論文では、地殻内部の高封圧下では亀裂のアスペクト比 (ε/a) は十分小さく、従って γ が十分大きく開口変位は無視できると仮定した (付録 (B.7) 式) が、このような仮定はどの程度有効であろうか。前と同様、常温常圧下の水を仮定すると、 $K \approx 2$ GPa であるから、

$$\gamma \sim 0.05 \frac{\varepsilon}{a}$$

となる。よって、例えば $0 < \varepsilon/a < 0.05$ を仮定すると γ は 1 以上となる。さらに、水の K 値は封圧とともに増加する傾向があるので、同じアスペクト比なら地殻深部ほど γ 値は大きくなる。それゆえ地殻深部の亀裂に関しては γ 値は十分大きく、従って修士論文の仮定は有効であると思われる。しかるに、地殻浅部ではこの仮定は必ずしも適当ではないかもしれない。なぜなら、そのような封圧の十分低い領域では比較的大きなアスペクト比を持つ亀裂が存在可能であり、従って γ が小さな値をとり得るからである。この

ような有限のアスペクト比を持つ開口亀裂 (open crack) ¹ の生成自体は特殊なことではない。例えば、剪断破壊の進展は一般には完全に面的ではなく、剪断亀裂面の周囲に2次元的開口亀裂群を生じることが知られている (Brace and Bombalakis, 1963; Cox and Scholz, 1988)。このような開口亀裂群の存在は断層形成の初期段階において重要な役割を果たすと考えられている (Cox and Scholz, 1988)。また、動的破壊に先行するダイラタンスー現象は、微小開口亀裂群の発生に伴う間隙率の増加として説明づけられる (Brace et al., 1966)。それゆえ、地殻浅部においては亀裂群の γ 値が比較的小さい可能性は十分にある。特に地殻のごく浅い領域では、亀裂が完全に流体で満たされていない場合もあるであろう。その場合には、亀裂内物質の実効的な K 値はさらに低下し、 $\gamma \sim 0$ もあり得るかもしれない。

以上の理由から、次節では P, SV 波の散乱問題における一般的な場合として、有限の γ 値の場合について検討する。境界条件は、法線応力に関する条件 (3.13) に加え、剪断応力に関しては (3.4) 式と同じ粘性摩擦法則

$$\tau_{12}^{bc} + \tau_{12}^{ca} = -i\sigma\mu k[\Delta u_1]_1, \quad \sigma \geq 0, \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0 \quad (3.15)$$

を仮定する。ただし σ 値の効果は修士論文により既に明らかなので、実際の解析に際しては $\sigma = 0$ の場合のみを扱うことにする。なお、SH 波入射の場合は γ の値と無関係なのでここでは取り上げない。

3.3 開口亀裂群による1次散乱

本節では、亀裂分布として改めて図 2.3a のような領域を仮定する。まず、入射波が波数 h 、入射角 ϕ の P 波

$$u_A^0 = A_0 e^{i(hX_1 \sin \phi + i h X_2 \cos \phi)} (\sin \phi, \cos \phi) \quad (3.16)$$

の場合を考える。これに対する平均波は以下のように仮定する。

$$\langle u_A \rangle = A e^{i(hX_1 \sin \phi + i(h \cos \phi + \kappa_P)X_2)} (\sin \phi, \cos \phi + \kappa_P/h). \quad (3.17)$$

勿論、この場合も P-S 変換に起因する SV 波が存在し得るが、十分遠方 ($X_2 \rightarrow \infty$) では無視できるのでここでは考えない。このとき、基礎方程式 (2.13) 式中の散乱波 $S_A^1 < u_A \rangle$ は (3.3) 式と同様にして、亀裂の相対変位 Δu_1 と Green 関数テンソルに対応する応力テンソルとの畳み込み積分の形で表現される (修士論文、(43) 式; Kawahara and Yamashita, 1992, (24) 式)。この表現定理を用い、3.1 節で述べた SH 波の場合と同様にして基礎方程式を解くと、最終的に A と κ_P が求められる。結果のみを以下に示す (ただし A は興味の対象外なので省略する)。

$$\kappa_P \approx \nu \Phi_1 f h \sin 2\phi \sin \phi + \nu \Phi_2 \frac{h}{2f \cos \phi} (1 - 2f \sin^2 \phi)^2. \quad (3.18)$$

ここで

$$\Phi_j(h, \phi) = \int_{-a}^a D_j(\xi_1) e^{-i h \xi_1 \sin \phi} d\xi_1, \quad j = 1, 2 \quad (3.19)$$

であり、また $f = \beta^2/\alpha^2$ で、 α は媒質の固有 P 波速度である。定数 f は Poisson 比 s と

$$2f = \frac{1-2s}{1-s}$$

の関係にあり、 $0 < s < 1/2$ に対応して $1/2 > f > 0$ が要請される。 $D_j(\xi_1)$ は 3.1 節の $D(\xi_1)$ と同様、規格化された相対変位の第 j 成分を表しており、境界条件 (3.13), (3.15) を解くことにより求められる。具体

¹Tensile crack ともいう。ここで言う「開口」は、入射波によって生じる開口変位 (opening displacement) のそれと混同してはならない。なお一部の論文 (e.g., Keogh, 1985; Budreck and Achenbach, 1988, etc.) では "crack opening displacement" という語を相対変位の意味で用いているので注意を要する。

的には、

$$\left. \begin{aligned} \int_{-a}^a D_1(\xi_1) T_{121}(x_1, 0 | \xi_1, 0) d\xi_1 - e^{i h x \sin \phi} &= i \sigma k D_1(\xi_1), \\ \int_{-a}^a D_2(\xi_1) T_{222}(x_1, 0 | \xi_1, 0) d\xi_1 - e^{i h x \sin \phi} &= -\gamma a^{-1} D_2(\xi_1) \end{aligned} \right\}, \quad |x_1| < a \quad (3.20)$$

であり、 T_{jkl} ($j, k, l = 1, 2$) の一般的な関数形は以下の通りである (Kawahara and Yamashita, Appendix B)。

$$\begin{aligned} T_{jkl}(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) &= T_{jkl}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) + \\ &+ \frac{i}{4} \left[\left(\delta_{jl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_2} + \delta_{k2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_1} + \delta_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_2} + \delta_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_1} \right) H_0^{(1)}(kR) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l \partial x_2} \left(H_0^{(1)}(hR) - H_0^{(1)}(kR) \right) \right], \\ T_{111}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) &= \frac{i}{2} (1-2f) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} H_0^{(1)}(hR) = \\ &= T_{122}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) = T_{212}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) = T_{221}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2), \\ T_{112}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) &= \frac{i}{4} \frac{1-2f}{f} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) H_0^{(1)}(hR), \\ T_{121}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) &= T_{211}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) = 0, \\ T_{222}^*(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) &= \frac{i}{4} f^{-1} \left[(1-2f)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (1-4f^2) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] H_0^{(1)}(hR). \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで $R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$ であり、また S 波波数 k は関係式

$$h\alpha = k\beta, \quad \text{or} \quad f = h^2/k^2 \quad (3.22)$$

を通じて定義される。なお、厳密に言えば (3.5) 式と同様、(3.21) 式中の微分演算子は (3.20) 式の積分記号の外側に置かれるべきであるが、簡単のため上記の表現を採用することにする。また、前節で述べたように、以下では $\sigma = 0$ を仮定する。解 (3.18) は散乱の効果が2つの成分から成ることを示している。すなわち、右辺第1項・第2項がそれぞれ亀裂の剪断・開口変位からの寄与を表しており、特に後者が無視できる場合 ($D_2 = \Phi_2 = 0$) には修士論文の (65a) 式 (または Kawahara and Yamashita の (30.1) 式) に帰着する。これは前述のように $\gamma \rightarrow \infty$ の場合に他ならない。

SV 波問題の場合には、入射波と平均波を以下のように仮定する。

$$u_A^0 = B_0 e^{i(kX_1 \sin \theta + i k X_2 \cos \theta)} (\cos \theta, -\sin \theta), \quad (3.23)$$

$$\langle u_A \rangle = B e^{i(kX_1 \sin \theta + i(k \cos \theta + \kappa_{SV})X_2)} (\cos \theta + \kappa_{SV}/k, -\sin \theta). \quad (3.24)$$

このとき、解は以下のようになる。

$$\kappa_{SV} \approx \nu \Phi_1 k \frac{\cos^2 2\theta}{2 \cos \theta} + \nu \Phi_2 k \sin 2\theta \sin \theta. \quad (3.25)$$

ただし、この場合の Φ_j は (3.19), (3.22) 式および Snell の法則

$$h \sin \phi = k \sin \theta \quad (3.26)$$

により定義されることになる。この結果もまた、右辺第2項を無視すると修士論文の結果に帰着する (同論文、(65b) 式; Kawahara and Yamashita, (30.2) 式)。なお、亀裂の帯状分布を仮定した修士論文では、簡単のため SV 波の入射角が臨界角

$$\theta_C = \sin^{-1} \sqrt{f}$$

を越す場合を考えなかったが、いまの場合は特に問題なく $\theta \geq \theta_c$ の場合を扱うことができる。

境界条件 (3.20) は、3.1 節で SH 波の場合に述べた Yamashita (1990) の方法を拡張することにより数値的に解くことができる。その概略については修士論文 (または Kawahara and Yamashita, 1990) を参照されたい。

3.4 結果と考察

亀裂分布領域を伝播する P, SV 波の減衰・分散は、(3.18) 式および (3.25) 式を (3.9) 式に代入することにより求められる。 Q^{-1} の値は以下の通りである。

$$\begin{aligned} Q_{\{SV\}}^{-1} &= Q_{\{SV\}}^{(1)-1} + Q_{\{SV\}}^{(2)-1}, \\ Q_P^{(1)-1} &= \nu \operatorname{Im} \Phi_1 f \sin^2 2\phi, \\ Q_P^{(2)-1} &= \nu \operatorname{Im} \Phi_2 f^{-1} (1 - 2f \sin^2 \phi)^2, \\ Q_{SV}^{(1)-1} &= \nu \operatorname{Im} \Phi_1 \cos^2 2\theta, \\ Q_{SV}^{(2)-1} &= \nu \operatorname{Im} \Phi_2 \sin^2 2\theta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで下付き添え字は波のモードを表す。これらの表式は以下のことを意味する。まず、 Q^{-1} を構成する成分 $Q^{(1)-1}$, $Q^{(2)-1}$ はそれぞれ亀裂の剪断・開口変位からの寄与を表している。特に、 $Q_P^{(1)-1}$ と $Q_{SV}^{(2)-1}$ は垂直入射時 ($\phi, \theta = 0^\circ$) および水平入射の極限 ($\phi, \theta \rightarrow 90^\circ$) で 0 になり、 $Q_{SV}^{(1)-1}$ は $\theta = 45^\circ$ で 0 になるが、これらのことは P, SV 波の振動方向の特徴から容易に理解される。また $Q_P^{(1)-1}$ は ϕ とともに単調減少するが、0 となるのは $f \rightarrow 1/2$ かつ $\phi \rightarrow 90^\circ$ の極限においてのみである。なお、 $Q_P^{(2)-1}$ は $f \rightarrow 0$ で一見発散するように思われるが、(3.19) - (3.21) 式より

$$T_{222}(\cdot) \propto f^{-1}, \quad \text{and hence } \Phi_2 \propto f$$

であるので、実際はそうではない。一方、位相速度の遅れ

$$\Delta v_{\{SV\}} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} - v_{\{SV\}} = \Delta v_{\{SV\}}^{(1)} + \Delta v_{\{SV\}}^{(2)}$$

については、(3.27) 式において単に

$$Q_P^{(j)-1} \Rightarrow \frac{\Delta v_P^{(j)}}{\alpha}, \quad Q_{SV}^{(j)-1} \Rightarrow \frac{\Delta v_{SV}^{(j)}}{\beta}, \quad \operatorname{Im} \Phi_j \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Phi_j$$

と置き換えるだけでよい。 Q^{-1} に関する上述の性質は、当然 Δv に関してもあてはまる。

以下、Poisson 固体 ($s = 1/4$, $f = 1/3$) を仮定する。修士論文が $\gamma \rightarrow \infty$ という極端な場合であったのに対し、ここではまず、もう一方の極端な場合である $\gamma = 0$ の場合についての結果を示そう。これにより、一般の γ 値の場合は両者の中間として理解することができる。図 3.3a は Q_P^{-1} の入射角依存性を示している。一般に Q_P^{-1} の値は ϕ とともに減少するが、成分 $Q_P^{(2)-1}$ からの寄与があるので $\phi \rightarrow 90^\circ$ でも 0 になることはない。また、そのピークの位置は ϕ にほとんどよらず $ka \approx 1.1$ (入射 P 波波長 $\approx 9.9a$ に相当²) である。 Q_P^{-1} の各成分のうちでは、 $Q_P^{(2)-1}$ が $Q_P^{(1)-1}$ よりも常に大きい。例として、 $Q_P^{(1)-1}$ が最大値に近い $\phi = 45^\circ$ の場合を図 3.3b に示すが、この場合でも全波数領域で $Q_P^{(2)-1}$ の方がはるかに大きい。ちなみに、修士論文で認められた高波数領域の漸近的關係 $Q^{-1} \propto k^{-1}$ は $Q_P^{(1)-1}$ および $Q_P^{(2)-1}$ の両方に認められる。一方、 Q_{SV}^{-1} の結果は図 3.4a に示す通りである。この場合も、ピークの位置は θ に対してそれほど敏感で

²この結果は修士論文の結果 (入射波長 \sim (亀裂長) $\times 2$) と矛盾するように見えるが、実はそうではない。5.4 節参照。

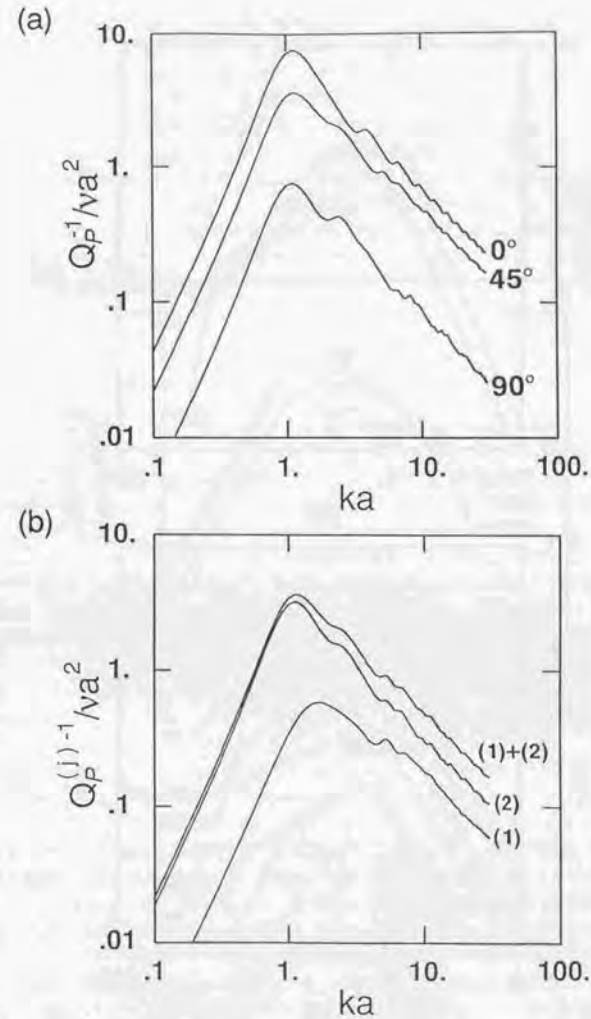


図 3.3. (a) Q_P^{-1} の ϕ 依存性。図中のパラメータは ϕ 値。ここで ' 90° ' は $\phi \rightarrow 90^\circ$ の極限を表す。(b) $\phi = 45^\circ$ の場合の Q_P^{-1} の各成分。記号 '(1)', '(2)' および '(1)+(2)' はそれぞれ $Q_P^{(1)-1}$, $Q_P^{(2)-1}$ および $Q_P^{-1} = Q_P^{(1)-1} + Q_P^{(2)-1}$ を表す。両図とも $\sigma = \gamma = 0$ を仮定。

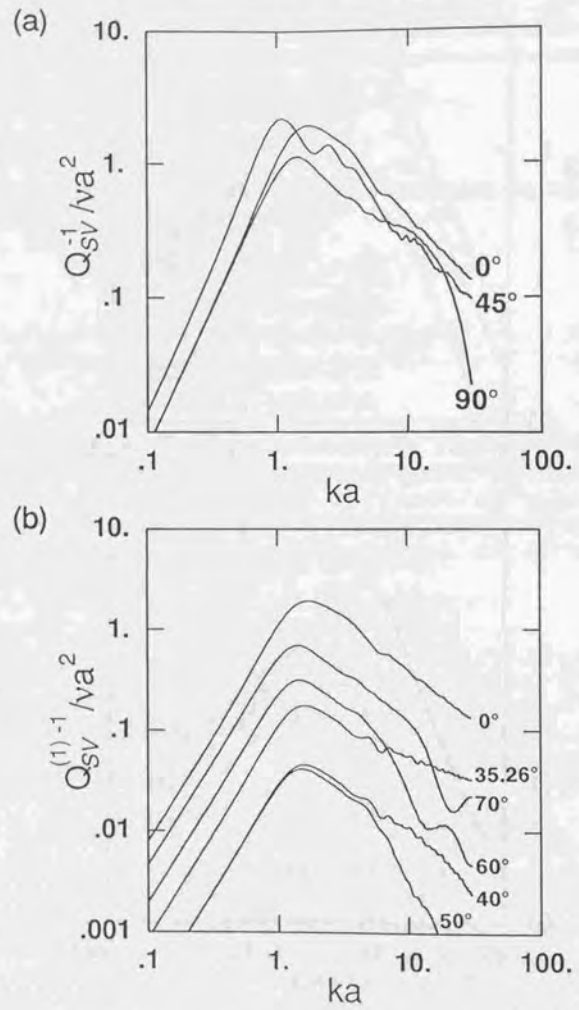


図 3.4. (a) Q_{SV}^{-1} , (b) $Q_{SV}^{(1)-1}$ および (c) $Q_{SV}^{(2)-1}$ の θ 依存性 ($\sigma = \gamma = 0$)。図中のパラメータは θ 値。ここで '90°' は $\theta \rightarrow 90^\circ$ の極限を表す。

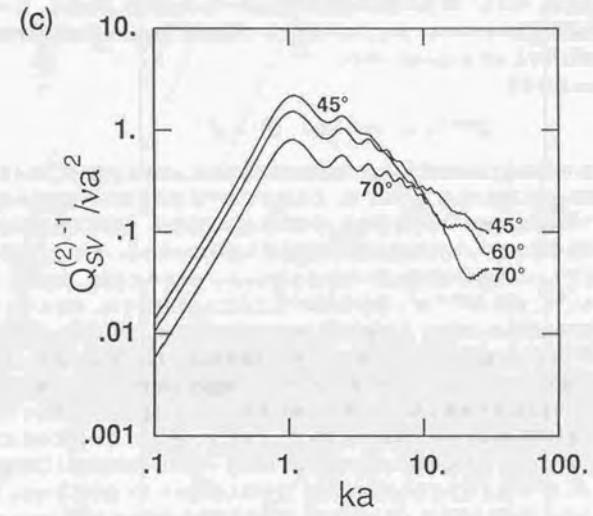


図 3.4. (続き)

はなく、 $1.1 < ka < 1.8$ (入射 S 波波長 $\approx 3.5a \sim 5.7a$) の範囲に収まる。 Q_{SV}^{-1} の値自体も θ にあまりよらないが、しかし各成分の値は決してそうではないことは既に述べたとおりであり、両者の θ 依存性は全く対照的である (図 3.4b, c)。また、P 波の場合と大きく異なる特徴として、高波数領域における漸近的關係 $Q^{-1} \propto k^{-1}$ からの逸脱が挙げられる。図 3.4b は Q_{SV}^{-1} の挙動を示しているが、同値は θ が十分小さいときには高波数領域で $Q^{-1} \propto k^{-1}$ をほぼ満たす。しかし、その傾きは θ が臨界角 $\theta_C = 35.26^\circ$ に近づくにつれて緩やかになり、 θ_C を越えると特異な蛇行を生じることがわかる。同様な性質は Q_{SV}^{-2} においても $\theta > 45^\circ$ の場合に認められる (図 3.4c)。これらの大振幅の変動は、P 波および SH 波の場合にも認められた微小振幅の変動と同様、3.1 節で述べた亀裂面上の共鳴現象として理解される。すなわち、入射波により亀裂両端から生じる回折波が互いに干渉し、特定の波長に対して共鳴を起こすため、(3.27) 式中の Φ_j 値が変動すると考えられる。ただし、SH 波の場合の変動が正弦波である (図 3.2) のに対し、P, SV 波の場合に不規則な変動や蛇行が見られるのは、後者では回折波として実体波と Rayleigh 波の両方が現れ、複雑な相互作用をするためと考えられる (Keogh, 1985)。

ところで、 $\gamma \rightarrow \infty$ の場合は

$$Q^{(2)-1} = 0, \text{ and hence } Q^{-1} = Q^{(1)-1}$$

であるから、図 3.3b の曲線 (1) および図 3.4b は、実は修士論文の結果 (同論文、図 12a, 13a; Kawahara and Yamashita, 1992, Figs. 7(a), 8(a)) と一致する。この場合の Q^{-1} は (3.27) 式からも明らかのように、 $\gamma = 0$ の場合の Q^{-1} とは非常に異なった性質を持つ。すなわち Q_P^{-1} の場合は、任意の入射角に対して前者が後者よりかなり大きな値をとり、特に後者は垂直および水平入射時に 0 となる。また Q_{SV}^{-1} の場合は、前者が入射角依存性に乏しいのに対して後者は強い依存性を示し、 $\theta = 45^\circ$ で 0 になる。任意の γ 値の場合の Q^{-1} の挙動に関しては、成分 $Q^{(2)-1}$ の γ 依存性を調べることでより理解できる。例として、P 波垂直時の $Q^{(2)-1}$ の γ 依存性を図 3.5a に示す。この場合は、開口変位しか生じないので $Q^{-1} = Q^{(2)-1}$ である。これによれば、 $Q^{(2)-1}$ の値は一般に γ とともに減少し、特に低波数領域でそれが顕著である。また、ピーク位置は γ とともに増大するが、このことは 3.1 節で述べた σ の効果とは逆センスであり興味深い。これらのことは、 $ka > 1$ では入射波の波長が短いほど亀裂の相対変位が小さくなることを反映していると解釈される (修士論文、図 5; Kawahara and Yamashita, Fig. 3)。すなわち、変位が小さければそれに比例する抵抗力も小さいで、それだけ γ の影響を受けにくい。なお、任意の γ に対して低波数および高波数領域でそれぞれ $Q^{(2)-1} \propto k^2$, k^{-1} が成り立つことも確認された。任意の入射角の P, SV 波の場合には、上記成分に $Q^{(1)-1}$ を加えたものが Q^{-1} 値となるが、多くの場合に $Q^{(2)-1}$ の寄与が卓越するので、やはり γ 値の影響は大きい。ここでさらに $\sigma > 0$ をも許すなら、パラメータの組み合わせによっては 2 つのピークを持つような複雑な場合もあり得るであろう。

ここまではもっぱら減衰係数について述べてきたが、同様なことが位相速度の遅れについても言える (図 3.5b, 3.6)。ある波数付近を境にして、低波数側では Δv がほぼ一定値をとり、高波数側で波数とともに 0 に漸近するという一般的特徴は常に成り立つ³。その点を別とすれば、 Δv の入射角および γ への依存性は Q^{-1} の場合と極めて類似的である。また、上述のように Q_{SV}^{-1} が蛇行を示す場合には、それに対応して Δv_{SV} の 0 への収束が遅くなるという現象が見られる (図 3.6b)。

以上をまとめると、亀裂群による P, SV 波の散乱は、亀裂面上の剪断摩擦法則のみならず亀裂間隙流体の圧縮性にも強く影響される。特に、非常に圧縮性が高く亀裂面が自由表面と見せる場合 ($\gamma = 0$) と、修士論文で扱った開口変位が無視できる場合 ($\gamma \rightarrow \infty$) とでは非常に異なった結果が得られることが示された。よって、散乱現象の観測結果の正しい解釈のためには、亀裂面上の境界条件についての詳細な情報が必要であると言える。また、入射角の大きい SV 波の高波数領域域での特異な挙動は、今回初めて明らかにされたものであり、興味深い現象である。

³ 小さな入射角に対して Δv の高波数領域に見られる鋭いピークは、実際は図 3.3 に見られるような微小変動が対数スケール表示によって誇張されたものに通さない。

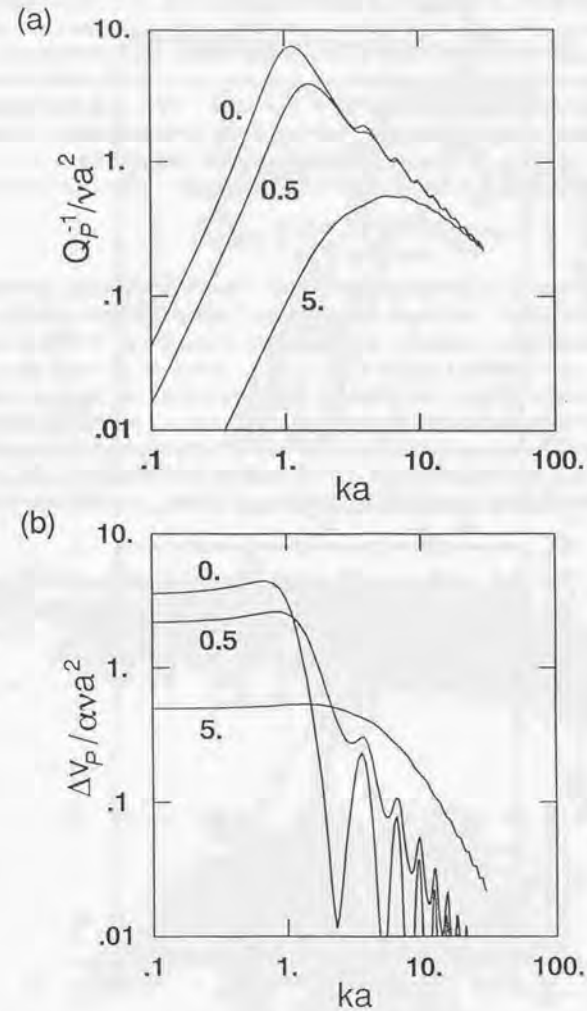


図 3.5. $\phi = 0^\circ$ の場合の (a) Q_P^{-1} ($\equiv Q_P^{(2)-1}$) および (b) Δv_P ($\equiv \Delta v_P^{(2)}$) の γ 依存性。図中のパラメータは γ 値。

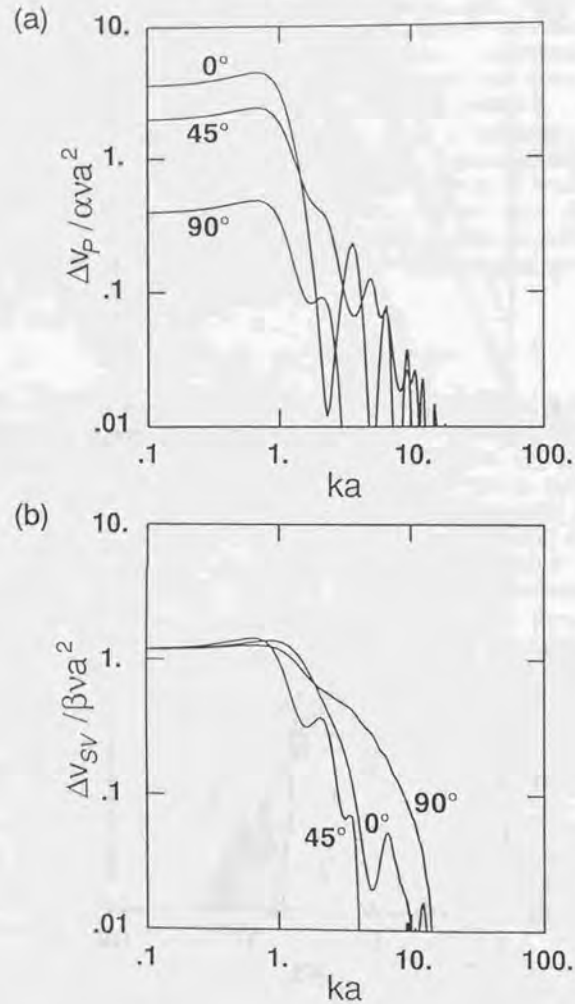


図 3.6. (a) Δv_P の ϕ 依存性。図中のパラメータは ϕ 値。(b) Δv_{SV} の θ 依存性。図中のパラメータは θ 値。両図とも $\sigma = \gamma = 0$ を仮定。

