ＬＥＳによる建物周辺の流れ場・拡散場の高精度予測手法の開発

1994年12月

富永 禎秀

①

LESによる建物周辺の流れ場・拡散場の高精度予測手法の開発

1994年12月

東京大学大学院　工学系研究科　建築学専攻

富永禎秀

目次

記号表

x_i	:	空間座標の 3 成分（i=1:主流方向, i=2 : 主流直角(横)方向,i=3 : 鉛直方向）
u_i	:	風速の 3 成分
h_i	:	i 方向のメッシュ幅
f	:	変数fの瞬時値
$\langle f \rangle, \langle f \rangle_t$	:	変数f の時間平均値
f'	:	時間平均からのずれ($=f-\langle f \rangle_t$)
f''	:	フィルタリングされた量からのずれ($= f - \bar{f}$)
$\bar{f}$	:	変数fにgrid filterを施した値
$\hat{f}$	:	変数fにtest filter を施した値
$\bar{\Delta}_i$	:	i方向のグリッド幅
$\bar{\Delta}$	:	グリッドスケール（$= (\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_3)^{1/3}$）
C_S	:	Smagorinsky定数
ν	:	動粘性係数
ν_{SGS}	:	SGS 渦粘性係数
K	:	分子拡散係数
K_{SGS}	:	SGSの物質拡散係数
α	:	温度拡散係数
α_{SGS}	:	SGSの温度拡散係数
k_{SGS}	:	変動エネルギーのSub-grid Scale(SGS) 成分（$k_{SGS}=1/2(\overline{u_i u_i} - \bar{u}_i \bar{u}_i)$）
$k, \langle k_{so} \rangle_t$	:	total の変動エネルギー（($1/2\langle u_i'^2 \rangle_t$)（時間平均値、周期成分＋乱流成分）
Pk_{SGS}	:	k_{SGS}のshearによる生産項
Gk_{SGS}	:	k_{SGS}の浮力による生産項
g	:	重力加速度
ε_v	:	SGSにおけるエネルギー散逸率
ε_{SGS}	:	GSからSGSに失われるエネルギー散逸率
ε	:	GS+SGSの全スケールにおけるエネルギー散逸率
U_0	:	流入平均風速
u_b	:	高さH_bの流入風速のu_1成分

u^* ： 摩擦速度

δ ： チャンネル半幅

D ： 角柱一辺の長さ

H_b ： 建物高さ

x_n^+ ： 壁座標($\langle u^* \rangle x_n/\nu$)

x_n ： 壁面からの距離

c ： 排出されたガスの各測定点における濃度（希釈率）

$\langle c_0 \rangle$ ： 基準濃度（$q/\langle u_b \rangle H_b^2$）

q ： ガス発生量

w_S ： ガス排出速度

ρ ： 流体密度

ρ_s ： 排出ガス密度

ρ_a ： 空気密度（$\Delta\rho = \rho_s - \rho_a$）

Sc ： シュミット数（$=\nu/K$）

Sc_{SGS} ： SGSのシュミット数（$=\nu_{SGS}/K_{SGS}$）

Pr ： プラントル数（$=\nu/\alpha$）

Sc_{SGS} ： SGSのプラントル数（$=\nu_{SGS}/\alpha_{SGS}$）

Rf ： フラックスリチャードソン数

Rf_C ： 臨界フラックスリチャードソン数

Frd ： 密度フルード数（$=(\Delta\rho/\rho_a)(gH_b/\langle u_b \rangle^2)$）

本文中の諸量は原則として、U_0 , D（２次元角柱の場合）、H_b, $\langle u_b \rangle$（立方体の場合）及び流体密度ρを用いて無次元化されている。

第１章

序　論

第1章　序論

建物周辺の流れ場を高精度に予測する技術の開発は、高層建物周辺で発生する強風、建物の換気・通風、煙突や自動車からの排ガス等の汚染物の拡散等の建築・都市環境工学に関連する諸問題から、建物に作用する風荷重の評価や風による建物の振動等の建築構造工学に関連する諸問題まで、多くの問題の解析の基礎となるものであり、極めて重要性の高いテーマの一つであると考えられる。

これらの流れ場の再現、予測手段の一つとして、従来より実験的手法が用いられてきた。実験的手法には既に多くの優れた研究の蓄積があり、その成果は広く利用されている。しかし、空間的、時間的に大きく変動する流れ場全体の性状を、実験により得られる限られた断面の計測データのみから理解するのは多くの場合困難である。また建築物の複雑化、多様化により実験に莫大な費用と労力がかかる場合や、実験そのものが不可能な場合も現れてきている。

一方、近年の計算機の目覚ましい発達により、流れの数値シミュレーションによる予測手法が注目を集め、最近では多くの優れた研究成果が蓄積されてきている。数値シミュレーション手法は、流れの非定常性や3次元構造の詳細な解析が可能となるほか、風洞実験でしばしば直面する相似則上の制約から解放される等の点で実験的手法にはみられない多くの利点を有している。

しかしながら、建物周辺に現れる流れはほとんどの場合、乱流であり、その数値シミュレーション手法の選択には充分な注意が必要とされる。乱流の数値解析手法には大きく分けて3種類あり、それぞれDNS(Direct Numerical Simulation)、RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation)、LES (Large Eddy Simulation)と呼ばれる。DNSは流体の支配方程式であるNavier-Stokes方程式（N-S方程式）をモデル化なしに解くものであるが、一般にDNSで必要とされるグリッド数はレイノルズ数（Re）の9/4乗と言われている。実際の建物周辺流れでは、レイノルズ数は10^6以上になることを考えると、必要なグリッド数は10^{13}～10^{14}以上となり、DNSの利用は将来的にも困難であると考えられる。RANSはレイノルズ平均（アンサンブル平均あるいは時間平均）を施したN-S方程式を解くものであり、レイノルズストレスもしくはその輸送方程式中に現われる高次相関項に対してモデル化を行う。代表的なものはk-ε型2方程式モデル（k-εモデル）と呼ばれるものであり、モデルの明快さや計算上の安定性などから多くの流れ場に適用されてきた。しかし、一般に用いられている標準型のk-εモデルを建物周辺等の乱れの非等方性の強い流れ場に適用した場合、多くの欠点を有することが既往の研究により明らかになっている。またRANSでは全てのスケールの乱れがモデル化の対象となるため、レイノルズストレスの輸送方程式を解く応力方程式モデル（DSM）等の高精度のモデルを用いたとしても、普遍性のあるモデルを得ることは難しいものと考えられる。

これに対してLESでは、N-S方程式に空間的な平均化操作を行い、流れ場をグリッドで解像できる成分は直接計算し、グリッド以下（Subgrid scale）の成分の乱れのみがモデル化される。従って、瞬時瞬時にその様相が大きく変化する現象もLESでは予想、解析することが可能である。またグリッドのスケール以下の乱れの構造は等方的とみなせることが多く、モデル化の影響は相対的に小さいものと考えられる。このような特徴により、LESは、高レイノルズ数の乱流場を高精度に予測、解析する手法として注目され、より複雑な流れ場への適用が課題となっている。

従来のLESでは、Subgrid scale（SGS）のモデル化として、主にSmagorinskyモデルと呼ばれる単純なモデルが用いられてきた。既往の研究において、比較的単純な流れ場においては、Smagorinskyモデルを用いた場合でも、RANSで最も高精度とされるDSMより妥当な解が得られることが確認されている。しかしながら、近年、より工学的で複雑な流れ場にLESを適用しようとする要求が高まるにつれ、従来から用いられてきたSmagorinskyモデルの持つ幾つかの欠点が指摘されるようになった。すなわち、①流れ場の性状によって数値定数を最適化しなければならない、②壁面近傍あるいは低Reynolds数による乱れの減衰効果を表現できない、③SGSのエネルギーにおける移流・拡散・浮力等の効果が陽にモデルに現れない、等といった点である。

建物周辺の流れ場は、前面のstagnation、コーナー部のseparation、屋上面・側面のreattachment、後方のrecirculation等を伴い、極めて複雑である。このような流れ場をLESによって、より高精度に予測しようとした場合、上述のSmagorinskyモデルの持つ欠点は、大きな傷害となるものと予想される。

本研究は、建物モデル周辺の流れ場, 拡散場を対象として、従来のSmagorinskyモデルに基づくLESの欠点を明らかにし、その欠点を克服する高精度のSGSモデルの有効性、問題点について、実験結果との比較から、流れ場の構造と関連づけて詳細に検討したものである。

本論文は8つの章より構成されており、各章の内容は以下に示す通りである。

第１章では、まず序論として本研究の目的と内容が述べられている。

第２章では、LESにおけるSubgrid-scaleモデリングの概要として、LESの概念について解説するとともに、従来、代表的なSGSモデルとして用いられてきたSmagorinskyモデルを複雑流れ場に適用する際の問題点を理論的に明らかにしている。さらに現在、機械工学、気象学等の分野で提案されている代表的なSubgrid scaleモデルについて、既往の研究結果を整理し、建築・都市環境工学の分野に適用する際の問題点を指摘している。また従来、気象分野以外ではあまり問題にされていなかった浮力の作用する流れ場のSubgrid scaleモデルについても、既往の研究結果を整理している。

第３章では、建築・都市環境工学の分野にLESを適用する際の、数値計算手法上の問題を、境界条件、離散化手法、データ処理等の面から整理するとともに、本研究での取り扱いを述べている。

第４章では、解強制置換法による複合グリッドシステムを用いたLES計算手法の開発を行っている。これにより、複雑形状に対しても、比較的少ないグリッド数で、効率的に細かいメッシュ分割が可能となり、また任意風向に適応することも可能となる。ここでは解強制置換法による複合グリッドシステムの構築方法について解説し、層流及び乱流の２次元角柱周辺流れに適用した結果を示している。

第５章では、Smagoriskyモデルの欠点を克服する可能性を持つ高精度のSGSモデルとして提案されたdynamic SGSモデルを一様流中の２次元角柱周辺流れに適用し、従来のSmagorinskyモデル及び実験との比較から、その有効性、問題点を検討している。両者の差異は、平均流の予測精度にも大きく現れ、dynamic SGSモデルはSmagorinskyモデルに比べて実験結果と極めてよく一致することを実証している。これは角柱側面での剥離性状をSmagorinskyモデルでは正確に再現されていないためであると考えられる。またこのような流れ場では、機械分野で提案されたdynamic SGSモデルをそのまま使用した場合、計算不能となる領域があり、これに関する対策が必要であることを明らかにしている。

第６章では、第５章で検討を行ったdynamic SGSモデルを接地境界層中の立方体周辺流れに適用し、従来のSmagorinskyモデルの結果及び実験結果との比較から、その有効性、問題点を検討している。その結果は、従来のSmagorinskyモデルによる解析で問題となっていた立方体後方で乱流エネルギーkが大きめに評価される傾向に関して、かなりの改善が見られるほか、平均流、風圧係数に関しても全体に実験との対

応が向上することを確認している。

第７章では、高精度のSGSモデルを用いた建物モデル周辺のガス拡散の解析を行い、風洞実験結果との比較から、その有効性、問題点を検討している。前半部では浮力のあるガスの拡散を対象として、SGSモデルへの浮力効果の組み込みに関して基礎的な検討を行っている。ここでは、SGSモデルに浮力効果を組み込むことにより、乱流エネルギーや濃度分布に顕著な差が現れ、実験結果との対応が向上することを明らかにしている。後半部では、空気と等密度のガスの拡散を対象として、複合グリッドシステムを用いた、より詳細な解析を行い、dynamic SGSモデルの拡散場に対する有効性を検討している。まず、複合グリッドシステムを用いたSmagorinskyモデルによる解析結果は、従来のメッシュ分割によるSmagorinskyモデルの結果を大きく改善し、ガス排出口近傍のメッシュ分割の粗密が予測精度に大きな影響を与えることを示している。また、この詳細なメッシュ分割を用いてdynamic SGSモデルを適用した結果は、同じメッシュ分割によるSmagorinskyモデルによる解析結果に比べて、さらに実験との対応が向上し、速度場ばかりでなく拡散場に対してもdynamic SGSモデルが極めて有効であることが示されている。

第８章は、本論文全体のまとめであり、本研究で得られた結論と今後の研究課題を総括している。

第2章

LESにおける
Subgrid scaleモデリングの概要

2.1　はじめに

LES (Large Eddy Simulation)では計算格子以下(Subgrid-scale,SGS)の小さなスケールの乱れのみがモデル化され、それより大きな変動は直接シミュレートされる。すなわち十分に小さなメッシュ間隔で解析を行なえば、SGSの乱れはエネルギーの散逸と直接結び付けられた単純なモデルで表すことが可能であると考えられる。このような考えに基づきSGSの乱れに対して渦粘性近似を行い、唯一のモデル定数としてSmagorinsky定数 C_s を用いるものがSmagorinskyモデルであり、比較的単純な流れ場においては、その精度、有効性が示されてきた。

Smagorinskyモデルでは、唯一のモデル定数としてSmagorinsky定数 C_s を用いる。この定数C_sはチャンネル流では0.10、減衰乱流では0.20等が最適値として用いられている。しかしながら建築・都市環境工学で対象とする流れ場のようにいたるところで剥離や再付着を生ずる等、局所的に流れの様相が大きく変化する複雑な流れ場においてはC_sの最適化が困難である。また大規模空間を対象とした場合一般に十分細かなメッシュ分割は困難であり、SGSの非等方性が問題になると考えられ、Smagorinskyモデルで仮定している局所平衡は成り立たず新たなモデル化が必要と考えられる。

また浮力の作用する流れ場におけるLESの適用に関しては気象分野においての検討例はあるものの、十分な精度の検証がなされているとは言い難く、そのモデル化の方法や精度について検討する必要がある。

本章では、以上のような観点からまずLESの基本的な考え方、Smagorinskyモデルの導出過程、その問題点について整理するとともに、その改良の方向として改良型のSmagorinskyモデル、その他の代表的SGSモデルについて解説する。また浮力の影響を考慮したSGSモデルについても既往の研究成果を整理し、検討を加える。

