

論文審査の結果の要旨

氏名 堀田 義仁

本論文は、論文提出者による、ネットワーク上の古典スピンの繰り込み群解析について述べたものであり、6章 107頁からなる。1章はイントロダクションであり、研究の背景として、臨界現象と繰り込み群の重要性について述べた後、ネットワーク上の古典スピン系を研究する動機について述べている。その上で、複雑ネットワーク上の自己回避ランダムウォークの問題と動的臨界現象という2つの問題について、繰り込み群的な解析を行う意義について述べている。

第2章は複雑ネットワーク上の自己回避ランダムウォークのレビューであり、第3章で扱う概念の導入を行っている。最初にフラクタル次元のいくつかの定義について述べた後、グラフの概念や複雑ネットワークの性質とそのフラクタル次元を定義し、第3章で扱う階層構造を持つグラフとしての (u,v) -flower について述べている。また、規則格子上の自己回避ランダムウォークの臨界指数に関して既知の事柄を開示している。さらに、格子上のランダムウォークと N -vector モデルの関係について述べている。

第3章では、複雑ネットワークの例として、 (u,v) -flower を取り上げ、自己回避ランダムウォークに関しては、(1) 長さ k のパスがいくつあるのか、また、(2) 入口から出口までの典型的な距離はいくらかと言う2つの問題を提起し、それらの問いに答えるための繰り込み群解析を行っている。 (u,v) -flower 上の始点と終点で決まる母関数を定義し、それが N -vector モデルのスピン相関関数に、成分数 N が0の極限で一致する性質を利用して、臨界指数を求める方法を説明している。そして、母関数の繰り込み解析の固定点から臨界指数を求めることにより、上記の2つの問題に解答を与えている。また、その結果を平均場理論や数値計算の結果などと比較し、妥当な一致を得ている。さらに、予想と異なり、 (u,v) -flower の臨界指数は、フラクタル次元と直接関係ないことを見出している。これは重要な知見である。

第4章は、テンソルネットワークに関するレビューであり、第5章で必要な事項の導入と説明を行っている。テンソルネットワークの解析は、行列の特異値分解等を利用して実行されるため、それらの概念やダイアグラム表現、テンソルの分解や高次の特異値分解、テンソル列分解、密度行列繰り込み群などについて述べている。

第5章では、本博士論文のもう一つのテーマである非平衡緩和過程に対するテンソルネットワーク解析の応用について述べている。動的イジングモデルと離散時間のグラウバー・ダイナミクスを導入し、マルコフ連鎖を4章で述べたダイアグラム表現で表すとともに、スピンを半分ずつ時間更新する方法を導入することにより、1次元および2次元の格子スピン系のテンソルネットワークによる記述が可能であることを示している。その上で、遷移演算

子に対して高次の特異値分解を適用することで、系の緩和過程を計算する手法を導いている。これらの準備の後に、2次元動的イジングモデルの臨界現象において解析計算が困難な臨界緩和過程の計算を行っている。臨界点において、全てのスピンの状態から出発し、系が緩和する過程の平均磁化率の時間変化を計算し、計算の近似の精度を表すボンド次元を変化させながら、推定される臨界指数がどう変化するかを詳細に調べている。その結果、ボンド次元が10以上で推定した動的臨界指数がほぼ一定値となることを見出している。また、得られた動的臨界指数は、モンテカルロシミュレーションで従来得られている値と矛盾がないことを確認している。

第6章は、結論である。

なお、本論文の内容は、論文提出者が主体となって証明と解析、および数値計算を行ったものであり、論文提出者の寄与が十分であると判断する。したがって、本論文は、統計物理学における臨界現象や複雑ネットワークの解析方法に関して新たな知見を与えるものであり、博士(理学)の学位を授与するに値すると認める。