本章を終るにあたって、今回の結果を他の研究者のものと比較しよう。SH 波の場合については既に Kawahara and Yamashita (1992) で検討済みであり、著者の求めた Q_{SH}^{-1} が Weaver and Pao (1979) の研究結果と非常に調和的であり、Kikuchi (1981a) のものとは若干合わないことが指摘されている。ここでは、Kikuchi (1981b) および van der Hijden and Neerhoff (1984) の結果との比較について示す。両者はともに自由境界条件を仮定しており、前者は P, SV および SH 波の垂直入射時の分散と減衰を $ka \sim 4$ 程度まで計算したが、亀裂の相対変位の計算においてデカルト座標系の代わりに楕円座標系を導入する点に特徴がある。一方、後者は相対変位を Chebyshev 多項式展開することにより、入射 P, SV 波に対する散乱断面積を計算しているが、Foldy (1945) の近似 (2.12) 下では散乱断面積 S と Q^{-1} の間には

$$\nu S = \begin{cases} hQ^{-1} & \text{for P waves,} \\ kQ^{-1} & \text{for S waves} \end{cases} \quad (3.28)$$

なる関係があることが知られているので、著者の結果と直接比較可能である (Ishimaru, 1978; Hudson, 1981; 5.4 節参照)。Poisson 固体に関する Kikuchi の結果と著者のそれとの比較を図 3.7 に示す。両者は P 波の場合には若干の不一致が見られるものの調和的である。これに対し SV 波の場合には大きく食い違う。一方、van der Hijden and Neerhoff が $s = 1/3$ ($f = 1/4$) を仮定して求めた S_P および S_{SV} を図 3.8a, b に、同じものを (3.28) 式を用いて著者の方法で再現したものを図 3.8c, d に示す。両者はすべての入射角にわたって高度に調和的である⁴。これらの結果に加え、著者らの計算法の精度は亀裂の相対変位を計算した Mal (1970b) の結果との照合によってもチェックされていること (Yamashita, 1990; 修士論文; Kawahara and Yamashita, 1992)、および SH 波の場合においても Kikuchi の結果が著者のものと完全には合わないことなどを考え併せるなら、おそらく Kikuchi の数値計算に誤差があるものと推測される。

本章の内容の一部は投稿論文の形にまとめられた (Kawahara, 1992)。特に、図 3.3, 3.4 および 3.6 は左記の論文から転載されたものである。

⁴Tan (1977) も独自の方法で同じ問題を扱っているが、彼が求めた S_P は van der Hijden and Neerhoff のものと一致しない。彼らはその原因を Tan の誤りに帰しているが、今回の我々の結果はこれを確認するものでもある。

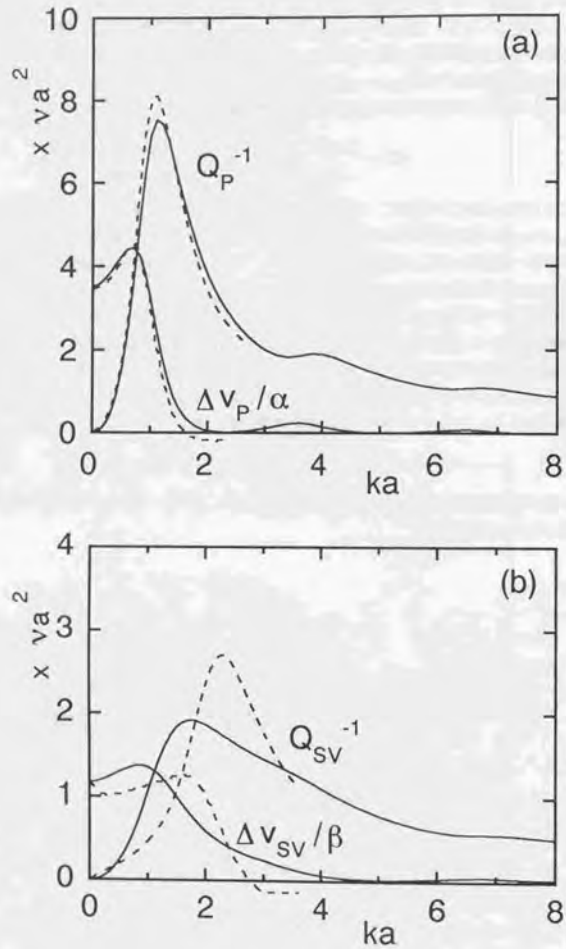


図 3.7. P または SV 波垂直入射時の Q^{-1} および Δv ($\sigma = \gamma = 0$)。直線は本研究により、また破線は Kikuchi (1981b) の Figs. 1, 2 から読みとられたもの。(a) P 波入射の場合。(b) SV 波入射の場合。

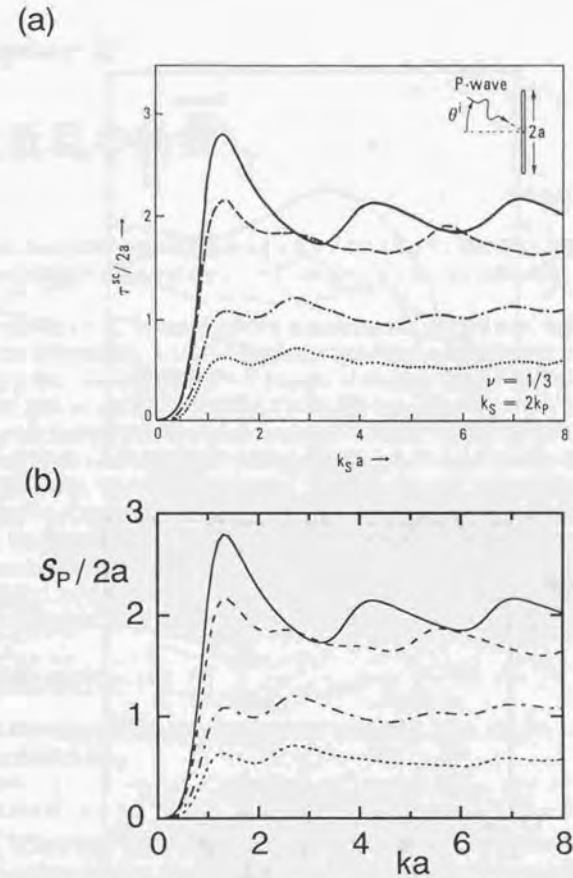


図 3.8. 散乱断面積の方位角依存性 ($\sigma = \gamma = 0$)。ただし本図に限り Poisson 固体の代わりに $s = 1/3$ ($f = 1/4$) を仮定する。直線、破線、一点鎖線および点線はそれぞれ ϕ (または θ) = 0° , 30° , 60° , および 90° の場合に対応する。(a) と (b) は S_P の、(c) と (d) は S_{SV} を示したもの。(a) と (c) は van der Hijden and Neerhoff (1984) による計算値 (同論文より転載)。図中の記号 r^{sc} , k_S , k_P , ν はそれぞれ S , k , h , s に対応する。(b) と (d) はそれらに対応する本研究による結果。

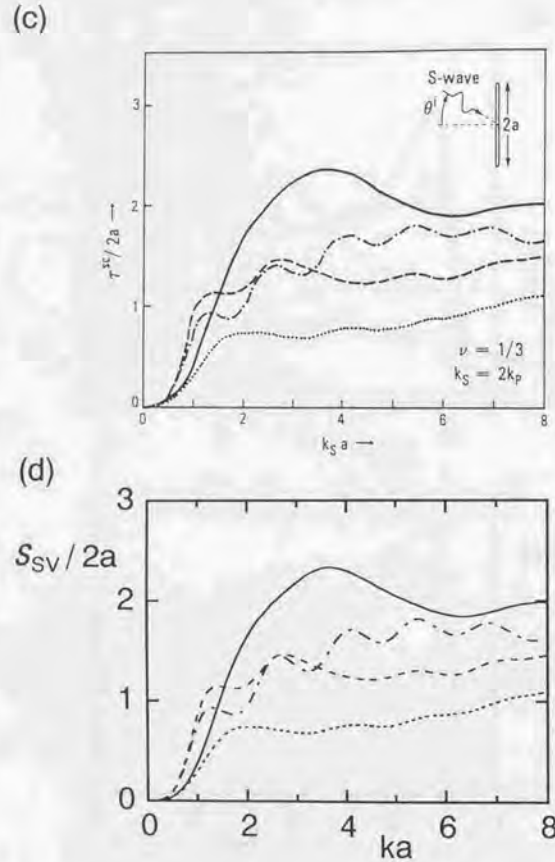


図 3.8. (続き)

Chapter 4

2次散乱の効果

本章では、Lax (1952) の準結晶近似 (2.14) を仮定することにより、比較的密な亀裂分布の場合に2次散乱の効果がある程度であることを検討する。ただし簡単のため2次元SH問題に限定し、亀裂面上は自由表面とする。

第1章で述べたように、3次元亀裂群に関する Hudson (1980) の理論を含め、亀裂群による2次散乱の研究のほとんどが静的極限、もしくは長波近似に基づくものであった。有限波長において多重散乱を取り扱った例としては、Varadan らのグループ (Varadan *et al.*, 1978; Varadan and Varadan, 1979; Varadan *et al.*, 1985, 1989, etc.) によるものが知られているに過ぎない。彼らは、いわゆる T-matrix 法を用いて2次元楕円や3次元楕円体などの形の内包物 (inclusion) の分布モデルを扱っている。しかし、彼らの方法では内包物のアスペクト比が非常に小さくなると数値不安定を起こすことが Weaver and Pao (1979) により指摘されているので、亀裂を扱うには適さない。Weaver and Pao はこの困難を回避するための T-matrix 法の改善策についても議論し、2次元亀裂分布による1次散乱に関して実際に成功を納めている (前章末尾参照) が、その後の展開はないように見える。それゆえ、亀裂群による有限波長の弾性波の多重散乱を扱った研究は本論文がおそらく最初である。

基礎方程式 (2.16) を解くに先立ち、2.2.3 節で述べたように対相関関数 $g(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i)$ を適当に与える必要がある。ここでは次節に述べる「剛体球近似」を仮定することにする。

4.1 剛体球近似

まず、2.2 節に戻って関数 $g(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i)$ の物理的意味について考える。(2.8), (2.11) および (2.17) 式より、 $g(\cdot)$ は以下のように表される。

$$g(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i) = \frac{N-1}{N} \frac{p(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i)}{p(\mathbf{r}_j)} \approx \frac{p(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i)}{p(\mathbf{r}_j)} \quad \text{as } N \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

すなわち、点 \mathbf{r}_j に亀裂が存在する確率を考えると、他の亀裂の位置が全く未知な場合の確率 $p(\mathbf{r}_j)$ に比べて、点 \mathbf{r}_i に亀裂が存在することが既知な場合の確率 $p(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i)$ がどれだけ異なるかを表したものが $g(\cdot)$ に他ならない。それゆえ、 $g(\cdot)$ は少なくとも次の2条件を満たさねばならない。

- $g(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i) \rightarrow 0$ as $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \rightarrow 0$, i.e., 同じ点に複数の亀裂は存在できない。
- $g(\mathbf{r}_j|\mathbf{r}_i) \rightarrow 1$ as $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \rightarrow \infty$, i.e., 十分離れた亀裂は互いに影響を及ぼし合わない。

しかしながら、現実の地殻亀裂群に関して $g(\cdot)$ が具体的にどのようなものであるかは、おそらくほとんど知られていない。それゆえ計算に際しては、 $g(\cdot)$ の関数形はある程度恣意的に与えざるを得ない。ここでは計算の便宜上、以下に述べるような近似に基づいて $g(\cdot)$ の関数形を選択する。

まず、亀裂を包絡する半径 a の円の内部をその亀裂の「縄張り」と考え、各亀裂は互いの縄張りを侵さないという仮定を導入する (cf. Varadan et al., 1985, 1989)。あるいは、長さ $2a$ の亀裂の分布を半径 a の硬い球 (2次元の場合は円柱) の分布で置き換えたと考えても良い。このとき、亀裂の排除領域の半径は $2a$ となり (図 4.1)、

$$g(r_j|r_i) = 0 \quad \text{for } 0 < |r_i - r_j| < 2a$$

となる。ここでさらに、 $g(\cdot)$ には方向依存性がないものとし、

$$g(r_j|r_i) = g(x), \quad x = \frac{|r_i - r_j|}{2a}$$

と置き直すなら、上述の近似は次式に帰着する。

$$g(x) = 0 \quad \text{for } x < 1. \quad (4.2)$$

このようないわば「剛体球近似」の妥当性は定かではないが、2次散乱の効果を定性的に議論する分には有効であろう。よく知られているように、広域応力場の中に亀裂が存在すると、その近傍では局所的な応力の集中または緩和が生じるが、上で仮定した亀裂の「縄張り」の大部分は応力緩和領域に対応する。従って、広域応力場の下で応力腐食などのメカニズムによって亀裂が発生・増加するようなモデル (e.g., Yamashita and Knopoff, 1987) を考えるなら、そのような領域では新たな亀裂の発生が起きにくいと考えることは不自然ではない (Yamashita and Knopoff, 1992)。

ところで、剛体球分布の従うべき $g(x)$ は、これまで多くの物理学者達により解析的、数値的あるいは実験的に検討されてきた (Varadan et al., 1989)。球分布が一様かつランダムなら (すなわち実在気体における分子間力のような相関力は一切働かないとすると)、直感的には、

$$g(x) = 1 \quad \text{for } x > 1 \quad (4.3)$$

と予想されるかも知れないが、実際はそうではない。なぜなら、上式が厳密に成り立つのはたった2個の球が存在する場合に過ぎず、実際にはそれ以外の球の存在が陰に影響するからである。一般的に言えば、球分布の体積含有率を c とすると、 $x > 1$ に対する $g(x)$ は次のような形で表される (ちなみに最密充填時の c の値は、2次元の場合は $\pi/2\sqrt{3} \approx 0.907$, 3次元の場合は $\sqrt{2}\pi/6 \approx 0.741$ である)。

$$g(x) = 1 + G(c, x), \quad G \sim O(c), \quad G \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

それゆえ、 c が十分小さい場合には (4.3) 式が成り立つ。本章で採用する Lax の近似 (2.14) の有効範囲は $c \approx 0.1$ 程度以下と予想されるので (4.3 節、および付録 A 参照)、(4.3) 式は十分有効と思われる。なお Hudson (1980) によれば、亀裂の相間距離に比べて入射波長が十分に大きい場合には g の微細構造は重要ではなく、 $x \rightarrow 0, \infty$ で $g \rightarrow 0, 1$ であることのみが意味を持つ。

以下では、亀裂分布の従う $g(x)$ の関数形として (4.2) 式および (4.3) 式を仮定する。このとき、分布の数密度 ν と上述の c の間には、

$$c = \pi\nu a^2 \quad (4.4)$$

という関係が成り立つ。この場合、無次元量 c は亀裂の実効体積含有率 (effective spherical concentration¹) と呼ぶべきものであるが、以下では混乱の恐れのない限り単に含有率と呼ぶことにする。

¹ この用語は Varadan et al. (1989) による。これに対し Crampin (1984) らが用いる「亀裂密度 (crack density)」 $\epsilon = \nu a^3$ は、2次元問題の場合には νa^2 で定義されるべきであろう。物理的イメージは c の方が明確なので、本章ではこちらを用いることにする。

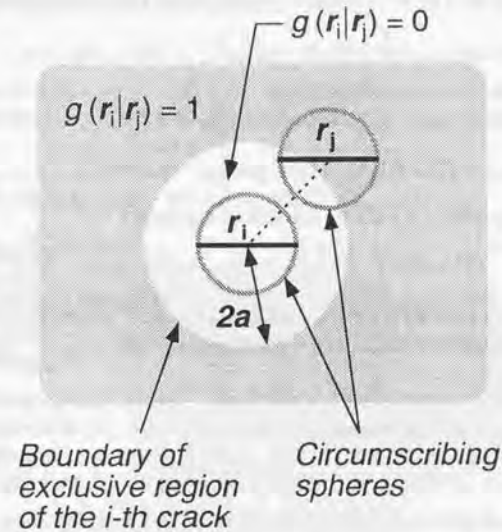


図 4.1. 剛体球近似の模式図。亀裂 (黒の太線) の包絡円 (濃い灰色の太線) の内部をその亀裂の「縄張り」と見なす。このとき亀裂 i の中点を中心とする半径 $2a$ の円の内部 (白い部分) が同亀裂の排除領域 ($g(r_j|r_i) = 0$) となる。

4.2 2次散乱項の評価

4.2.1 基礎方程式の解

著者の修士論文(河原, 1990; 3.1節参照)では, Foldy (1945)の近似(2.12)に基づく基礎方程式(2.13)を直接解くことにより平均波 $\langle u_A \rangle$ の実効波数と振幅を求めたが, その計算は若干煩雑である。このような2次元SH波問題において, 振幅には興味がなく, 実効波数のみを求めたい場合には, 実は以下に述べるような簡便な方法がある(Yamashita, 1990)。まず, 入射波として再び(3.1)式を与え, これに対する平均波を

$$\langle u_A \rangle = C e^{ikX_1 \sin \theta + iK_Y X_2} \quad (4.5)$$

と仮定する。ここで, 実効波数のY成分 $K_Y = k \cos \theta + O(\nu a^2)$ が求めるべき未知量である。このとき, 基礎方程式に予め演算子 $\nabla^2 + k^2$ ($\nabla^2 = \partial^2/\partial X_1^2 + \partial^2/\partial X_2^2$) を乗じると, 式の左辺および右辺第1項はそれぞれ

$$(\nabla^2 + k^2) \langle u_A \rangle = (k^2 \cos^2 \theta - K_Y^2) \langle u_A \rangle, \quad (\nabla^2 + k^2) u_A^0 = 0 \quad (4.6)$$

となる。ここで再び, 図3.1で示された局所座標系 $(x_1, x_2) = (X_1 - p_1, X_2 - p_2)$ を導入しよう。このとき, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ であり, 基礎方程式の右辺第2項は表現定理(3.3)および関係式

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) = -\delta(x_1) \delta(x_2) \quad (4.7)$$

($\delta(\cdot)$ は Dirac の δ 関数) を用いることにより, 最終的に以下の形に帰着する。

$$(\nabla^2 + k^2) \nu \int_{p_2 > 0} S_A^j \langle u_i \rangle dr_i = -\nu K_Y^2 \Phi \langle u_A \rangle. \quad (4.8)$$

ここで, Φ の定義などは3.1節に準ずる。ただし, 境界条件(3.5)においては冒頭で述べたように $\sigma = 0$ を仮定する。以上より, Foldy(1945)の近似(2.12)下の基礎方程式(2.13)は,

$$k^2 \cos^2 \theta - K_Y^2 = -\nu K_Y^2 \Phi$$

と書き改められ, その解は2次の微小量を無視することにより,

$$K_Y \simeq k \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} \nu \Phi \right)$$

となる。これは, $K_Y = k \cos \theta + \kappa$ と置き直せば, 3.1節で求めた解(3.6)に一致する。

このような解法は, 2次散乱の効果を取り入れた基礎方程式(2.16)にも適用できる。その場合は, 上記結果に加え, 新たに

$$(\nabla^2 + k^2) I_0, \quad \text{where } I_0 = \nu^2 \int S_A^j S_i^j \langle u_j \rangle [1 - g(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)] dr_i dr_j$$

を評価すればよい。その方法を以下に述べる。

計算に先立ち, 不要な添え字を減らすために, 本章では座標の表記法を次のように変更することにする(図4.2a)。まず,

$$(X_1, X_2) = (X, Y), \quad (x_1, x_2) = (x, y), \quad (p_1, p_2) = (p, q)$$

とし, その上で亀裂 i, j に関わる量については $(x_i, y_i), (p_i, q_i)$ などと表すことにする。これらを用い, 積分 I_0 を以下のように書き直す。

$$I_0 = \nu \int_{-\infty}^{\infty} dp_i \int_0^{\infty} dq_i S_A^j \langle u_i^j \rangle. \quad (4.9)$$

ただし $\langle u_i^j \rangle$ は次式で定義される。

$$\langle u_i^j \rangle = \nu \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \int_0^{\infty} dq_j S_i^j \langle u_j \rangle [1 - g(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)] \quad (4.10)$$

(4.10)式はさらに表現定理(3.3)を用いて以下のように変形することができる。

$$\langle u_i^j \rangle = \frac{\nu C K_Y}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \int_0^{\infty} dq_j [1 - g(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{-a}^a d\xi_j D(\xi_j) e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(x_j - \xi_j)^2 + y_j^2} \right).$$

ここで, 式中の $D(\xi_j)$ が境界条件(3.5)により決定されることは以前と同様であるが, いまの場合は亀裂 j の相対変位であることに注意されたい。上式に, 前節で仮定した $g(\cdot)$ の関数形を代入した上で, 局所座標系から再び大域座標系に変換すると, 次式が得られる。

$$\langle u_i^j \rangle = \frac{\nu C K_Y}{4} \int_{-a}^a d\xi_j D(\xi_j) \frac{\partial}{\partial Y} I_1. \quad (4.11)$$

ここで,

$$I_1 = \iint_{R_{ij} \leq 2a} dp_j dq_j e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} H_0^{(1)}(kR_{j0}) \quad (4.12)$$

であり, また $R_{j0}^2 = (X - p_j - \xi_j)^2 + (Y - q_j)^2$, $R_{ij}^2 = (p_i - p_j)^2 + (q_i - q_j)^2$ である(図4.2a)。上式はさらに若干の計算により(付録C.1節), 以下のように書き下される。

$$I_1 = \frac{I_2 + I_3}{k^2 \cos^2 \theta - K_Y^2}, \quad (4.13)$$

$$I_2 = 4i \iint_{R_{ij} \leq 2a} dp_j dq_j e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} \delta(X - p_j - \xi_j) \delta(Y - q_j), \quad (4.14)$$

$$I_3 = \iint_{R_{ij} \leq 2a} dp_j dq_j \left[H_0^{(1)}(kR_{j0}) \nabla_j^2 e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} - e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} \nabla_j^2 H_0^{(1)}(kR_{j0}) \right]. \quad (4.15)$$

ただし, $\nabla_j^2 = \partial^2/\partial p_j^2 + \partial^2/\partial q_j^2$ である。ここで以下のことに注意せねばならない。入射波(3.1)や平均波(4.5)に現れる大域座標変数 $(X_1, X_2) = (X, Y)$ は観測点 A の位置を表しており, 任意の値をとり得ることは勿論である(ただし $Y > 0$ が必要)。しかるに, $\langle u_i^j \rangle$ は亀裂 i の面上における量であるから, その表式(4.11)–(4.15)中の (X, Y) は亀裂面のごく近傍に限定される。すなわち, $\langle u_i^j \rangle$ に関しては

$$p_i - a < X < p_i + a, \quad Y \sim q_i \quad (4.16)$$

が要請される²。このとき I_2 は直ちに計算でき, 次式が得られる。

$$I_2 = 4ie^{ik(X - \xi_j) \sin \theta + iK_Y Y}. \quad (4.17)$$

また, I_3 は Green の定理により以下のように書き直される(cf. Varadan et al., 1978)。

$$I_3 = \oint_{R_{ij} = 2a} dr_j \left[H_0^{(1)}(kR_{j0}) \frac{\partial}{\partial R_{ij}} e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} - e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} \frac{\partial}{\partial R_{ij}} H_0^{(1)}(kR_{j0}) \right]. \quad (4.18)$$

ここで, 積分記号は点 (p_i, q_i) を中心とする半径 $2a$ の円に沿って一周する線積分を表す。

積分 I_3 は, 以下の要領で評価することができる。まず, 図4.2bに示すような三角形を考え, R_{i0}, ψ_0 および ψ_1 を定義する。ここで, $R_{i0}^2 = (X - p_i - \xi_j)^2 + (Y - q_i)^2$, $\tan \psi_0 = (Y - q_i)/(X - p_i - \xi_j)$ である。

²これは, I_2, I_3 が一意に定まるための十分条件でもある。

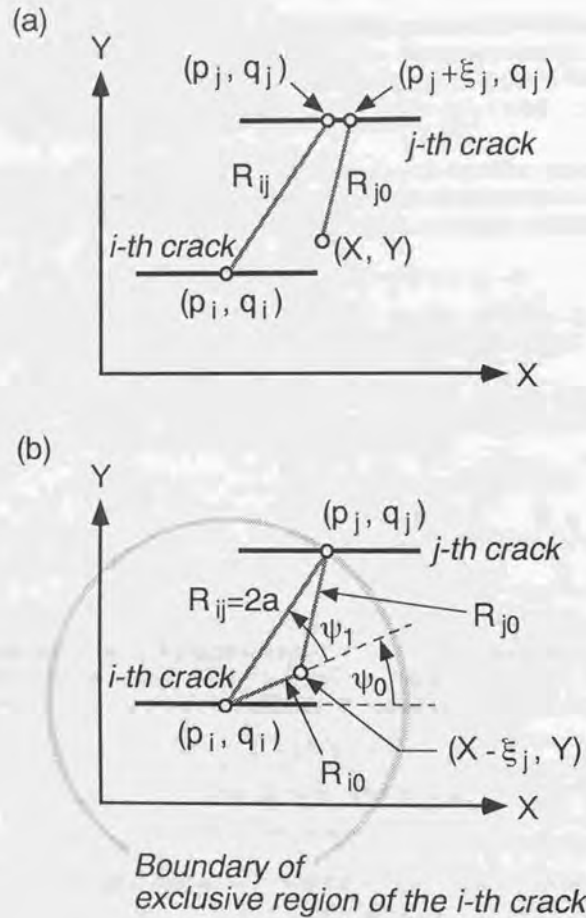


図 4.2. (a) R_{j0} と R_{ij} の幾何学的定義。点 (X, Y) は亀裂 i のごく近傍に位置するものとする。(b) R_{i0} , ψ_0 および ψ_1 の幾何学的定義。

このとき、Bessel 関数の加法定理 (e.g., Gradshteyn and Ryzhik, 1980) より、次のような関係式が成り立つ³。

$$H_0^{(1)}(kR_{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kR_{i0}) H_n^{(1)}(kR_{ij}) e^{in\psi_1}.$$

ここで $J_n(\cdot)$ は Bessel 関数である。一方、亀裂 i, j の位置座標は次式により関係づけられる。

$$p_j = p_i + R_{ij} \cos(\psi_0 + \psi_1), \quad q_j = q_i + R_{ij} \sin(\psi_0 + \psi_1).$$

これらを (4.18) 式に代入すると、以下の結果が得られる。

$$I_3 = R_{ij} e^{ikp_i \sin \theta + iK_Y q_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kR_{i0}) \left[H_n^{(1)}(kR_{ij}) \frac{\partial}{\partial R_{ij}} - \frac{\partial}{\partial R_{ij}} H_n^{(1)}(kR_{ij}) \right] I_4 \Big|_{R_{ij}=2a}, \quad (4.19)$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} d\psi_1 e^{ikR_{ij} \sin \theta \cos(\psi_0 + \psi_1) + iK_Y R_{ij} \sin(\psi_0 + \psi_1) + in\psi_1}. \quad (4.20)$$

ここでさらに、

$$k \sin \theta \cos(\psi_0 + \psi_1) + K_Y \sin(\psi_0 + \psi_1) = K \sin(\psi_0 + \psi_1 + \Theta) \quad (4.21)$$

と置き換えてみよう。同式を満足するためには、 K, Θ を以下のように定義すればよい (このような置き換えが成立するための条件については付録 C.2 節を参照)。

$$K = \sqrt{k^2 \sin^2 \theta + K_Y^2}, \quad \sin \Theta = \frac{k \sin \theta}{K}, \quad \cos \Theta = \frac{K_Y}{K}. \quad (4.22)$$

ただし、 $K = k + O(\nu a^2)$ および $\Theta = \theta + O(\nu a^2)$ は複素数である。このような置き換えを (4.20) 式に適用すると、積分 I_4 は以下のように評価される (付録 C.3 節)。

$$I_4 = 2\pi(-1)^n J_n(KR_{ij}) e^{-in(\psi_0 + \Theta)}. \quad (4.23)$$

上式を (4.19) 式に代入すれば、最終的に

$$I_3 = 4\pi a e^{ikp_i \sin \theta + iK_Y q_i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n J_n(kR_{i0}) \quad (4.24)$$

が得られる。ここで、

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0, \\ 2i \sin n(\psi_0 + \Theta) & \text{for } n = 1, 3, 5, \dots, \\ 2 \cos n(\psi_0 + \Theta) & \text{for } n = 2, 4, 6, \dots; \end{cases} \quad (4.25)$$

$$F_n = \left[H_n^{(1)}(kR_{ij}) \frac{\partial}{\partial R_{ij}} J_n(KR_{ij}) - J_n(KR_{ij}) \frac{\partial}{\partial R_{ij}} H_n^{(1)}(kR_{ij}) \right]_{R_{ij}=2a} \quad (4.26)$$

であるが、これらは K, Θ を通じて未知量 K_Y に依存することに注意されたい。

以上の結果 ((4.11), (4.13), (4.17), (4.24)) より、 $\langle u_i^1 \rangle_i$ は以下のように求められる。

$$\langle u_i^1 \rangle_i = \frac{\nu C K_Y}{k^2 - K^2} \left[-K_Y e^{ikX \sin \theta + iK_Y Y} \Phi + \pi a e^{ikp_i \sin \theta + iK_Y q_i} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{\partial}{\partial Y} \int_{-a}^a d\xi_j c_n J_n(kR_{i0}) D(\xi_j) \right]. \quad (4.27)$$