2.2 流体の基礎方程式

流体を支配する方程式（近似を施していない方程式）は以下のように示される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}=0 \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}=\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i}+\ p\mathrm{X}_i+\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mathrm{j}}+\frac{\partial u_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}}\right)\right] \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\partial(\rho C_p \theta)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho C_p \theta u_j)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+q \tag{2.2.3}$$

ここで　$\mathrm{u_i}$：流速［m / s］

p：圧力［N / m^2］

ρ：密度［kg / m^3］

θ：温度［℃］

μ：粘性係数［kg / s·m］

K：熱伝導率［N·m / ℃·s·m］

g：重力加速度［m / s^2］

$\mathrm{C_p}$：定圧比熱［N·m / kg·℃］

(2.2.1) 式は連続の式と呼ばれ質量保存の法則を表す。(2.2.2) 式は運動方程式であり、運動量の収支を表す。右辺第２項は外力であるが、ここでは重力のみを考え次式とする。

$$\mathrm{X_i}=\mathrm{g}\,\delta_{\mathrm{i}\,3} \tag{2.2.4}$$

(2.2.3) 式はエネルギー方程式であり、エネルギーの保存を表す。右辺第４項のq は放射伝熱、化学変化、相の変化、その他の原因に基づく熱の流入を表す。

またp, ρ, θ　は次の状態方程式により関係付けられる。

$$\mathrm{p}=\rho\,\mathrm{R}\,\theta \tag{2.2.5}$$

R：気体定数［m^2 / ℃·s］

以上(2.2.1)～(2.2.3)式及び(2.2.5)式の６つ方程式により、$\mathrm{u_i}$, p, ρ, θという６つの変数を含む閉じた方程式系が得られたことになる。

ここで(2.2.1)～(2.2.3) 式に対しBussinesq近似を施す。すなわち流体は非圧縮性であるとし、(2.2.2) 式の重力項にのみ密度変化を考慮する。

まず (2.2.1) 式は $\rho=\rho_0$ =constより

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0 \tag{2.2.6}$$

次に (2.2.2) 式は重力項以外では $\rho=\rho_0$ であるので次式となる。

$$\rho_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho\,g\,\delta_{i\,3}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.2.7}$$

ここでp, ρ, θ を静止状態における物理量（添字０）とそこからの変化量（添字a）として以下のように表す。

$$\mathrm{p}=\mathrm{p_0}+\mathrm{p_a} \tag{2.2.8}$$

$$\rho=\rho_0+\rho_\mathrm{a}\qquad\text{（重力項のみ）} \tag{2.2.9}$$

$$\mathrm{T}=\theta_0+\theta_\mathrm{a} \tag{2.2.10}$$

すなわち状態方程式 (2.2.5) 式は次のように書ける。

$$\mathrm{p_0}+\mathrm{p_a}=(\rho_0+\rho_\mathrm{a})\,\mathrm{R}\,(\theta_0+\theta_\mathrm{a}) \tag{2.2.11}$$

ここで密度変化は温度変化のみによって起こると仮定すると、(2.2.5) 式は次のように書ける。

$$\mathrm{p_0}+\mathrm{p_a}=\rho_0\,\mathrm{R}\,\theta \tag{2.2.12}$$

(2.2.11) , (2.2.12) 式より

$$(\rho_0+\rho_\mathrm{a})\,\mathrm{R}\,(\theta_0+\theta_\mathrm{a})=\rho_0\,\mathrm{R}\,\theta \tag{2.2.13}$$

$$\left(1+\frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^{-1}=1+\frac{\theta_a}{\theta_0}$$

テイラー展開することにより次のようになる。

$$1-\frac{\rho_a}{\rho_0}+O\left(\frac{\rho_a}{\rho_0}\right)=1+\frac{\theta_a}{\theta_0}$$

$$-\frac{\rho_a}{\rho_0}=\frac{\theta_a}{\theta_0} \tag{2.2.14}$$

ここでβ（：体積膨張率）＝$1/\theta_0$とおく。

$$\rho_a=-\rho_0\beta\theta_a \tag{2.2.15}$$

これらを (2.2.7) 式に代入すれば次式を得る。

$$\rho_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial p_0}{\partial x_i}-\frac{\partial p_a}{\partial x_i}+\rho_0 g\delta_{i3}-g\beta\theta_a\delta_{i3}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.2.16}$$

ここで右辺第１項と第３項は i ＝1, 2で０, i = 3で釣り合うので消去される。両辺をρ_0で割ることにより次式を得る。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial x_i}-g\beta\theta_a\delta_{i3}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.2.17}$$

ν：動粘性係数　$(=\mu/\rho_0)$　$[\mathrm{m^2/s}]$

(2.2.3) 式の右辺第２項以降は微小量として無視されるので、両辺を$\rho_0 C_P$で割ることにより次式となる。

$$\frac{\partial(\theta_0+\theta_a)}{\partial t}+\frac{\partial u_j(\theta_0+\theta_a)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K\frac{\partial(\theta_0+\theta_a)}{\partial x_j}\right) \tag{2.2.18}$$

$\frac{\partial\theta_0}{\partial t}=0,\ \frac{\partial\theta_0}{\partial x_j}=0$ であるから次式を得る。

$$\frac{\partial\theta_a}{\partial t}+\frac{\partial u_j\theta_a}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha\frac{\partial\theta_a}{\partial x_j}\right) \tag{2.2.19}$$

α：熱拡散係数 $(=K/\rho_0 C_P)$ $[\mathrm{m^2/s}]$

(2.2.5) , (2.2.17) , (2.2.19)式はBoussinesq方程式と呼ばれる。なお (2.2.19) 式は物質の拡散を表す方程式と同一の形である。物質の濃度を c とする。

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c u_j}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K\frac{\partial c}{\partial x_j}\right) \tag{2.2.20}$$

K：分子拡散係数 $[\mathrm{m^2/s}]$

空気と密度差のあるガスの場合、濃度 c と密度ρ は、空気の密度ρ_0を、ガスの密度をρ_sとすれば次のように関係付けられる。

$$\rho=(1-c)\rho_0+c\,\rho_s \tag{2.2.21}$$

ここで　$\rho_s=\rho-\rho_0$ ・ $\Delta\rho_s=\rho_s-\rho_0$　とおけば次式となる。

$$\rho_0=\Delta\rho_s c \tag{2.2.22}$$

これを (2.2.6) 式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_a}{\partial x_i}-\frac{\Delta\rho_s}{\rho_0}cg\delta_{i3}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.2.23}$$

一般に乱流現象は(2.2.5), (2.2.17), (2.2.19)式等により表現され、流れの数値予測法はこれらの微分方程式を解くことにより気流、温度、濃度分布等を予測しようとする手法である。ところが、流れの微分方程式には、(2.2.23)式のN-S方程式のような強い非線形性を持った時間依存の偏微分方程式を含むこと、また、同時に(2.2.6)式も満たす必要があることから、特別な場合を除いて解析解を得ることは不可能であり、数値的に近似解を求める方法に頼らざるを得ない。

なお、流れの解析のように支配方程式が多数となる場合には、密度、速度、およ

び長さに関する適当な基準変数を用いて無次元化した式を取り扱うほうが、問題を支配するパラメータの数を最小限に絞れるので便利である。

(2.2.6) , (2.2.17) , (2.2.19) , (2.2.20) , (2.2.23) 式を代表長さL_0 、代表速度U_0 、代表温度差$\Delta\theta_0$ 等を用いて無次元化すれば、次のようになる。

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*}=0 \tag{2.2.24}$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+\frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*}=-\frac{\partial p_a^*}{\partial x_i^*}-Ar\theta_a d_{i\,3}+\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right)\right] \tag{2.2.25}$$

$$\frac{\partial T_a^*}{\partial t}+\frac{\partial u_j^* \theta_a^*}{\partial x_j^*}=\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(\frac{1}{RePr}\frac{\partial \theta_a^*}{\partial x_j^*}\right) \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t^*}+\frac{\partial u_j^* c}{\partial x_j^*}=\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(\frac{1}{ReSc}\frac{\partial c}{\partial x_j}\right) \tag{2.2.27}$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*}+\frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*}=-\frac{\partial p_a^*}{\partial x_i^*}-Frdd_{i\,3}+\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right)\right] \tag{2.2.28}$$

ここで添え字＊は無次元量を表し、以下のように定義される。以後本文中では原則的に無次元化された方程式で表示し、添え字＊は省略する。

$$\begin{aligned}
u_i^* &= u_i / U_0 \\
x_i^* &= x_i / L_0 \\
t^* &= t / t_0 = t / (L_0 / U_0) \\
p^* &= p_a / p_0 = p / (\rho_0 U_0^2) \\
\theta^* &= \theta_a / \Delta\theta_0
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

上式中の代表量L_0、U_0、θ_0、ρ_0の設定は完全に任意であるが、対象とする事例による経験的な設定法が使用される場合が多い。例えば、建物周辺気流を対象とする場合は、L_0には建物高さ、U_0は建物高さによる風速、ρ_0は周辺空気の平均密度が用いられる例が多い。

また以下の諸量は無次元数であり、これらの値が等しければ流れは力学的に相似である。

Re ：レイノルズ数$(=\frac{U_0 L_0}{\nu})$

Ar ：アルキメデス数$(=-g\beta\frac{\Delta\theta_0 L_0}{U_0^2})$

Fr.d ：密度フルード数$(=-g\frac{\Delta\rho_s}{\rho_0}\frac{L_0}{U_0^2})$

Pr ：プラントル数$(=\frac{\nu}{\alpha})$

Sc ：シュミット数$(=\frac{\nu}{K})$

2.3 モデルの必要性

前節で述べたように、非圧縮粘性流体を支配する基礎方程式は、連続式 (2.2.24) 式及びNavier-Stokes方程式（N-S方程式） (2.2.25) 式である。ここでは簡単のため浮力の効果は無視する。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.3.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.3.2}$$

ここでx_i は独立変数、u_i はi 方向の速度成分、p は圧力を示す。

N-S方程式をそのままの形で数値的に解く方法は、Direct Numerical Simulation (DNS) と呼ばれる。DNSによって乱流が解けたと言うならば、その解法は当然、乱流の最も大切な特長の１つであるエネルギー散逸のメカニズムに対する配慮を含んだものでなければならない。

乱流には、大小さまざまなスケールの渦（eddy, 風速変動）が存在し、Re 数が大きくなると極めて小さなスケールの風速変動までが大切な意味を持つ。乱流の運動エネルギーは、いわゆるカスケードと呼ばれるプロセスにより大きな渦（長波長の速度変動）から、小さな渦（短波長の速度変動）に順次輸送される。大きなスケールの渦においては粘性力は殆ど作用しないが、小さなスケールの渦においては徐々に粘性が作用しはじめ、最も小さなスケールの渦（最小渦）になった段階で、粘性により熱エネルギーとして消散される。従って、これより小さなスケールの渦は存在しない。

この最小渦の大きさはKolmogorovのマイクロスケールと呼ばれ、その大きさは次式で評価される。

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{2.3.3}$$

ここで ε ：単位時間、単位質量あたりのエネルギー散逸率 (m^3/s^3)

ε は、具体的には変動風速を用いて次式で定義される。

$$\varepsilon = \nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right\rangle \tag{2.3.4}$$

ε は η より大きなスケールにおけるエネルギー輸送の機構と深く関連しており、次式で評価される。

$$\varepsilon \sim \frac{V^3}{L} \tag{2.3.5}$$

ここで　V：代表的速度(m / s),　L：代表的長さ(m)

(2.3.3) 式と (2.3.5)式より

$$\frac{\eta}{L} \sim Re^{-\frac{3}{4}} \tag{2.3.6}$$

但し、Re はReynolds数 ＝ LV/ ν

(2.3.6)式より、マイクロスケールの値はRe 数と共に小さくなることがわかる。η とＬは乱流を特徴づける最も大切な長さスケールであり、乱流の数値シミュレーションにおいてもこれらの量に注意を払う必要がある。エネルギー散逸はKolmogorovのマイクロスケール η のレベルでなされるものであるから、DNSで乱流を解く場合には、N-S方程式はそのレベルのスケールの速度変動まで解析すべきである。もしも差分格子の間隔 h が η よりはるかに大きいものであれば、η のスケールのレベルの速度変動はざる目から落ちたような状況となり、エネルギー散逸が正しく把えれていないことになる。

この状況を ε の定義 (2.3.4) 式を用いて説明すれば次のようになる。

速度変動 u_i' の大きさは、η のスケールでもメッシュサイズh のスケールでも大差ないと見なせば $\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$ の大きさは、次のようになる。

（マイクロスケールのレベル）～（ $\frac{u_i'}{\eta}$ ）

（差分各子間隔のスケールのレベル）～（ $\frac{u_i'}{h}$ ）

一般にh ≫ η であるから、後者の方がはるかに小さく評価されることになる。すなわち、一般の差分メッシュのスケールでは、ε は小さくなりすぎて正しく評価されない。従って、エネルギー散逸機構をDNSにより正しく把えるためには、差分格子間隔は、少なくともｈ～ η でなければならない。従って、(2.3.6) 式より

$$\frac{h}{L} \sim Re^{-\frac{3}{4}} \tag{2.3.7}$$

ここで　Lを（シミュレーションの対象としている空間の大きさ）と考えればL／hは格子分割数N（一次元）を表わすことになる。3次元の場合には、当然分割数N～(L／h)^{3}となる。従って実際の現象のReが分かれば、(2.3.7)式より必要な分割数Nを知ることができる。吉澤(1984)は以上のような考察に基づいて、必要な格子分割数Nを次のように求めている。

*Re*数	10^4	10^6	10^8
N	10^9	10^{13}	10^{18}

実際の建物周辺気流ではRe数は小さい場合でも10^6を越えている。Re～10^6としても、分割数Nは10^{13}程度必要ということになる。Re～10^8になればN～10^{18}となる。差分メッシュを小さくすることは、それに対応して時間間隔も小さくすることが要求されるから、計算量の増大は上に示した見積りよりさらに大きくなる。将来の計算機の進歩を考慮に入れても、上述のような莫大な量のNを用いることは不可能であると考えた方がよい。以上のような理由から、乱流を数値的に解く場合には、マイクロスケールに比較すればかなり粗い分割を用いた場合にも乱流の特徴を把えうるような何らかのモデル化が必要であることが理解される。