³同式の成立条件は $R_{ij} > R_{i0}$ であるが、これは条件 (4.16) により保証される (図 4.2b 参照)。

ここで $k^2 \cos^2 \theta - K_Y^2 = k^2 - K^2$ を用いた。残された問題は I_0 の評価であるが、それは以下に示す方法でなされる。いま、(4.27) 式で与えられる波 u_i^1 が亀裂 i に入射するとき、自由境界条件の仮定より (3.4) 式に準じて次のような境界条件が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i^1 \rangle_i + \frac{\partial}{\partial x_i} S_i^1 \langle u_i^1 \rangle_i = 0, \quad |x_i| < a, \quad y_i = 0. \quad (4.28)$$

いま、 $\langle u_i^1 \rangle_i$ によって生じる相対変位を Δu_i^1 と表記し、(4.27) 式および表現定理 (3.3) を用いると、上式は具体的に以下のように表される。

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \int_{-a}^a \Delta u_i^1(\xi_i, p_i, q_i) H_0^{(1)}(k\sqrt{(x_i - \xi_i)^2 + y_i^2}) d\xi_i \Big|_{y_i=0} + \frac{4\nu C K_Y^3}{k^2 - K^2} e^{ik(p_i + x_i) \sin \theta + iK_Y q_i} \Phi + \frac{4i\pi\nu a C K_Y}{k^2 - K^2} e^{ikp_i \sin \theta + iK_Y q_i} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \int_{-a}^a c_n J_n(kR_{i0}) D(\xi_j) d\xi_j \Big|_{y_i=0} = 0, \quad |x_i| < a.$$

ここで大域座標系 (X, Y) から局所座標系 (x_i, y_i) への変換をおこなった。さらに、

$$\Delta u_i^1(\xi_i, p_i, q_i) = i\nu a^2 C K_Y e^{ikp_i \sin \theta + iK_Y q_i} D^1(\xi_i)$$

により $D^1(\xi_i)$ を定義すると、境界条件は次式に帰着する。

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a D^1(\xi) H_0^{(1)}(kR) d\xi \Big|_{y=0} = \frac{4iK_Y^3 a^{-2}}{k^2 - K^2} e^{ikx \sin \theta} \Phi - \frac{4\pi a^{-1}}{k^2 - K^2} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^a c_n J_n(kR) D(\xi_j) d\xi_j \Big|_{y=0}, \quad |x| < a. \quad (4.29)$$

ここで $R^2 = (x - \xi)^2 + y^2$ であり、また添え字 i, j は不要なので省略した⁴。上式を解いて $D^1(\xi)$ を求めれば、後は (4.8) 式と全く同様にして次式が得られる。

$$(\nabla^2 + k^2) I_0 = -\nu^2 a^2 K_Y^2 \Phi^1 < u_A >. \quad (4.30)$$

ここで Φ^1 は (3.8) 式に準じて、

$$\Phi^1 = \int_{-a}^a D^1(\xi) e^{-ik\xi \sin \theta} d\xi \quad (4.31)$$

で定義されるが、 Φ と異なり k, θ だけでなく未知量 $K^Y = K^Y(k, \theta)$ にも依存することに注意しなければならない。そのことを強調するために、以下では $\Phi^1(K^Y)$ と表記することにする⁵。

かくして、(4.6), (4.8) および (4.30) 式より基礎方程式 (2.16) は次式に帰着する。

$$k^2 \cos^2 \theta - K_Y^2 = -\nu K_Y^2 \Phi + \nu^2 a^2 K_Y^2 \Phi^1(K^Y). \quad (4.32)$$

これを解いて K_Y を求めるためには、 $K_Y = k \cos \theta$ を中心として K_Y を ν の冪乗に展開し、その係数を決定すればよい。その結果は以下の通りである。

$$K_Y = k \cos \theta \left[1 + \frac{\nu}{2} \Phi + \nu^2 \left\{ \frac{3}{8} \Phi^2 - \frac{a^2}{2} \Phi^1(k \cos \theta) \right\} + O((\nu a^2)^3) \right]. \quad (4.33)$$

よって、残された問題は $\Phi^1(k \cos \theta) = \lim_{K_Y \rightarrow k \cos \theta} \Phi^1(K_Y)$ の評価のみとなった。その値は、境界条件 (4.29) を解いて相対変位 $D^1(\xi)$ を求めることにより得られるが、それについては次の小節で解説する。なお、解 (4.33) において ν の 2 次項を無視すると 1 次散乱の場合の解に一致することは言うまでもない。

⁴変数 ξ_j は積分変数に過ぎず、それ以外の変数はすべて亀裂 i に関わるから乱れの恐れはない。
⁵ Φ の $n (\geq 2)$ 乗を表す Φ^n と混同しないように注意されたい。

4.2.2 相対変位の計算

まず、3.1 節と同様にして境界条件 (4.29) を離散化・無次元化する。

$$\sum_{m=1}^{M-1} H_{lm} D_m^1 = \frac{4iK_Y^3}{k^2 - K^2} e^{ik s_l \sin \theta} \Phi - \frac{4\pi}{k^2 - K^2} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_n J_{lm}^n D_m, \quad l = 1, \dots, M-1. \quad (4.34)$$

ここで $D_m^1 = \hat{D}^1(s_m)$ であり、行列要素 J_{lm}^n は

$$J_{lm}^n = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{s_m - \Delta s/2}^{s_m + \Delta s/2} c_n J_n(kR_l) d\xi \Big|_{y=0}, \quad R_l^2 = (s_l - \xi)^2 + y^2 \quad (4.35)$$

で定義される。また、変数の頭の \wedge が a による規格化を意味することは 3.1 節と同様であり、それ以外の量の定義も同節に準じる。一方、(4.31) 式を離散化すると (3.12) 式に準じて

$$\hat{\Phi}^1(K_Y) = \frac{\Phi^1(K_Y)}{a^2} = \Delta s \sum_{m=1}^{M-1} D_m^1 e^{-ik s_m \sin \theta} \quad (4.36)$$

が得られる。同式はさらに (4.34) 式を用いて以下のように変形できる。

$$\hat{\Phi}^1(K_Y) = \frac{4\Delta s}{k^2 - K^2} \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{M-1} H_{jl}^{-1} e^{-ik s_j \sin \theta} \left[iK_Y^3 e^{ik s_l \sin \theta} \Phi - \pi \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_n J_{lm}^n D_m \right]. \quad (4.37)$$

ここで、行列 $\mathbf{H} = (H_{lm})$ の逆行列を $\mathbf{H}^{-1} = (H_{lm}^{-1})$ と表した。(3.10) 式を用いて上式をさらに変形すると、最終的に次式が得られる (付録 C.4 節)。

$$\hat{\Phi}^1(K_Y) = -\frac{K_Y^3}{k^2 - K^2} \hat{\Phi}^2 - \frac{i\pi \Delta s}{k^2 - K^2} \sum_{l=1}^{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_n D_{M-l} J_{lm}^n D_m. \quad (4.38)$$

上式から $\Phi^1(k \cos \theta)$ を求めるには、以下のようにすればよい。まず、

$$\zeta = \frac{K_Y}{k \cos \theta} = 1 + O(\nu), \quad \Sigma(\zeta) = \Delta s \sum_{l=1}^{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_n D_{M-l} J_{lm}^n D_m$$

と定義する。このとき、(4.33) 式より、

$$\begin{aligned} \Sigma(\zeta) &= \Sigma(1) + (\zeta - 1) \Sigma'(1) + O((\zeta - 1)^2) = \\ &= \Sigma(1) + \frac{\nu}{2} \Phi \Sigma'(1) + O(\nu^2) \end{aligned}$$

である。ただし $\Sigma'(\zeta) = \partial \Sigma(\zeta) / \partial \zeta$ である。これより、(4.38) 式は以下のように書き直される。

$$\hat{\Phi}^1(K^Y) = \frac{1}{\zeta^2 - 1} \left[\hat{\Phi}^2 + \frac{i\pi}{k^2 \cos^2 \theta} \Sigma(1) + \frac{\nu}{2} \hat{\Phi} \frac{i\pi}{k^2 \cos^2 \theta} \Sigma'(1) + O(\nu^2) \right]. \quad (4.39)$$

同式において、 $\hat{\Phi}^1(K^Y)$ が $K_Y \rightarrow k \cos \theta$ (すなわち $\zeta \rightarrow 1$) の極限で有限値をとるためには、

$$\hat{\Phi}^2 + \frac{i\pi}{k^2 \cos^2 \theta} \Sigma(1) = 0 \quad (4.40)$$

が必要であるが、このことは解析的に証明される (付録 C.5 節)。これを用いると、(4.39) 式より次の結果が得られる。

$$\hat{\Phi}^1(k \cos \theta) = \hat{\Phi}^2 + \frac{i\pi}{2k^2 \cos^2 \theta} \Sigma'(1).$$

同式を(4.33)式に代入することにより、基礎方程式(2.16)の解は最終的に次式で与えられる。

$$K_Y \simeq k \cos \theta \left[1 + \frac{\nu}{2} \Phi - \nu^2 \left\{ \frac{1}{8} \Phi^2 + \Psi \right\} \right]. \quad (4.41)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{i\pi a^2 \Delta s}{4k^2 \cos^2 \theta} \sum' (1) = \\ &= \frac{i\pi a^2 \Delta s^2}{4k^2 \cos^2 \theta} \sum_{l=1}^{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^N D_{M-l} D_m \left[J_{lm}^n \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{F}_n + \hat{F}_n \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{lm}^n \right]_{\zeta=1} \end{aligned} \quad (4.42)$$

である。同式中の D_m は(3.10)式(ただし $\sigma=0$)を解くことにより求められ、それ以外の諸量の具体的な値は付録C.6節で与えられる。なお、実際に Ψ を数値計算する際には n に関する級数和を無限にとることは不可能なので、ある適当な値 $n=N$ で打ち切ることとした。特に $k \rightarrow 0$ の極限では $N=2$ となり、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Psi = \left(\frac{3}{4} - \cos^2 \theta \right) \Phi^2 \quad (4.43)$$

となるので(付録C.6節)、 K_Y の値は次のようになる。

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{K_Y}{k} \simeq \cos \theta \left[1 + \frac{\nu}{2} \Phi + \nu^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{7}{8} \right) \Phi^2 \right]. \quad (4.44)$$

一般に級数和の収束性は k とともに悪化し、 $ka \sim 10$, $\theta=0^\circ$ の場合には $N \sim 24$ 程度が必要である。

4.3 結果と考察

前節で求められた実効波数の Y 成分 K_Y に対し、減衰係数 Q^{-1} および位相速度 v は次式で与えられる(河原, 1990, 付録C; Kawahara and Yamashita, 1992, Appendix D)。

$$Q^{-1} = \frac{2v}{\omega} \text{Im} K_Y \cos \theta, \quad v = \omega / \sqrt{k^2 \sin^2 \theta + \text{Re} K_Y}. \quad (4.45)$$

ここで $\omega = k\beta$ であることは3.1節と同様であり、また θ は(4.22)式で定義される。なお、同式が $\nu a^2 \ll 1$ のときに近似的に(3.9)式で表されることは容易に確かめられる。同式を(4.41)式を用いて展開すれば、最終的に次式が得られる。

$$\frac{\Delta v}{\beta \cos^2 \theta} \equiv \frac{\beta - v}{\beta \cos^2 \theta} = \frac{\nu}{2} \text{Re} \Phi - \frac{\nu^2}{8} [3(\text{Re} \Phi)^2 \cos^2 \theta - (\text{Im} \Phi)^2 + 8 \text{Re} \Psi], \quad (4.46)$$

$$\frac{Q^{-1}}{\cos^2 \theta} = \nu \text{Im} \Phi - \nu^2 [\text{Re} \Phi \cdot \text{Im} \Phi \cos^2 \theta + 2 \text{Im} \Psi].$$

上の結果において、 ν の2次の項を無視すると1次散乱の場合の解(すなわち、(3.7)式を(3.9)式に代入したもの)に一致することは言うまでもない。

以上の結果に基づいた数値計算例を以下に示す。図4.3は、SH波が垂直に入射したとき($\theta=0^\circ$)の Q^{-1} 値を、亀裂含有率 c (4.1節参照)が0.01および0.1の2例に対して示したものである。ここで、これらの c 値はそれぞれ Foldy (1945) および Lax (1952) の近似(2.12), (2.14)の有効範囲のおおまかな上限と予想される。図より、2次散乱の効果が顕著に現れるのは主に低波数領域($ka < 1$)であることがわかる。すなわち、この領域では1次散乱のみの場合に比べ、2次散乱を考慮した方が Q^{-1} 値が小さくなる。換言すれば、2次散乱の効果は散乱減衰を抑制する方向に働く。これは2次元の円形内包物(inclusion)および3次元球

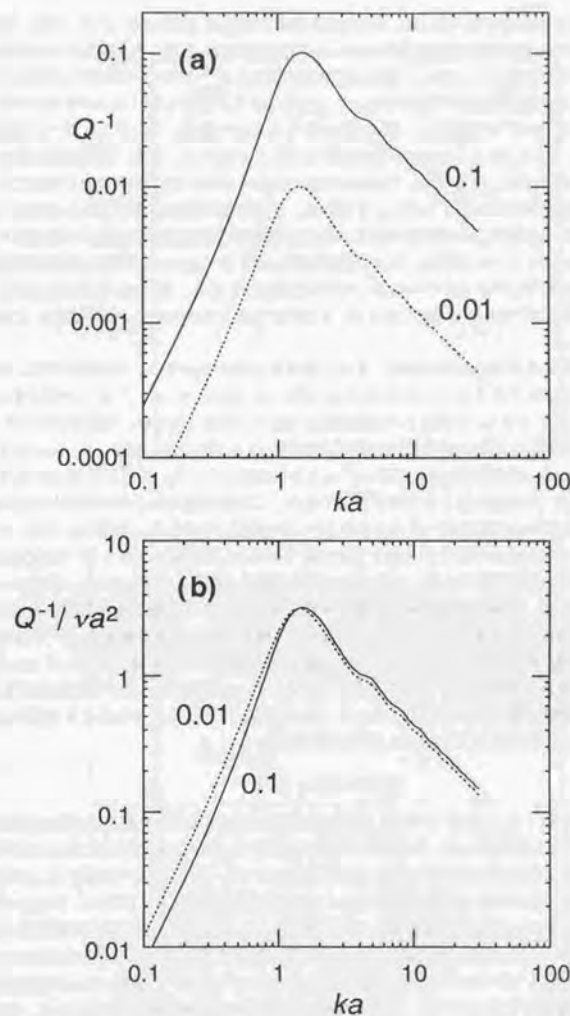


図4.3. $\theta = 0^\circ$ の場合の Q^{-1} の c 依存性。図中のパラメータは c 値。(a) は Q^{-1} 値そのもの、(b) はそれを νa^2 で規格化したもの。

形の空孔 (cavity) の分布に関する Varadan らの結果と調和的である (Varadan *et al.*, 1985, 1989)。しかしながら、その効果の大きさ自体は予想外に小さい。高波数側に関しては、2次散乱の効果は低波数側とは逆方向に働き、かつ一層小さい。特に、観測上重要な量である Q^{-1} のピーク波数は2次散乱の影響をほとんど受けない。以上の結果は他の入射角の場合にも当てはまる。例として $\theta = 45^\circ$ の場合を図 4.4 に示す。また、図 4.5 は Q^{-1} のピーク波数の c 値依存性を示したものである。これより、ピーク波数は c にも θ にもあまりよらず、 $1.3 < ka < 1.5$ 程度の範囲に収まることがわかる。一方、速度分散に関する結果の一例 ($\theta = 0^\circ$) を図 4.6 に示す。ここでも、2次散乱の効果が働く方向は Q^{-1} 値の場合と同様であるが、ただしその強さは全波数領域にわたって小さい。すなわち、位相速度の固有 S 波速度からの遅れ Δv が2次散乱から受ける影響は、波数によらず微弱である。低波数領域での位相速度の遅れが2次散乱によって抑制されることは、Varadan *et al.* (1985)、および円形亀裂に関する Hudson (1980) の長波近似理論に基づく結果 (Crampin, 1984; Hudson and Crampin, 1989) と調和的である。Hudson の理論によれば、2次散乱の効果は P 波の位相速度に対して顕著であるが、S 波にはあまり効かないことが示され、この点でも上の結果と矛盾しない。

ところで、Lax の準結晶近似の有効範囲の上限の正確な値は明確ではない。上の計算では、同近似が亀裂密度に関する2次近似であるという立場 (Keller, 1964; see 2.2 節) から、 $e^2 \ll 1$ を満たす c の上限として $c \approx 0.1$ を採用した。しかし、3次以上の高次散乱を無視する指標としては、亀裂含有率 $e = \pi va^2$ よりも va^2 そのもの (本章脚注 1 参照) の方が適当である可能性もあるであろう。実際、Hudson and Crampin (1989) は Hudson (1980) の理論の有効範囲を $va^3 < 0.1$ と推定している。これを2次元に当てはめれば $c \approx 0.1\pi \sim 0.3$ となり、先の推定値よりかなり大きくなる。この値が適当かどうかを確かめるため、 Q^{-1} の低波数領域での振る舞いを詳細に調べてみた結果 ($\theta = 0^\circ$) が図 4.7 である。上述のように、この領域では2次散乱の効果は1次散乱のそれを打ち消す方向に働くので、 c 値の増加に伴う Q^{-1} の増加は次第に鈍り、ついには減少に転じると予想される。このような逆転現象は、同図では $ka < 0.6$, $c > 0.15 \sim 0.2$ に対して認められる。これは、現実の多重散乱の性質の反映と考えるよりは、むしろ3次以上の項を打ち切ったことによる誤差の効果と見なす方が尤もらしい。また、 c 値が $0.25 \sim 0.3$ を越すと Q^{-1} に負値が現れるが、これは勿論物理的に許されない。従って、Lax の近似の有効範囲の上限値はおそらく $c \approx 0.1 \sim 0.15$ ($va^2 \approx 0.03 \sim 0.05$) 程度と推測され、少なくとも $c \approx 0.3$ ($va^2 \approx 0.1$) を越さないことは確実である。 Δv に関しては、同様な困難は現れない。例えば $\theta = 0^\circ$, $k = 0$ の場合、 $\Phi = \pi a^2$ であることが解析的に既知であるので、(4.43) および (4.46) 式より直ちに次式が得られる。

$$\Delta v / \beta = c/2 - c^2/8. \quad (4.47)$$

上式が極大値をとるのは $c = 2$ ($va^2 = 0.64$) においてであるが、勿論これは剛体球近似自体の適用限界 ($c \approx 0.907$) を越えており意味がない。ちなみに Cheng (1993) は、Hudson の理論における逆転の臨界密度が $va^3 \approx 0.19$ (自由境界条件の場合) であることを示している。しかし、 Q^{-1} に関する上の結果を考慮するならば、Hudson の理論の精度上の適用限界はもっと低いと見るべきかもしれない。Douma (1988) は、Hudson の理論を Nishizawa (1982) の多重散乱理論と比較することにより、前者の有効範囲を $va^3 < 0.05$ と結論しているが、この値は上記の推定値とよく符合する。もっとも、Nishizawa の理論がはたして高次の多重散乱を正しく評価しているかどうかは必ずしも自明ではない (付録 A 参照)。Lax の近似の有効範囲に関してこれ以上の議論をするためには、対相関関数 g の関数形の再検討が必要であろう。なお、(4.47) 式は Varadan and Varadan (1979) の (13) 式において垂直入射 ($\alpha = \pi/2$) を仮定したものと c^2 のオーダーまで一致する。しかし本章冒頭で述べたように、Varadan らの方法は一般には亀裂に適用できないことが指摘されているので、この一致が単なる偶然なのか、あるいは Varadan らの方法が長波極限では有効なことを意味するものなのかは定かではない。

以上をまとめると、3次以上の高次散乱が無視できるような亀裂含有率の範囲内 ($c < 0.1 \sim 0.15$) では2次散乱の効果はかなり小さい、というやや皮肉めいた結果が得られた。このことは、ある程度密な亀裂

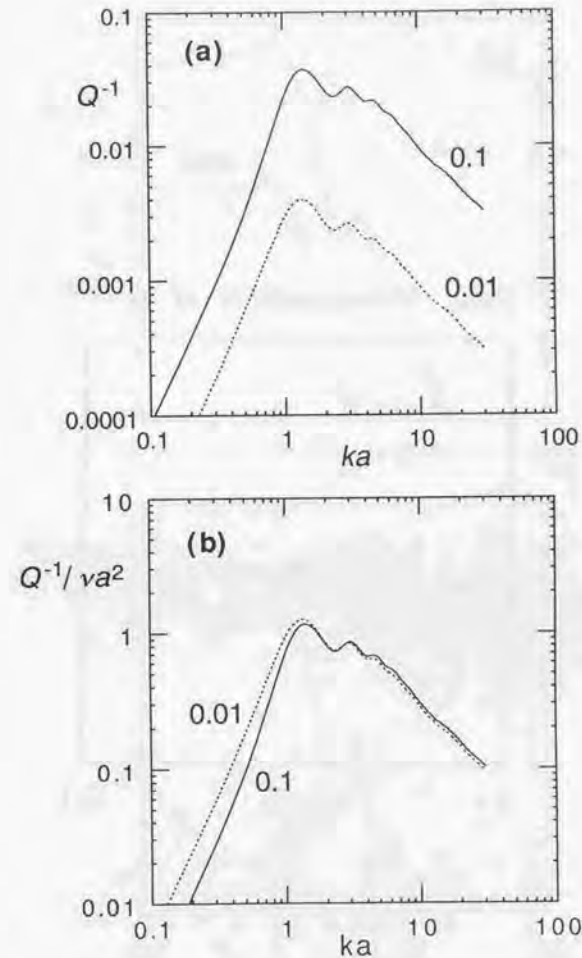


図 4.4. $\theta = 45^\circ$ の場合の Q^{-1} の c 依存性。図中のパラメータは c 値。(a) は Q^{-1} 値そのもの、(b) はそれを va^2 で規格化したもの。

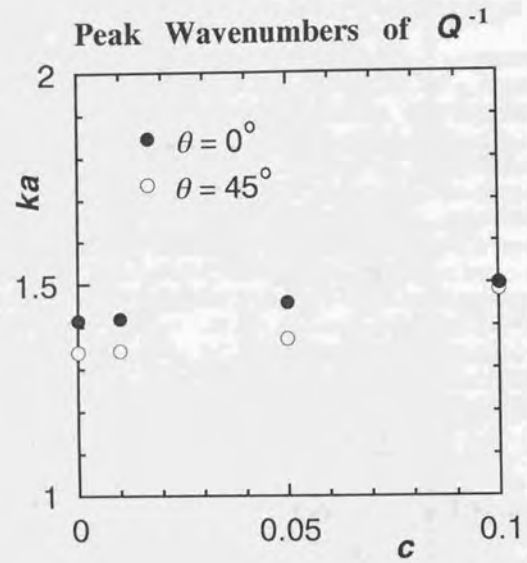


図4.5. Q^{-1} のピーク波数の c 依存性。黒丸は $\theta = 0^\circ$, 白丸は $\theta = 45^\circ$ の場合。

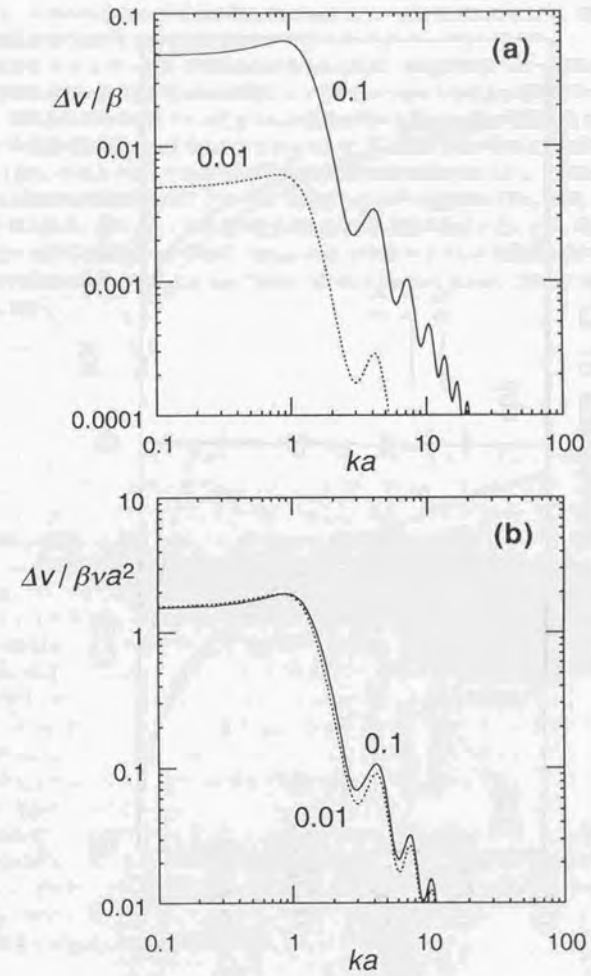


図4.6. $\theta = 0^\circ$ の場合の Δv の c 依存性。図中のパラメータは c 値。(a) は $\Delta v / \beta$, (b) はそれを a^2 で規格化したものを表す。

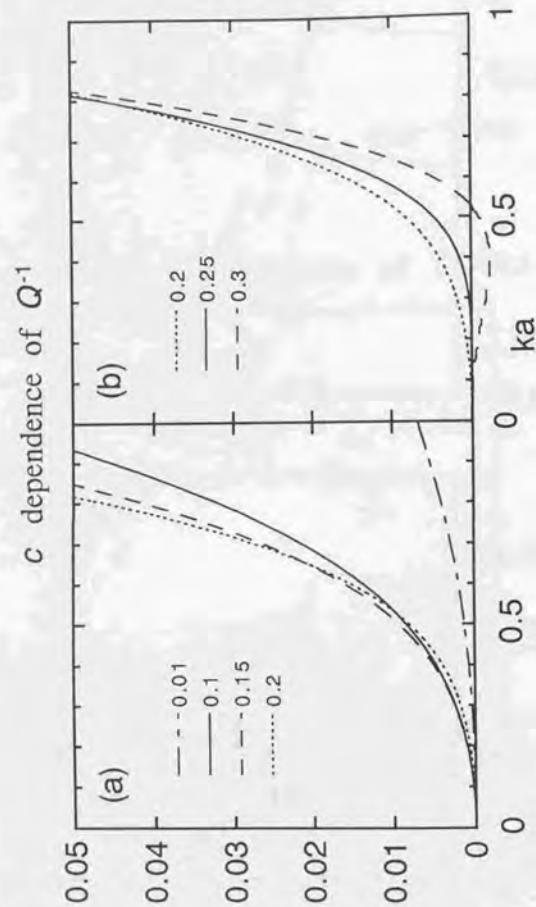


図4.7. 低波数領域における Q^{-1} の c 依存性の詳細。(a) $c = 0.01$ (一点鎖線), 0.1 (直線), 0.15 (破線), 0.2 (点線). (b) $c = 0.2$ (点線), 0.25 (直線), 0.3 (破線).