DNSが困難であるという意味は、微細なスケールに於いて風速の時間、空間変動を追跡することが不可能であるということであるから、変動量の平均値を解析対象にせざるを得ない。この平均値の取り扱い方には各種のものがあり、その手法に対応して各種の乱流モデルの名が冠せられている。そして乱流統計量の表示を工夫して方程式系に取り込むための努力はclosure problemと呼ばれる。従って主なる関心は、どのような方法を用いれば粗いメッシュ分割でも乱流の解析が可能になるかということになる。

これに対する解答の1つは、乱流の平均流（Reynolds方程式）を解析対象にするもので、Reynolds Averaged Navier-Stokes equation（RANS）モデルと呼ばれるものである。平均流ならば変化の仕方がある程度緩やかであるから、少々粗いメッシュ分割でも解析可能であると考えるものである。この場合、N-S方程式に平均操作を施すことにより、新たにReynolds応力（$=-\rho\langle u_i'u_j'\rangle$）が現われるが、微細な速度変化に

基づく運動量輸送はこの項により平均的に評価されているので、乱流の本質的なメカニズムを見落とすことはないと考える。レイノルズ応力について平均速度場までの量により代数的に表現しようとするものが0方程式モデルで、混合長モデルが含まれる。速度スケールとしての乱流エネルギーkの輸送方程式を解き、さらに代数的に与えられる長さスケールによりレイノルズ応力を表現するものが1方程式モデルである。乱流エネルギーkに加え、長さスケールとしてkの散逸率ε等の輸送方程式も解くものがk－εモデルに代表される2方程式のモデルで、現在では多くの流れ場に対して適用されている。以上のものはレイノルズ応力に対して基本的には勾配拡散型の渦粘性近似を採用している。一方でレイノルズ応力の輸送方程式を解くものは応力方程式モデル（Differential Second-moment closure Model, DSM）と呼ばれており、レイノルズ応力の生産、散逸、拡散、再分配および移流等を表現できるのでより複雑な流れ場への応用が期待されている。しかし、高次の未知数、例えば速度-圧力相関項等のモデル化や数値定数の最適化が現在でも問題となっている。レイノルズ応力の輸送方程式を簡略化して得られるレイノルズ応力の代数式を用いるものは代数応力モデル（Algebraic Second-moment closure Model, ASM）と呼ばれている。

もう一つの考え方は、メッシュ分割毎の空間平均値を解析対象とするというものである。これは物理的にみて最も明快な考え方であり、これをLES (Large Eddy Simulation)と呼ぶ。LESは基礎式系に空間的な平均化操作を行い、流れ場を格子で解像できる成分およびそれ以下の成分とに分解し、前者については直接計算、後者についてはなんらかのモデル化を行う。格子が十分に小さくなればLESは直接計算に近づく。格子以下の乱れの構造は等方的であると見なせることが多く、普遍的なモデルを構成しやすいことがこれまでのLESの成功と結び付いてきた。LESは高レイノルズ数、3次元性、非定常性等の乱流の特徴を実現できる計算手法であり、乱流の数値風洞を構成し得る手法として注目されてきている。このようなLESの有効性は単純な流れ場においてすでに検証されてきている。しかしながら、より現実的な工学および工業上興味ある流れ場へのLESの適用は、今後の課題とされており、本研究の主なテーマとなっている。

2.4 LESの概念

2.4.1 フィルタリング

LESでは、流れ場の変数 $f(x_i)$ に空間的なフィルター操作を施し、fを格子で解像される成分（Grid scale(GS)またはResolvable scale）$\bar{f}(x_i)$と解像できない成分（SGS, Subgrid scaleまたはUnresolvable scale）$f''(x_i)$に分離する。

$$f(x_i)=\bar{f}(x_i)+f''(x_i) \qquad (2.4.1)$$

$$\bar{f}(x_i)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{3} G(x_i-x'_i)f(x'_i)dx'_i \qquad (2.4.2)$$

ここで式(2.4.2)は、1次元フィルター関数$G(x_i)$を3方向に課したものとなっている。LESで用いられるフィルター$G(x_i)$としては、一般的にGaussian, Sharp cut-offおよびTop hat フィルターが仮定される。物理空間及び波数空間でのこれらのフィルターの形は以下となる。

(a) Top-hatフィルター

$$\begin{aligned} G(x)&=1/\bar{\Delta}_i && (|x_i|\leqq \bar{\Delta}_i/2) \\ &=0 && (|x_i|>\bar{\Delta}_i/2) \end{aligned} \qquad (2.4.3)$$

$$\tilde{G}(k_i)=2\frac{\sin\left(\frac{\bar{\Delta}_i k_i}{2}\right)}{\bar{\Delta}_i k_i} \qquad (2.4.4)$$

(b) Sharp cutoffフィルター

$$G(x_i)=2\frac{\sin\left(\frac{\pi x_i}{\bar{\Delta}_i}\right)}{\pi x_i} \qquad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(k_i)&=1 && (|k_i|\leqq \pi/\bar{\Delta}_i) \\ &=0 && (|k_i|>\pi/\bar{\Delta}_i) \end{aligned} \qquad (2.4.6)$$

(c) Gaussianフィルター

$$G(x_i)=\sqrt{\frac{6}{\pi\bar{\Delta}_i^2}}\exp\left(-\frac{6x_i^2}{\bar{\Delta}_i^2}\right) \qquad (2.4.7)$$

$$\tilde{G}(k_i)=\exp\left(-\frac{(\bar{\Delta}_i k_i)^2}{24}\right) \qquad (2.4.8)$$

これらのフィルターは、次式を満足している必要がある

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x_i)dx_i=1 \qquad (2.4.9)$$

上記の3つのフィルターは当然これを満足している。

ここで$\bar{\Delta}_i$はx_i方向のフィルター幅であり、格子間隔の2倍（$\bar{\Delta}_i=2h_i$）に設定されることが多い。これらのフィルター関数のうち、Gaussianフィルターは実空間及び波数空間双方での関数形が正規分布となる。Cutoffフィルターは波数空間での関数形がTop hat型となる。Top Hatフィルターは実空間での関数形がTop-Hat型である。またTop Hatフィルターは1階微分に対する2次精度中心差分近似のフィルター化効果と等しい（森西(1993)）。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h_1)-f(x-h_1)}{2h_1} &= \frac{1}{2h_1}\left[f(x')\right]_{x'=x-h_1}^{x'=x+h_1} \\ &= \frac{1}{2h_1}\int_{x'=x-h_1}^{x'=x+h_1}\frac{\partial f(x')}{\partial x'}dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x')\frac{\partial f(x')}{\partial x'}dx' \end{aligned} \qquad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} G(x)&=1/2h_i && (|x_i|\leqq \Delta_i) \\ &=0 && (|x_i|>\Delta_i) \end{aligned} \qquad (2.4.11)$$

一般的なフィルターの場合にはアンサンブル平均の場合と異なり次式が成り立つ。

$$\bar{\bar{f}}\neq\bar{f}\,,\ \overline{\bar{f}\cdot f''}\neq 0 \qquad (2.4.12)$$

ただし、同じフィルター幅のSharp cutoffフィルターを２度続けて操作する場合のみ(2.4.12)式は等号となる。

また微分オペレータはフィルター化操作と互換である。

すなわち、変数f(x)の微分に１次元フィルターを操作し、積分を部分積分により展開すると次式を得る。

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x')\frac{\partial f(x')}{\partial x'}dx'$$

$$= \lim\left[G(x-x')f(x')\right]_{x'=b}^{x'=a} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(x-x')}{\partial x'}f(x')dx' \qquad (2.4.13)$$

ここで、フィルター関数Gとして$|x_i| \to 0$で急速に０となるものが選ばれるので、(2.4.13)式中の[・]の項は０となる。またフィルター関数G(x)として偶関数が選ばれると（実際、(2.4.3)～(2.4.8)式のフィルターは偶関数である）、次式が成立する。

$$\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'} = -\frac{\partial G(x-x')}{\partial x} \qquad (2.4.14)$$

これより、式(2.4.13)の最後の項は

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(x-x')}{\partial x'}f(x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(x-x')}{\partial x}f(x')dx'$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x')f(x')dx' \qquad (2.4.15)$$

となる。これらより、次の関係式が得られる。

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x')f(x')dx' = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'} \qquad (2.4.16)$$

すなわち、微分操作については、アンサンブル平均化操作と同様に上記の互換性を満たすフィルター関数が仮定される。

2.4.2 LESの基礎方程式

流れ場の基礎方程式(2.3.1)及び(2.3.2)式に(2.4.3)～(2.4.8)式のフィルタリングを施せば、フィルタリングされた基礎方程式、つまりGrid Scale (GS) の連続の式及び運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \qquad (2.4.17)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (2.4.18)$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\,\overline{u_j} \qquad (2.4.19)$$

ここで、格子で捉えきれないスケール（SGS）の乱れによる、GSの流れ場への影響はSGS応力項τ_{ij}を通じてGSの運動方程式に現れる。SGS応力項は一般に次のように分解して取り扱われる。

$$\tau_{ii} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \qquad (2.4.20)$$

$$L_{ij} = \left(\overline{\overline{u_i}\,\overline{u_j}} - \overline{u_i}\,\overline{u_j}\right) \qquad (2.4.21)$$

$$C_{ij} = \left(\overline{\overline{u_i}u_j''} + \overline{u_i''\overline{u_j}}\right) \qquad (2.4.22)$$

$$R_{ij} = \overline{u_i''u_j''} \qquad (2.4.23)$$

L_{ij}，C_{ij} 及びR_{ij} はReonard,cross 及びSGS Reynolds 項と呼ばれるSGS項である。Leonard項 L_{ij} はフィルター関数$G(x_i)$を特定して２重フィルターが施されるならばモデル化無しに評価できる。cross 項 C_{ij} はGSとSGS渦との相互作用を示す。Reynolds項 R_{ij} はSGS渦どうしの相互作用を表現する項であり、ともにSGSの変動量u_i''を含むためにモデル化が必要となる。これらの量をGSの量に結びつけて、(2.4.17)～(2.4.19)式を閉じた方程式系にする工夫がSGSのモデリングである。なお、$\bar{f}$をフィルタリングされた量ではなく、体積平均された量と考えれば、L_{ij}，C_{ij} は現れず、R_{ij} の

みとなる。

2.4.3 SGSモデルのガリレイ不変性

LESではcross項とReynolds項に対するSGSモデルの導入が最低限必要となるが、その際の拘束条件がガリレイ変換により導かれる。基準座標系（x_1, x_2, x_3, t）とこれに対して速度U_iで並進運動を行う座標系（x^*_1, x^*_2, x^*_3, t^*）との間の座標変換

$$x^*_i = x_i + U_i t + b_i, \quad t^* = t \tag{2.4.24}$$

をガリレイ変換と呼ぶ。この変換に対して運動方程式が不変であることをガリレイ不変則と呼び、力学の最も重要な原理の一つである。当然のことながら、N-S方程式はガリレイ不変則を満足する。GSの運動方程式ガリレイ不変則を満するためには、SGS応力項τ_{ij}がガリレイ不変則を満足しなければならない。ここでSGS応力項にガリレイ変換を行うと次式が導かれる（Speziale(1986)）。

$$L^*_{ij} = L_{ij} - U_i \overline{u_j''} - U_j \overline{u_i''} \tag{2.4.25}$$

$$C^*_{ij} = C_{ij} + U_i \overline{u_j''} + U_j \overline{u_i''} \tag{2.4.26}$$

$$R^*_{ij} = R_{ij} \tag{2.4.27}$$

(2.4.25), (2.4.26)式より、Leonard項とcross項それぞれは独立にはガリレイ不変則を満足せず、両者を加えて始めて、

$$L^*_{ij} + C^*_{ij} = L_{ij} + C_{ij} \tag{2.4.28}$$

となりガリレイ不変則が保たれることがわかる。Reynolds項は単独でガリレイ不変則を満足させる。すなわちcross項はLeonard項は両者ともにモデル化する（あるいはともに無視する）ことが必要で、どちらか一方のみを組み込んだ場合、ガリレイ不変則が満足されない。

2.5 代表的なSubgrid Scaleモデル

2.5.1 Smagorinskyモデルの導出

これまでのLES解析においては、Smagorinsky渦粘性モデル（Smagorinsky(1963), 以下Smagorinskyモデル）と呼ばれるモデルが基本的なモデルとして幅広く用いられてきた。

まず、このSmagorinskyモデルの導出過程について説明する。

Subgrid scale（SGS）の運動エネルギーを$k_{SGS}=\frac{1}{2}(\overline{u_i u_i}-\overline{u}_i\overline{u}_i)$とすると、$k_{SGS}$の方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial k_{SGS}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_j k_{SGS}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{u_j u_i^2}}{2} + \frac{\overline{u}_j \overline{u_i^2}}{2} - \overline{u}_i \overline{u_i u_j} + \overline{u}_i^2 \overline{u}_i - \overline{u_j p} - \overline{u}_j \overline{p}\right)$$

$$-\nu \frac{\partial^2 k_{SGS}}{\partial x_j \partial x_j} \underbrace{-\tau_{ij}\overline{S}_{ij}}_{Pk_{SGS}} - \underbrace{\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)}_{\text{dissipation}(\varepsilon_v)} \tag{2.5.1}$$

ただし、$\tau_{ij}=\overline{u_i u_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j$, $\overline{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$

k_{SGS}の輸送方程式に対して局所平衡を仮定すれば、(2.5.1)式は次式となる。

$$\varepsilon_v = -\tau_{ij}\overline{S}_{ij} \tag{2.5.2}$$

SGS応力τ_{ij}は分子粘性とのアナロジーから勾配拡散近似により、Strain rate $\overline{S}_{ij}$と比例すると仮定する。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_{SGS}\overline{S}_{ij} \tag{2.5.3}$$