分布に対しても Foldy の近似が十分有効であることを保証するものでもある。実際、多くの観測例は上部地殻の平均的な亀裂数密度が $\nu a^3 \approx 0.04$ であることを示し、 0.05 を越えるものは少ない (Crampin, 1987; 金嶋, 1991)。これに対応する (2次元の場合の) c 値は $0.12 \sim 0.15$ 程度であるから、観測の精度を考慮すれば 1次散乱近似は実用上有効であろう。

より密な場合 ($c > 0.15 \sim 0.2$) の多重散乱を扱うためには、本論文で用いている波動論的な方法、すなわち基礎方程式 (2.9), (2.10) を何らかの仮定によって解くようなやり方はもはや有効でないかも知れない。なぜなら、高次散乱の効果を抑えるためには Lax の近似に代わる新たな近似が必要となり、しかもそれは g より高次の亀裂間相関関数の仮定を要求するからである。 g の仮定自体が多分に恣意的であったことを考えれば (4.1 節)、そのようにして求められた高次散乱項の信憑性は甚だ乏しい。この場合にはむしろ、波動場の概念を放棄した現象論的なアプローチ、例えばエネルギー輸送理論 (Wu, 1985) に基づく方法の方が現実的と思われる。あるいは、計算機の能力の発達や計算技法の改善などにより、亀裂の相対変位の数値計算速度の大幅な高速化が今後進めば、Murai *et al.* (1994) のような決定論的方法が重要となるであろう。また室内実験の分野 (cf. Kuster and Toksöz, 1974b; Kinra and Anand, 1982) からのより一層の寄与にも期待したい。

Chapter 5

3次元亀裂分布モデル

本節では、これまでの手法を3次元の場合へ拡張する。ここで亀裂の形状は円形 (penny-shaped) とし、第3章と同様、分布は十分に希薄 ($\nu a^3 \ll 1$) と仮定して (2.13) 式を基礎方程式とする。このような亀裂分布モデルにおける2次散乱の効果の評価は、長波極限の場合には Hudson (1980) によりなされているが、有限波長に対してはかなりの困難が予想されるので、ここでは扱わない。しかしながら前章で述べたように、この効果は実用上あまり重要でないと思われる。

第1章でも述べたように、問題を解くための鍵となるのは、弾性波の入射によって孤立円形亀裂に生じる相対変位の評価法である。本章の内容の大半は、これまで著者が用いてきた方法論を3次元に拡張する試みに関するものである。同種の研究はこれまでも多数の応用数学者や工学者達によってなされてきた。例えば Sih and Loeber (1968, 1969) や Mal (1970a) は、亀裂の軸対称性を用いることにより P 波垂直入射などの場合を解析的に扱った (ただし、Sih and Loeber の誤りが Mal, および Embley and Sih, 1981 により指摘されている)。また Keogh (1986) は短波近似を用いて同種の問題を扱っている。任意の波数・入射角の場合については、Martin and Wickham (1983) と Krenk and Schmidt (1982) がそれぞれ独立に半解析的な方法を呈示した。彼らの方法の共通点は、円形亀裂の軸対称性を利用していること、および積分変換や多項式展開などの手法を用いて問題を解いていることであり、数学的にやや煩雑な印象を与える。一方、純粋に数値的手段としては、いわゆる境界積分方程式法 (Boundary Integral Equation Method; BIEM) が有名である (e.g., Bui, 1977; Nishimura and Kobayashi, 1988; Budreck and Achenbach, 1988)。同方法は数学的に極めて簡潔であり、亀裂面を多数のブロックに分割するため亀裂の形状に依存しない強みがある代わりに、より多くの数値計算上の労力を必要とする。本章で示される手法は、このような研究史に1頁を加えるものであり、Martin and Wickham らのものと同様、半解析的な方法に属するが、数学的な見通しはかなり改善される。

円形亀裂分布による散乱問題に関しては、Hudson (1980, 1981) の長波近似に基づく理論が著名である。しかし、静的極限における相対変位の解析解が既知であることから、彼自身は相対変位の計算をおこなっていない。この事情は、静力学的なアプローチによる同種の研究 (e.g., Budiansky and O'Connell, 1976; Nishizawa, 1982) にも共通する。

以下、簡単のため自由境界条件を仮定する。

5.1 表現定理

次節の準備として、本節では円筒座標系における表現定理を確立する。これは、Martin and Wickham (1983) らと同様、亀裂の軸対称性を利用するためである。まず、ある円形亀裂 i に固定された局所座標系を図 5.1 のように2通りに定義しよう。ここで (x_1, x_2, x_3) はデカルト座標系、 (ρ, ϕ, z) は円筒座標系を表

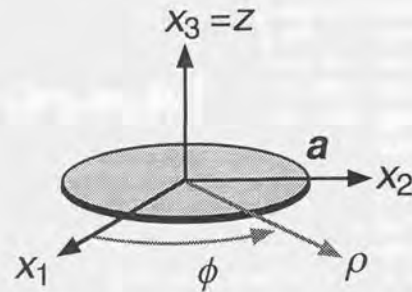


図 5.1. 局所座標系。デカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) , 円筒座標系 (ρ, ϕ, z) とも原点は亀裂の中心に位置し、 $x_3 = z$ 軸が亀裂の回転対称軸に一致するようにとる。 ϕ は $+x_1$ 方向を基準にし、図の矢印方向を正と定義する。

し、 $x_3 = z$ 軸が亀裂の回転対称軸に対応する。以下、添え字 i は混乱の恐れのないので省略する。いま、このような亀裂にある波数を持った弾性波 u_i^0 が入射したとき、それによって相対変位 Δu が生じたでしょう。このとき、散乱波 $S_A^i u_i^0$ の x_j 成分は以下のように表現される (Budiansky and Rice, 1979; Martin, 1981)。

$$[S_A^i u_i^0]_j = - \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2} \Delta u_l(\xi_1, \xi_2) \Gamma_{jl}(x_1, x_2, x_3 | \xi_1, \xi_2, 0) d\xi_1 d\xi_2, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

ただし、以下では 1, 2, 3 のいずれかをとる添え字が重複して現れた際には、和の規約を適用するものとする。上式において Δu_j はデカルト座標系における Δu の成分を表し、また

$$4\pi \Gamma_{jl}(x_1, x_2, x_3 | \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \delta_{l3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{ikR}}{R} + \left(\delta_{jl} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_l \partial x_3} \left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R}\right), \quad j, l = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

かつ $R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$ である。それ以外の記号の意味は第 3 章に準ずる。このとき、 $S_A^i u_i^0$ が亀裂面に作る応力場は次式で与えられる¹。

$$\tau_{j3}^{sc} = -\mu \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2} \Delta u_l(\xi_1, \xi_2) T_{j3l}(x_1, x_2, 0 | \xi_1, \xi_2, 0) d\xi_1 d\xi_2, \quad j, l = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

ここで、関数 $T_{jkl}(\cdot)$ は次式で定義される。

$$T_{jkl}(x_1, x_2, x_3 | \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{c_{jkmn}}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_n} \Gamma_{ml}(x_1, x_2, x_3 | \xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (5.4)$$

ただし、

$$c_{jkmn} = \lambda \delta_{jk} \delta_{mn} + \mu (\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km}), \quad j, k, l, m, n = 1, 2, 3$$

である。 $T_{jkl}(\cdot)$ の具体的な関数形はここでは省略するが、

$$T_{133}(\cdot) = T_{233}(\cdot) = T_{331}(\cdot) = T_{332}(\cdot) = 0 \quad \text{for } x_3 = \xi_3 = 0 \quad (5.5)$$

であることだけを述べておこう。これは法線応力 τ_{33} が開口変位 Δu_3 に、剪断応力ベクトル (τ_{13}, τ_{23}) は剪断変位ベクトル $(\Delta u_1, \Delta u_2)$ にのみそれぞれ依存することを意味する。なお 3.3 節で述べたのと同様、超特異性 (付録 D.2 節参照) を回避するためには、 $T_{jkl}(\cdot)$ に含まれる微分演算子は (5.3) 式の積分記号の外側に置かれるべきであるが、この点は後で考慮することとし、ここでは考えない。ここでさらに、座標変数をデカルト座標系から円筒座標系へ変換しよう ($x_1 = \rho \cos \phi$, $x_2 = \rho \sin \phi$, $x_3 = z$)。このとき、物理量は以下のように変換される。

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_\rho \\ \Delta u_\phi \end{bmatrix}, \quad \Delta u_3 = \Delta u_z; \\ \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{\rho z} \\ \tau_{\phi z} \end{bmatrix}, \quad \tau_{33} = \tau_{zz}.$$

また、微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}$$

¹ 簡単のため、本章では記号 ' τ ' を常に亀裂面上 ($z=0$) の応力場のみ用いる。第 3 章との違いに注意されたい。

のように対応づけられる。これにより、(5.3) 式の円筒座標系における表現は次式に帰着する。

$$\tau_{p2}^{SCA} = -\mu \int_0^a d\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_0 \cdot \rho_0 \Delta u_q(\rho_0, \phi_0) T_{p2q}(\rho, \phi, 0 | \rho_0, \phi_0, 0), \quad (5.6)$$

$$\tau_{z2}^{SCA} = -\mu \int_0^a d\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_0 \cdot \rho_0 \Delta u_z(\rho_0, \phi_0) T_{z2z}(\rho, \phi, 0 | \rho_0, \phi_0, 0). \quad (5.7)$$

ここで添え字 p, q は ρ または ϕ のいずれかをとるとし、かつ (5.3) 式と同様に和の規約が適用されるものとする。また、 $T_{p2q}(\cdot)$ および $T_{z2z}(\cdot)$ の具体形は以下の通りである。

$$4\pi T_{p2\rho}(\rho, \phi, z | \rho_0, \phi_0, z_0) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{4}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \rho^2 \partial z^2} F(R), \quad (5.8)$$

$$4\pi T_{p2\phi}(\rho, \phi, z | \rho_0, \phi_0, z_0) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \left[\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{4}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(R) \right] = 4\pi T_{p2\phi}(\rho, \phi, z | \rho_0, \phi_0, z_0). \quad (5.9)$$

$$4\pi T_{\phi 2\phi}(\rho, \phi, z | \rho_0, \phi_0, z_0) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{4}{k^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(R), \quad (5.10)$$

$$4\pi T_{z2z}(\rho, \phi, z | \rho_0, \phi_0, z_0) = \left(\frac{k}{h} - 2 \frac{h}{k} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \frac{e^{ihR}}{R} + \left(\frac{k^2}{h^2} - 2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ihR}}{R} + 2 \frac{k^2}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ikR}}{R} - 2 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{k^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(R) - \frac{2}{h^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} F(R). \quad (5.11)$$

ここで、

$$R^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2, \quad F(R) = \frac{e^{ihR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R}$$

である。なお、(5.6), (5.7) 式の導出の際には (5.5) 式に対応して

$$T_{p2z}(\rho, \phi, 0 | \rho_0, \phi_0, 0) = T_{z2p}(\rho, \phi, 0 | \rho_0, \phi_0, 0) = 0, \quad p = \rho, \phi$$

が成立することを予め用いた。このことはまた、境界条件を構成する 3 式

$$\tau_{\gamma z}^{inc} + \tau_{\gamma z}^{SCA} = 0, \quad 0 \leq \rho < a, \quad \gamma = \rho, \phi, z \quad (5.12)$$

において、法線応力に関する式 ($\gamma = z$) と剪断変位に関する他の 2 式が互いに decouple することを意味し、Martin (1981) や Krenk and Schmidt (1982) と調和的である。

境界条件 (5.12) を解く上で、2次元問題の場合には無かった大きな困難は、それが (5.6) および (5.7) 式で表される 2重積分を含むことである。Mal (1970a) などが軸対称問題を扱うにとどまったのはまさにこの困難のためであり、任意の場合を扱うには何らかの工夫が必要となる。そのための最も自然な発想の一つは、応力と変位をそれぞれ z 軸の回りに Fourier 展開し、境界条件を各 Fourier 次数毎に与え直すことにより、2重積分を単積分に帰着させることであろう (Martin and Wickham, 1983; Krenk and Schmidt, 1982)。本章では、以下この手法を採用する。

5.2 場の Fourier 級数展開

いま、入射波 u_A^0 は x_1x_3 平面内を伝播する平面波と仮定しよう。これにより、亀裂面上の応力場は x_1 軸 (あるいは ϕ) に関して対称性を獲得する。まず、波数 h 、入射角 θ_P の入射 P 波

$$u_A^0 = A_0 e^{ihx_1 \sin \theta_P + ikx_3 \cos \theta_P} (\sin \theta_P, 0, \cos \theta_P) \quad (5.13)$$

の場合を考える。このとき、入射波が亀裂面上に作る応力場は以下のように Fourier 級数展開することができる (付録 D.1 節)。

$$\tau_{p2}^{inc} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_{p2}^n(\rho) \cos n\phi, \quad \tau_{\phi 2}^{inc} = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tau}_{\phi 2}^n(\rho) \sin n\phi, \quad \tau_{z2}^{inc} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_{z2}^n(\rho) \cos n\phi. \quad (5.14)$$

ここで Fourier 係数 $\tilde{\tau}_{\gamma 2}^n(\rho)$ ($\gamma = \rho, \phi, z$) は具体的に (D.1) 式で与えられる。同様にして、入射波が波数 k 、入射角 θ_S の SV 波

$$u_A^0 = B_0 e^{ikx_1 \sin \theta_S + ikx_3 \cos \theta_S} (\cos \theta_S, 0, -\sin \theta_S) \quad (5.15)$$

の場合も (5.14) 式と同じ表現が得られるが、この場合の Fourier 係数は (D.3) 式の通りとなる。また、SH 波

$$u_A^0 = C_0 e^{ikx_1 \sin \theta_S + ikx_3 \cos \theta_S} (0, 1, 0) \quad (5.16)$$

の場合は、

$$\tau_{p2}^{inc} = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tau}_{p2}^n(\rho) \sin n\phi, \quad \tau_{\phi 2}^{inc} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_{\phi 2}^n(\rho) \cos n\phi, \quad \tau_{z2}^{inc} = 0 \quad (5.17)$$

と展開され、その係数は (D.4) 式で与えられる。

次に、相対変位の Fourier 級数展開を考える。これは入射応力場と同じ ϕ 対称性を持つべきであるから、

$$\Delta u_\rho(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_\rho^n(\rho) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} n\phi, \quad \Delta u_\phi(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_\phi^n(\rho) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} n\phi, \quad (5.18)$$

$$\Delta u_z(\rho, \phi) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} w_z^n(\rho) \cos n\phi \\ 0 \end{cases}$$

と展開することが可能である。ここで $\{\cdot\}$ の中は上段が P, SV 波、下段が SH 波入射を表し、また sine 展開の場合には $w_\phi^n(\rho) \equiv 0$ ($p = \rho, \phi$) が要請される。

最後に、散乱応力場 (5.6), (5.7) の Fourier 級数展開を考え、上の結果と併せて境界条件 (5.12) の Fourier 次数別表示を導出する。まず法線応力成分に関して取り扱おう。上述の通り、これは P, SV 入射の場合のみを考えればよい。いま、(5.11) 式を便宜上

$$4\pi T_{z2z}(\rho, \phi, z | \rho_0, \phi_0, z_0) = D_{z2z}^P \frac{e^{ihR}}{R} - D_{z2z}^S \frac{e^{ikR}}{R}$$

と表現する。ここで D_{z2z}^P, D_{z2z}^S は ρ, ϕ, z に関する微分演算子である。また、 $z > 0$ に対して

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\phi - \phi_0) \int_0^{\infty} J_m(\rho\xi) J_m(\rho_0\xi) \frac{\xi}{\gamma_S(\xi)} e^{-\gamma_S(\xi)z} d\xi \quad (5.19)$$

なる関係式が成り立つ (Martin, 1981)。ただし、

$$\gamma_S(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - k^2} & \text{for } \xi > k, \\ -i\sqrt{k^2 - \xi^2} & \text{for } 0 \leq \xi \leq k \end{cases}$$

であり、かつ $\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2$ for $n = 1, 2, \dots$ である。これらを (5.7) 式に代入した後、 ϕ_0 に関する積分を実行する。その際、三角関数の直交性を利用すると、最終的に次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^{sca} = & -\frac{1}{2}\mu \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a d\rho_0 w_z^n(\rho_0) \rho_0 \times \\ & \times \left[D_{zz}^P \cos n\phi \int_0^{\infty} d\xi J_n(\rho\xi) J_n(\rho_0\xi) \frac{\xi}{\gamma_P(\xi)} e^{-\gamma_P(\xi)z} + \right. \\ & \left. + D_{zz}^S \cos n\phi \int_0^{\infty} d\xi J_n(\rho\xi) J_n(\rho_0\xi) \frac{\xi}{\gamma_S(\xi)} e^{-\gamma_S(\xi)z} \right]_{z \rightarrow +0} \end{aligned}$$

なお、 $\gamma_P(\xi)$ は $\gamma_S(\xi)$ において k を h に置き換えたものである。上式はさらに、 ϕ に関する微分が直ちに実行できるので、結局次の形に帰着する。

$$\tau_{zz}^{sca} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{zz}^n(\rho) \cos n\phi. \quad (5.20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^n &= -\frac{1}{2} \int_0^a w_z^n(\rho_0) W_{zz}^n(\rho|\rho_0) d\rho_0, \\ W_{zz}^n(\rho|\rho_0) &= W_{zz}^{(P)n}(\rho|\rho_0) + W_{zz}^{(S)n}(\rho|\rho_0), \\ W_{zz}^{(P[S])n}(\rho|\rho_0) &= \rho_0 D_{zz}^{(P[S])n} \int_0^{\infty} J_n(\rho\xi) J_n(\rho_0\xi) \frac{\xi}{\gamma_{P[S]}(\xi)} e^{-\gamma_{P[S]}(\xi)z} d\xi \Big|_{z \rightarrow +0}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

かつ、

$$\begin{aligned} D_{zz}^{(P)n} &= \left(\frac{k}{h} - 2 \frac{h}{k} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right) + \left(\frac{k^2}{h^2} - 2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathcal{F}_{zz}^n, \\ D_{zz}^{(S)n} &= 2 \frac{k^2}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathcal{F}_{zz}^n, \\ \mathcal{F}_{zz}^n &= 2 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{k^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \end{aligned}$$

である。かくして、P, SV 波入射時の法線応力成分に関する境界条件は (5.12), (5.14), (5.20) 式より、

$$\tau_{zz}^n + \bar{\tau}_{zz}^n = 0, \quad 0 \leq \rho < a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

で与えられる。これを何らかの方法で解き、各 n 値毎に $w_z^n(\rho)$ を計算できれば、(5.18) 式を通じて開口変位 $\Delta u_z(\rho, \phi)$ が求められたことになる。

同様な表現は、剪断応力成分に関する境界条件についても得られる。まず、(5.20) 式に対応して散乱応力場は

$$\tau_{\phi z}^{sca} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{\phi z}^n(\rho) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} n\phi, \quad \bar{\tau}_{\phi z}^{sca} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\tau}_{\phi z}^n(\rho) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} n\phi \quad (5.23)$$

の形に展開される。ここで前と同様、 $\{\cdot\}$ の中は上段が P, SV 波、下段が SH 波入射の場合を表し、また sine 展開の場合には $\tau_{\phi z}^n(\rho) \equiv 0$ ($p = \rho, \phi$) が要請される。上式中の諸量は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_{pz}^n &= -\frac{1}{2} \int_0^a w_p^n(\rho_0) W_{pz}^n(\rho|\rho_0) d\rho_0 - \frac{1}{2} \int_0^a w_\phi^n(\rho_0) W_{pz}^n(\rho|\rho_0) d\rho_0, \\ W_{pz}^n(\rho|\rho_0) &= W_{pz}^{(P)n}(\rho|\rho_0) + W_{pz}^{(S)n}(\rho|\rho_0), \\ W_{pz}^{(P[S])n}(\rho|\rho_0) &= \rho_0 D_{pz}^{(P[S])n} \int_0^{\infty} J_n(\rho\xi) J_n(\rho_0\xi) \frac{\xi}{\gamma_{P[S]}(\xi)} e^{-\gamma_{P[S]}(\xi)z} d\xi \Big|_{z \rightarrow +0}, \\ p, q &= \rho, \phi, \end{aligned} \quad (5.24)$$

かつ、

$$\begin{aligned} D_{\rho z}^{(P)n} &= -\frac{4}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \rho^2 \partial z^2}, \quad D_{\rho z}^{(S)n} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - D_{\rho z}^{(S)n}, \\ D_{\phi z}^{(P)n} &= \pm n \frac{4}{k^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -D_{\phi z}^{(P)n}, \\ D_{\phi z}^{(S)n} &= \mp n \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) - D_{\phi z}^{(P)n} = -D_{\phi z}^{(S)n}, \\ D_{\phi z}^{(P)n} &= -\frac{4}{k^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad D_{\phi z}^{(S)n} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - D_{\phi z}^{(P)n}. \end{aligned}$$

ただし上式中の複号も上が P, SV 波、下が SH 波入射の場合を表す。以上の結果より、境界条件は (5.22) 式と同様、次の形に帰着する。

$$\tau_{\rho z}^n + \bar{\tau}_{\rho z}^n = 0, \quad \tau_{\phi z}^n + \bar{\tau}_{\phi z}^n = 0, \quad 0 \leq \rho < a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

明らかに上 2 式は互いに couple しており、個別に解くことはできない。

(5.22) および (5.25) 式は、次節で示されるように亀裂半径を離散化することにより数値的に解かれる。これは Yamashita (1990) に始まり、著者により展開された 2次元 Griffith 亀裂に対する計算法 (第 3, 4 章参照) の拡張であるが、解析的な計算に必要な労力はかなり増大する。しかしその多くは比較的単純な微積分の反復に過ぎず、Krenk and Schmidt (1982) や Martin and Wickham (1983) らの方法よりも数学的に単純である。

5.3 数値計算法

5.3.1 境界条件の離散化

数値計算に際し、前 2 章においては変数を a によって規格化し、変数の頭に \cdot をつけることでそれを明示した (e.g., $\hat{k} = ka$)。このような表記法を採用する代わりに、表現の一層の簡潔化のため本章ではこれ以後 $a = 1$ を仮定する。最終結果において a の値を復活させることは極めて容易である。

いま、亀裂面を半径方向に M 等分し、以下の量を定義しよう。

$$\begin{aligned} s_m &= (m-1)\Delta s, \quad \alpha_m = s_m + \Delta s/2 \quad \text{for } m = 1, 2, \dots, M, \\ \Delta s &= 1/M, \quad \alpha_0 = s_1 = 0. \end{aligned}$$

これらを用いて、法線応力成分に関する境界条件 (5.22) を以下のように離散化する。

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M W_{lm}^n w_z^n(s_m) = \bar{\tau}_{zz}^n(s_l), \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (5.26)$$

ただし、

$$W_{lm}^n = \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} W_{zz}^n(s|\rho_0) d\rho_0 \quad (5.27)$$

である。ここで、上式の積分区間幅が $m=1$ (区間下限が亀裂中心) の場合は $\Delta s/2$ 、それ以外では Δs であることに注意されたい。同様にして、剪断応力成分に関する (5.25) 式は以下のように離散化が可能である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M U_{lm}^n w_p^n(s_m) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M X_{lm}^n w_\phi^n(s_m) &= \bar{\tau}_{\rho z}^n(s_l), \\ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M X_{lm}^n w_p^n(s_m) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M V_{lm}^n w_\phi^n(s_m) &= \bar{\tau}_{\phi z}^n(s_l) \end{aligned} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (5.28)$$

ここで、

$$\begin{aligned} U_{lm}^n &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} W_{\rho, \rho}^n(s_l | \rho_0) d\rho_0, \\ V_{lm}^n &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} W_{\phi, \phi}^n(s_l | \rho_0) d\rho_0, \\ X_{lm}^n &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} W_{\phi, \rho}^n(s_l | \rho_0) d\rho_0 = - \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} W_{\rho, \phi}^n(s_l | \rho_0) d\rho_0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

である。

連立1次方程式(5.26)または(5.28)を解くこと自体は数値的に容易であり、残された問題は係数行列 W_{lm}^n または U_{lm}^n, V_{lm}^n をいかに評価するかである。

5.3.2 係数行列の評価

係数行列の評価法の詳細を漏れなく記述することは、議論を徒に煩雑にするばかりであろう。それゆえ以下では、数値計算の要点を簡潔に述べるにとどめる。例として、 W_{lm}^n および U_{lm}^n の定義式の構成要素

$$Z_{lm}^n \equiv \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 d\rho_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty J_n(\rho\xi) J_n(\rho_0\xi) \frac{\xi}{\gamma_S(\xi)} e^{-\gamma_S(\xi)z} d\xi \Bigg|_{z \rightarrow +0, \rho = s_l} \quad (5.30)$$

について考えよう。この評価法が確立されれば、他の演算子 ($\partial^2/\partial \rho^2$, etc.) を含む要素の取り扱いも類推が可能である。以下、2次元の場合と同様、対角成分 ($l=m$) と非対角成分 ($l \neq m$) とに分けて考える。

(i) $l \neq m, l, m > 1$

2次元の場合と同様、非対角成分の場合には(5.30)式の微分と積分の順序は無条件に交換可能である。同式において微分を先に実行すると、次式が得られる。

$$Z_{lm}^n = \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 d\rho_0 \int_0^\infty J_n(s_l \xi) J_n(\rho_0 \xi) \xi \gamma_S(\xi) e^{-\gamma_S(\xi)z} d\xi \Bigg|_{z \rightarrow +0} \quad (5.31)$$

ところが、上式中の ξ に関する積分 (以下、 $\int d\xi$ と記す) は、被積分関数が $z \rightarrow +0, \xi \rightarrow \infty$ の極限で²

$$\begin{aligned} J_n(s_l \xi) J_n(\rho_0 \xi) \xi \gamma_S(\xi) e^{-\gamma_S(\xi)z} &\sim J_n(s_l \xi) J_n(\rho_0 \xi) \xi^2 \sim \\ &\sim \frac{2\xi}{\pi \sqrt{s_l \rho_0}} \cos\left(s_l \xi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_0 \xi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

なる漸近的挙動を示すため、一般に収束性が悪い。特に、 $\rho_0 = s_l$ が同積分の特異点であることが明らかであるから、その収束性の悪さは対角成分の近傍 ($l \sim m$) ほど顕著である。それゆえ $\int d\xi$ を直接数値計算することは困難である。

上記積分の収束性は、以下の要領での改善される。まず、 $\xi \rightarrow \infty$ で $k/\xi \rightarrow 0$ であることから、以下のような Maclaurin 級数展開が得られる。

$$\begin{aligned} \xi \gamma_S(\xi) e^{-\gamma_S(\xi)z} &= \xi^2 e^{-\xi z} \left[1 + \frac{\xi z - 1}{2} \frac{k^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2 z^2 - \xi z - 1}{8} \frac{k^4}{\xi^4} + \dots \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \xi^2 - \frac{k^2}{2} + O\left(\frac{k^2}{\xi^2}\right), \quad \text{as } z \rightarrow +0. \end{aligned}$$

²ただし、 $\xi z \rightarrow 0$ となるように極限操作をおこなう必要がある。

これを用いて、(5.31)式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} Z_{lm}^n &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 d\rho_0 \int_0^\infty J_n(s_l \xi) J_n(\rho_0 \xi) \left[\xi \gamma_S(\xi) - \xi^2 + \frac{k^2}{2} \right] d\xi + \\ &\quad + \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 I^0(n, n; 2) d\rho_0 - \frac{k^2}{2} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 I^0(n, n; 0) d\rho_0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

ここで、 $I^0(\mu, \nu; \lambda)$ は Lipschitz-Hankel 型積分 (Eason *et al.*, 1955)

$$I^0(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^\infty J_\mu(at) J_\nu(bt) e^{-ct} t^\lambda dt \quad (a, b, c > 0) \quad (5.33)$$

において $a = s_l, b = \rho_0, c = z$ と置き、さらに $z \rightarrow +0$ の極限をとったものを表す。(5.32)式の右辺第1項中の $\int d\xi$ は、被積分関数が $\xi \rightarrow \infty$ で振動性を別として ξ^{-2} の早さで減衰するので、容易に数値計算できる。また $\rho_0 = s_l$ の特異性も除去されており、その近傍 ($l \sim m$) で $\int d\xi$ の計算値が激変する危険もない。それゆえ、 Δs の値を十分小さくすれば(5.32)式を以下のように書き直すことができる。

$$Z_{lm}^n = s_m \Delta s \int_0^\infty J_n(s_l \xi) J_n(\rho_0 \xi) \left[\xi \gamma_S(\xi) - \xi^2 + \frac{k^2}{2} \right] d\xi + I_{lm}^{n,2} - \frac{k^2}{2} I_{lm}^{n,0}. \quad (5.34)$$

残された問題は、積分

$$I_{lm}^{n,j} \equiv \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 I^0(n, n; j) d\rho_0, \quad j = 0, 2 \quad (5.35)$$

の評価法である。ここで、関数 $I^0(n, n, 0)$ および $I^0(n, n, 2)$ は一般に以下のように表現される (付録 E)。

$$\begin{aligned} I^0(n, n; 0) &= c_1(n, 0) \mathbf{K}(\kappa) + c_2(n, 0) \mathbf{E}(\kappa), \\ I^0(n, n; 2) &= c_1(n, 2) \mathbf{K}(\kappa) + c_2(n, 2) \frac{\mathbf{E}(\kappa)}{(s_l - \rho_0)^2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

ただし $\mathbf{K}(\kappa), \mathbf{E}(\kappa)$ は第1種および第2種完全楕円積分であり、その引き数は $\kappa = 2\sqrt{s_l \rho_0}/(s_l + \rho_0)$ である。また $c_i(n, k)$ ($i = 1, 2; k = 0, 2$) は $s_l = \rho_0 = 0$ を除いて正則な有理関数であり、その関数形は付録 E1, E2 節に示す方法により求めることができる。 $I^0(n, n; 0)$ および $I^0(n, n; 2)$ の関数形を(5.35)式に代入すれば、直ちに積分 $I_{lm}^{n,j}$ が計算できる。ただしこれらの関数もまた $\rho = s_l$ ($\kappa = 1$) で特異性を持つので、その近傍 ($l \sim m$) では台形公式のような単純な数値積分法は精度的に不十分であることに注意しなければならない。この特異性は勿論(5.31)式の $\int d\xi$ に由来するものである。このような数値積分に適した方法の例としては、後述の Gauss-Legendre 公式が挙げられる。