SGSにおける基本的物理量として、ε_vと$\overline{\Delta}$を選べば、次元解析から以下の関係が導入される。

$$k_{SGS}=\varepsilon_v^{2/3}\left(\frac{\bar{\Delta}}{C_\varepsilon}\right)^{4/3} \tag{2.5.4}$$

$$\nu_{SGS}=\varepsilon_v^{1/3}\,(C_S\bar{\Delta})^{4/3} \tag{2.5.5}$$

ここで、$\bar{\Delta}$はグリッドスケールであり、C_SとC_εは比例係数である。(2.5.5)式のε_vに(2.5.2)式を代入し、さらにτ_{ij}を(2.5.3)式で近似することによって、渦粘性係数ν_{SGS}を次のように表すことができる。

$$\nu_{SGS}=(C_S\bar{\Delta})^2|S| \tag{2.5.6}$$

$$|S|=(2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2} \tag{2.5.7}$$

(2.5.6)式のν_{SGS}を用いて(2.5.3)式によりτ_{ij}を近似するのが、いわゆるSmagorinskyモデルである。

(2.5.4)式のε_vに(2.5.2)式を代入し、さらに(2.5.3)式を用いて変形するとは次のようになる。

$$k_{SGS}=\frac{\nu_{SGS}^2}{(C_k\bar{\Delta})^2} \tag{2.5.8}$$

(2.5.7)式のC_kとC_ε,C_Sの間には以下の関係がある。

$$C_k=(C_S^4C_\varepsilon)^{1/3} \tag{2.5.9}$$

次に、Subgrid scale (SGS) 応力成分τ_{ij}がResolvable scaleに及ぼす影響を示すために、Resolvable scaleの運動エネルギー$\bar{K}=\frac{1}{2}\bar{u}_i\bar{u}_i$に関する輸送方程式を考える。

$$\frac{\partial\bar{K}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}_j\bar{K}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\bar{p}\,\bar{u}_j-\bar{u}_i\tau_{ij}+\nu\frac{\partial\bar{K}}{\partial x_j}\right)-\nu\frac{\partial\bar{u}_i\partial\bar{u}_i}{\partial x_j\partial x_j}+\underline{\underline{\tau_{ij}\bar{S}_{ij}}} \tag{2.5.10}$$

(2.5.10)式の右辺最後の項$\tau_{ij}\bar{S}_{ij}$はGSとSGSの間で行われる運動エネルギーの輸送率であり、一般の流れ場ではこの値は負となるケースが多い。すなわち、統計的にはGSからSGSへエネルギーが輸送されているので、GSからSGSへのエネルギー輸送率

（GSで見た時のSGSに失われるエネルギーの散逸率, 以下ε_{SGS}）と呼ばれる。(2.5.10)式の右辺の第２項はGS成分による粘性散逸率である。乱流運動のエネルギースペクトルの慣性小領域ではその粘性散逸率は無視できる。

(2.5.10)式から、k_{SGS}の生産項$-\tau_{ij}\bar{S}_{ij}$ (Pk_{SGS})と逆符号の項が$\bar{K}$の方程式（(2.5.10)式右辺の$\underline{\underline{\qquad}}$の項,）に現れることが分かる。すなわち$k_{SGS}$の生産項$(Pk_{SGS})$が正の時は、(2.5.10)式の$\varepsilon_{SGS}$が負であるからGSの運動エネルギーがその分減少する（GSからSGSへのエネルギー輸送が行われる）。一般には、このような状況が生じていることが多く、これをforward scatterと呼ぶ。これに対して、逆方向のエネルギーの輸送が行われε_{SGS}が正となる様な状況(SGSからGSへエネルギーが輸送される状況)をbackward scatterと呼ぶ。

(2.5.3), (2.5.6)式より、$\tau_{ij}\bar{S}_{ij}$ $(=-\varepsilon_{SGS})$を評価すれば

$$\tau_{ij}\bar{S}_{ij}=-\varepsilon_{SGS}=-2\nu_{SGS}(\bar{S}_{ij})^2=-(C_S\bar{\Delta})^2|S|^3 \tag{2.5.11}$$

(2.5.11)式から、Smagorinskyモデルでは常に$\varepsilon_{SGS}>0$ (forward scatter)が仮定されていることが判る。

C_SはSmagorinsky定数と呼ばれ、Smagorinskyモデルに現れる唯一の定数である。は乱流統計理論に基づき(Lilly,1967)、次の渦度Spectrum functionの波数積分から求められるとする。

$$|S|\equiv 2\int_0^{\pi/\bar{\Delta}}k^2E(k)dk=2\alpha\varepsilon^{2/3}\int_0^{\pi/\bar{\Delta}}k^{1/3}dk=\frac{3}{2}\alpha\varepsilon^{2/3}\left(\frac{\pi}{\bar{\Delta}}\right)^{4/3} \tag{2.5.12}$$

ここでE(k)はKolmogoroff spectrum関数（$E(k)=\alpha\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$）。$\alpha$はKolmogoroff定数と呼ばれ、通例、$\alpha$=1.4～1.5。$\varepsilon$はGSとSGSで行われる総粘性散逸率であるが、慣性小領域ではGSの粘性散逸率が無視できるため、全スケールで行われるエネルギーの総粘性散逸率εはSGSの粘性散逸率ε_vとほぼ等しいとみなせる。すなわち

$$\varepsilon \fallingdotseq \varepsilon_v \tag{2.5.13}$$

ここでε_vはSGSで行われるエネルギーの粘性散逸率。これに対してε_{SGS}はGSからSGSへのエネルギー輸送率((2.5.10)式の右辺最後の項)である。

(2.5.12),(2.5.13)式と(2.5.5),(2.5.6)式より、α=1.41とすると、Smagorinsky定数の理論値を算出することが出来る。

$$C_S \cong \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3\alpha}\right)^{3/4} = 0.18 \qquad (2.5.14)$$

なお一般に、Smagorinskyモデルではτ_{ij}を構成するL_{ij}, C_{ij}, R_{ij}のうちとはお互いに打ち消し合う効果があり、２項を同時に無視するなら誤差は小さいと期待し（前節 ガリレイ不変性参照）、

$$L_{ij}+C_{ij} \fallingdotseq 0 \qquad (2.5.15)$$

と仮定することが多い。その場合結果的にτ_{ij}がR_{ij}のみで代表され、そしてR_{ij}は次式でモデル化される

$$\overline{u''_i u''_j} = -2\nu_{SGS}\overline{S}_{ij} + \frac{2}{3}\delta_{ij}k_{SGS} \qquad (2.5.16)$$

と考える。

2.5.2 Smagorinskyモデルの適用

このSmagorinskyモデルを適用した最初の本格的なLESは、Deardorff(1970)によるReynolds数無限大のチャンネル流の解析である。ここでは有限差分法が用いられ、グリッド数は24×21×14であった。Lilly(1967)が導出したSmagorinsky定数の理論値（C_s≒0.18）はチャンネル流では乱流変動を過剰に減衰させ、より小さな値（C_s=0.1）が適切であることが示された。ここで得られた平均風速とレイノルズストレスはかなりの精度でLaufer(1951)の実験結果と一致した。

Clark et al.(1979)は一様等方性乱流の減衰問題に対するLESの適用をa prioriテストにより検討した。ここではDNSにより得られた速度場にフィルターをかけ、モデル化されたSGSストレスとDNSにより求めたSGSストレスを比較した。その結果、Smagorinskyモデルにより求めたSGSストレスはDNSによるSGSストレスとの相関はかなり悪いが、総粘性散逸率εに関する相関はかなり良いことが示された。McMillan et al.(1980)は同様の手法を用いて均一剪断流を解析し、同様の結果を得た。さらに彼

らは、平均shearが存在する場合、モデル化による乱流変動成分をDNSによる値に合わせるためには、C_sの値を減じなければならないことを発見し、Deardorff(1970)の結果を裏付けた。

Moin and Kim(1982)は壁面にno-slip条件を採用した最初のLESをチャンネル流で行った。Moin and Kim(1982)の計算は、Re (=u*δ/ν)=640 (ここで、u* : 摩擦速度, δ : チャンネル半幅)のチャンネル流を解くために、流れ方向と流れ横断方向にフーリエ展開を用いて、64×63×128のグリッドを使用した。彼らは、Schumann(1975)が導入したモデルに類似した形式のtwo-partモデルを使用した。

$$\tau_{ij} = -2\nu_{SGS}\left(\overline{S_{ij}} - \left\langle\overline{S_{ij}}\right\rangle\right) - 2\nu^*_{SGS}\left\langle\overline{S_{ij}}\right\rangle \qquad (2.5.17)$$

(2.5.17)式の第１項は、等方的な乱れに対してモデル化されたSGSストレスにおける平均Shearの影響を差し引くために、改良されたSmagorisnky項である。

$$\nu_{SGS} = \ell^2\left[2\left(\overline{S}_{ij} - \left\langle\overline{S}_{ij}\right\rangle\right)\left(\overline{S}_{ij} - \left\langle\overline{S}_{ij}\right\rangle\right)\right]^{1/2} \qquad (2.5.18)$$

第２項は

$$\nu^*_{SGS} = \ell^{*2}\left[2\left\langle\overline{S}_{ij}\right\rangle\left\langle\overline{S}_{ij}\right\rangle\right]^{1/2} \qquad (2.5.19)$$

であり、平均shearの存在による非均一性とグリッド分割が十分でない壁近傍のSGSエネルギーの生産を考慮するために考えられた。

また彼らは壁近傍で長さスケールが減少することを考慮するために、Van Driest(1956)により提案された減衰関数f_μを使用し、これを$\overline{\Delta}$に乗じた。f_μは次のように与えられる。

$$f_\mu = 1 - \exp\left(\frac{x_n^+}{25}\right) \qquad (x_n^+ : 壁からの距離) \qquad (2.5.20)$$

Moin et al.(1982)の結果は実験ときわめて良く一致し、低速のストリークと呼ばれる壁面近傍の乱流の組織的構造も良く再現されていた。

またHoriuti(1987)は、有限差分法を用いた解析において、壁近傍でrotational formを用いた場合の運動方程式のtruncation errorは$(\Delta y_{j+1} - \Delta y_i)Re^2$のオーダーであることを示した。その場合の対流項は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i}\,\overline{u_j}) = (\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_k}\,\overline{u_k}) \tag{2.5.21}$$

Moin and Kim(1982)の計算では、縦方向に引き延ばされたメッシュが用いられたので、壁近傍ではtruncation errorは非常に大きい。Horiuti(1987)はskew-symmetricスキーム

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) = \frac{1}{2}\left[\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i}\,\overline{u_j})\right] \tag{2.5.22}$$

を用いて、Moin and Kim(1982)よりも粗いメッシュを用いたにもかかわらず、乱流性状をより正確に予測できることを示した。

さらに近年、境界層やチャンネル流(Piomelli et al. 1990)、管内乱流(Madabushi and Vanka,1991)、回転乱流(Tafti and Vanka,1992)等の遷移過程を含む流れ場へのSmagorinskyモデルの適用が行われてきた。Piomelliらは、遷移の初期過程においてSmagorinskyモデルは、乱流変動を過剰に減衰させ、超臨界Reynolds数においてさえ再層流化を引き起こしてしまうことを発見した。そのため彼らは、層流ではSGSストレスを減ずるintermittency functionを導入した。

2.5.3 Smagorinskyモデルの問題点

Smagorinskyモデルを用いて、LESは等方性乱流、一様剪断乱流、乱流混合層、チャンネル乱流等、各種の基本的な乱流場に適用され、かなりの成功を収めた。しかし同時にいくつかの欠点も指摘されており、より複雑な工学的に興味のある流れ場に適用するには問題がある。

(1)C_Sの最適化が困難なこと

Smagorinsky定数C_SはKolmogoroff則に基づいた理論値としては約0.18と与えられる。一様等方性乱流のLESでは、この値で実験とよく一致する結果が得られたが、乱流混合層、チャンネル乱流では大きすぎ、それぞれ、約0.15, 0.10が最適値と言われている。その他、様々な研究者がSmagorinskyモデルによる乱流場の解析を行っているが、流れ場の種類によって用いているC_Sの値は様々である。既往の研究における各種流

れ場によるC_Sの値を表2.1に示す。一般に、不安定境界層等のように乱流拡散が活発に行われ、平均速度勾配が小さい場合、C_Sの最適値はLiilyの理論値に近い値となるが、中立状態や安定状態で平均速度勾配が大きいような場合には、これによりエネルギーが供給されるため、大幅にC_Sを減ずる必要があると言われている。工学上の問題で取り扱う実際の乱流場はこれら各種流れが混在しており、C_Sの最適値を事前に決定することは容易ではない。

(2)L_{ij}, C_{ij}を無視

Smagorinskyモデルでは、L_{ij}, C_{ij}の影響が陽にモデルに組み込まれておらず、両者の和を微小量として無視している。しかし堀内(1986)は、運動方程式中の移流項に2次精度の中心差分を用いた場合に発生する誤差がL_{ij}に対応することを指摘しており、これに則って2次精度の中心差分の場合にはがモデル化されているという立場に立てば、L_{ij}のみを陰にモデルに組み込んだことになってしまいガリレイ不変性が満たされなくなる。

(3)壁近傍で減衰関数の併用が必要

壁で粘着条件を課す場合、本来壁面上で$\tau_{ij}=0$, すなわち$\nu_{SGS}=0$を満足しなければならない。このため通常は、$\overline{\Delta}$にVan Driest型の減衰関数を乗じている。壁乱流等ではこのVan Driest型の減衰関数もある程度有効であるが、より複雑な流れ場では層流から乱流、あるいはその逆のtransitionが問題となるのは壁近傍だけではない。剥離や浮力を伴うような流れ場で、このような減衰関数を併用したSmagorinskyモデルが妥当性を持たないことは、第5章で詳しく述べる。

(4)Backward scatter効果が表現できない

慣性小領域で、スケール間のエネルギー輸送はGSからSGSに向かって行われる（forward scatter , $\varepsilon_{SGS}>0$）という統計的な性質に基づいてモデル化がされているので、実際の流れ場で局所的かつ瞬間的におこる逆方向のエネルギー輸送機構(backward scatter , $\varepsilon_{SGS}<0$)がモデル化に全く反映されていない。多くの流れ場の解析においてこれが問題となるが、特に、遷移流の乱れの発達過程等を予測するには大きな障害となる。なお通例、Smagorinskyモデルを始めとする勾配拡散近似型のモデルでは$\overline{S}_{ij}$とτ_{ij}は負の相関を有すると仮定している((2.5.3)式)が、これに対してbackward scatter

($\varepsilon_{SGS}=2\nu_{SGS}(\overline{S}_{ij})^2<0$))の生じている場合、$\nu_{SGS}<0$となる。これは(2.5.3)式より、$\overline{S}_{ij}$と$\tau_{ij}$とが正の相関を有する状況を示している。建物周りのような複雑な流れでは$\overline{S}_{ij}$の正負は局所的に大きく変化しており、ある場所で$\overline{S}_{ij}$と負の相関(forward scatter)を有するτ_{ij}が移流により逆符号の$\overline{S}_{ij}$を持つ場所へ運ばれ、実際は$\overline{S}_{ij}$とτ_{ij}が正の相関を有する様な状況(すなわち backward scatter)は頻繁に発生しているものと考えられる。

すなわち、複雑流れ場においてbackward scatterを引き起こす要因の一つは、$\overline{S}_{ij}$（及び、これに伴うτ_{ij})の局所的変化と、このような流れにおいて無視し得ぬ大きさを持つ移流(拡散)の効果であると考えられる。

(5)SGSエネルギーの移流拡散効果を無視

建物周りのような複雑な流れでは、ある場所で大きなk_{SGS}の生産があった時、その場所でそれが全て散逸されるとは限らない。むしろその様な可能性の方が稀であると考えられる。この差として生じたエネルギー（$Pk_{SGS}-\varepsilon_v$）は、主として移流により風下に輸送され、風下側で散逸される。その場合、風下側の領域ではk_{SGS}の方程式中で移流項が大きな正となり、Pk_{SGS}（ε_{SGS}）が負と働くこと(backward scatter)により、k_{SGS}の収支がバランスすることが多い。ここで、Pk_{SGS}（ε_{SGS}）が負となるのは、上記で説明した様に、符号の異なる領域へτ_{ij}が移流されることにより生じる場合が多い。すなわち、複雑な流れ場では、k_{SGS}の輸送方程式の移流（拡散）項の寄与が大きい場合がしばしば発生するため、局所平衡に基づき、これを無視したモデルの適用には問題が生じる可能性が高い。

2.5.4 その他の代表的なSGSモデル

本節ではSmagorinskyモデルの問題点を部分的に克服するために提案された改良型のSmagorinskyモデル及び他の代表的なSGSモデルに関する研究の最近の展開を述べる。

2.5.4.1 1方程式モデル, 応力方程式型SGSモデル

Smagorinskyモデルにおいては SGSの乱流エネルギーk_{SGS}の生産、散逸の近似的釣り合いを仮定しており、移流・拡散効果を無視している。しかしながらこの乱流エネルギーの生産と散逸の釣り合いはいくつかの限られた流れ場でしか保たれず、工学的に重要である噴流や剥離や循環流を伴う流れ場等ではその仮定は成立しない。従ってSGS乱流エネルギーの釣り合いを基礎としないより正確なSGS応力の表現を用いたLESのモデルを構築すれば、その精度は向上するものと考えられる。

1方程式型のSGSモデルでは、通常、k_{SGS}の輸送方程式(厳密には(2.5.1)式)を次のようにモデル化して表す。

$$\frac{Dk_{SGS}}{Dt}=D_{k_{SGS}}+P_{k_{SGS}}-\varepsilon_v \tag{2.5.23}$$

ただし$\frac{D}{Dt}$は実質微分$\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$を表し、$Dk_{SGS}$, Pk_{SGS}はそれぞれ拡散項、生産項である。

ここで拡散項D_{kSGS}, k_{SGS}の散逸ε_vは一般に次のようにモデル化される。

$$D_{k\,SGS}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_{SGS}}{\sigma_k}\frac{\partial k_{SGS}}{\partial x_j}\right) \tag{2.5.24}$$

$$\varepsilon_v=\frac{C_\varepsilon k_{SGS}^{1/2}}{\overline{\Delta}} \tag{2.5.25}$$

ここでσ_k、C_εは数値定数である。

GSの流れ場を記述する基礎方程式として、連続式、N-S方程式、k_{SGS}の輸送方程式の3者を用いるものが、1方程式型のSGSモデルである。すなわち、Smagorinskyモデルで用いる

$$\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_j}=0 \tag{2.5.26}$$

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}-\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j\partial x_j} \tag{2.5.27}$$

ただし、$\tau_{ij}=\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j$ (2.5.28)

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=-2\nu_{SGS}\overline{S}_{ij} \tag{2.5.29}$$

の他に

$$\nu_{SGS} = C_k \overline{\Delta} k_{SGS}^{1/2} \qquad (2.5.30)$$

によって(2.5.23)式のk_{SGS}の輸送方程式とν_{SGS}を関係付けることにより与えられる方程式系である(Yoshizawa and Horiuti(1985)等)。この場合計算量が増加することは勿論、境界条件としてk_{SGS}を与える必要が生じる等、計算は多少複雑になる。

1方程式型SGSモデルの等温流れ場への適用例としては既にSchumann(1975)、Horiuti(1985)によるチャンネル流を対象とした例がある。ただしSchumannはこのモデルが、Smagorinskyモデルと比べて評価し得るような違いを与えないという結論を下している。またHoriutiのチャンネル内乱流の解析においてもSmagorinskyモデルと比較してそれほど大きな改善はなされないことが報告されている。このように1方程式型SGSモデルの等温流れ場（例えばチャンネル流等）への適用例はそれほど多くなく、これを利用しても、Smagorinskyモデルの結果が顕著に改善されるという結果は現在のところ報告されていない。しかしながら、上記の2つの検討結果のみから1方程式型SGSモデルの評価に結論を下すのは早計である。なぜなら、チャンネル流では基本的にSmagorinskyモデルの前提である局所平衡が大部分の領域で満足されているので、両モデルの差が現れにくいことによるものであり、乱れの移流拡散の影響がかなり大きくなる領域が少なからず存在する建物周辺気流等では、1方程式型SGSモデルの導入により精度が改善する可能性は大きいと考えられる。一方、気象分野の大気境界層の解析においては1方程式型SGSモデル(Deardorff(1980))さらにSGSのレイノルズストレスの輸送方程式を解く応力方程式型のモデル（Deardorff(1973, 1974), Schmidt and Schumann(1989))の適用例が報告されている。気象分野で、このタイプのモデルが利用される原因の一つは、物理的メカニズムの複雑さとともに、計算に用いられるメッシュスケールが数kmに及ぶ大スケールであることである。この様な場合、一般のLESと区別してVLES(Very Large Eddy Simulation)と呼ぶ。VLESでは単純なSmagorinskyモデルの前提条件は満たされることが少ないので、k_{SGS}又はτ_{ij}に関する輸送方程式中の各項の影響を反映する必要が生じるものと考えられる。それらの詳細については2.6節で詳しく述べる。一般に用いられる1方程式型SGSモデルの数値定数を表2.2に示す。

2.5.4.2 Yoshizawaのモデル

Yoshizawa(1991)は1方程式型SGSモデルの煩雑さを回避するモデルとして

Smagorinskyモデルにおいて無視されるk_{SGS}方程式における移流・拡散の効果を考慮し、C_Sを$|\overline{S}|$のラグランジュ微分と関連付け、C_Sを場の関数として変化させる定式化を提案している。

k_{SGS}の輸送方程式（(2.5.23)式）を変形し、次式を得る。

$$\varepsilon_v = Pk_{SGS}\left(1 - \frac{(Dk_{SGS}/Dt)}{Pk_{SGS}} - \frac{D_{k_{SGS}}}{Pk_{SGS}}\right) \qquad (2.5.31)$$

Pk_{SGS}（$=-\tau_{ij}\overline{S}_{ij}$）は(2.5.29)式より次式で表される。

$$Pk_{SGS} = \nu_{SGS}|\overline{S}|^2 \qquad (2.5.32)$$

ただし$|\overline{S}| = (2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2}$, $\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$

また次元解析より

$$\nu_{SGS} = C_1 \overline{\Delta}^{3/4} \varepsilon_v^{1/3} \qquad (2.5.33)$$

$$k_{SGS} = C_2 \overline{\Delta}^{4/3} \varepsilon_v^{2/3} \qquad (2.5.34)$$

ここで定数C_1、C_2はそれぞれ$C_S^{4/3}$、$C_\varepsilon^{2/3}$に対応する。

(2.5.32),(2.5.33),(2.5.34)式より、(2.5.31)式は以下のように書き換えられる。

$$\varepsilon_v = C_1^{3/2}\Delta^2|\overline{S}|^3\left[1 - \frac{2}{3}C_1^{-1}C_2\overline{\Delta}^{-2/3}|\overline{S}|^{-2}\frac{D\varepsilon_v}{Dt} - \frac{2}{3}C_2\overline{\Delta}^{-2/3}\varepsilon_v^{-1/3}|\overline{S}|^{-2}\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial x_j^2}\right] \qquad (2.5.35)$$

(2.5.35)式右辺の〔·〕中の第2、3項を無視すると

$$\varepsilon_v = C_1^{3/2}\overline{\Delta}^2|\overline{S}|^3 \qquad (2.5.36)$$

となり、これを(2.5.33)式に代入すれば、いわゆるSmagorinskyモデルとなる。ここで、(2.5.35)式〔·〕中の第2、3項を(2.5.36)式のε_vを用いて、$|\overline{S}|$で表現し直し、それを(2.5.33)式に代入すると、Smagorinsky定数C_Sをその変数型C_{SV}で置き換えた次式になる。

$$\nu_{SGS} = (C_{SV}\overline{\Delta})^2 |\overline{S}| \tag{2.5.37}$$

$$\frac{C_{SV}}{C_{SO}} = \left[1 - 2C_1^{-1/2} C_2 |\overline{S}|^{-2} \frac{D|\overline{S}|}{Dt} - 8C_1 C_2 \Delta^2 |\overline{S}|^{-3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\overline{S}|^2 \frac{\partial |\overline{S}|}{\partial x_j}\right)\right]^{1/4} \tag{2.5.38}$$

ここで$C_{s0}(=2C_1^{3/4})$は従来のSmagorinsky定数に対応する。(2.5.38)式で移流、拡散の効果が小さいとして、２項級数展開により簡略化すると次式を得る。

$$\frac{C_{SV}}{C_{SO}} = 1 - C_A^2 |\overline{S}|^{-2} \frac{D|\overline{S}|}{Dt} + C_B \overline{\Delta}^2 |\overline{S}|^{-3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\overline{S}|^2 \frac{\partial |\overline{S}|}{\partial x_j}\right) \tag{2.5.39}$$

$$C_A = \frac{1}{2} C_1^{-1/2} C_2\ ,\ C_B = 2C_1 C_2 \tag{2.5.40}$$

Yoshizawa は統計理論に基づき各定数の値を以下のように導出している。

$$C_1 = 0.035\ ,\ C_2 = 0.67 \tag{2.5.41}$$

このC_1, C_2の値を用いれば、(2.5.40)式の定数は次のようになる。

$$C_{s0} = 0.16,\ C_A = 1.8\ ,\ C_B = 0.047 \tag{2.5.42}$$

森西, 小林 (1990)は$C_B = 0$とした式を用いて、残る定数を以下のように減衰乱流、チャンネル流のLESから最適化し、さらにこのモデルがバックステップ流れでも有効であることを示した。

$$C_{s0} = 0.1\ ,\ C_A = 32 \tag{2.5.38}$$

Yoshizawaによるこの定式化は、チャンネル流のようにdecayのない場合にはC_Sが小さく、一様等方性乱流のようにdecay のある場合にはC_Sが大きくなるという従来の数値実験の結果(表2.1)と良く対応しており、場所により種々の性状の流れが混在するような流れ場に対して有効であると考えられる。持田ら(1991)はこのYoshizawaのモデルを建物周辺気流の解析に適用し、C_Sを一定とした場合の問題であった建物後方のfree shear layerにおけるの過大評価に関してやや改善が見られることを確認している。なお、この計算ではYoshizawaと森西,小林の両者の係数((2.5.42)式と(2.5.43)式)を比較している。結論としては、両者の結果の差はわずかであるが森西らの定数を用いるとC_Sの時間変動が極めて激しくなる領域が生じ、総合的に見るとYoshizawaの定数が良い結果を与える場合が多いと判断される。この他に、同様な考えに基づくモデルとして、Smagorinskyモデルに回転の効果を組み込んだモデル(Shimomura-Yoshizawa(1986))、磁力の効果を組み込んだモデル(Shimomura(1991))等がある。

2.5.4.3　Scale Similarityモデル

これまで述べてきたモデルではL_{ij}, C_{ij}の取り扱いは陽には現れなかった。スペクトル法による計算では、L_{ij}はモデル化なしに容易に計算できるが、この項のみを取り入れると基礎方程式のガリレイ不変性を破ることになるので、C_{ij}のモデル化が不可欠となる。C_{ij}に対するモデルとして多く用いられているのはBardinaら(1981)によるモデル化である。これはGS成分のうちSGSとの境界の波数（cutoff波数）に最も近い変動成分とSGS成分のうちの同波数に最も近い変動成分はその性状が類似しており、両者が近似的に相似であるというScale similarityの仮定に基づいている。

まずGS成分の全成分のうちcutoff波数の近傍の波数の変動成分は、２回フィルターを施した、より緩やかに変動する成分$\bar{\bar{f}}$と$\bar{f}$との差（$\bar{f}-\bar{\bar{f}}$）により抽出することができるとする。次にSGS成分f''のうちcutoff波数に最も近い波数の変動成分はf''にフィルターを施した$\overline{f''}$で与えられるとする。同モデルではこれらが等しいと考え、$\overline{f''} = \bar{f} - \bar{\bar{f}}$とする。すると$C_{ij}$, R_{ij}は次のように書ける。

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \left(\overline{\bar{u}_i u_j''} + \overline{u_i'' \bar{u}_j}\right) \\ &\sim \left[\bar{\bar{u}}_i(\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_j) + (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)\bar{\bar{u}}_j\right] \end{aligned} \tag{2.5.44}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \overline{u_i'' u_j''} \\ &\sim (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)(\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_j) \end{aligned} \tag{2.5.45}$$

従って両者をまとめると次式が得られる。

$$C_{ij} + R_{ij} \sim \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \tag{2.5.46}$$