以上が Z_{lm}^n の非対角成分の基本的な評価法である。ただし実際の数値計算に際しては、以下の3つの場合についてさらなる注意が必要である。

1. $m > l = 1$
2. $l > m = 1$
3. $l^n \gg m^n > 1$, または $m^n \gg l^n > 1$

対角成分の評価法を考える前に、まずこれらの場合の取り扱い方を以下に示す。

(ii) $m > l = 1$

これは $s_l = s_1 = 0$ の場合に相当する。 $n = 0$ の場合、(5.34)式の右辺第1項は通常通り計算される。残りの項については $\kappa \equiv 0, \mathbf{K}(\kappa) = \mathbf{E}(\kappa) = \pi/2$ であるので、(5.35), (5.36)式、および (E.12), (E.15)式より次式が得られる。

$$I_{1,m}^{0,0} = \Delta s, \quad I_{1,m}^{0,2} = \frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{\alpha_{m-1}}. \quad (5.37)$$

$n \geq 1$ の場合は、係数 $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$ が共に s_1^{-n} の特異性を持つので、(5.35) 式から直接 $I_{1,m}^{n,j}$ ($j=0,2$) を計算することはできない。しかるに $J_n(s_1) = J_n(0) = 0$ であるから、本来の定義式 (5.31) より直ちに

$$Z_{1,m}^n = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (5.38)$$

が得られる。それゆえ、上述の特異性は結果的には互いに打ち消し合うことがわかる。

(iii) $l > m = 1$

(5.34) 式において、 $s_m = s_1 = 0$ を代入すれば、右辺第 1 項は消える。よって残る 2 項について考えればよい。 $n=0$ 及び 1 の場合、これらの項は (i) と全く同様に数値計算できる。 $n \geq 2$ の場合は (ii) と同様、(5.36) の両式の右辺各項に ρ_0^n の特異性が現れるので、(5.31) 式は利用できない。勿論この場合も、両者の和は有限値にとどまる。ところが、驚くべきことに $n \geq 1$ の場合にはこれらの値を計算する必要が全く無いことが後で示される。

(iv) $l^n \gg m^n > 1$, または $m^n \gg l^n > 1$

この場合にも (ii) および (iii) で述べた特異性の問題が影響する。すなわち n がある程度大きい値の場合には、係数 $c_i(\cdot)$ ($i=1,2$) に含まれる $(s_i \rho_0)^{-n}$ なる要素のため、 $I_{1,m}^{n,j}$ ($j=0,2$) の計算値が数値不安定を起す場合がある。このような困難は、行列 $Z = (Z_{1,m}^n)$ の右上隅と左下隅で生じ得る。これを回避するためには、 $I^n(n, n, 0)$ および $I^0(n, n, 2)$ の $s_l/\rho_0 \rightarrow 0$ および $\rho_0/s_l \rightarrow 0$ での漸近形を利用すればよい (付録 E.5)。その結果、 $l^n \gg m^n > 1$ では、

$$I_{1,m}^{n,0} = O(1/\sqrt{n}) \cdot O((m/l)^{n+1}) \approx 0, \quad I_{1,m}^{n,2} = O(\sqrt{n}) \cdot O((m/l)^{n+1}) \approx 0, \quad (5.39)$$

$m^n \gg l^n > 1$ では、

$$I_{1,m}^{n,0} = O(1/\sqrt{n}) \cdot O((l/m)^n) \approx 0, \quad I_{1,m}^{n,2} = O(\sqrt{n}) \cdot O((l/m)^n) \approx 0 \quad (5.40)$$

が得られる。

(v) $l = m > 1$

対角成分においては、2次元の場合の類推より、(5.30) 式の微分はすべての積分記号の外側に置かれるべきである。

$$Z_{mm}^n = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 d\rho_0 \int_0^\infty J_n(s_m \xi) J_n(\rho_0 \xi) \frac{\xi}{\gamma_8(\xi)} e^{-\gamma_8(\xi)z} d\xi \Big|_{z \rightarrow +0} \quad (5.41)$$

実際、上式の収束性は容易に示される (後述)。しかるに微分を予め実行した (5.31) 式は、(i) で予告したように発散する。このことは、(5.41) 式中の微分と積分の順序が交換不能であるにも関わらず、あえて交換したことに起因する。(5.31) 式の積分が持つ特異性は、通常の積分の意味においては評価できず、超特異性 (hypersingularity) と呼ばれる。付録 D.2 節に示したように、このような特異積分は Hadamard の有限部分 (付録 D.5 式) を定義することにより正しく評価することができる。これにより対角成分を非対角成分と同様に扱うことが可能となる。

まず、非対角成分の場合に用いた (5.34) 式から出発する。同式の右辺第 1 項は対角成分の場合も容易に数値計算可能であるから、残りの項について考えればよい。完全楕円積分の引き数 κ は特異点 ($\rho_0 = s_m$) では 1 に等しいので、この点の回りに Laurant 展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} K(\kappa) &= \log \left| \frac{s_m + \rho_0}{s_m - \rho_0} \right| + (\text{正則部分}), \\ E(\kappa) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_m - \rho_0}{s_m + \rho_0} \right)^2 \log \left| \frac{s_m + \rho_0}{s_m - \rho_0} \right| + (s_m - \rho_0)^2 \cdot (\text{正則部分}). \end{aligned}$$

すなわち $K(\kappa)$ は log 特異性を持つ。これより $I_{mm}^{n,0}$ は以下のように近似計算できる。

$$\begin{aligned} I_{mm}^{n,0} &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \left[\rho_0 c_1(n, 0) K(\kappa) - [\rho_0 c_1(n, 0)]_{\rho_0=s_m} \cdot \log \left| \frac{s_m + \rho_0}{s_m - \rho_0} \right| \right] d\rho_0 + \\ &+ [\rho_0 c_1(n, 0)]_{\rho_0=s_m} \cdot [(s_m + \rho_0) \log(s_m + \rho_0) + (s_m - \rho_0) \log|s_m - \rho_0|]_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} + \\ &+ \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 c_2(n, 0) E(\kappa) d\rho_0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

上式に現れる積分項はもはや特異性を持たないので、数値計算が可能である。同様に $I_{mm}^{n,2}$ は以下のよう表現される。

$$\begin{aligned} I_{mm}^{n,2} &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \left[\rho_0 c_1(n, 2) K(\kappa) - [\rho_0 c_1(n, 2)]_{\rho_0=s_m} \cdot \log \left| \frac{s_m + \rho_0}{s_m - \rho_0} \right| \right] d\rho_0 + \\ &+ [\rho_0 c_1(n, 2)]_{\rho_0=s_m} \cdot [(s_m + \rho_0) \log(s_m + \rho_0) + (s_m - \rho_0) \log|s_m - \rho_0|]_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} + \\ &+ \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 c_2(n, 2) \frac{E(\kappa) - 1}{(s_m - \rho_0)^2} d\rho_0 + \\ &+ \text{p.f.} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \frac{\rho_0 c_2(n, 2)}{(s_m - \rho_0)^2} d\rho_0. \end{aligned}$$

ここで右辺第 3 項の被積分関数は log 特異性を持つが、同第 1 項と全く同様に除去できる。また第 4 項の記号 'p.f.' は超特異積分の有限部分を表す。この項はさらに以下のように書き直される。

$$\begin{aligned} (\text{第 4 項}) &= + \text{v.p.} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \left[\rho_0 c_2(n, 2) - [\rho_0 c_2(n, 2)]_{\rho_0=s_m} \right] (s_m - \rho_0)^{-2} d\rho_0 + \\ &+ [\rho_0 c_2(n, 2)]_{\rho_0=s_m} \cdot \text{p.f.} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \frac{d\rho_0}{(s_m - \rho_0)^2}. \end{aligned}$$

ここで右辺第 1 項の特異性が高々 1 乗程度であることから、Cauchy の主値を表す記号 'v.p.' を記した α 同項は付録 D.3 節に示すように、台形公式で近似的に評価できる。また第 2 項は (D.8) 式より直ちに評価できる。以上により、結果的に次の近似式が得られる。

$$\begin{aligned} I_{mm}^{n,2} &= \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \left[\rho_0 c_1(n, 2) K(\kappa) - [\rho_0 c_1(n, 2)]_{\rho_0=s_m} \cdot \log \left| \frac{s_m + \rho_0}{s_m - \rho_0} \right| \right] d\rho_0 + \\ &+ \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \left[\rho_0 c_2(n, 2) \frac{E(\kappa) - 1}{(s_m - \rho_0)^2} d\rho_0 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{8s_m} c_2(n, 2) \right]_{\rho_0=s_m} \cdot \log \left| \frac{s_m + \rho_0}{s_m - \rho_0} \right| \right] d\rho_0 + \\ &+ \left[\rho_0 c_1(n, 2) + \frac{1}{8\rho_0} c_2(n, 2) \right]_{\rho_0=s_m} \times \\ &\quad \times [(s_m + \rho_0) \log(s_m + \rho_0) + (s_m - \rho_0) \log|s_m - \rho_0|]_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} + \\ &+ \frac{2}{\Delta s} \left[[\alpha_m c_2(n, 2)]_{\rho_0=\alpha_m} + [\alpha_{m-1} c_2(n, 2)]_{\rho_0=\alpha_{m-1}} - 2[s_m c_2(n, 2)]_{\rho_0=s_m} \right] - \\ &- \frac{4}{\Delta s} [\rho_0 c_2(n, 2)]_{\rho_0=s_m}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

なお後回しになったが、(5.41) 式の収束性は以下のようにして示される。(i) における議論に習って、同式を

$$\begin{aligned} Z_{mm}^n &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 d\rho_0 \int_0^\infty J_n(s_m \xi) J_n(\rho_0 \xi) \left[\frac{\xi}{\gamma_8(\xi)} - 1 \right] e^{-\gamma_8(\xi)z} d\xi \Big|_{z \rightarrow +0} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 I(n, n; 0) d\rho_0 \Big|_{z \rightarrow +0, \rho_0=s_m} \end{aligned}$$

と書き直す(ただし、ここでの $I(\cdot)$ は (5.33) 式で $a = s_m, b = \rho_0, c = z$ と置き直したものとす)。このとき、右辺第1項中の $\int d\xi$ は、被積分関数が $\xi \rightarrow \infty$ で ξ^{-2} の早さで減衰するので収束する。また第2項中の $I(n, n; 0)$ の特異性は、 $x \approx 0$ (i.e., $I(\cdot) \approx I^0(\cdot)$) では高々 \log 程度である ((5.36) 式参照) から、その ρ_0 に関する積分は収束する。以上より上式は収束する。

(vi) $l = m = 1$

この場合も (iii) と同様、(5.34) 式の右辺第1項がは消えるので、積分 (5.35) のみを考えればよい。まず $n = 0$ の場合を考える。 κ の値は $s_1, s_m \rightarrow 0$ の極限のとり方に依存するが、解が発散しないためには $s_1 \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow 0$) を先に実行することが必要である。このとき、(ii) と同様にして

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{0,0} &= \Delta s / 2, \\ I_{1,1}^{0,2} &= -p.f. \int_0^{\Delta s/2} \frac{d\rho_0}{\rho_0^2} = 2/\Delta s \end{aligned} \quad (5.44)$$

が得られる。ここで第2式の有限部分の計算に (D.9) 式を用いた。 $n \geq 1$ の場合も (ii) と同様、

$$Z_{1,1}^n = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (5.45)$$

である。

以上が係数行列の評価法の概略であるが、実はまだ次の問題が残されている。すなわち (5.38) および (5.45) 式より、 $n \geq 1$ の場合には行列 Z の第1行 ($l = 1$) はすべて0となるので、この行列は正則ではない。この性質は、そのまま 5.3.1 で与えられた係数行列に反映する。この困難を回避するには、例えば境界条件 (5.26) において予め $\tilde{r}_{22}^0(s_1) = \tilde{r}_{22}^0(0) = 0$ を仮定すればよい。このことは、亀裂中心において法線応力が一意に定まるための必要条件でもある。この操作により (5.26) は $(M-1)$ 次の連立1次方程式に帰着し、係数行列 $W = (W_{lm}^n)$ の第1列 ($m = 1$) の値は不要となる。これが (iii) で述べたことの理由である。なお、剪断応力成分に関する係数行列 (5.29) の計算に際しては、上述の $I_{1,1}^{0,0}, I_{1,1}^{0,2}$ に加え、

$$I_{lm}^{n,j} \equiv \int_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \rho_0 I^0(n+1, n; j) d\rho_0, \quad j = \pm 1 \quad (5.46)$$

なる量が現れるが、これらの量の評価法は基本的に $I_{1,1}^{0,0}$ などと同様なので省略する。ここで $I^0(n+1, n; \pm 1)$ の具体的な関数形は付録 E3, E4 で与えられる。

実際の数値積分に当たっては、以下の計算式を用いた。

- $I_{lm}^{n,j}$ ($l \neq m$, ただし $l = 1$ などを除く) の数値計算には、精度が高く計算効率の高い Gauss-Legendre 公式を用いた。
- $I_{mm}^{n,j}$ ($m > 1$) の計算式 (5.42), (5.43) などに含まれる積分項の数値計算には、Gauss-Legendre 公式を用いると特異点近傍で数値不安定を起こす恐れがあるので、複合 Simpson 公式を用いた。
- (5.34) 式の右辺第1項のような半無限区間積分の計算は以下の要領でおこなった。まず積分区間を適当に離散化し、区間毎に Gauss-Legendre 公式で値を逐次計算しては足し合わせる、という過程を反復し、値の変動がある水準を下回ったところで打ち切った。半無限区間積分の専用方法としては Gauss-Laguerre 公式や 2重指数関数型公式などが知られているが、これらは Beessel 関数の持つ振動性に対して安定性を欠くことが結果的に示された。

これらの諸公式の概念に関しては森・他 (1993) に簡潔なまとめがある。なお当然のことではあるが、実際の計算では Fourier 成分 n を無限にとることはできないので、適当な最大値 $n = N$ で打ち切る必要がある。この値は、入射応力場の Fourier 級数展開式 (5.14) を基にして選ばれる。

5.3.3 計算精度の検証

以上より、境界条件 (5.22) または (5.25) を数値的に解くための方法が確立された。本小節ではこの方法の精度を検証するため、本章冒頭で挙げたいくつかの論文との比較照合を試みる。

Mal (1970a) はその先駆的な論文において、無限媒質中にただ1個存在する円形亀裂に P 波が垂直入射したときの回折の問題を扱った。彼は問題の軸対称性を用いることにより1次元の第2種 Fredholm 積分方程式を導き、これを数値的に解くことによって相対開口変位の評価をおこなった。ただし亀裂面は自由表面とし、また Poisson 固体を仮定した。その後 Nishimura and Kobayashi (1988) と Budreck and Achenbach (1988) は、BIEM に基づいた相対変位の数値計算法をそれぞれ独立に開発し、その精度の検証のために Mal の結果の追試をおこなった。以下では、これと同じことを今回著者が開発した方法についても試みよう。まず、Mal らと同様、入射波を

$$u_A^0 = A_0 e^{i k x z} (0, 0, 1) \quad (5.47)$$

と仮定する。これは (5.13) 式に $\theta_p = 0^\circ$ を代入したものであるから、5.2 節の議論より直ちに

$$r_{\rho z}^{nc} = r_{\phi z}^{nc} \equiv 0, \quad r_{z z}^{nc} \equiv \mu \tilde{r}_{\rho z}^0 = i f^{-1} \mu h A_0 \quad (5.48)$$

が得られる。これより解くべき境界条件は、法線応力の Fourier 成分に関する (5.22) 式のうちの次数0のものだけになり、その解 $w_0^0(\rho)$ は求める相対開口変位 $\Delta u_z(\rho, \phi)$ に一致する。本論文の数値計算法により得られた結果を図 5.2a に示す。ただし、すべての Δu_z 値は $k \rightarrow 0, \rho = 0$ での値により規格化した。これに対し、Mal (1970a) および Budreck and Achenbach (1988) の結果を図 5.2b に示す。この両者は大局的にはよく似た傾向を示しているものの、波数 $ka = 1.4, 4.4, 6$ に対しては明確な食い違いを示している。図 5.2a の結果は Budreck and Achenbach のものと極めてよく一致するのみならず、ここでは示さなかった Nishimura and Kobayashi (1988) の Fig. 4 とも調和的である。このことは、著者の計算結果の精度の高さを強く支持するとともに、Mal (1970a) の結果が精度的に不十分であることを示唆している。Griffith 亀裂に関する彼の同様な計算結果 (Mal, 1970b) が著者らのもの (Yamashita, 1990; Kawahara and Yamashita, 1992) とよく一致したことを考慮するならば、上記の誤差は積分方程式を解く際に生じた純数値的なものと予想される。

以上より、今回開発された方法は、不完全 (法線応力における0次の Fourier 成分のみ) ではあるが十分な計算精度を持つことが示された。次節ではこれを第3章と同様、Foldy (1945) の近似に基づく1次散乱理論へ応用する。

5.4 円形亀裂群による1次散乱

5.4.1 理論

著者の修士論文 (河原, 1990; 3.1 節参照) では、Foldy (1945) の近似 (2.12) に基づく基礎方程式 (2.13) を直接的に解き、平均波の実効波数と振幅を求め、前者の値から減衰係数 Q^{-1} と位相速度 v を評価した。しかしながら 4.2 節で述べたように、振幅を求める必要が無い場合にはもっと簡便な方法があり得る。例えば前章では、Lax (1952) の準結晶近似 (2.14) に基づく基礎方程式 (2.16) に演算子 $\nabla^2 + k^2$ (∇^2 は2次元の Laplace 演算子) を乗じたものを解いて実効波数を求めた。これは、2次元 SH (スカラー) 問題では Green 関数が単純な形、すなわちただ1個の第1種 Hankel 関数で与えられ (3.1 節参照)、(4.7) 式を通じて δ 関

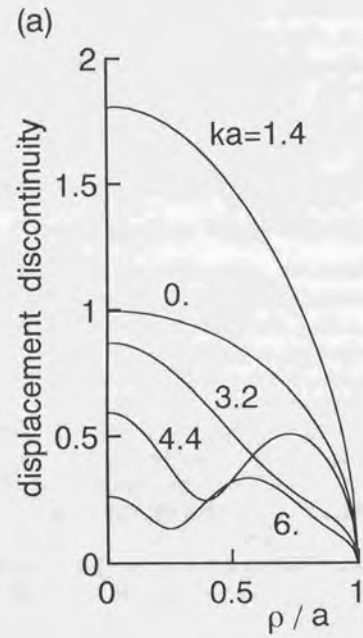


図 5.2. P 波垂直入射時の亀裂面上の開口相対変位の振幅を、 $k \rightarrow 0$ の場合の亀裂中心における値で規格化したもの。図中のパラメータは ka 値。(a) 本研究による結果。 $M = 50$ を仮定。(b) Mal (1970a) および Budreck and Achenbach (1988) による結果 (Budreck and Achenbach の Fig. 2 を一部修正して転載)。黒の細線が前者に、灰色の太線で補間された記号群 (丸、四角および三角印) が後者にそれぞれ対応する。

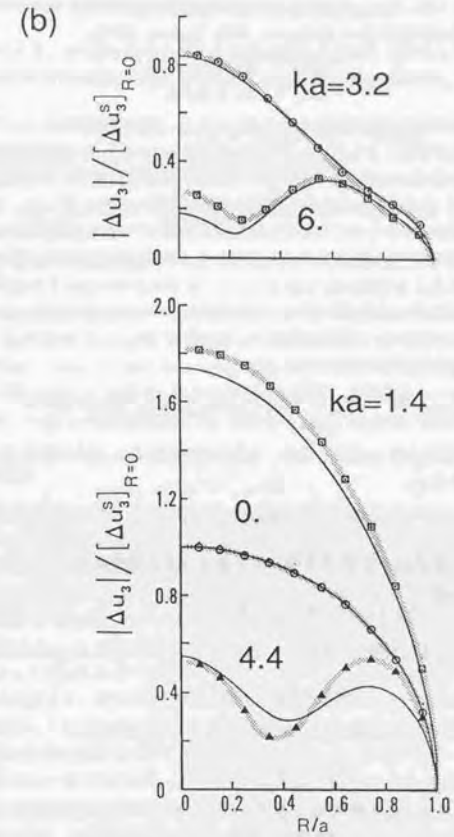


図 5.2. (続き)

数に還元されることを利用しており、これによって2次散乱項(2.16)式の右辺第3項)が可能になったと言える。ところが、問題が1次散乱に限定されている場合には、さらに手間のかからない方法が実は存在する。第3章末尾で述べたように、Foldyの近似の仮定下では亀裂の散乱断面積(scattering cross section) S と Q^{-1} の間には以下の関係式が成り立つ(Ishimaru, 1978; Hudson, 1981)。

$$\nu S = \begin{cases} hQ^{-1} & \text{for P waves,} \\ kQ^{-1} & \text{for S waves.} \end{cases} \quad (3.28, \text{ again})$$

ここで散乱断面積とは、単色平面波がある散乱体に入射したとき、散乱波の発生によって入射波から失われるパワー(=[エネルギー]/[時間])を入射のエネルギー流量(=[エネルギー]/[時間]/[面積])で割った量である。上式は、亀裂分布領域を伝播する平均波のエネルギーの単位距離あたりの減衰率(≡右辺; see Aki and Richards, 1980)が、単位体積に含まれる亀裂の散乱断面積の総和に等しい、ということの意味する。このような関係が、亀裂分布が十分に希薄で亀裂間相互作用(すなわち多重散乱)が無視できる場合にのみ成り立つことは容易に理解できるであろう。それゆえ S の計算法が既知であれば、基礎方程式(2.13)を解かずに Q^{-1} を求めることができる。

自由境界条件を満たす円形亀裂の散乱断面積は以下の方法により求められる(Martin and Wickham, 1983)。まず、自由境界条件を満たすある円形亀裂に、(5.16)式(ただし $C_0 = 1$)で与えられるSH波が入射したとする。このときの散乱断面積は次式で与えられる。

$$S_{SH} = k \cos \theta_S \operatorname{Im} \int_0^\pi d\phi_0 \int_{-\pi}^\pi d\phi_1 \cdot \rho_0 \Delta u_2(\rho_0, \phi_0) e^{-ik\rho_0 \sin \theta_S \cos \phi_0}.$$

ここで Δu_2 は亀裂面上の相対変位の x_2 成分を表す。上式は相対変位の x_1 成分が散乱波には寄与しないことを意味している。ここでさらに、

$$\Delta u_2(\rho, \phi) = ik \cos \theta_S D_2(\rho, \phi)$$

なる規格化をおこない、かつ次式により Φ_j を定義しよう($j = 1, 3$ の場合は後出)。

$$\Phi_j(k, \theta_S) = \int_0^\pi d\rho_0 \int_{-\pi}^\pi d\phi_0 \cdot \rho_0 D_j(\rho_0, \phi_0) e^{-ik\rho_0 \sin \theta_S \cos \phi_0}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.49)$$

なお、 Φ_j の実際の数値計算に必要な表現式を付録DAに示した。これにより、 S_{SH} の表現は次式に帰着する。

$$S_{SH} = k \operatorname{Im} \Phi_2 \cos^2 \theta_S. \quad (5.50)$$

これを(3.28)式に代入すれば Q_{SH}^{-1} の表現式が直ちに得られるが、その結果は

$$\Phi_2 \Rightarrow \Phi, \quad \theta_S \Rightarrow \theta$$

と対応させることにより、2次元の場合の(3.9)と形式的に一致する。一方PおよびSV波の場合は、それぞれの場合の入射波形を与えるよりも、入射応力場を直接

$$\tau_{j3}^{inc} = \mu e^{i h x_1 \sin \theta_P}, \quad j = 1, 3 \quad (5.51)$$

と仮定する方が便利である。ただし第3章と同様、ここでもSnellの法則

$$h \sin \theta_P = k \sin \theta_S \quad (5.52)$$

を通じてP波とS波を統一的に扱うことにする。いま、これにより生じる相対変位の x_1, x_3 成分をそれぞれ $D_1(\cdot), D_3(\cdot)$ と表す、P, SH入射波に対する散乱断面積はそれぞれ以下のように定義される。

$$S_P = h \operatorname{Im} \Phi_1 f \sin^2 2\theta_P + h \operatorname{Im} \Phi_3 f^{-1} (1 - 2f \sin^2 \theta_P)^2, \quad (5.53)$$

$$S_{SV} = k \operatorname{Im} \Phi_1 \cos^2 2\theta_S + k \operatorname{Im} \Phi_3 \sin^2 2\theta_S. \quad (5.54)$$

ここで Φ_1 および Φ_3 は再び(5.49)式により与えられ、また f は(3.22)式で定義される。上式を(3.28)式に代入すれば Q_P^{-1}, Q_{SV}^{-1} の表現が得られるが、その結果は

$$\Phi_3 \Rightarrow \Phi_2, \quad \theta_P \Rightarrow \phi, \quad \theta_S \Rightarrow \theta$$

と対応させることにより、SH波の場合と同様2次元の場合の(3.27)と形式上一致する。

2次元と3次元のそれぞれの場合の間に見られるこのような高度の相似性は、3次元の場合においても位相速度の遅れ

$$\Delta v_P = \alpha - v_P, \quad \Delta v_{SV[SH]} = \beta - v_{SV[SH]}$$

と Q^{-1} との間に、(3.9)式および3.2節で示されたものと同様の

$$Q_P^{-1} \Leftrightarrow \frac{\Delta v_P}{\alpha}, \quad Q_{SV[SH]}^{-1} \Leftrightarrow \frac{\Delta v_{SV[SH]}}{\beta}, \quad \operatorname{Im} \Phi_j \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Phi_j \quad (5.55)$$

なる対応が成り立つことを予測させる(α および β はそれぞれ媒質の固有P, S波速度)。実際、この予測は正しい。上記の対応は平均波が因果率を満たすために要請される(Aki and Richard, 1980)。

上述の議論は、実は任意の境界条件の場合にも成り立つ。すなわち、与えられた境界条件を解くことによって相対変位 $D_j(\cdot)$ が得られれば、本節で示した諸式によって Q^{-1} および ν が評価できる(compare Martin and Wickham, 1983, §7 with Ishimaru, 1978; see also Hudson, 1981)。なお亀裂が非弾性物質を含む場合、上で定義される S は厳密には散乱断面積ではなく全断面積(total cross section)と呼ばれる(Ishimaru, 1978)が、しばしば散乱断面積と同一視される(e.g., Hudson, 1981)³。

5.4.2 結果と考察

上で述べた1次散乱理論に対し、今回開発された円形亀裂の相対変位の数値計算法(5.1-5.3節)を応用してみよう。ここでは予備的な結果として、P波の垂直入射($\theta_P = 0^\circ$)、および水平入射($\theta_P = 90^\circ$)の2例を示す。ただしこれまで通り亀裂面は自由表面とし、またPoisson固体を仮定する。前者は図5.2aの計算と同じく、境界条件(5.22)において $n = 0$ の成分のみを解けばよい。一方後者については、与えられた波数毎に打ち切り次数 N を適当に選び、(5.22)式の各成分を $n = N$ に至るまで逐次解くことにする。以下の計算例では、例えば $ka = 1, 10$ に対してそれぞれ $N = 2, 7$ とした。

今回の計算法によって得られた Q^{-1} 値を図5.3aに実線で示す。これに対応する2次元の場合の結果は図3.3aである。両者の比較より、次元の違いの効果は低波数領域での漸近形に顕著に現れることが示される。すなわちこの領域では、2次元の場合には $Q^{-1} \propto k^2$ であるのに対し、いまの場合は k^3 に比例することが認められる。3次元の場合におけるこのような依存性($Q^{-1} \propto k^3$, すなわち $S_P \propto k^4$)は、通常のRayleigh散乱の理論からの予想と一致する(Ishimaru, 1978; Hudson, 1981)。この点を除けば、3次元の Q^{-1} は以下に述べるような2次元の場合との共通点を示す。まず、高波数領域では2次元の場合と同様 $Q^{-1} \propto k^{-1}$ なる漸近関係を満たすが、これも通常(3次元)の散乱体の挙動($S_P \rightarrow \text{const. as } k \rightarrow \infty$)からの予想と調和的である(Ishimaru, 1978)。また、同じ高波数領域に微小振幅の変動が認められるばかりでなく、そのパターンまでもが図3.3aと酷似している。曲線のピーク値、およびピーク波数もほぼ同程度である。より詳細に見るなら、 θ_P でのピーク波数は図3.3aで $ka \approx 1.1$ (入射波長 $\approx 9.9a$) なのに対し、図5.3aでは $ka \approx 1.8$ (入射波長 $\approx 6.0a$) である。これは、同じ「幅」(2a)を持つ亀裂の場合には、散乱体としての効果を最も強く及ぼし得る波長は、円形亀裂よりもGriffith亀裂の方が長い(すなわち見かけ上「大きな」散乱体である)ことを示唆する。このことはGriffith亀裂が3次元的に見れば無限の奥行きを持つ亀裂であることから理解できる。なお、2次元S波の場合には(入射波長) \sim (亀裂長) $\times 2$ で Q^{-1} がピークをとるこ

³ ちなみに全断面積と(狭義の)散乱断面積の差は吸収断面積(absorption cross section)と呼ばれる(Ishimaru, 1978)。これは散乱体自体の非弾性による波動エネルギーの吸収率を表すが、これに起因する波動の減衰は散乱減衰の一部と見なし、周囲の媒質自体の非弾性による固有減衰と区別するのが普通である(e.g., Kawahara and Yamashita, 1992)。