これを用いてτ_{ij}を

$$\begin{aligned}\tau_{ij}&=L_{ij}+C_{ij}+R_{ij}\\ &\approx L_{ij}+\overline{\bar{u}_i\,\bar{u}_i}-\bar{\bar{u}}_i\,\bar{\bar{u}}_i\end{aligned} \tag{2.5.47}$$

とするのがいわゆるBardinaモデルである。

ただしこのモデルのみではSGS中のGSに近い成分の変動のみを取り出しているため、より高波数で生じる乱流エネルギーの散逸が充分に模擬できないので、Smagorinskyモデルを合わせて用いることが推奨されている(Piomelli et al.(1988),Horiuti(1989))。

$$\begin{aligned}\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} &= L_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}L_{kk}+(\overline{\bar{u}_i\,\bar{u}_j}-\bar{\bar{u}}_i\,\bar{\bar{u}}_j)\\ &\quad -\frac{1}{3}\delta_{ij}(\overline{\bar{u}_k\,\bar{u}_k}-\bar{\bar{u}}_k\,\bar{\bar{u}}_k)-2\nu_{SGS}\bar{S}_{ij}\end{aligned} \tag{2.5.48}$$

これはmixedモデルと呼ばれる。

Scale Similarityの考え方の基本は、乱れの渦の相互作用は主として同程度のスケールの渦どうしで行われるとの考えにある。そのため、GSとSGSの渦の相互作用を表すC_{ij}のモデルとしては適切に機能するものと考えられる。しかし、SGSの渦どうしの相互作用を表すR_{ij}のモデルとしては必ずしも適切でない可能性がある。

L_{ij}の形 $(\overline{\bar{u}_i\,\bar{u}_j}-\bar{u}_i\,\bar{u}_j)$ はGSのN-S方程式の移流項に対応して現れたものであるから、その係数は１である必要がある。従って、ガリレイ不変性を考慮すると(2.5.44)式のcross項にかかる係数は１でなければならない。従来、このことから、(2.5.45)式のSGSレイノルズ項に掛かる係数も又、１とされることが多かったが、R_{ij}に関しては、ガリレイ不変性の条件に縛られることがないので、その係数を自由に決定することができる。堀内(1993)はR_{ij}に対してモデル係数$C_B \neq 1$のBardinaモデル

$$R_{ij}=C_B\overline{u_i''u_j''}=C_B(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)(\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_j) \tag{2.5.49}$$

を用いて計算し、mixedモデルを用いなくても、その計算値とDNSの結果が高い相関を有することを示した。また、最近、堀内ら(1994)は、(2.5.49)式のR_{ij}にさらにもう一回フィルターを施したfiltered Bardinaモデル

$$R_{ij}=\overline{C_B(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)(\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_j)} \tag{2.5.50}$$

を提案し、DNSデータによる検証からその有効性を示唆している。

2.5.4.4 Genralized SGS Normal stress (GNS) モデル

Horiuti(1993)は、Bardinaモデルを用いて、壁近傍でVan Driest型減衰関数を使わない、より普遍性の高いSGSモデルを構築した。渦粘性係数ν_{SGS}は、特徴時間スケールτと速度スケール$E^{1/2}$の自乗の積によって表現される。

$$\nu_{SGS}=C_V\tau E \tag{2.5.51}$$

ここで、C_vはモデル定数。τは次のように表される。

$$\tau=\frac{k_{SGS}}{\varepsilon_V} \tag{2.5.52}$$

$$\varepsilon_V=\frac{C_\varepsilon k_{SGS}}{\bar{\Delta}} \tag{2.5.53}$$

Smagorinskyモデルでは、$E=k_{SGS}$が仮定されていることになる。Horiutiは、チャンネル流及び乱流混合層のDNSデータベースを用いた検討より、$E=k_{SGS}$としたLESのDNSとの相関は悪く、$E=\overline{u_2''u_2''}$とした場合のLESがDNSと極めて高い相関があることを示した。しかしながら、このモデルはテンソル不変性を満足しない。Horiuti(1993)はSGSレイノルズストレスを以下のように一般化して示した。

$$\overline{u_i''u_j''}=\delta_{ij}\left(\frac{2}{3}k_{SGS}+\frac{2}{3}P\right)-\nu_{SGS\,il}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_l}-\nu_{SGS\,jl}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_l} \tag{2.5.54}$$

$$\nu_{SGS\,ij}=C_V\frac{\bar{\Delta}}{k_{SGS}}\overline{u_i''u_j''} \tag{2.5.55}$$

$$P=\nu_{SGS\,ml}\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial x_l} \tag{2.5.56}$$

そして、以下のBardinaモデル

$$k_{SGS}=C_K(\bar{u}_l-\bar{\bar{u}}_l)(\bar{u}_l-\bar{\bar{u}}_l) \tag{2.5.57}$$

$$\overline{u''_2u''_2}=C_N(\bar{u}_2-\bar{\bar{u}}_2)(\bar{u}_2-\bar{\bar{u}}_2) \tag{2.5.58}$$

がSGSノルマルストレスのモデル化としてよい精度を与えることから、Bardinaモデルと Smagorinskyモデルを組み合わせ、最終的に次のようにν_{SGS}を定義した。

$$\nu_{SGS\,ij}=(C_{M3}\bar{\Delta})^2\frac{3C_B(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)(\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_j)}{\underline{C_K(\bar{u}_l-\bar{\bar{u}}_l)^2}}|\bar{S}| \tag{2.5.59}$$

これが、Generalized SGS Normal stress model (GNS)である。(2.5.59)式内の____部は一種のdamping factorとして機能している。これはある程度の精度で解かれたGS成分を有効に利用し、壁近傍での圧力blocking効果と低レイノルズ効果を反映するdamping factorである。このモデルを用いたチャンネル流、乱流混合層のLESの結果はDNSとよく一致する結果が得られた。

2.5.4.5 RNG SGSモデル

Yakhot and Orszag(1986)は、チャンネル流のLESにおいてRenormalization group(RNG)理論に基づくSGSモデルを用いた。このモデルの本来の定式化においては、SGSストレスは、いかなるダンピング関数も必要とせずに壁面に近付くにつれて0になる。しかしながらYakhot et al. は壁面近傍での小ケールの非等方性を考慮するためにad hoc factorを含めている。このモデルで予測されるストレスの漸近挙動は壁面法線方向の格子分割に依存してしまうため、一般に使われる格子分割においては、不正割な漸近挙動が得られてしまう。

2.5.4.6 Dynamic SGS モデル

Germanoら(1991)によって提案されたdynamic SGSモデルは、通常のGrid Scale(GS)のフィルタ(グリッドフィルタ：$\bar{f}$で表記)の他に、これよりも大きいフィルタ幅を持つテストフィルタ（$\hat{f}$）を導入する。

(2.4.18), (2.4.19)式にさらにテストフィルタを施すと次式となる。

$$\frac{\partial\hat{\bar{u}}_i}{\partial t}+\frac{\partial\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial\hat{\bar{p}}}{\partial x_i}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2\hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j\partial x_j} \tag{2.5.60}$$

ただし、$T_{ij}=\widehat{\overline{u_iu_j}}-\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j$ (2.5.61)

(2.4.19),(2.5.61)式のτ_{ij},T_{ij}を用いて$\pounds_{ij}$を(2.5.57)式のように定義する。

$$\pounds_{ij}=T_{ij}-\hat{\tau}_{ij} \tag{2.5.62}$$

$\pounds_{ij}$は(2.5.57)式に(2.4.19),(2.5.50)式を代入することで(2.5.58)式となる。

$$\pounds_{ij}=\widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j \tag{2.5.63}$$

$\pounds_{ij}$は$1/\bar{\Delta}$と$1/\hat{\Delta}$の間の波数帯の寄与によるストレスの成分であり、Resolved Stressと呼ばれる。すなわち$\pounds_{ij}$はGrid Scaleの量のみで与えられる計算可能な量である。

ここで、τ_{ij} ((2.4.19)式), T_{ij} ((2.5.61)式)をSmagorinskyモデルに基づいて以下のようにモデル化する(モデル係数CはSmagorinsky定数Csの２乗に対応)。

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=-2C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \tag{2.5.64}$$

$$T_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}=-2C\hat{\Delta}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij} \tag{2.5.65}$$

ここで$\bar{\Delta}$: グリッドフィルタのフィルタ幅, $\hat{\Delta}$: フィルタ値$\hat{f}$に対応するフィルタ幅

$$\bar{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right),\ \hat{\bar{S}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{\bar{u}}_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.5.66}$$

$$|\bar{S}|=2(\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2},\ |\hat{\bar{S}}|=2(\hat{\bar{S}}_{ij}\hat{\bar{S}}_{ij})^{1/2} \tag{2.5.67}$$

ここでτ_{ij}のモデル化（(2.5.64)式）とT_{ij}のモデル化（(2.5.65)式）で係数Cは同じと仮定する。(2.5.64)式にテストフィルタを施したものと(2.5.65)式を(2.5.63)式に代入し、

$$\begin{aligned}\pounds_{ij}&=T_{ij}-\hat{\tau}_{ij}\\&=(\tfrac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}-2C\hat{\Delta}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij})-(\widehat{\tfrac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}}-\widehat{2C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}})\end{aligned} \tag{2.5.68}$$

を得る。そして(2.5.68)式よりCの計算式である次式を導出している。

$$C = -\frac{1}{2}\frac{L_{kl}\overline{S}_{kl}}{(\hat{\Delta}^2 |\hat{\overline{S}}|\hat{\overline{S}}_{ij}\hat{\overline{S}}_{ij} - \overline{\Delta}^2 \widehat{|\overline{S}|\overline{S}_{pq}}\hat{\overline{S}}_{pq})} \qquad (2.5.69)$$

(2.5.69)式においてモデルパラメータは2つのフィルタスケールの比$\hat{\Delta}/\overline{\Delta}$のみとなるが、Germanoらはチャンネル流を対象とした数値実験より$\hat{\Delta}/\overline{\Delta}=2$が良いとしており、通常この値が用いられる。

Germanoら(1991)によれば、Dynamic SGSモデルでは、層流及び壁近傍の場合、$\mathcal{L}_{ij}$が0に近づき、SGS応力は0になる。また、このモデルによって計算された壁面近傍のSGS応力の漸近挙動はx_n^{+3}となり、実験結果と一致する。従って、damping functionは必要とされない。さらに、Cの計算値は負値を取りうるのでBackward scatterを表現できる。ただし、Cが負値のまま計算をすると計算が不安定になるため、Germanoらは(2.5.69)式の分母、分子を流れの一様な方向に平均している。

最近の研究の動向では、このDynamic SGSモデルに対する関心が最も多く、適用例も多い。2.7節ではDynamic SGSモデルに関する研究の最近の展開をまとめる。

表 2.1　各種流れ場のCsの値

流れ場の種類	研究者	C_s
Channel flow	Deardorff (1970) Schumann(1975) Moin and Kim (1972) Horiuti (1989)	0.1
Free Shear Flow	Biringen(1981)	0.2
Isotropic turbulence	Clark et al. (1979) Mansor et al.(1979) Antonopoulos-Domis	0.17～ 0.19 0.19～ 0.24 0.23
Atomospheric boundary layer (neutral) (unstable) (stable)	 Deardorff (1972) Mason (1989) Deardorff (1972) Mason (1989) Mason and Derbyshire (1990)	 0.13 0.2 0.21 0.32 0.13
Room Air Flow	Murakami et al.(1991)	0.16

表2.2 1方程式型SGSモデルの数値定数の比較

	C_k	σ_k	Pr_{SGS}	C_ε	備考
Deardorff(1980) Moeng(1984)	0.1	0.5	(2.6.46)式	(2.6.45)式	大気境界層に適用
Nieustads(1990)	0.12	0.5	0.33	0.7	大気境界層に適用
Yoshizawa(1991)	0.086	1.0	0.58	0.91	乱流統計理論より
Horiuti(1985)	0.05	1.0	-	1.0	チャンネル流に適用

2.6 浮力の作用する流れ場におけるSGSモデル

2.6.1 浮力流れ場の基礎方程式

機械分野を中心としたLESの既往の研究対象は主として等密度の流れであり、浮力の作用する流れ場におけるLESの有効性については未だ明らかでない部分が多かった。一方、LESによる解析が盛んな気象分野では、浮力を考慮することがむしろ当然であり、その蓄積も多い。本節では、浮力の作用する流れ場におけるLESについて、既往の研究を整理するとともに、建築・都市環境工学に適用する場合の問題点について検討する。

まずBoussinesq近似を仮定した浮力の作用する流れ場を支配する方程式系は以下のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.6.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{(\rho-\rho_0)}{\rho_0}g\delta_{i3} \tag{2.6.2}$$

ここで θ を温度と考えると(2.6.2) 式の中の浮力項は、次のように表せる。

$$g\delta_{i3}(\rho-\rho_0)/\rho_0=-g\beta(\theta-\theta_0)\delta_{i3} \tag{2.6.3}$$

g ：重力加速度
θ ：各点における温度
θ_0：基準温度
ρ ：各点の流体密度
ρ_0：温度 θ_0 の流体の密度
β ：空気の体積膨張率

これを (2.6.2) 式に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-g\beta(\theta-\theta_0)\delta_{i3} \tag{2.6.4}$$

さらに温度θの輸送方程式が現れ、次式で表される。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial u_j\theta}{\partial x_j}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) \tag{2.6.5}$$

またここで θ を空気と密度差のあるガスの希釈率を c と置き換えれば、希釈率 c の流体の密度 ρ は次式で表わされる。

$$\rho=(1-c)\rho_0+c\,\rho \tag{2.6.6}$$

ρ_0：空気密度
ρ_S：排出ガス密度

ここで $\Delta\rho=\rho_S-\rho_0$ とおけば、$\rho-\rho_0=\Delta\rho c$

この場合、(2.6.2) 式の中の浮力項は、次のように表せる。

$$g\delta_{i3}(\rho-\rho_0)/\rho_0=\Delta\rho_C\delta_{i3}/\rho_0 \tag{2.6.7}$$

これを (2.6.2) 式に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}c\delta_{i3} \tag{2.6.8}$$

その場合、cの輸送方程式が現れ、次式で表される。

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial u_j c}{\partial x_j}=\frac{1}{Sc}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K\frac{\partial c}{\partial x_j}\right) \tag{2.6.9}$$

以降では温度 θ の場合について述べるものとする。

(2.6.1), (2.6.2), (2.6.5) 式にフィルタリングの操作を施せば次式となる。

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.6.10}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-g\beta(\bar{\theta}-\theta_0)\delta_{i3} \tag{2.6.11}$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_j\theta}}{\partial x_j}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j}\right) \tag{2.6.12}$$

(2.6.8) 式中に現れる$\overline{u_j \theta}$は、$\overline{u_i u_j}$と同様に次のように表される。

$$\overline{u_j\theta} = \overline{u_j}\,\overline{\theta} + \left(L_{\theta j} + C_{\theta j} + R_{\theta j}\right) \tag{2.6.13}$$

$$L_{j\theta} = \left(\overline{\overline{u_j}\,\overline{\theta}} - \overline{u_j}\,\overline{\theta}\right) \tag{2.6.14}$$

$$C_{j\theta} = \overline{\overline{u_j}\,\theta''} + \overline{u_j''\,\overline{\theta}} \tag{2.6.15}$$

$$R_{j\theta} = \overline{u_j''\theta''} \tag{2.6.16}$$

すなわち(2.6.12) 式は次のように表せる。

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u_j\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(L_{\theta j} + C_{\theta j} + R_{\theta j} + \alpha\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_j}\right) \tag{2.6.17}$$

既往の研究では$L_{\theta j}$, $C_{\theta j}$ は、L_{ij}, C_{ij} と同様、お互いに打ち消し合う効果を期待し、

$$L_{\theta j} + C_{\theta j} = 0 \tag{2.6.18}$$

を仮定して、無視する場合が多い。

Smagorinskyモデル及びSGS１方程式モデルでは、$R_{\theta j}$ は R_{ij} と同様に勾配輸送の近似を用いてモデル化され、分子粘性係数νと熱拡散係数α がプラントル数 Pr で関係付けられることのアナロジーからSGSプラントル数Pr_{SGS} を導入し次式で表す。

$$R_{\theta j} = \overline{u_j''\theta''} = -\alpha_{SGS}\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_j}\right) \tag{2.6.19}$$

$$\alpha_{SGS} = \frac{\nu_{SGS}}{Pr_{SGS}} \tag{2.6.20}$$

Pr_{SGS} は通常定数として扱い、その値にはいくつかの例があるが概ね 1/3 〜 1/2 である(Eidson(1985))。例えば大気境界層の解析では Mason(1989)は 0.46 、Schmidt and Schumman(1989)は 0.42をそれぞれ採用している。また、後述するように、Deardorff(1980)のように流れ場の安定度の関数とする場合もある。

結局、非等温のLESの基礎方程式系は一般に次のようになる。

$$\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \tag{2.6.21}$$

$$\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu + \nu_{SGS})\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - g\beta\left(\overline{\theta} - \theta_0\right)\delta_{i3} \tag{2.6.22}$$

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u_j}\,\overline{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha + \alpha_{SGS})\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_j} \tag{2.6.23}$$

2.6.2　浮力作用下のLESに関する既往の研究（中立、不安定状態の流れ場）

2.6.2.1　標準Smagorinskyモデルの適用例

通例のSmagorinskyモデルでは、SGS渦動粘性係数ν_{SGS}は、乱流エネルギーのSGS成分k_{SGS}の輸送方程式((2.5.1)式)に対して局所平衡（生産=消散）を仮定することにより、次のようにモデル化される。

$$\nu_{SGS} = (C_S\overline{\Delta})^2|S| \tag{2.6.24}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right),\ |S| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2} \tag{2.6.25}$$

Deardorff(1974)はこの標準Smagorinskyモデルをそのまま非等温の流れ場（大気境界層）に適用し、中立状態$\left(\partial\theta / \partial x_3 = 0\right)$（ただしここで$\theta$は温位)及び不安定状態$\left(\partial\theta / \partial x_3 < 0\right)$の場合の大気境界層の解析を行っている。ただしこの時のSmagorinsky定数C_sは中立状態で0.13、不安定状態で0.21を用いている。

Deardorff(1974)が不安定に比べて中立でC_sを減じている理由を筆者なりにまとめてみると次の様になる。

①Lillyは平均shear$\left(\partial\langle u_i\rangle / \partial x_j\right)$のない等方性乱流に対して、理論的に$C_s \fallingdotseq 0.2$と導出している。この値は、瞬時値の速度勾配$\partial\overline{u_i} / \partial x_j$ $\left(= \partial\langle u_i\rangle / \partial x_j + \partial u_i' / \partial x_j\right)$の主要部分がその変動成分$\left(\partial u_i' / \partial x_j\right)$で占められている場合$\left(\partial u_i' / \partial x_j >> \partial\langle u_i\rangle / \partial x_j\right)$に適用可能である。

②不安定状態の大気境界層では中立状態よりも乱流拡散が活発に行われるので、明確な平均流の速度勾配$\left(\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j\right)$が形成されにくいと考えられる。すなわち、LillyのC$_s$の導出の仮定$\left(\partial u_i' / \partial x_j >> \partial \langle u_i \rangle / \partial x_j\right)$に近い状態と考えられるので$C_s = 0.2$を採用する（Deardorffの実際の数値実験による最適値は0.21）。

③一方、中立状態では平均の速度勾配$\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$が大きく、これによりエネルギーが供給されるため、等方性乱流を前提としたLillyの理論値をそのまま適用することは出来ず、大幅にC_sを減ずる必要がある（Deardorffは0.13を採用）。

この解析では、SGSにおける浮力の影響はSmagorinsky定数C_sの大小としてのみ組み込まれていることになる。一般にC_sはチャンネル流で0.1、等方性乱流で0.23等、流れ場の種類によって最適化されている。建築分野で取扱う流れ場のように種々の性状の流れが混在するような場合、等温の流れ場においてさえC_sを一つに特定することには問題があることが指摘されており（持田,村上,林(1991)）、これにさらに浮力の効果を考慮してC_sを最適化することは実用上難しいと考えられる。

2.6.2.2 改良型Smagorinskyモデルの適用例

これに対してSmagorinskyモデルに浮力の影響を直接的に組み込んだモデルとしては、Mason(1989)が不安定境界層に適用した次のようなモデルがある。非等温の流れ場における乱流エネルギーkのSGS成分k_{SGS}の輸送方程式は以下の様に表せる。

$$\frac{\partial k_{SGS}}{\partial t} + Ck_{SGS} = Dk_{SGS} + Pk_{SGS} + Gk_{SGS} - \varepsilon_v \qquad (2.6.26)$$

ただし、Ck_{SGS}, Dk_{SGS}, Pk_{SGS}, Gk_{SGS}, はそれぞれk_{SGS}の移流項, 拡散項, shearによる生産項, 浮力による生産項,散逸率である。
Pk_{SGS}とGk_{SGS}はそれぞれ次のようにモデル化される。

$$Pk_{SGS} = -\overline{u_i'' u_j''}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \nu_{SGS}|S|^2 \qquad (2.6.27)$$

$$Gk_{SGS} = -\overline{u_i'' \theta''} g\beta\,\delta_{i3}$$

$$= \alpha_{SGS}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} g\beta\delta_{i3} = \frac{\nu_{SGS}}{Pr_{SGS}}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} g\beta\delta_{i3} \qquad (2.6.28)$$

標準Smagorinskyモデル導出の過程と同様にP_{kSGS}とG_{kSGS}の和がその散逸ε_vに等しいと仮定すれば次のようになる。

$$\varepsilon_v \sim Pk_{SGS} + Gk_{SGS}$$

$$= \nu_{SGS}|S|^2(1 - Rf) \qquad (2.6.29)$$

ここでフラックスリチャードソン数Rfは流れ場の安定度を示す無次元数で次式で定義される。

$$Rf = -\frac{Gk_{SGS}}{Pk_{SGS}} \qquad (2.6.30)$$

また次式解析より

$$\nu_{SGS} = C_1\,\ell^{4/3}\varepsilon_v^{1/3} \qquad (2.6.31)$$

ここでC_1は数値定数。またℓは SGS長さスケールであり、通例グリッドスケール$\overline{\Delta}$と等しいと仮定する（但しMason(1989), Mason and Callen(1986)は地表面近傍で$C_s\overline{\Delta}$が混合距離より大きくなる場合は$C_s\overline{\Delta}$の代わりに混合距離を用いている）。
(2.6.29) , (2.6.31) 式より次式を得る。

$$\nu_{SGS} = (C_S\overline{\Delta})^2(1-Rf)^{1/2}|S| \qquad (2.6.32)$$

ただし、$C_S = C_1^{3/4}$
ここで大気安定度に応じて変化する拡散(混合)長さスケールをΔ_mとすると、(2.6.32)式は(2.6.33)式となり、不安定の場合のΔ_mは(2.6.32)式と(2.6.33)式から(2.6.34)式となる（安定状態におけるΔ_mの取扱いは2.6.3節で後述する)。

$$\nu_{SGS} = (C_s\overline{\Delta}_m)^2|S| \qquad (2.6.33)$$

$$\Delta_m = \overline{\Delta}(1-Rf)^{1/4} \qquad (2.6.34)$$

Mason(1989)の不安定境界層の解析では、Deardorff(1972)と同様、C_sを増加させているが、数ケースの数値実験の結果、Mason and Callen (1986)の中立状態における最適値(0.20)よりも約6割大きい0.32を最適値としている。またEidson(1985)はこのモデルを水平加熱平板流れに適用しているがその場合のC_sは0.21である。なおMason and Callen (1986)の中立状態の解析における最適値（0.2）が2.6.2.1で述べたDeardorff(1972)のそれ（0.13）より大きいのはSGSの長さスケールの定義の差異によるものである。

2.6.2.3　SGS 1方程式モデル

GSの運動方程式にk_{SGS}の輸送方程式((2.6.26)式)を連立させ、後述する(2.6.37)式でν_{SGS}とk_{SGS}を関係付けるモデルが、SGS 1方程式モデルと呼ばれるものである。Smagorinskyモデルではk_{SGS}の輸送方程式において局所平衡が仮定されているのに対してSGS 1方程式モデルではSmagorinskyモデルで無視されたk_{SGS}の移流, 拡散の効果が考慮される。Deardorff(1980), Moeng(1984), Nieuwstadt(1990)はこのモデルで不安定大気境界層の解析を行なっている。この場合、Dk_{SGS}，ε_vは一般に次のようにモデル化される。

$$Dk_{SGS} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_{SGS}}{\sigma_k}\frac{\partial k_{SGS}}{\partial x_j}\right) \qquad (2.6.35)$$

$$\varepsilon_v = \frac{C_\varepsilon k_{SGS}^{2/3}}{\Delta_\varepsilon} \qquad (2.6.36)$$

ここでΔ_εは消散長さスケールであり、不安定の場合、通例$\Delta_\varepsilon=\overline{\Delta}$とするが、安定の場合は安定度に応じてこれを変化させる場合が多い（この点の詳細は3.6.3.2参照）。またν_{SGS}とk_{SGS}は次式で関係付けられる。

$$\nu_{SGS} = C_k \overline{\Delta} k_{SGS}^{1/2} \qquad (2.6.37)$$

ここでΔ_mは6.6.2.2で述べたように拡散(混合)長さスケールであり、C_ε, σ_k, C_kは数値定数である。Deardorff(1980)はそれぞれ0.7, 0.5, 0.10（但し不安定の場合）を採用しており、Moeng(1984), Nieuwstadt(1990)はほぼこれにならっている。

このSGS 1方程式モデルは、等温のチャンネル流解析にも適用されており、Smagorinskyモデルと比較してそれほどの効果が得られないことが報告されている（Schumann(1975), Horiuti(1985)）。しかし、これはチャンネル流では基本的にSmagorinskyモデルの前提である$Pk_{SGS}=\varepsilon_{SGS}$（非等温の場合は$Pk_{SGS}+Gk_{SGS}=\varepsilon_v$）が大部分の領域で満足されていることによるものであり、乱れの移流、拡散の影響が生産項の影響よりも大きくなる領域が存在する建物周辺気流等の解析で、メッシュ分割が比較的粗い場合には、SGS 1方程式モデルの導入によりSmagorinskyモデルの結果と比べて精度が改善される可能性が大きいと考えられる。またSmagorinskyモデルで問題となる複雑な流れ場におけるC_sの最適化という難問を回避できることは大きな魅力である。

2.6.2.3　SGSストレスモデル

これまでのモデルはいずれもSGSのレイノルズ応力やヒートフラックス、あるいはk_{SGS}の拡散項Dk_{SGS}を渦粘性（拡散）近似によりモデル化し、ν_{SGS}に対しても次元解析等に基づく考察を用いたモデル化が与えられている。これに対してレイノルズ応力やヒートフラックスのSGS成分の輸送方程式を解けば、その精度はより向上するものと期待され、この試みは既にDeardorff(1973)により行なわれている。しかしモデル化の複雑さや計算量の増加に対して、それによって得られる解の改善が極くわずかであったことからDeardorff(1980)自身その後の計算ではSGS 1方程式モデルの形に戻っている。近年Schmidt and Schumann(1988)もSGSレイノルズ応力の輸送方程式を代数的に近似したモデル(ASM)を用いた計算を行なっているが、後にSchumann(1991)はモデルの複雑さに比べてSGSストレスモデルを使う利点は少なく、SGS 1方程式モデルを用いるべきであるとの見解を述べている。しかし、これらは全て建物周辺気流等に比べて、乱れの非等方性が小さく、移流、拡散の効果も比較的小さい流れを対象としたものであり、建築分野に適用した場合には部分的に大きく精度が改善される可能性があるものと予想される。