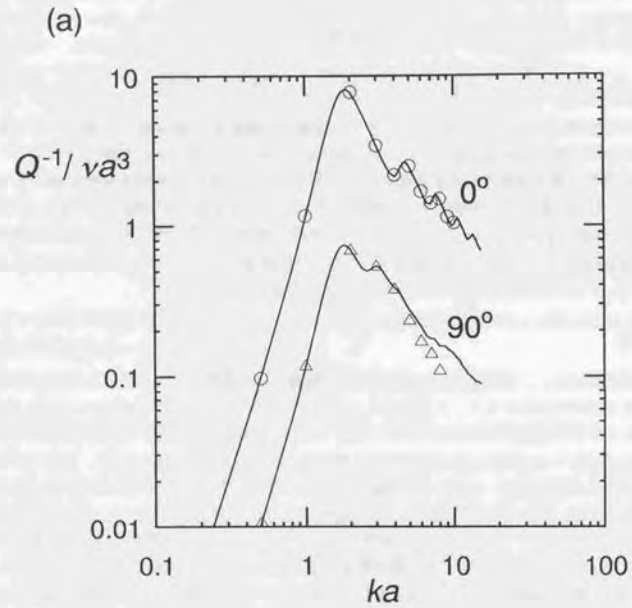


図 5.3. (a) $\phi = 0^\circ$ および 90° の場合の Q_p^{-1} . 図中のパラメータは ϕ 値。直線は本研究による結果。丸印と三角印はそれぞれ Martin and Wickham (1983) と Krenk and Schmidt (1982) が求めた S_p 値から求められた結果。(b) 過去の研究例同士の比較。三角印、黒丸印および白丸印は、それぞれ Krenk and Schmidt (1982), Keogh (1983) および Martin and Wickham (1983) が求めた S_p 値から求められた Q_p^{-1} ($\phi = 0^\circ$)。

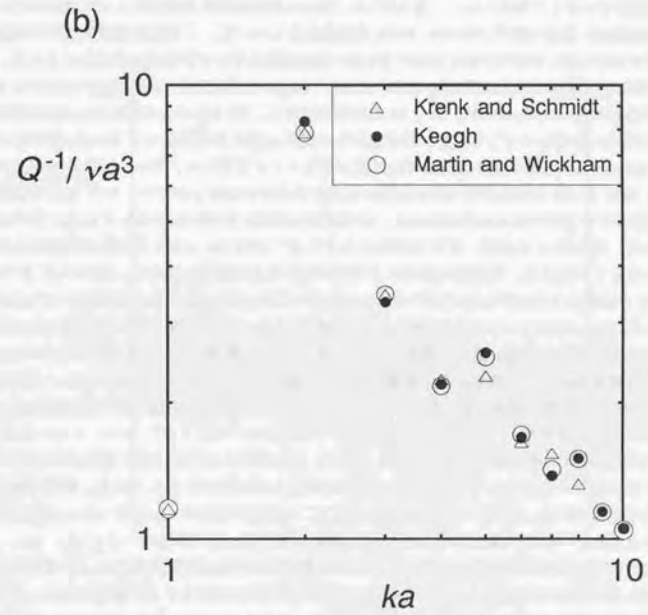


図 5.3. (続き)

と(第3章参照本論文3.4節)を想起するなら、上記のピーク波長の値はどちらも大きすぎの感がある。これは、P波入射によって亀裂面上に生じる回折 Rayleigh 波が散乱強度を強く規定していることを示唆する(Kikuchi, 1981b; see also Keogh, 1985)。上記の値に対応する Rayleigh 波波長はそれぞれ約 5.3a および 3.2a であり⁴、S波の場合と調和的となる。

図 5.3a には、比較のため Krenk and Schmidt (1982; 以下 KS と略記) および Martin and Wickham (1983; 以下 MW と略記) からの計算に基づく結果を併せて示した(図中の丸印および三角印)。5.1節で述べたように、両者の方法は軸対称性を利用した点が今回のものと共通している。KS は、変位場と応力場の Fourier 級数成分をそれぞれ Hankel 変換し、さらに第1種 Legendre 陪関数を含む級数に展開してその係数を評価する、という手順を用い、 S_p , S_{sv} および S_{sh} の値を多数の波数 ($0.5 \leq ka \leq 8$)、入射角および Poisson 比の組み合わせに対して計算した。一方 MW は、Green 関数の適当な変形によって境界条件から導かれた第2種 Fredholm 積分方程式 (Martin, 1981) を出発点としている。この積分方程式は元の境界条件と同じく2重積分を含むが、著者の方法と同様に Fourier 級数展開を通じて単積分に帰着させられる。しかしながらその過程は数学的にはるかに複雑である。彼らは Poisson 固体に関して、 $\theta_p = 0^\circ$ に対する S_p 、およびいくつかの θ_s 値に対する S_{sv} の値を $ka \leq 10$ の範囲で計算し、KS の結果と比較した。特に彼らは、KS および自分達の得た S_p ($\theta_p = 0^\circ$) の値を、短波極限での厳密な漸近展開に基づく Keogh (1983) の結果⁵と比較することにより、KS の結果が高波数では精度が落ちることを示した。また、波数と入射角がともに大きくなると MW と KS の結果の不一致が急激に拡大する現象が認められたが、MW はこの原因を KS の級数和不適当な打ち切りにあると推論した。両者の結果は勿論 (3.28) 式を介して自由に Q^{-1} に変換することができる。図 5.3a によれば、MW の結果に基づく Q^{-1} の値 ($\theta_p = 0^\circ$) と著者の計算値とは全ての波数にわたってよく一致する。同じ場合に対する KS の結果はこの図では省略し、図 5.3b に MW および Keogh (1983) の結果とともに示した。MW の指摘にも関わらず、KS の結果は実用的にみて十分な精度を持つといえよう。これに対し、 $\theta_p = 90^\circ$ の場合の KS の結果は $ka \leq 4$ では著者のものと調和的であるが、それを越えると波数とともに食い違いが増大する。上述の MW の議論、および同図と図 3.3a とのパターンの類似性を考慮するなら、この食い違いは専ら KS の計算誤差によるものと推測される。今回の計算法が高次の Fourier 成分を含む場合であっても、少なくとも低・中波数領域では十分な精度を持つ、ということは最低限言えるであろう。

図 5.3a の Q^{-1} に対応する P 波の速度分散を図 5.4 に示す。残念ながらこの場合は、MW らの結果から位相速度を再現することはできない。同図に対応する 2次元の場合の結果は図 3.6a である。両者の挙動は Q^{-1} の場合以上に似ている。取って相違点を挙げるなら、3次元の場合の Δv のコーナーの方が高波数側に位置することであるが、この事情は Q^{-1} のピーク波数と共通なものである。

以上より、ごく限られた例ではあるものの、2次元 Griffith 亀裂群と 3次元円形亀裂群による散乱現象の間には、少なくとも Foldy (1945) の近似の有効範囲内では高度の類似性があることが確認された。両者の最大の相違は低波数領域での Q^{-1} の漸近関係に認められるが、これは Rayleigh 散乱の次元依存性を表している。また Martin and Wickham (1983) らの結果との比較により、今回開発した計算法の精度の高さが改めて示唆された。今後は、剪断変位が生じる場合をも含め、今回の手法の幅広い応用を図り、精度のさらなる検証につとめるとともに、3次元の1次散乱の理解の深化への貢献が望まれる。将来的には、第3章で考察した一般的な境界条件を導入し、Hudson (1981) の長波1次散乱理論を取り込んだ包括的な3次元1次散乱理論の完成を目指したい。また今回の手法は、このような確率的な散乱の取り扱いのみならず、決定論的な波動計算の基礎としても今後の活用が大いに期待される。Hudson (1980) の長波2次散乱理論を前章のような有限波長の場合に拡張することには多大な困難が予想されるので、決定論的方法の重要性は今後一層高まると予想される。

⁴Poisson 固体の場合、Rayleigh 波速度は $\sqrt{2(1-\nu)/3}\alpha \approx 0.531\alpha$ である。

⁵これは彼の学位論文であるが、その後の投稿論文 (Keogh, 1986) において精度の改善が図られているので、両者の結果は若干食い違う。

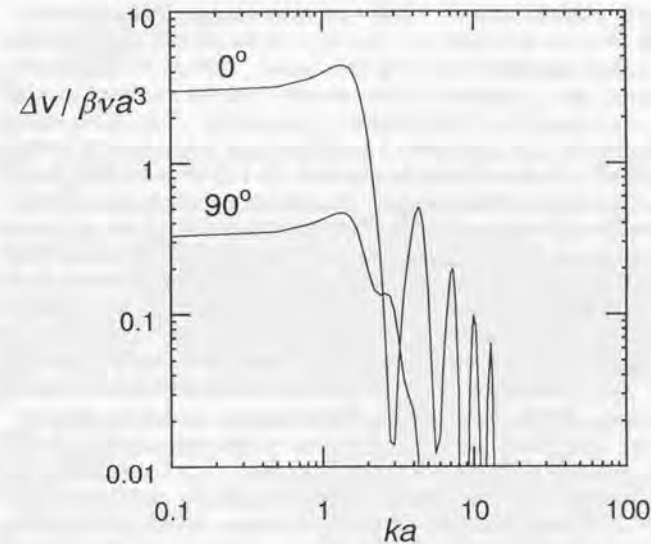


図 5.4. $\phi = 0^\circ$ および 90° の場合の Δv_p . 図中のパラメータは ϕ 値。

Chapter 6

おわりに

本論文では、亀裂を含む媒質中の波動伝播の問題を3つの側面から研究した(第3~5章)。まず、著者の修士論文(河原, 1990)で扱った2次元亀裂分布による1次散乱モデルについて、亀裂面上の境界条件の点で一般化を図った(第3章)。その結果、散乱に影響を及ぼす亀裂間隙流体の物性としては、(修士論文で扱った)粘性よりもむしろ圧縮性の方が重要性であることが指摘された。特に、非圧縮流体を含む場合と流体を全く含まない場合とでは非常に異なった散乱特性を示すことが明らかになった。また、入射角の大きい短波長SV波の散乱特性に特異な挙動が現れることが示された。次に、2次元SH波入射の場合に関して2次散乱の効果を評価した(第4章)。これは有限波長領域における試みとしては初めてのものであり、その結果は3次元円形亀裂分布に関するHudson(1980)の長波近似理論と定性的ながら調和的であることが確認された。しかし、定量的にはその効果は意外に小さく、3次以上の高次散乱が無視できると思われる亀裂分布密度の範囲内では、依然として1次散乱理論が有効な近似であることが示された。最後に、それまでの著者らの手法を拡張することにより、3次元円形亀裂の相対変位を計算するための新しい方法を開発した(第5章)。過去の研究などとの比較により、この方法は十分な計算精度を持つことが確かめられた。この方法を3次元1次散乱理論に適用したところ、2次元の場合と本質的に同様な結果が得られた。ただし低波数領域での散乱減衰の波数依存性には明確な違いが認められた。これらの研究成果は、亀裂による散乱のより包括的な理論を構築するための足がかりとなるべきものである。

ところで、本論文では同一の形状を持つ亀裂の1様空間分布モデルを仮定し、その結果として例えば Q^{-1} のピーク波数が個々の亀裂と同スケールであることが示された。しかしながら、このような仮定は専ら数学的な簡単さのためであって、地球物理的必然性を持つものではない。特に、1様分布の仮定は以下の点で再考の必要がある。もし亀裂分布が非常に非一様で、局所的にはかなり密な領域が存在するならば、たとえ平均的な分布密度が低くてもそのような領域内では多重散乱の効果が働き得る。その結果、その領域全体が一つの散乱体として振る舞い、より大きな波長の地震波を敏感に散乱するかもしれない。Sato(1990)は、種々の観測データから示唆される地殻の平均的な Q_s^{-1} 値の周波数依存性を、Born近似に基づく独自の散乱理論によって解釈し、地殻の弾性定数が数kmのスケールの揺らぎを持つと結論した。しかるに、そのような大域的な地殻不均質性の実体が微小亀裂分布の不均質性である可能性は十分にある(Main *et al.*, 1990)。それゆえ、亀裂の非一様分布モデルによる散乱の研究は今後の極めて重要な課題であり、本論文で扱った亀裂モデルとSatoらの弾性的揺らぎモデルとの橋渡しの役目を果たすことが期待される。なお亀裂の形状に関しては、より一般的な場合、すなわち様々な大きさや方向性を持つ亀裂分布モデルへの拡張はそれほど困難ではない。ただしその場合には、基礎方程式において亀裂の位置のみならず形状を記述するパラメータに関する積分操作が加わることになる(Yamashita, 1990)。

過去の多数の研究論文と同じく、本論文では一貫して亀裂分布を確率論的に扱い、それによる散乱を波数領域で評価することを試みたが、この方法自体にもいくつかの懸点がある。まず第1章で触れたように、

このような方法ではコーダ波の時間発展を扱うことができない。また第4章の末尾で述べたように、より高次の多重散乱をこの方法で評価することは相当な困難を伴うと予想され、あまり現実的ではない。これらの問題はこれまで主としてエネルギー論的なアプローチに基づいて研究されてきたが、亀裂分布モデルに基づく波動論的なアプローチも今後は必要であろう。そのための最も有効な方法の一つは Murai *et al.* (1994) のように決定論的に波動を評価することであり、今後の計算機の能力向上とともに一層その重要性を増すと期待される。一方、非線形な境界条件、例えば Coulomb 型剪断摩擦が働く場合や開口変位に伴って亀裂面が互いに接触し得る場合、あるいは亀裂が非線形固体で充填されている場合などは、波数領域で扱うことが全く不可能である。この場合には、Fourier 変換に頼らずに時間領域で直接に波動場を計算しなければならない (e.g., 山下, 1989; Hirose, 1994)。この問題は比較的新しい研究課題であり、今後の進展が望まれる。

亀裂の分布密度が増すにつれ、多重散乱とともに重要になる現象に亀裂間の連結がある。現実の地殻においては、連結性亀裂が地殻の透水性に関して支配的な役割を果たしていると考えられており (cf. 資源・素材学会, 1990, 1992)。そのような亀裂群を含む媒質の挙動を調べることは重要であろう。しかしながら、そのような媒質を従来のように孤立亀裂の集合体として取り扱うことは適当ではなく、そのモデル化には何らかの新しい発想が必要であろう。この問題もまた今後重点的に取り組まれるべきものの一つと思われる。

参考文献

- Achenbach, J. D. (1973), Wave propagation in elastic solids (North-Holland, Amsterdam).
- Aki, K. (1969), Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves, *J. Geophys. Res.*, **74**, 615-631.
- Aki, K. (1980), Scattering and attenuation of shear waves in the lithosphere, *J. Geophys. Res.*, **85**, 6496-6504.
- Aki, K. and B. Chouet (1975), Origin of coda waves; source, attenuation and scattering effects, *J. Geophys. Res.*, **80**, 3322-3342.
- Aki, K. and P. G. Richards (1980), Quantitative seismology (W. H. Freeman and company, San Francisco).
- Anderson, D. L., B. Minster and D. Cole (1974), The effect of oriented cracks on seismic velocities, *J. Geophys. Res.*, **79**, 4011-4015.
- Benites, R., K. Aki and K. Yomogida (1992), Multiple scattering of SH Waves in 2-D media with many cavities, *Pure Appl. Geophys.*, **138**, 353-390.
- Brace, W. F., B. W. Paulding and C. H. Scholz (1966), Dilatancy in the fracture of crystalline rocks, *J. Geophys. Res.*, **71**, 3939-3953.
- Brace, W. F. and E. G. Bombalakis (1963), A note on brittle crack growth in compression, *J. Geophys. Res.*, **68**, 3709-3713.
- Budiansky, B. and J. R. Rice (1979), An integral equation for dynamic elastic response of an isolated 3-D crack, *Wave motion*, **1**, 187-192.
- Budreck, D. E. and J. D. Achenbach (1988), Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method, *J. Appl. Mech.*, **55**, 405-412.
- Bui, H. D. (1977), An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape, *J. Mech. Phys. Solids*, **25**, 29-39.
- Cheng, C. H. (1993), Crack models for a transversely isotropic medium, *J. Geophys. Res.*, **98**, 675-684.
- Clark, S. P., Jr. (1966), Viscosity, in "Handbook of physical constants" (ed. S. P. Clark, Jr., The geological society of America, New York).
- Cox, S. J. D. and C. H. Scholz (1988), On the formation and growth of faults: an experimental study, *J. Struct. Geol.*, **10**, 413-430.

- Crampin, S. (1984), Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **76**, 135-145.
- Crampin, S. (1987), Geological and industrial implications of extensive-dilatancy anisotropy, *Nature*, **328**, 491-496.
- Douma, J. (1988), The effect of the aspect ratio on crack-induced anisotropy, *Geophys. Prosp.*, **36**, 614-632.
- Eason, B., B. Noble and I. N. Sneddon (1955), On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **247**, 529-551.
- Embley, G. T. and G. C. Sih (1972) (タイトル不明), *Proc. 12th Midwestern Mechanics Conference*, **6**, 473-487.
- Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1954), Tables of integral transforms (McGraw-Hill, New York).
- Eshelby, J. D. (1957), The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **241**, 376-396.
- Foldy, L. L. (1945), The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers, *Phys. Rev.*, **67**, 107-119.
- Fyfe, W. S., N. J. Price and A. B. Thompson (1978), Fluid in the earth's crust (Elsevier, New York).
- Garbin, H. D. and L. Knopoff (1973), The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks, *Quart. Appl. Math.*, **30**, 453-464.
- Garbin, H. D. and L. Knopoff (1975a), The shear modulus of a material permeated by a random distribution of free circular cracks, *Quart. Appl. Math.*, **33**, 296-300.
- Garbin, H. D. and L. Knopoff (1975b), The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks, *Quart. Appl. Math.*, **33**, 301-303.
- Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik (1980), Table of integrals, series, and products, corrected and enlarged edition (Academic Press, Orlando).
- Hirose, S. (1994), 2-D Scattering by a crack with contact-boundary conditions, *Wave Motion*, **19**, 37-49.
- Hoening, A. (1979), Elastic moduli of a non-randomly oriented cracked body, *Int. J. Solids Struct.*, **15**, 137-154.
- Hudson, J. A. (1980), Overall properties of a cracked solid, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **88**, 371-384.
- Hudson, J. A. (1981), Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **64**, 133-150.
- Hudson, J. A. and S. Crampin (1991), On: "A calculus for finely layered anisotropic media" by M. Schoenberg and F. Muir, (Geophysics, 54, 581-589, May 1989), *Geophysics*, **56**, 572-576.
- 今井 功 (1981), 応用超関数論 (サイエンス社, 東京).

- Ishimaru, A. (1978), Wave propagation and scattering in random media (Academic Press, New York).
- 金嶋 聰 (1991), 地球内部の異方性とS波のスプリッティング, *地震* **2**, **44**, 特集号「1980年代の地震学」, 71-83.
- 河原 純 (1990), 破砕帯における弾性波の散乱特性 (東京大学大学院修士論文).
- Kawahara, J. (1992), Scattering of P, SV waves by a random distribution of aligned open cracks, *J. Phys. Earth*, **40**, 517-524.
- Kawahara, J. and T. Yamashita (1992), Scattering of elastic waves by a fracture zone containing randomly distributed cracks, *Pure Appl. Geophys.*, **139**, 121-144.
- Keller, J. B. (1964), Stochastic equations and wave propagation in random media, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **16**, 145-170.
- Keogh, P. S. (1983) (タイトル不明), Ph. D. thesis, University of Manchester.
- Keogh, P. S. (1985), High-frequency scattering by a Griffith crack II: incident plane and cylindrical waves, *Q. Jl Mech. appl. Math.*, **38**, 205-232.
- Keogh, P. S. (1986), High-frequency scattering of a normally incident plane compressional wave by a penny-shaped crack, *Q. Jl appl. Math.*, **39**, 535-566.
- Kikuchi, M. (1981a), Dispersion and attenuation of elastic waves due to multiple scattering from inclusions, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**, 159-162.
- Kikuchi, M. (1981b), Dispersion and attenuation of elastic waves due to multiple scattering from cracks, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **27**, 100-105.
- Kinra, V. K. and A. Anand (1982), Wave propagation in random particulate composite at long and short wavelengths, *Int. J. Solids. Struct.*, **18**, 367-380.
- Krenk, S. and H. Schmidt (1982), Elastic wave scattering by a circular crack, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **308**, 167-198.
- Kuster, G. T. and M. N. Toksöz (1974a), Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part I. Theoretical formulations, *Geophysics*, **39**, 587-606.
- Kuster, G. T. and M. N. Toksöz (1974b), Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part II. Experimental results, *Geophysics*, **39**, 607-618.
- Kuwahara, Y., H. Ito and T. Kiguchi (1991), Comparison between natural fractures and fracture parameters derived from VSP, *Geophys. J. Int.*, **107**, 475-483.
- Landau, L. D. and E. M. Lifshitz (1972), 弾性理論 (佐藤常三訳, 東京図書, 東京).
- Lax, M. (1952), The multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems, *Phys. Rev.*, **85**, 621-629.
- Main, I. G., S. Peacock and P. G. Meredith (1990), Scattering attenuation and the fractal geometry of fracture systems, *Pure Appl. Geophys.*, **133**, 283-304.

- Mal, A. K. (1970a), Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack, *Int. J. Engng. Sci.*, **8**, 381-388.
- Mal, A. K. (1970b), Interaction of elastic waves with a Griffith crack, *Int. J. Engng. Sci.*, **8**, 763-776.
- Malin, P. E., J. A. Waller, R. D. Borchardt, E. Cranswick, E. G. Jensen and J. van Schaack (1988), Vertical seismic profiling of Oroville microearthquakes: velocity spectra and particle motion as a function of depth, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 401-420.
- Martin, P. A. (1981), Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **378**, 263-285.
- Martin, P. A. and F. J. Rizzo (1989), On boundary integral equations for crack problems, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **421**, 341-355.
- Martin, P. A. and G. R. Wickham (1983), Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **390**, 91-129.
- 森 正武・室田一雄・杉原正顕 (1993), 岩波講座 応用数学 [方法 1], 数値計算の基礎 (岩波書店, 東京).
- Murai, Y., J. Kawahara and T. Yamashita (1994), Multiple scattering of SH Waves in 2-D elastic media with distributed cracks, *to be submitted*.
- Nishimura, N. and S. Kobayashi (1987), An improved boundary integral equation method for crack problems, *Proc. IUTAM Symposium on Advanced Boundary Element Methods* (ed. T. A. Cruse, Springer-Verlag, Berlin), 279-286.
- Nishizawa, O. (1982), Seismic velocity anisotropy in a medium containing oriented cracks — transversely isotropic case, *J. Phys. Earth*, **30**, 331-347.
- O'Connell, R. J. and B. Budiansky (1974), Seismic velocities in dry and saturated cracked solid, *J. Geophys. Res.*, **79**, 5412-5426.
- Sasai, Y. (1991), Tectonomagnetism modeling on the basis of the linear piezomagnetic effect, *地震研究所 報*, **66**, 585-722.
- Sato, H. (1977), Energy propagation including scattering effect: single isotropic scattering approximation, *J. Phys. Earth*, **25**, 27-41.
- Sato, H. (1990), Unified approach to amplitude attenuation and coda excitation in the randomly inhomogeneous lithosphere, *Pure Appl. Geophys.*, **132**, 1-29.
- 佐藤春夫 (1991), ランダムな不均質による地震波の散乱, *地震* **2**, **44**, 特集号「1980年代の地震学」, 85-97.
- 資源・素材学会, 地下計測部門委員会 (1990), 地下き裂のキャラクターゼーションワークショップ論文集.
- 資源・素材学会, 地下計測部門委員会・岩盤工学部門委員会 (1992), 第2回地下き裂のキャラクターゼーションワークショップ論文集.
- Sih, G. C. and J. F. Loeber (1968), Torsional vibration of an elastic solid containing a penny-shaped crack, *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**, 1237-1245.

- Sih, G. C. and J. F. Loeber (1969), Normal compression and radial shear waves scattering at a penny-shaped crack in an elastic solid, *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**, 711-721.
- 竹下 徹・唐戸俊一郎 (1989), 岩石の塑性流動によって形成された地球内部の異方性, *地震* **2**, **42**, 255-269.
- Tau, T. H. (1977), Scattering of plane, elastic waves by a plane crack of finite width, *Appl. Sci. Res.*, **33**, 75-88.
- Twersky, V. (1964), On propagation in random media of discrete scatterers, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **16**, 84-116.
- Twersky, V. (1978), Acoustic bulk parameters in distributions of pair-correlated scatterers, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**, 1710-1719.
- 宇津徳治 (1984), 地震学 第2版 (共立出版, 東京).
- van der Hijden, V. H. M. T. and F. L. Neerhoff (1984), Scattering of elastic waves by a plane crack of finite width, *J. Appl. Mech.*, **51**, 646-651.
- Varadan, V. K., Y. Ma and V. V. Varadan (1989), Scattering and attenuation of elastic waves in random media, *Pure Appl. Geophys.*, **131**, 577-603.
- Varadan, V. K. and V. V. Varadan (1979), Frequency dependence of elastic (SH-) wave velocity and attenuation in anisotropic two phase media, *Wave Motion*, **1**, 53-63.
- Varadan, V. K., V. V. Varadan and Y. Ma (1985), Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. II. pair-correlated cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **63**, 1310-1319.
- Varadan, V. K., V. V. Varadan and Y.-H. Pao (1978), Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. I. SH waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, **63**, 1310-1319.
- Weaver, R. L. and Y.-H. Pao (1979), Application of the transition matrix to a ribbon-shaped scatterer, *J. Acoust. Soc. Am.*, **66**, 1199-1206.
- Wu, R. S. (1985), Multiple scattering and energy transfer of seismic waves — separation of scattering effect from intrinsic attenuation — I. Theoretical modelling, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **82**, 57-80.
- Wu, R. S. and K. Aki (1985), Introduction: Seismic wave scattering in three-dimensionally heterogeneous earth, *Pure Appl. Geophys.*, **128**, 1-6.
- Yamamoto, K., M. Kosuga and T. Hirasawa (1981), A theoretical method for determination of effective elastic constants of isotropic composite, *Sci. Rep. Tôhoku Univ., Ser. 5 (Tôhoku Geophys. J.)*, **28**, 47-67.
- 山下輝夫 (1989), 亀裂面上の摩擦が亀裂散乱に及ぼす影響, *地震学会講演予稿集*, No.1, 241.
- Yamashita, T. (1990), Attenuation and dispersion of SH waves due to scattering by randomly distributed cracks, *Pure Appl. Geophys.*, **132**, 545-568.
- Yamashita, T. and L. Knopoff (1989), Models of aftershock occurrence, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **91**, 13-26.

- Yamashita, T. and L. Knopoff (1992), Model for intermediate-term precursory clustering of earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **97**, 19873-19879.
- Yoshioka, N. and M. Kikuchi (1993), Visco-elastic response of joints to transmission waves, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 1143-1146.

Appendix A

多重散乱の評価に関するいくつかの方法論について

Lax (1952) の準結晶近似 (2.14) に関して、Keller (1964) は 2.2 節で述べたような振動論的解釈を与えた。その結果、Lax の近似が 3 次以上の多重散乱の無視と等価であることが示され、基礎方程式が (2.16) 式で与えられることが再確認された。Hudson (1980) および本論文はこの Keller 流の解釈を前提としている。ところが、同じ近似を用いている Varadan らの一連の研究 (Varadan *et al.*, 1978; Varadan and Varadan, 1979; Varadan *et al.*, 1985, 1989, etc.; 第 4 章冒頭参照) ではこれとは全く異なる立場がとられている。本章ではこのことについて簡単にコメントする。

Varadan らのグループによる準結晶近似の物理的解釈は Twersky (1978, etc.) に基づいている。4.1 節で述べたように、任意の散乱体のランダム分布が満たす対相関関数 g は一般に散乱体の数密度の関数であり、その形を正確に知ること自体は決して容易ではない。しかしながら、もしそれが可能ならば、準結晶近似は原理的に任意の (ただし最密充填にいたるまでの) 分布密度に対して有効である、というのが彼らの主張である。あるいは次のようにも換言できるであろう — (2.14) 式は結晶構造に対しては厳密に成り立つ (第 2 章脚注 1 参照) が、これを現実のランダム分布に適応したときの近似誤差は、 g の関数形の適当な調節により常に克服可能である、と。このような主張に基づいて得られた結果は、それゆえすべての次数の多重散乱を考慮したものと解釈される。彼らのこのような解釈は、一見 Keller のそれとは相容れない。しかしながら、その有効性や適用限界、あるいは Keller の解釈との物理的関係などに関しては、著者の知る限りいままですら十分に議論されていない。また、Varadan らが用いている基礎方程式も実は (2.16) 式ではない。彼らの理論は、(2.14) 式を (2.10) 式に直接代入した後、暗黙のうちに Foldy の近似 (2.12) を適用した式

$$\langle u_i \rangle = u_i^0 + \nu \int S_i^j \langle u_j \rangle g(r_j | r_i) dr_j \quad (A.1)$$

に基づいている。この方程式と (2.16) 式の関係についてもこれまであまり検討されていないように見える。これらの不明確な問題を解決することは数学的に容易ではなく、また本論文の主旨からもはずれるので、今後の議論を待つこととしてこれ以上は取り扱わない。しかしながら、論理の明快さの点では Keller の解釈の方が優れている。また Varadan らの結果によれば、散乱体の分布密度がある値を越すと、散乱の効果も密度とともに減少するという逆転現象が現れる (Varadan *et al.*, 1985) が、これは直感的に不自然である (cf. Cheng, 1993)。彼らは既存の実験データを基に自分達の理論の検証をおこなっている (Varadan *et al.*, 1989) もの、高密度領域における上記の挙動を支持するデータは 1 例のみ (Kinra and Anand, 1982) であり、十分な検証とは言えない。このような点を考慮すれば、密度に関して予め適用限界を明確に規定している Keller 流の方法の方が安全と言えよう。なお、Varadan *et al.* (1989) に “As mentioned by Hudson (1980), for random distributions, the QCA is accurate to the third order (triple scattering).” (QCA は

Quasi-Crystalline Approximation の略) という記述が見られるが、これは勿論誤りである。

ところで、Yamamoto *et al.* (1981) および Nishizawa (1982) は、静的条件下で準結晶近似に基づかない多重散乱の取り扱いをおこなっているの、参考までにここで触れておく。Yamamoto *et al.* は、十分に希薄な内包物 (inclusion) 分布を媒質に埋め込んで媒質全体の実効弾性定数を計算する、という過程を逐次反復することにより、任意の分布密度に対して弾性波速度を計算する方法 ("A New Self-Consistent Scheme"; NSC) を提示した。彼らは、過去の種々の理論との比較、および Kuster and Toksöz (1974b) の実験データとの照合から、NSC 法があらゆる分布密度に対して有効であると結論した。その後 Nishizawa は、Hudson (1980) が扱ったのと同様な配向性亀裂分布に対してこの方法を拡張した。Douma (1988) は彼の計算法を Hudson のものと比較し、後者の適用範囲を議論している。しかしながら、NSC 法自体が本当に適用限界を持たないかどうかの実験的検証はまだ十分ではないように見える。また同方法の物理的な意味、とりわけ同方法が g の効果を見逃して内包物同士の重なり合いを許容している点に関しては、議論の余地が残されていると思われる。これらの問題は今後の課題である。同じ内包物分布に関する Varadanらの理論との比較も極めて興味深い問題であろう。

Appendix B

亀裂面上の境界条件について

本章では、亀裂内部が周囲と異なる物質で満たされている場合の境界条件についてまとめる。本文では亀裂内物質が流体の場合のみを扱っているが、ここでは Hudson (1981) にならって、物質が弾性的な場合をも含めることにする。

いま、亀裂の間隙は一様な厚さ ε ($\ll a$) を持つと仮定する。すなわち、2次元の場合は2辺 $2a$, ε の矩形、3次元の場合は半径 a , 高さ ε の円板形の間隙を仮定する。間隙の形の単純な表現としては、むしろ楕円形もしくは楕円体形の方が普通かも知れない (e.g., Budiansky and O'Connell, 1976; Hudson, 1981; Nishimura, 1982)。例えば Hudson (1981) は、亀裂間隙の形として3軸が a , a , c ($a \gg c$) の3次元回転楕円体を仮定して亀裂の相対変位を評価している。しかし、彼の依拠する Eshelby (1957) の理論は静的な応力場を前提としており、動的問題への拡張は必ずしも容易では無いように見える。ここでは、動的な場合でも取り扱いが便利であることから前述の仮定を採用することにする。

ここで、上述の亀裂に対して外部からある周波数 ω の単色波が入射したとしよう。ただしその波長は、亀裂を面と見なせる程十分に ε より大きいとする。入射波が亀裂面上に作る応力場を τ^{inc} とすると、それを打ち消そうとして亀裂に相対変位が生じ、外部に散乱波を放出する。散乱波が亀裂面上に作る応力場を τ^{sc} , また変位に対して働く抵抗応力の大きさを p とすると、それらの満たすべき境界条件は一般に

$$\tau^{inc} + \tau^{sc} = p \quad \text{at any point on the crack surface} \quad (B.1)$$

の形で与えられる。以下、問題を剪断応力成分と法線応力成分とに分けて取り扱う。

B.1 剪断応力場に関する境界条件

まず、亀裂内物質が周囲の媒質の剛性率 μ とは異なる剛性率 μ' を持つ弾性体であるとする。このとき、 ε が十分小さいという仮定より、亀裂面上のある点における剪断変位 Δu_{shear} とそれに対する剪断抵抗応力 p_{shear} は、亀裂端のごく近傍を除いて比例すると見なせる。よって、

$$p_{shear} = \frac{\mu'}{\varepsilon} \Delta u_{shear},$$

あるいは、

$$p_{shear} = \chi \mu a^{-1} \Delta u_{shear}, \quad \chi = \frac{\mu' a}{\mu \varepsilon} \quad (B.2)$$

と表される。ただしパラメータ χ は無次元量であり、また ε/a は亀裂のアスペクト比の2倍に相当する。亀裂内物質が粘性率 η の流体の場合は、同様にして

$$p_{shear} = \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{shear}$$

となる。ここでさらに、入射波の時間依存性が $\exp(-i\omega t)$ で表されるとするなら、 Δu の時間微分は単に $-i\omega$ を乗じればよいから、

$$p_{\text{shear}} = -i\sigma\mu k\Delta u_{\text{shear}}, \quad \sigma = \frac{\beta\eta}{\mu\varepsilon} \quad (\text{B.3})$$

となる。ただし β は媒質の S 波速度、 $k = \omega/\beta$ は入射波の S 波数であり、またパラメータ σ は無次元量である。同式は (B.2) 式において、

$$\mu' \rightarrow -i\omega\eta, \quad \text{or} \quad \chi \rightarrow -ika\sigma$$

と置き換えたものに他ならない (cf. Hudson, 1981)。なお、亀裂内物質が存在しないなら $\chi = \sigma = 0$ であり、亀裂面は自由表面となる。

亀裂内物質が粘弾性体の場合への拡張も可能である (see e.g., 宇津, 1984)。例えば剛性率 μ' 、粘性率 η の Voigt 固体の場合は、(B.2) 式において、

$$\mu' \rightarrow \mu' - i\omega\eta, \quad \text{or} \quad \chi \rightarrow \chi - ika\sigma$$

と置き換えればよい。また Maxwell 固体の場合なら、

$$\mu' \rightarrow \left(\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{i\omega\eta}\right)^{-1}, \quad \text{or} \quad \chi \rightarrow \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{ika\sigma}\right)^{-1}$$

である。より一般的な粘弾性体の場合の p の導出も容易である。

B.2 法線応力場に関する境界条件

亀裂内物質を剛性率 μ' 、体積弾性率 K' の弾性体であるとしよう。この場合も前節と同様、亀裂端のごく近傍を除く亀裂面上の各点で開口変位と法線抵抗応力は比例するとしてよい。ただし、亀裂内物質の変形は法線方向のみと見なせるから、実効体積弾性率は K' ではなく、

$$K' + \frac{4}{3}\mu'$$

であることに注意せねばならない (see e.g., Landau and Lifshitz, 1972)。よって開口変位を Δu_{normal} と表すと、法線抵抗応力 p_{normal} は、

$$p_{\text{normal}} = \gamma\mu a^{-1}\Delta u_{\text{normal}}, \quad \gamma = \frac{K' + \frac{4}{3}\mu' a}{\mu\varepsilon} \quad (\text{B.4})$$

で与えられる。ちなみに亀裂内物質の Poisson 比を s' と置くと、 γ を

$$\gamma = \frac{2(1-s')\mu' a}{1-2s'\mu\varepsilon} \quad (\text{B.5})$$

と表すことも可能である。また (B.4) 式において $\mu' \rightarrow 0$ とすると、

$$\gamma = \frac{K' a}{\mu\varepsilon} \quad (\text{B.6})$$

が得られるが、これは亀裂内物質が圧縮性流体の場合に相当する¹。なお、亀裂内物質が存在しないときに $\gamma = 0$ であることは前節と同様である。これに対し、 p_{normal} の有限性より、

$$\gamma \rightarrow \infty \iff \Delta u_{\text{normal}} \equiv 0 \quad (\text{B.7})$$

が明らかであるが、これは亀裂内物質が完全に非圧縮性である ($K' = \infty$) か、またはアスペクト比が無限小である場合に相当する。

¹この場合の流体はもっぱら液体を指し、気体のように断熱的なものは含まれない。

B.3 亀裂の形状の効果について

ここで仮定した厚さ一定の亀裂と、本章冒頭で述べたような別種の形の亀裂とで、同じ入射波に対する応答がどれだけ異なるかは興味ある問題である。これについては、Hudson (1981) が長波極限 ($ka \ll 1$) の場合について言及している。それによれば、粘性流体を含む 3 軸 a, a, c の楕円体形亀裂に生じる相対剪断変位は、一様な厚さ

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{3}{2}c, & \text{if } ka\sigma \ll 1, \\ \frac{8}{3}c, & \text{if } ka\sigma \gg 1 \end{cases}$$

を持った円板形亀裂に生じるものと同一である。前者の値は同体積の円板形亀裂の厚さ $(\pi/2)c$ に近く、後者は楕円体亀裂の厚さ $2c$ を上回る。このことから一般論を引き出すことは容易ではないが、散乱問題を考える上では、仮定した亀裂の形状に対しても現象がある程度依存することは留意する必要があるだろう。

Appendix C

第4章の補遺

本章は第4章に対する数学的補足に相当する。ただしその内容は各節毎に独立であり、互いに関連性はない。

C.1 (4.13) - (4.15) 式の導出

まず、演算子 $\nabla_j^2 = \partial^2/\partial p_j^2 + \partial^2/\partial q_j^2$ を定義する。このとき、直ちに次式が得られる。

$$\nabla_j^2 e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} = -(k^2 \sin^2 \theta + K_Y^2) e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j}.$$

また、(4.7) 式より

$$(\nabla_j^2 + k^2) H_0^{(1)}(kR_{j0}) = 4i\delta(X - p_j - \xi_j)\delta(Y - q_j)$$

である。これらを用いると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(kR_{j0}) \nabla_j^2 e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} - e^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} \nabla_j^2 H_0^{(1)}(kR_{j0}) &= \\ = (k^2 \sin^2 \theta - K_Y^2) H_0^{(1)}(kR_{j0}) - 4ie^{ikp_j \sin \theta + iK_Y q_j} \delta(X - p_j - \xi_j)\delta(Y - q_j). \end{aligned} \quad (C.1)$$

上式を用いて (4.12) 式を変形すると、(4.13) - (4.15) 式が得られる。

C.2 (4.21), (4.22) 式の成立条件

ある実数 A, B に対して

$$\sin \Theta = \frac{A}{K}, \quad \cos \Theta = \frac{B}{K}, \quad K \equiv \sqrt{A^2 + B^2} \quad (C.2)$$

を満たす Θ が常に存在することは自明であり、次の関係式を満たす。

$$A \cos \psi + B \sin \psi = K \sin(\psi + \Theta). \quad (C.3)$$

以下では、 A, B が複素数の場合について、そのような Θ が存在するための条件を示す。まず、 Θ の実部と虚部をそれぞれ Θ_1, Θ_2 とおけば、

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \sin \Theta_1 \cosh \Theta_2 + i \cos \Theta_1 \sinh \Theta_2, \\ \cos \Theta &= \cos \Theta_1 \cosh \Theta_2 - i \sin \Theta_1 \sinh \Theta_2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\tan \Theta_1 &= \frac{\operatorname{Re}(A/K)}{\operatorname{Re}(B/K)} = -\frac{\operatorname{Im}(B/K)}{\operatorname{Im}(A/K)}, \\ \tanh \Theta_2 &= \frac{\operatorname{Im}(A/K)}{\operatorname{Re}(B/K)} = -\frac{\operatorname{Im}(B/K)}{\operatorname{Re}(A/K)}\end{aligned}$$

である。ここで記号 'Re', 'Im' はそれぞれ複素数の実部と虚部を表す。上式が成り立つための必要十分条件は、

$$\left| \frac{\operatorname{Im}(A/K)}{\operatorname{Re}(B/K)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\operatorname{Im}(B/K)}{\operatorname{Re}(A/K)} \right| \leq 1 \quad (\text{C.4})$$

である。従ってこれが求める条件である。

ここで、

$$A = k \sin \theta, \quad B = K_Y \equiv k \cos \theta + O(\nu a^2), \quad \nu a^2 \ll 1$$

とすると、 K は (4.22) の第1式で与えられ、かつ (C.4) 式を満たす。よって (C.2) 式 (それゆえ (4.22) の第2式) を満たす Θ は確かに存在し、(C.3) が成立する。以上より、(4.21), (4.22) 式のような置き換えは成立する。

C.3 (4.23) 式の導出

(4.21) 式を用いることにより、(4.20) 式は以下のように書き直される。

$$I_4 = \int_0^{2\pi} e^{iKR_{1j} \sin(\psi_0 + \psi_1 + \Theta) + i\eta\psi_1} d\psi_1. \quad (\text{C.5})$$

同式は Bessel 関数の積分表示式 (e.g., Gradshteyn and Ryzhik, 1980) によく似ているが、 Θ が複素数である点が異なる。ここで、複素平面上に図 C.1 のような積分路を考える。このとき、

$$I_4 \equiv \int_{C_0} e^{iKR_{1j} \sin(\psi_0 + \psi_1 + \Theta) + i\eta\psi_1} d\psi_1 = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

である。しかるに、 \int_{C_3} において $\psi_1 - 2\pi = \psi_1'$ なる変数変換をすれば直ちに

$$\int_{C_3} = -\int_{C_1}$$

が示される。よって、

$$I_4 = \int_{C_2} e^{iKR_{1j} \sin(\psi_0 + \psi_1 + \Theta) + i\eta\psi_1} d\psi_1$$

であるが、ここでさらに $\psi_1 + \Theta = \psi$ なる変換を施せば、次式に帰着する。

$$I_4 = e^{-i\eta\Theta} \int_0^{2\pi} e^{iKR_{1j} \sin(\psi_0 + \psi) + i\eta\psi} d\psi. \quad (\text{C.6})$$

同様に Bessel 関数の積分表示式を適用すれば (4.23) 式が得られる。

C.4 (4.38) 式の導出

(3.10) 式 (ただし、 $\sigma = 0$) より、

$$\sum_{l=1}^{M-1} H_{jl}^{-1} e^{ikl_1 \sin \theta} = \frac{i}{4} D_j, \quad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad (\text{C.7})$$

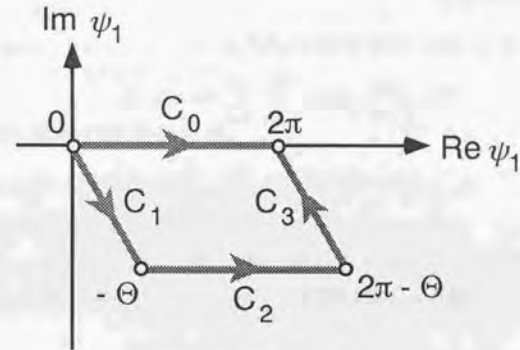


図 C.1 複素平面上の積分路。ここで Θ は複素数。

である。これに(3.12)式を適用すれば、次式が得られる。

$$\Delta s \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{M-1} H_{jl}^{-1} e^{ik(s_l - s_j) \sin \theta} = \frac{i}{4} \bar{\Phi}. \quad (C.8)$$

一方、(C.7)式において θ を $-\theta$ と置き換えてみよう。これは、入射波 u_A^0 の伝播方向を Y 軸に関して反転させることに他ならないから、亀裂面上の変位 $D(\xi)$ も y 軸に関して反転する。よって、

$$\sum_{l=1}^{M-1} H_{jl}^{-1} e^{ik s_l \sin(-\theta)} = \sum_{l=1}^{M-1} H_{jl}^{-1} e^{-ik s_l \sin \theta} = \frac{i}{4} D_{M-l}, \quad j=1, 2, \dots, M-1 \quad (C.9)$$

である。これらの結果、および行列 $\mathbf{H}^{-1} = (H_{lm}^{-1})$ の対称性(H_{lm} の定義式(3.11)を参照)を利用すれば、(4.37)式から(4.38)式が得られる。

C.5 (4.40) 式の証明

前節の結果を利用すると、(4.40)式は以下のように変形できる。

$$\bar{\Phi}^2 + \frac{i\pi \Delta s}{k^2 \cos^2 \theta} \Sigma(1) = \sum_{l=1}^{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} D_{M-l} A_{lm} D_m.$$

ここで、

$$A_{lm} = e^{ik(s_l - s_m) \sin \theta} \Delta s + \frac{i\pi}{k^2 \cos^2 \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n J_{lm}^n \Big|_{\zeta \rightarrow 1}$$

である。従って、

$$A_{lm} = 0, \quad l, m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (C.10)$$

を示せばよい。まず $l=m$ の場合は、次節の結果を用いることにより上式の成立は直ちに示される。 $l \neq m$ の場合も、(C.13)、(C.16)、(C.17)式を代入すると上式は次の形に帰着する。

$$\begin{aligned} k^2 \cos^2 \theta e^{ik s_{lm} \sin \theta} &= \\ &= \frac{\bar{k}}{s_{lm}} J_1(\bar{k} s_{lm}) + \\ &+ i \sum_{n=1,3,5,\dots} \sin n\theta \left[\frac{2n^2}{s_{lm}^2} J_n(\bar{k} s_{lm}) - \frac{\bar{k}}{s_{lm}} \{J_{n-1}(\bar{k} s_{lm}) - J_{n+1}(\bar{k} s_{lm})\} \right] + \\ &+ \sum_{n=2,4,6,\dots} \cos n\theta \left[\frac{2n^2}{s_{lm}^2} J_n(\bar{k} s_{lm}) - \frac{\bar{k}}{s_{lm}} \{J_{n-1}(\bar{k} s_{lm}) - J_{n+1}(\bar{k} s_{lm})\} \right]. \quad (C.11) \end{aligned}$$

ここで $s_{lm} = s_l - s_m$ である。同式は以下のようにして証明される。まず、Bessel関数の母関数(e.g., Gradshteyn and Ryzhik, 1980)

$$e^{iz \sin \theta} = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n}(x) \cos 2n\theta + i J_{2n-1}(x) \sin(2n-1)\theta]$$

に $\cos^2 \theta$ を乗じ、三角関数の加法定理を用いて変形すると、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta e^{iz \sin \theta} &= J_0(x) \cos^2 \theta + \\ &+ i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \left[\frac{1}{2} \sin(2n-3)\theta + \sin(2n-1)\theta + \frac{1}{2} \sin(2n+1)\theta \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \left[\frac{1}{2} \cos 2(n-1)\theta + \cos 2n\theta + \frac{1}{2} \cos 2(n+1)\theta \right] = \\ &= J_0(x) \cos^2 \theta - \frac{1}{2} J_0(x) \cos 2\theta + \frac{1}{2} J_2(x) + \\ &+ i \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ J_n(x) + \frac{1}{2} \{J_{n-2}(x) + J_{n+2}(x)\} \right\} \sin n\theta + \\ &+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ J_n(x) + \frac{1}{2} \{J_{n-2}(x) + J_{n+2}(x)\} \right\} \cos n\theta. \end{aligned}$$

同式はさらに、漸化式

$$2n J_n(x) = x [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

を用いることにより、次式に帰着する。

$$\begin{aligned} x^2 \cos^2 \theta e^{iz \sin \theta} &= x J_1(\bar{k} s_{lm}) + i \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n(x) \sin n\theta + \sum_{n=2,4,6,\dots} A_n(x) \cos n\theta, \\ A_n(x) &= 2n^2 J_n(x) - x [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

上式は、(C.11)式において $\bar{k} s_{lm} = x$ (ただし $s_{lm} \neq 0$)と置いたものと一致する。よって(C.11)式は証明された。以上より、(4.40)式の証明はなされた。

C.6 (4.42) 式中の諸量の計算

C.6.1 $\hat{F}_n|_{\zeta \rightarrow 1}$, および $[\partial \hat{F}_n / \partial \zeta]|_{\zeta \rightarrow 1}$

F_n の定義式(4.26)は以下のように書き直せる。

$$\hat{F}_n = \frac{\bar{K}}{2} H_n^{(1)}(2\bar{k}) [J_{n-1}(2\bar{k}) - J_{n+1}(2\bar{k})] - \frac{\bar{k}}{2} J_n(2\bar{k}) [H_{n-1}^{(1)}(2\bar{k}) - H^{(1)}(2\bar{k})]. \quad (C.12)$$

上式に対し、Bessel関数 $J_n(\cdot)$ とNeumann関数 $N_n(\cdot)$ との間の関係式(Gradshteyn and Ryzhik, 1980)

$$J_n(x) N_{n+1}(x) - J_{n+1}(x) N_n(x) = -\frac{2}{\pi x}$$

を用いれば、実は n, k によらず、

$$\hat{F}_n|_{\zeta \rightarrow 1} = -\frac{i}{\pi} \quad (C.13)$$

であることが示される。一方、(4.22)式より、

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial \zeta} = \frac{\zeta k^2 \cos^2 \theta}{\bar{K}} \rightarrow k \cos^2 \theta, \quad \text{as } \zeta \rightarrow 1$$

であるので、これを用いて(C.12)式を ζ で微分すれば次式が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{F}_n \Big|_{\zeta \rightarrow 1} &= \frac{1}{2} k \cos^2 \theta \left[H_n^{(1)}(2\bar{k}) \{J_{n-1}(2\bar{k}) - J_{n+1}(2\bar{k})\} + \right. \\ &+ \bar{k} H_n^{(1)}(2\bar{k}) \{J_{n-2}(2\bar{k}) - 2J_n(2\bar{k}) + J_{n+2}(2\bar{k})\} - \\ &\left. - \bar{k} \{J_{n-1}(2\bar{k}) - J_{n+1}(2\bar{k})\} \{H_{n-1}^{(1)}(2\bar{k}) - H_{n+1}^{(1)}(2\bar{k})\} \right]. \quad (C.14) \end{aligned}$$

特に、上式中の $J_n(2\bar{k})$ および $H_n^{(1)}(2\bar{k})$ を $\bar{k} \rightarrow 0$ の回りにLaurent展開してやれば、 $\bar{k} \rightarrow 0$ での極限値が以下のように求められる。

$$\lim_{\bar{k} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{F}_n \Big|_{\zeta \rightarrow 1} = -\frac{i\pi}{\pi} \cos^2 \theta. \quad (C.15)$$

C.6.2 $J_{lm}^n|_{\zeta \rightarrow 1}$

本節では (4.35) 式の積分を実行する。非対角成分に関して微分と積分の順序が交換可能なのは、(3.12) 式で定義される H_{lm} と同様である。ただし H_{lm} と異なり、いまの場合は超特異性を持たないので、対角成分は非対角成分の極限 ($s_{lm} \rightarrow 0$) として求めることができる。なお、 $\Delta s = 2/M$ は十分に小さいとする。

$n=0$ の場合は、直ちに

$$J_{lm}^0 = -\frac{k\Delta s}{s_{lm}} J_1(ks_{lm}) \quad \text{for } l \neq m, \quad J_{mm}^0 = -\frac{1}{2} k^2 \Delta s \quad (\text{C.16})$$

が得られる。これは ζ に依存しない。

$n \geq 1$ の場合は、 c_n が ψ_0 を通じて \hat{y} に依存することに注意せねばならない。 ψ_0 の陽な表現は、図 4.2b より、

$$\psi_0 = \tan^{-1} \frac{\hat{y}}{s_l - \xi} + \begin{cases} 0 & \text{for } s_l > \xi, \\ \pm\pi & \text{for } s_l < \xi, \quad \pm\hat{y} > 0 \end{cases}$$

で与えられるから、

$$\lim_{\hat{y} \rightarrow 0} \psi_0 = \begin{cases} 0 & \text{for } s_l > \xi \\ \pi & \text{for } s_l < \xi \end{cases}, \quad \lim_{\hat{y} \rightarrow 0} \frac{\partial \psi_0}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{s_l - \xi}, \quad \lim_{\hat{y} \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \hat{y}^2} = 0$$

である。これを用いると、 $l \neq m$ の場合は、

$$J_{lm}^n = \begin{cases} i \text{sign}(l-m) \frac{\sin n\Theta}{\cos n\Theta} \cdot \Delta s \left[\frac{k}{s_{lm}} \{J_{n-1}(ks_{lm}) - J_{n+1}(ks_{lm})\} - \frac{2n^2}{s_{lm}^2} J_n(ks_{lm}) \right], \\ \text{for } n = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots \\ 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

であり、また $l=m$ の場合は上式より

$$J_{mm}^2 = -\frac{1}{2} k^2 \Delta s \cos 2\Theta, \quad J_{mm}^n = 0 \quad \text{for } n=1 \text{ or } n \geq 3 \quad (\text{C.18})$$

である。これらの式に対し $\Theta \rightarrow \theta$ と置けば直ちに $J_{lm}^n|_{\zeta \rightarrow 1}$ が得られる。なお、 $k \rightarrow 0$ の場合には $l=m$ と同じ極限操作になるため、全成分の値が対角成分のそれ (C.16) の第2式、または (C.18) 式に帰着することが示される。

C.6.3 $[\partial J_{lm}^n / \partial \zeta]|_{\zeta \rightarrow 1}$

(4.22) 式より、

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\tan \theta}{\zeta^2 \tan^2 \theta + 1} \rightarrow \frac{\sin 2\theta}{2}, \quad \text{as } \zeta \rightarrow 1$$

である。これを利用すれば、前節より次の結果が得られる。 $l \neq m$ の場合は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{lm}^n}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow 1} &= \begin{cases} i \text{sign}(l-m) \cos n\Theta \\ -\sin n\Theta \end{cases} \cdot \frac{n}{2} \Delta s \sin 2\theta \times \\ &\times \left[\frac{k}{s_{lm}} \{J_{n-1}(ks_{lm}) - J_{n+1}(ks_{lm})\} - \frac{2n^2}{s_{lm}^2} J_n(ks_{lm}) \right], \\ &\text{for } n = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots \\ 0, 2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

であり、また $l=m$ の場合は、

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} J_{mm}^2 \Big|_{\zeta \rightarrow 1} = \frac{1}{2} k^2 \Delta s \sin^2 2\theta, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{mm}^n \Big|_{\zeta \rightarrow 1} = 0 \quad \text{for other } n \quad (\text{C.20})$$

である。なお前節と同様、 $k \rightarrow 0$ の極限では全成分の値が (C.20) 式に帰着する。

Appendix D

第5章の補遺

本章の内容もまた各節毎に独立で互いに関連性はない。なお、本章だけでなく次章(付録E)も第5章の補足に相当するが、これは後者の内容量が大きいので切り離したに過ぎない。

D.1 入射応力場の Fourier 級数展開

まず、入射波を(5.13)式で定義されるP波と仮定する。このとき、入射波が亀裂面上に作る応力場はデカルト座標系では次のようになる。

$$\begin{aligned}\tau_{13}^{\text{inc}} &= ihA_0 \sin 2\theta_P \mu e^{ihx_1 \sin \theta_P}, \\ \tau_{23}^{\text{inc}} &= 0, \\ \tau_{33}^{\text{inc}} &= ihA_0 f^{-1} (1 - 2f \sin^2 \theta_P) \mu e^{ihx_1 \sin \theta_P}.\end{aligned}$$

ただし f は(3.22)式で定義される。これらを円筒座標系に変換して、Bessel 関数の母関数、およびそれに関連した以下の関係式 (Martin and Wickham, 1983)

$$\begin{aligned}e^{ix \cos \phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(x) \cos n\phi, \\ \cos \phi e^{ix \cos \phi} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^{n+1} [J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x)] \cos n\phi, \\ \sin \phi e^{ix \cos \phi} &= -\sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} [J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] \sin n\phi\end{aligned}$$

(ただし、 $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$ for $n = 1, 2, \dots$) を用いれば、(5.14)式のような表現が以下の Fourier 係数とともに得られる。

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{\rho z}^n &= ihA_0 \sin 2\theta_P \tau_{\text{even}}^n(\rho), \\ \bar{\tau}_{\phi z}^n &= ihA_0 \sin 2\theta_P \tau_{\text{odd}}^n(\rho), \\ \bar{\tau}_{zz}^n &= ihA_0 f^{-1} (1 - 2f \sin^2 \theta_P) \cdot \epsilon_n i^n J_n(h\rho \sin \theta_P).\end{aligned}\tag{D.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\tau_{\text{even}}^n(\rho) &= \frac{1}{2} \epsilon_n i^{n+1} [J_{n+1}(h\rho \sin \theta_P) - J_{n-1}(h\rho \sin \theta_P)], \\ \tau_{\text{odd}}^n(\rho) &= i^{n+1} [J_{n+1}(h\rho \sin \theta_P) + J_{n-1}(h\rho \sin \theta_P)]\end{aligned}\tag{D.2}$$

である。一方、入射波が(5.15)式で定義されるSV波の場合の係数は、

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\rho z}^n &= ikB_0 \cos 2\theta_S \tau_{\text{even}}^n(\rho), \\ \bar{r}_{\phi z}^n &= ikB_0 \cos 2\theta_S \tau_{\text{odd}}^n(\rho), \\ \bar{r}_{xz}^n &= -ikB_0 \sin 2\theta_S \cdot c_n \tau_{\text{odd}}^n(k\rho \sin \theta_S) \end{aligned} \quad (D.3)$$

となる。ただし、 τ_{even}^n および τ_{odd}^n はSnellの法則

$$h \sin \theta_P = k \sin \theta_S$$

を通じて(D.2)式で与えられる。またSH波(5.16)の場合は、応力場のFourier展開は(5.17)式のようになり、その係数は以下の通りである。

$$\bar{r}_{\rho z}^n = -ikC_0 \cos \theta_S \tau_{\text{odd}}^n(\rho), \quad \bar{r}_{\phi z}^n = ikC_0 \cos \theta_S \tau_{\text{even}}^n(\rho). \quad (D.4)$$

D.2 超特異積分とその評価法について

いま、ある関数 $F(t)$ が区間 (a, b) 内の1点 x において特異性を持つとき、これに関する定積分

$$\int_a^b F(t) dt$$

を考えよう。 $F(t)$ の特異性が $(t-x)^{-1}$ より弱い場合、同積分が収束することは明らかである。特異性の強さがちょうど $(t-x)^{-1}$ に等しい場合には、同積分は通常の積分の意味においては収束しないが、Cauchyの主値を定義することにより評価可能である。しかし、これより強い特異性を持つ場合は、もはやいかなる方法によっても収束しない。このような「強い」特異性は一般に超特異性(hypersingularity) (e.g., Martin and Rizzo, 1989) と呼ばれる。

超特異積分は、本論文で扱っているようなNeumann型境界値問題においては普遍的に出現する。例として2次元SH問題における境界条件(3.5)について考えよう。同式は未知量 $D(\cdot)$ に関する積分微分方程式(integro-differential equation)であり、左辺第1項の積分中のHankel関数の特異性はlog程度であるから、同積分は勿論積分可能である¹。しかしもし微分を先に実行すると、 $(\partial^2/\partial x_2^2)H_0^{(1)}(kR)$ の特異性は-2乗程度であるので、もはや積分不可能である。従って、このような超特異性を回避する最も単純な方法は、積分微分を本来の順序で実行することであり、著者(河原, 1990)もこの方法を採用している。ところが、このような超特異積分はHadamardの有限部分(finite part)の概念を導入することによって評価可能になることがMartin and Rizzo (1989)によって示された。このことについて以下に述べる。

まず、Hadamardの有限部分の定義を与える。いま、 $f(t)$ は区間 (a, b) で滑らかな関数とし、かつ $a < x < b$ としよう。このとき、-2乗の強さの超特異積分の有限部分は次式で与えられる(Martin and Rizzo, 1989)。

$$\text{p.f.} \int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{x-\epsilon} \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\epsilon}^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2f(x)}{\epsilon} \right]. \quad (D.5)$$

より一般的な超特異積分の有限部分については、今井(1981)を参照されたい。これがCauchyの主値

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{x-\epsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_{x+\epsilon}^b \frac{f(t)}{t-x} dt \right] \quad (D.6)$$

¹ 物理的厳密性を期すなら、(3.5)式第1項は

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \int_a^b D(\xi_1) \frac{\partial}{\partial x_2} H_0^{(1)}(kR) d\xi_1 \Big|_{x_2=0}$$

と書かれるべきであるが、この場合でもCauchyの主値をとることにより全く同じ結果が得られる。

の概念的拡張であることは容易に理解されよう。あるいは、1次の有限部分がCauchyの主値であると言ってもよい。主値積分の満たす関係式

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt = [f(t) \log |t-x|]_a^b - \int_a^b f'(x) \log |t-x| dt \quad (D.7)$$

(ただし $f'(x) \equiv df(x)/dx$) に対応して、

$$\text{p.f.} \int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt = - \left[\frac{f(t)}{t-x} \right]_a^b + \text{v.p.} \int_a^b \frac{f'(x)}{t-x} dt \quad (D.8)$$

が成り立つ。また、特異点が積分範囲の端点にある場合は、例えば

$$\text{p.f.} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt = \frac{f(b)}{b-x} - f'(0) + \text{p.f.} \int_0^b \frac{f'(t)}{t-x} dt, \quad (D.9)$$

$$\text{p.f.} \int_x^b \frac{f(t)}{t-x} dt = f(b) \log b - \int_0^a f'(t) \log(t-x) dt \quad (D.10)$$

である(今井, 1981)。

Martin and Rizzo (1989) は、解 $D(\cdot)$ の滑らかさが予め保証されているなら、次式が成り立つことを証明した。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_a^b D(\xi_1) H_0^{(1)}(kR) d\xi_1 \Big|_{x_2=0} = \text{p.f.} \int_a^b D(\xi_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} H_0^{(1)}(kR) d\xi_1 \Big|_{x_2=0} \quad (D.11)$$

すなわち、有限部分の概念の導入によって左辺の積分微分は順序が交換可能となる。同様な関係式は、第3章で扱う3次元問題についてもおそらく成り立つ(Martin and Rizzo, 1989)。同章のように、各Fourier成分毎に境界条件を扱う場合には、上式の左辺の形式よりも右辺のそれの方が簡便である。

D.3 Cauchyの主値の近似計算法

いま、次のような積分を考える。

$$I = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{f(t) - f(x)}{(t-x)^2} dt \quad (D.12)$$

ここで $f(t)$ が区間 (a, b) で正則とすると、 $t=x$ の回りで以下のようにTaylor展開できる。

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + (t-x)^2 F(t), \quad F(t) = \frac{1}{2} f''(x) + O(t-x)$$

よって(D.12)式は

$$I = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{f'(x)}{t-x} dt + \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} F(t) dt \quad (D.13)$$

と書き直される。ここで、上式の右辺第1項はCauchyの主値をとることができ、その値は0に等しい。しかるに、もしも同項の特異性を全く考慮せずに台形公式を適用したとしても、

$$\epsilon f'(x) \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{-\epsilon} \right] \equiv 0$$

となって正しい結果が得られる。よって、(D.12)式に台形公式を形式的に適用して得られる量

$$I_{\text{approx}} = \frac{1}{\epsilon} [f(x-\epsilon) + f(x+\epsilon) - 2f(x)] \quad (D.14)$$

は、(D.13)式において右辺第1項の主値積分を正しく評価し、かつ正則関数 $F(t)$ の積分である第2項を台形公式で近似したものと等価であり、積分 I の主値の近似値として有効である。

D.4 円筒座標形における Φ_j の表現

(5.49) 式は、求められた相対変位のデカルト座標成分 $D_j(\rho, \phi)$ ($j = 1, 2, 3$) を含む形であるが、実際の計算は円筒座標成分でおこなわれるので、それに適した形に書き直そう。まず、相対変位ベクトル $D = (D_1, D_2, D_3)$ を円筒座標 (D_ρ, D_ϕ, D_z) に変換し、その各成分を (5.18) 式によって Fourier 級数展開する。このようにして得られた Fourier 成分 $w_\rho^n(\rho)$ ($\gamma = \rho, \phi, z$) を、ここでは改めて $d_\rho^n(\rho)$ と表記することになると、若干の計算の後次式が得られる。

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\pi \sum_{n=0}^N (-i)^{n+1} \int_0^a [d_\rho^n(\rho_0) J_n^-(k\rho_0 \sin \theta_S) - d_\phi^n(\rho_0) J_n^+(k\rho_0 \sin \theta_S)] \rho_0 d\rho_0, \\ \Phi_2 &= -\pi \sum_{n=0}^N (-i)^{n+1} \int_0^a [d_\rho^n(\rho_0) J_n^+(k\rho_0 \sin \theta_S) + d_\phi^n(\rho_0) J_n^-(k\rho_0 \sin \theta_S)] \rho_0 d\rho_0, \\ \Phi_3 &= 2\pi \sum_{n=0}^N (-i)^n \int_0^a d_z^n(\rho_0) J_n(k\rho_0 \sin \theta_S) \rho_0 d\rho_0.\end{aligned}\quad (\text{D.15})$$

ここで $J_n^\pm(x) \equiv J_{n-1}(x) \pm J_{n+1}(x)$ である。実際の数値計算によって d_ρ^n が求められれば、これらの式によって Φ_j が計算され、5.4 節の諸式を通じて減衰係数と位相速度が評価される。

Appendix E

Lipschitz-Hankel 型積分

Lipschitz-Hankel 型積分は以下のように定義される (Eason *et al.*, 1955; 以下 ENS と略記)。

$$I(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^\infty J_\mu(at) J_\nu(bt) e^{-ct} t^\lambda dt \quad (a, b, c > 0). \quad (\text{E.1})$$

ENS は同積分が一般に超幾何級数を含む有限区間積分の形に変換されることを示すとともに、その解析的性質や収束条件、およびいくつかの具体的な (μ, ν, λ) の値に対する解析解を与えている (なお、同論文の誤植が Sasai, 1991 により指摘されている)。ここでは、

$$I^0(\mu, \nu; \lambda) = \lim_{c \rightarrow 0} I(\mu, \nu; \lambda) \quad (\text{E.2})$$

と定義し、 $I^0(n, n; 0)$, $I^0(n, n; 2)$ および $I^0(n+1, n; \pm 1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の解の求め方について述べるとともに、その具体例を $n = 0, \dots, 4$ の場合について示す。

E.1 $I^0(n, n; 0)$

ENS によれば、この場合 (E.1) 式は

$$I(n, n; 0) = \frac{(-1)^n k}{\pi \sqrt{ab}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\phi d\phi}{\Delta(k)} \quad (\text{E.3})$$

に帰着する。ただし、

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2}, \quad (\text{E.4})$$

$$\Delta(k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \quad (\text{E.5})$$

である。(E.3) 式の解析解は、 $n = 0, 1$ については ENS 自身により与えられている。任意の $n \geq 0$ に対する解は、以下の諸関係式を用いることにより計算できる (Gradshteyn and Ryzhik, 1980; 以下 GR と略記)。

$$\begin{aligned}\cos n\phi &= 2^{n-1} \cos^n \phi - \frac{n}{1} 2^{n-3} \cos^{n-2} \phi + \frac{n}{2} \binom{n-3}{1} 2^{n-5} \cos^{n-4} \phi - \\ &\quad - \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} 2^{n-7} \cos^{n-6} \phi + \dots, \\ \int \frac{\cos^n \phi}{\Delta(k)} d\phi &= \frac{\cos^{n-3} \phi}{(n-1)k^2} \sin \phi \cdot \Delta(k) + \frac{n-2}{n-1} \frac{2k^2-1}{k^2} \int \frac{\cos^{n-2} \phi}{\Delta(k)} d\phi +\end{aligned}\quad (\text{E.6})$$

$$+ \frac{n-3}{n-1} \frac{1-k^2}{k^2} \int \frac{\cos^{n-4} \phi}{\Delta(k)} d\phi, \quad (\text{E.7})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\Delta(k)} = \mathbf{K}(k), \quad (\text{E.8})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \phi}{\Delta(k)} d\phi = \frac{1}{k^2} \mathbf{E}(k) - \frac{1-k^2}{k^2} \mathbf{K}(k). \quad (\text{E.9})$$

ここで $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ は第 1 種および第 2 種完全楕円積分である¹。計算手順は以下の通り。

1. (E.6) 式を (E.3) 式に代入して、 $\cos 2n\phi$ を $\cos \phi$ の多項式に展開する。
2. 漸化式 (E.7) の逐次代入により、 $1/\Delta(k)$ と $\cos^2 \phi/\Delta(k)$ を含む項のみに還元する。
3. (E.8), (E.9) 式により積分を実行し、 $c=0$ を代入する。

この計算手順は n とともに飛躍的に複雑化するので、大きな n にたいして筆算でおこなうことは困難である。しかし数式処理システムには適した形式であり、比較的迅速に計算可能である (NEC PC-9801DA 上での REDUCE3A による場合、 $n=10$ で CPU-time は 260 秒)。これにより求められた $I^0(n, n; 0)$ の解は一般に

$$I^0(n, n; 0) = c_1(n, 0)\mathbf{K}(\kappa) + c_2(n, 0)\mathbf{E}(\kappa) \quad (\text{E.10})$$

の形をしている。ここで

$$\kappa = \lim_{c \rightarrow 0} k = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \quad (\text{E.11})$$

であり、また $c_m(n, l)$ は $a=b=0$ を除いて正則な有理関数とする。特に $n=0, \dots, 4$ の場合は以下の通りである。

$$\begin{aligned} c_1(0, 0) &= \frac{2}{\pi(a+b)}, & c_2(0, 0) &= 0, \\ c_1(1, 0) &= \frac{a^2+b^2}{\pi ab(a+b)}, & c_2(1, 0) &= -\frac{a+b}{\pi ab}, \\ c_1(2, 0) &= \frac{2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{3\pi a^2 b^2(a+b)}, & c_2(2, 0) &= -\frac{2(a+b)(a^2+b^2)}{3\pi a^2 b^2}, \\ c_1(3, 0) &= \frac{(a^2+b^2)(8a^4-a^2b^2+8b^4)}{15\pi a^3 b^3(a+b)}, & c_2(3, 0) &= -\frac{(a+b)(8a^4+7a^2b^2+8b^4)}{15\pi a^3 b^3}, \\ c_1(4, 0) &= \frac{2(24a^8+20a^6b^2+17a^4b^4+20a^2b^6+24b^8)}{105\pi a^4 b^4(a+b)}, \\ c_2(4, 0) &= -\frac{8(a+b)(a^2+b^2)(6a^4-a^2b^2+6b^4)}{105\pi a^4 b^4}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

これらは ENS の結果と調和的である。

E.2 $I^0(n, n; 2)$

この場合は、定義式 (E.1) より導かれる関係式

$$I(n, n; 2) = \frac{\partial^2}{\partial c^2} I(n, n; 0) \quad (\text{E.13})$$

¹この表記法は GR によるもので、ENS における $F(k)$, $E(k)$ に対応する。

から計算される。解の一般形は次の通りである。

$$I^0(n, n; 2) = c_1(n, 2)\mathbf{K}(\kappa) + c_2(n, 2) \frac{\mathbf{E}(\kappa)}{(a-b)^2}. \quad (\text{E.14})$$

特に $n=0, \dots, 4$ の場合は、

$$\begin{aligned} c_1(0, 2) &= 0, & c_2(0, 2) &= -\frac{2}{\pi(a+b)}, \\ c_1(1, 2) &= \frac{1}{\pi ab(a+b)}, & c_2(1, 2) &= -\frac{a^2+b^2}{\pi ab(a+b)}, \\ c_1(2, 2) &= \frac{2(a^2+b^2)}{\pi a^2 b^2(a+b)}, & c_2(2, 2) &= -\frac{2(a^4-a^2b^2+b^4)}{\pi a^2 b^2(a+b)}, \\ c_1(3, 2) &= \frac{(a^2+b^2)(8a^4+11a^2b^2+8b^4)}{3\pi a^3 b^3(a+b)}, & c_2(3, 2) &= -\frac{(a^2+b^2)(8a^4-13a^2b^2+8b^4)}{3\pi a^3 b^3(a+b)}, \\ c_1(4, 2) &= \frac{8(a^2+b^2)(2a^4+a^2b^2+2b^4)}{5\pi a^4 b^4(a+b)}, \\ c_2(4, 2) &= -\frac{2(8a^8-4a^6b^2-3a^4b^4-4a^2b^6+8b^8)}{5\pi a^4 b^4(a+b)}. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

となり、Sasai (1991) の (E.20) 式において $c \rightarrow 0$ としたものと一致する。

E.3 $I^0(n+1, n; -1)$

ENS の (4.5) 式の真上の式より、この場合、

$$I^0(n+1, n; -1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a-b e^{-i\theta}) e^{-in\theta}}{\sqrt{a^2+b^2-2ab \cos \theta}} d\theta \quad (\text{E.16})$$

となる (ENS では係数が $1/\pi$ で積分範囲が $(0, \pi)$ となっているが、これは誤りである。この誤りは同論文の (2.3) 式に端を発し、系統的に現れている)。 $n=0$ の場合、同式はさらに $\cos \frac{1}{2}\theta = \sin \phi$ なる変数変換により、

$$\begin{aligned} I^0(1, 0; -1) &= \frac{1}{\pi(a+b)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a+be^{2i\phi}}{\Delta(\kappa)} d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi(a+b)} \int_0^{\pi/2} \frac{a+b-2b \sin^2 \phi}{\Delta(\kappa)} d\phi \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

に帰着する。ここで (E.8) 式、および関係式 (GR)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi}{\Delta(k)} d\phi = \frac{1}{k^2} \mathbf{K}(k) - \frac{1}{k^2} \mathbf{E}(k) \quad (\text{E.18})$$

を用いて同積分を実行すると、

$$I^0(1, 0; -1) = \frac{a-b}{\pi a} \mathbf{K}(\kappa) + \frac{a+b}{\pi a} \mathbf{E}(\kappa) \quad (\text{E.19})$$

となり、ENS の (4.6) 式において $c \rightarrow 0$ としたものと一致する。

$n \geq 1$ の場合は以下のように扱う。まず、(E.16) 式中の $e^{-in\theta}$ を

$$\begin{aligned} e^{-in\theta} &= \cos n\theta - i \sin n\theta = \\ &= 2 \cos^2 \frac{n\theta}{2} - 1 - 2i \sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \end{aligned}$$

と書き直す。これをさらに、(E.6) 式および関係式 (GR)

$$\begin{aligned} \sin n\phi &= \sin \phi \left\{ 2^{n-1} \cos^{n-1} \phi - \binom{n-2}{1} 2^{n-3} \cos^{n-3} \phi + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-3}{2} 2^{n-5} \cos^{n-5} \phi - \binom{n-4}{3} 2^{n-7} \cos^{n-7} \phi + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

により $\cos \frac{1}{2}\theta$ と $\sin \frac{1}{2}\theta$ の多項式に展開する。このとき、変数変換 $\cos \frac{1}{2}\theta = \sin \phi$ に際しては $\sin \frac{1}{2}\theta = \cos \phi$ となるので、結局 $e^{-in\theta}$ は $\cos \phi$ と $\sin \phi$ の多項式の形に表される。このようにして (E.16) 式を変形すると、最終的に (E.17) 式に対応して

$$I^0(n+1, n; -1) = \frac{2}{\pi(a+b)} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 \phi \text{ の } n \text{ 次多項式})}{\Delta(\kappa)} d\phi \quad (\text{E.21})$$

のような形に帰着する。後は、漸化式 (GR)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^n \phi}{\Delta(k)} d\phi &= \frac{\sin^{n-3} \phi}{(n-1)k^2} \cos \phi \cdot \Delta(k) + \frac{n-2}{n-1} \frac{1+k^2}{k^2} \int \frac{\sin^{n-2} \phi}{\Delta(k)} d\phi - \\ &\quad - \frac{n-3}{(n-1)k^2} \int \frac{\sin^{n-4} \phi}{\Delta(k)} d\phi \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

を用い、E.1 節と同様にして $1/\Delta(\kappa)$ と $\sin^2 \phi/\Delta(\kappa)$ を含む項のみに還元すれば、再び (E.8), (E.18) 式より $I^0(n+1, n; -1)$ が計算される。特に $n=0, \dots, 4$ の場合は以下の通りである。

$$I^0(n+1, n; -1) = c_1(n, -1)(a-b)K(\kappa) + c_2(n, -1)E(\kappa); \quad (\text{E.23})$$

$$\begin{aligned} c_1(1, -1) &= \frac{a^2+2b^2}{3\pi a^2 b}, & c_2(1, -1) &= -\frac{(a+b)(a^2-2b^2)}{3\pi a^2 b}, \\ c_1(2, -1) &= \frac{2a^3+5a^2b^2+8b^4}{15\pi a^3 b^2}, & c_2(2, -1) &= -\frac{(a+b)(2a^4+3a^2b^2-8b^4)}{15\pi a^3 b^2}, \\ c_1(3, -1) &= \frac{8a^6+17a^4b^2+32a^2b^4+48b^6}{105\pi a^4 b^3}, & c_2(3, -1) &= -\frac{(a+b)(8a^6+9a^4b^2+16a^2b^4-48b^6)}{105\pi a^4 b^3}, \\ c_1(4, -1) &= \frac{16a^8+32a^6b^2+51a^4b^4+88a^2b^6+128b^8}{315\pi a^5 b^4}, \\ c_2(4, -1) &= -\frac{(a+b)(16a^8+16a^6b^2+21a^4b^4+40a^2b^6-128b^8)}{315\pi a^5 b^4}. \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

E.4 $I^0(n+1, n; 1)$

この場合も前節と同様にして求められる。まず、(E.16) に対応して (ENS)

$$I^0(n+1, n; 1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a-be^{-i\theta})e^{-in\theta}}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}} d\theta \quad (\text{E.25})$$

であり、 $n=0$ の場合は前と同じ変数変換により、

$$I^0(1, 0; 1) = \frac{2}{\pi(a+b)^3} \int_0^{\pi/2} \frac{a+b-2b\sin^2\phi}{\Delta(\kappa)^3} d\phi \quad (\text{E.26})$$

に帰着する。上式の積分を、関係式 (GR)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\Delta(k)^3} = \frac{1}{1-k^2} E(k), \quad (\text{E.27})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\phi}{\Delta(k)^3} d\phi = \frac{1}{k^2(1-k^2)} E(k) - \frac{1}{k^2} K(k) \quad (\text{E.28})$$

を用いて実行すると、

$$I^0(1, 0; 1) = \frac{1}{\pi a(a+b)} K(\kappa) + \frac{1}{\pi a(a-b)} E(\kappa) \quad (\text{E.29})$$

となり、ENS の (4.8) 式において $\epsilon \rightarrow 0$ としたものと一致する。

$n \geq 1$ の場合も前節と同じ手順により計算可能である。ただしこの場合、(E.22) 式に対応して

$$\int \frac{\sin^n \phi}{\Delta(k)^3} d\phi$$

に関する漸化式が必要となるが、そのような式は通常の数学公式集には載っていない。そこで著者は、試行錯誤の結果以下の関係式を得た。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^n \phi}{\Delta(k)^m} d\phi &= \frac{\sin^{n-3} \phi \cos \phi}{(n-m)k^2 \Delta(k)^{m-2}} + \frac{(n-m-1)k^2 + n-2}{(n-m)k^2} \int \frac{\sin^{n-2} \phi}{\Delta(k)^m} d\phi - \\ &\quad - \frac{n-3}{(n-m)k^2} \int \frac{\sin^{n-4} \phi}{\Delta(k)^m} d\phi, \quad \text{for } n \neq m. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

上式は、両辺を微分することにより直ちに証明でき、特に $m=3$ とすれば求める漸化式に帰着する。特に $n=0, \dots, 4$ の場合は以下の通りである。

$$I^0(n+1, n; 1) = c_1(n, 1)K(\kappa) + c_2(n, 1)\frac{E(\kappa)}{a-b}; \quad (\text{E.31})$$

$$\begin{aligned} c_1(1, 1) &= \frac{a^2+2b^2}{\pi a^2 b(a+b)}, & c_2(1, 1) &= -\frac{a^2-2b^2}{\pi a^2 b}, \\ c_1(2, 1) &= \frac{2a^4+5a^2b^2+8b^4}{3\pi a^3 b^2(a+b)}, & c_2(2, 1) &= -\frac{2a^4+3a^2b^2-8b^4}{3\pi a^3 b^2}, \\ c_1(3, 1) &= \frac{8a^6+17a^4b^2+32a^2b^4+48b^6}{15\pi a^4 b^3(a+b)}, & c_2(3, 1) &= -\frac{8a^6+9a^4b^2+16a^2b^4-48b^6}{15\pi a^4 b^3}, \\ c_1(4, 1) &= \frac{16a^8+32a^6b^2+51a^4b^4+88a^2b^6+128b^8}{35\pi a^5 b^4(a+b)}, \\ c_2(4, 1) &= -\frac{16a^8+16a^6b^2+21a^4b^4+40a^2b^6-128b^8}{35\pi a^5 b^4}. \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

E.5 $b/a \rightarrow 0$ および $a/b \rightarrow 0$ での漸近形

以上の結果から明らかのように、係数 $c_m(n, l)$ ($m=1, 2, -1 \leq l \leq 2$) は一般に $b/a \rightarrow 0$ および $a/b \rightarrow 0$ の極限で特異性を持つ。それゆえ、これらの極限での $I^0(n, n; 0)$, $I^0(n, n; 2)$ または $I^0(n+1, n; \pm 1)$ の漸近形を求めるためには、本来の定義式 (E.1), (E.2) から直接出発する必要がある。ENS によれば、 $I^0(m, n; l)$ ($l, m, n = \text{整数}$) は $b/a \rightarrow 0$ の極限で次のように級数展開される。

$$I^0(m, n; l) = \frac{2^l \Gamma(\frac{1}{2}(m+n+l+1))}{n! \Gamma(\frac{1}{2}(m-n-l+1))} \frac{b^n}{a^{l+n+1}} + O((b/a)^{n+2}). \quad (\text{E.33})$$

ここで $\Gamma(\cdot)$ は Gamma 関数である。これより、前節までに扱った諸量は同じ極限でそれぞれ以下のように近似される。

$$\begin{aligned} I^0(n, n; 0) &\sim \frac{(2n-1)!!}{2^n n! a} \left(\frac{b}{a}\right)^n, \\ I^0(n, n; 2) &\sim \frac{(2n+1)!!}{2^n n! a^3} \left(\frac{b}{a}\right)^n. \end{aligned}$$

$$I^0(n+1, n; -1) \sim \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad (\text{E.34})$$

$$I^0(n+1, n; 1) \sim \frac{(2n+1)!!}{2^n n! a^2} \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

ここで、 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$, $(-1)!! = 1$ である。 $a/b \rightarrow 0$ の極限に関しては、(E.33) 式において a と b , m と n をそれぞれ交換すれば同様にして求められる。なお、

$$(2n-1)!! = (2n)!/2^n n!, \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} \quad \text{for } n \gg 1$$

より、(E.34) 式に現れる係数 (a, b を除いた部分) は n の増加とともに減少するか、あるいは高々 \sqrt{n} 程度でしか増えない。

謝辞

東京大学地震研究所の山下輝夫助教授および丸山卓男名誉教授には、著者の東京大学大学院博士課程在学中の指導教官として様々な面で御指導と御鞭撻を賜ったので、ここに深く感謝する。特に前者は、著者の修士課程在学中に亀裂による散乱の問題の重要性を最初に教えていただいた方であり、その後も公私にわたって強力に著者を支援していただいた。とりわけ本論文の第4章は、彼の数々の有益な助言なくしては成立しなかったであろう。

東京大学理学部の演野洋三教授、同大学地震研究所の佃為成助教授と世井洋一講師、および東北大学理学部の佐藤春夫助教授には、本論文の内容の改善に役立つ貴重なコメントをいただいた。これらの方々にも謝意を表したい。

工業技術院地質調査所の 柴原 保人博士には室内実験の立場からの貴重な助言をいただいた。京都大学工学部の西村直志博士および防災科学技術研究所の福山英一博士には、BIEM に関する基本的な事項について御教授いただいた。Manchester 大学数学科の Paul A. Martin 博士には、超特異積分の評価の問題に関する著者の初歩的質問に対し快く答えていただいた。また付録 C.5 に示された数学的証明法は、北海道大学理学部の宇津木充氏の御厚意に全面的に負っている。これらの方々にもこの場を借りて謝辞を献呈したい。

東京大学地震研究所発震機構部門における著者の元同僚である桃井高夫元助教授と佐藤利典博士、および現在の同僚である村井芳夫氏と亀 伸樹氏にも色々な意味でお世話になったので、謝意を表したい。桃井元助教授と佐藤博士には励ましの言葉を賜り、またその真摯な研究姿勢は著者にとって大いに刺激となった。村井氏との日頃の議論は、著者の研究にとって非常に有益であった。彼が優れた学位論文をまとめ上げることを心から祈念する。亀氏には、著者が本論文を口頭発表するにあたって、その準備を快く手伝っていただいた。

著者が地震研究所において学生生活を送るに当たっては、同研究所地震波理論部門のスタッフ（島崎邦彦教授、宮武 隆講師、上田和枝助手）と学生諸氏に何かとお世話になった。また同研究所内の数理地球物理学セミナーおよび地震活動セミナーの構成員諸氏には著者の研究の進展に資する様々な助言をいただいた。さらに、折ある毎に著者を励ましてくれた内外の友人諸氏の存在も、著者にとっては貴重であった。これら多数の方々にもこの場を借りて感謝する。

本論文中の数値計算は、東京大学地震研究所地震予知観測情報センターの M-680H および同大学大型計算機センターの M-880 によりおこなわれた。