ここでは参考までにモデル化を行なわないSGSレイノルズストレスの輸送方程式を示す。

$$\frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} = \overline{\frac{p''}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right)} - \overline{u_i'' u_k''}\frac{\partial u_j''}{\partial x_k} - \overline{u_j'' u_k''}\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}$$

$$
-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i''u_j''u_k''}-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i''p''}+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j''p''}\right)
$$

$$
+\frac{g}{\theta_0}\left(\delta_{i3}\overline{u_j''\theta''}+\delta_{j3}\overline{u_i''\theta''}\right)+2\nu\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} \tag{2.6.38}
$$

$$
\frac{\partial\overline{u_i''\theta''}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_i}\,\overline{u_i''\theta''}}{\partial x_j}=\frac{1}{\rho_0}\overline{p''\frac{\partial\theta''}{\partial x_i}}\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}-\overline{u_i''u_k''}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_k}-\overline{u_k''\theta''}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_k}
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i''u_k''\theta''}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p''\theta''}+\delta_{i3}\frac{g}{\theta_0}\overline{\theta''^2} \tag{2.6.39}
$$

$$
\frac{\partial\overline{\theta''^2}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_k}\,\overline{\theta''^2}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k''\theta''^2}-2\overline{u_k''\theta''}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_k}-2\kappa\overline{\frac{\partial\theta''}{\partial x_k}\frac{\partial\theta''}{\partial x_k}} \tag{2.6.40}
$$

2.6.2.4 Nieuwstadtらによる各モデルの比較

Nieuwstadt et al.(1991)は、これまで述べた改良型Smagorinskyモデル（Mason(1989)）、SGS 1方程式モデル（Niewstadt(1990), Moeng(1984)）、SGS代数応力モデル（Schmidt and Schumann(1989)）を不安定境界層流に適用し比較した結果、次の様に述べている。

(1)改良型Smagorinskyモデルに基づくMasonの結果が他の3人の結果と大きく異なる。

(2)この違いはC_sに大きく依存するSmagorinskyモデルの問題点により生じたものであり、事実MasonがSmagorinsky定数C_sを0.32から0.23に変更して再計算したところ、他の3人の結果に近づいたと報告している。

(3)SGS 1方程式モデルとSGSストレスモデルとの差は小さい。

2.6.3 安定状態におけるSGS長さスケールの取り扱い

(2.6.26)式で示したk_{sgs}の輸送方程式や、この式から(2.6.32)式を導くプロセスは特に不安定状態に限定されたものではない。しかし既往の多くの研究において、上記のモデルをそのまま安定状態の解析に適用するのではなく、安定化による鉛直方向の拡散の減少やエネルギー消散率の変化に伴う長さスケールΔ_m, Δ_εの変化を組込む工夫が行われている。

2.6.3.1 Mason and Derbyshire(1991)の方法

Mason and Derbyshire(1991)は安定状態(Rf＞0)の大気境界層を対象とした改良型Smagorinskyモデルの解析において、安定状態のSGS長さスケールを次のように定義している。

$$
\Delta_S=\overline{\Delta}\,(1-\frac{Rf}{Rf_c}) \tag{2.6.41}
$$

ここで$\overline{\Delta}$ ：中立状態(Rf＝0)における長さスケール（グリッドスケール）

Rf_c ：臨界フラックスリチャードソン数

（Masonらは $Rf_c=0.33$ としている）

この定式化により安定度が増す（RfがRfcに近付く）とSGSの変動に伴う拡散現象を特徴づける長さスケールΔ_mは減少し0に近付く。またこの定式化はMonin and Obukhov(1954)によるPrandtlの混合距離の修正式と一致する。中立状態のSmagorinskyモデルにおけるν_{sgs}は(2.6.24)式で表されるので、上式を代入することにより安定状態におけるν_{sgs}の定義式を得る。

$$
\nu_{SGS}=(C_S\overline{\Delta})^2(1-\frac{Rf}{Rf_c})^2|S| \tag{2.6.42}
$$

またSmagorinsky定数C_sは、2.6.2.1に示したDeardorff(1972)の説明から考えると、中立状態より更に乱れが小さく、速度勾配 の主要部分がによって占められると考えられる安定状態ではC_sを更に減じる必要があるものと推察される。事実、Mason and Derbyshire (1991)は、彼らの中立状態の場合の最適値 (0.20)（Mason and Callen(1986)）を大幅に減じ 安定状態では0.13 としている。

Masonらは(2.6.42)式を安定大気境界層の解析に用い、局所的に発生する不安定部分に対しては(2.6.28)式を適用している。このMasonらの方法では、安定・不安定によってC_sが不連続に大きく変化するため、空調時の室内気流や建物周辺における浮力のあるガスの拡散の様に安定領域と不安定領域が混在するような場合には、それらの境界領域（弱安定から弱不安定の領域）でC_sがスムースに接続されるような何らかの工夫が必要であろう。

3.6.3.2 Deardorff(1974)の方法

Deardorff(1974)はSGSストレスモデルによる大気境界層の解析における数値実験により、ε_vのモデル化((2.6.30)式)中の数値定数C_εを増加させる(すなわちε_vを増加させる)ことにより、安定領域における鉛直方向のSGSフラックスの評価が改善されることを指摘している。Deardorff(1980)はその後この点にさらに考察を加え、SGS 1方程式モデルによる計算において、C_εを直接変更するのではなく、安定状態における長さスケールについてパラメータNを導入した次のようなモデルを提案した。

$$\Delta_\varepsilon = \frac{0.76 k_{SGS}^{1/2}}{N} \qquad (\text{ただし}\Delta_\varepsilon < \overline{\Delta}\text{のとき}) \tag{2.6.43}$$

$$N = \left(-g\beta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right)^{1/2} \tag{2.6.44}$$

Nはブラント-ヴァイサラ周波数(浮力周波数)と呼ばれ、安定成層流の内部に生じる上下振動の角振動数に対応し、密度成層の強さに対応する。この定式化は成層化が強くなるにつれて鉛直方向の変動が抑制され、長さスケールΔ_εが減少するとの考えに基づいているものと考えられる。よって(2.6.30)式よりε_vは成層化が強くなるほど増加する。すなわち、ここでのΔ_εはε_vとk_{SGS}を関連づける消散長さスケールであり、(2.6.33), (2.6.34)式中のΔ_m(SGSの拡散スケール)とは区別して理解されるべきものである。Deardorffはこの時のC_ε((2.6.36)式), Pr_{SGS}((2.6.28)式)を、非常に安定な場合の極限値をそれぞれ0.19, 1.0としたΔ_εの関数形として次式で与えている。

$$C_\varepsilon = 0.19 + \left(\frac{0.51\Delta_\varepsilon}{\overline{\Delta}}\right) \tag{2.6.45}$$

$$Pr_{SGS} = \left(1 + \frac{2\Delta_\varepsilon}{\overline{\Delta}} \right)^{-1} \tag{2.6.46}$$

(2.6.45)式より、定数C_εは成層化が増すほど減少し、極限値0.19に近づく。これにより(2.6.36)式においてε_vが大きくなり過ぎるのを押えているものと考えられる。

3.6.3.3 Hunt et al.のモデル化

またHunt et al.(1986)はリチャードソン数Ri<0.5の安定境界層においては、平均のshear $(\partial\langle u_i\rangle / \partial x_j \equiv \partial\langle u_1\rangle / \partial x_3)$がエネルギーの消散スケール$L_\varepsilon$ $(=k^{3/2}/\varepsilon)$を決定するとして、次式の様なモデル化を提案している。なおここでのHuntらのモデルはSGSのモデルではなく全スケールの変動を対象としており、L_εは$k_{SGS}{}^{3/2}/\varepsilon_v$でなく$k^{3/2}/\varepsilon$である点に注意されたい。

$$L_\varepsilon^{-1} = \frac{A_B}{Z} + \frac{A_S\,(\partial\langle u_1\rangle / \partial x_3)}{\sqrt{\langle u_3^2\rangle}} + \frac{1}{L_0} \tag{2.6.47}$$

Z　：地表面からの距離

L_0　：流れ場全体のスケール

A_B, A_S　：数値定数($A_B \fallingdotseq 0.17$, $A_S \fallingdotseq 0.46$)

3.6.3.4 Schumannの見解

Schumann(1993)は平均shearのある安定成層と平均shearのない均一な安定成層のDNSの結果からSGS消散スケールを吟味している。それによれば

(1)平均shearのない安定成層においては、安定度が増すと消散スケールΔ_εは一定もしくはやや増加する(これに伴い$\varepsilon_v(=C_\varepsilon k_{SGS}{}^{3/2}/\Delta_\varepsilon)$が減少する)。

(2)平均shearのある場合、安定度が増すとSGSの消散スケールΔ_εは減少する(これに伴いε_vは大きめに評価される)。

(3)平均shearのある場合でも、その減少の程度をDeardorffのモデル((2.6.43), (2.6.44)式)は過大評価しており、Huntらのモデル((2.6.47)式)をSGSモデルに適用した次式は有効である。

$$\Delta_\varepsilon = \left(\Delta^{-1} + \frac{A_S\,(\partial\langle \overline{u_1}\rangle / \partial X_3)}{k_{SGS}^{1/2}} \right)^{-1} \tag{2.6.48}$$

と結論付けている。Schumannの上記結論(1), (2)は、同じ安定状態においても平均shearの有無により消散スケールΔ_ε $(=C_\varepsilon k_{SGS}{}^{3/2}/\varepsilon_v)$の変化の方向が逆になることを指摘している。2.6.3.2で示したDeardorffのΔ_εの取扱い（すなわち安定領域においては

Δ_εを減じε_vを増加させる）は、平均Shearのある場合には上記Schumannの見解と整合し、平均Shearのない場合には逆の結果を導く。平均shearのない場合にΔ_εが減少せず増加する（ε_vが減少する）理由に関して筆者なりの理解を述べる。

すなわち平均shearのない（従って(2.6.26)式の$Pk_{SGS} \fallingdotseq 0$）安定成層においては、(2.6.26)式の$Gk_{SGS}$が負であり、境界層流のように$Ck_{SGS}$, Dk_{SGS}の影響が小さい場合、k_{SGS}を生産する機構は存在せず、速度変動のエネルギーは主として重力波により生じる変動により発生する。しかし重力波による変動（wavy motion）は、角柱背後のカルマン渦等と同様に、本質的に乱流変動とは別の現象であるので、低波数帯から高波数帯へのエネルギーカスケードは抑制され、高波数帯へのエネルギーの輸送量が減少する。従ってSGSにおける消散ε_vが減少し、消散スケールΔ_εはやや増加する傾向となる。

3.6.3.5 フィルタースケール, 拡散（混合）スケールと消散スケールの関係

最後に$\overline{\Delta}$とΔ_m, Δ_εの関係について整理しておく。この3つの長さスケールは中立状態においては通例、等しい。すなわち$\Delta_m=\overline{\Delta}$, $\Delta_\varepsilon=\overline{\Delta}$として取扱う。しかし安定状態及び不安定状態においては, Δ_m, Δ_εは$\overline{\Delta}$とは一定の比例関係にあるとは限らず、大気安定度の変化に応じて変化させる必要が生じる。2.6.2.2, 2.6.3.1で述べた改良型Smagorinskyモデルの場合（Mason(1989), Mason and Derbyshire(1991)）、拡散長さスケールΔ_mを大気安定度（Rf）の変化に応じて以下のように変化させ、これによりν_{SGS}の値を安定・不安定に対応するよう調整している。

$$\Delta_m = \overline{\Delta}(1-Rf)^{1/4} \qquad \text{(不安定(Rf<0)の場合)} \qquad (2.6.49)$$

$$\Delta_m = \overline{\Delta}\left(1 - \frac{Rf}{Rf_c}\right) \qquad \text{(安定(Rf>0)の場合)} \qquad (2.6.50)$$

一方、安定状態を対象とした既往のSGS 1 方程式モデルやSGSストレスモデルの解析（Deardorff(1980), Schumann(1991)）の場合、(2.6.36)式に現われる消散長さスケールΔ_ε及び(2.6.36)式の数値定数C_εを大気安定度, 平均Shearの有無に対応する形で変化させ((2.6.43), (2.6.45), (2.6.48)式)、これによりk_{SGS}のレベルを調整し、最終的に(2.6.37)式によりν_{SGS}の値が決定されるというメカニズムとなっている。

3.6.4 浮力流れ場におけるSGSモデルのまとめ

(1)主として気象分野で検討されているSGSに浮力効果を組み込むモデル化の方法について概説した。気象分野では取り扱うスケールが極めて大きいため、これらのモデル化の適否が結果に大きく影響する。建築・都市環境の解析においても、局所的にはメッシュスケールがかなり大きくならざるを得ず、SGSのモデル化において浮力の効果を組み込むことは有効であると考えられる。

(2)気象分野で検討されている流れ場は、平均的には安定か不安定いずれかの流れ場であるが、建築・都市環境の分野ではこれらは混在していることが多い。そのため安定・不安定のモデルの接合に注意を払う必要がある。

(3)また建築分野においては、剥離, 循環, 衝突等、種々の性状の流れが混在する。そのため流れ場の種類によって定数C_sの最適値が異なるSmagorinskyモデル（改良型を含む）を適用することには限界がある。従って、dynamic SGSモデル（2.7節参照）を採用したSGS 1 方程式モデルやSGSストレスモデルによる解析が望ましいと思われる。

2.7 Dynamic procedureに基づくSGSモデル

2.7.1 Dynamic SGSモデルの概要

Germanoら(1991)によって提案されたdynamic SGSモデルは、通常のGrid Scale(GS)のフィルタ(グリッドフィルタ 本稿では$\bar{f}$で表記)の他に、これよりも大きいフィルタ幅を持つテストフィルタ（本稿では$\hat{f}$または$\hat{\bar{f}}$: グリッドフィルタされた量へのテストフィルタ）を導入する。グリッドフィルタをN-S方程式に適用した式（(2.4.18)式）にさらにテストフィルタを施すと次式となる。

$$\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial t}+\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial \hat{\bar{p}}}{\partial x_i}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2 \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (2.7.1)$$

ただし、$T_{ij}=\widehat{\overline{u_i u_j}}-\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j$ (2.7.2)

(2.4.19),(2.7.2)式のτ_{ij},T_{ij}を用いて$\mathcal{L}_{ij}$を次式のように定義する。

$$\mathcal{L}_{ij}=T_{ij}-\hat{\tau}_{ij} \qquad (2.7.3)$$

$\mathcal{L}_{ij}$は$1/\bar{\Delta}$と$1/\hat{\Delta}$の間の波数帯の寄与によるストレスの成分であり、Resolved stressと呼ばれる。(2.7.3)式に(2.4.19),(2.7.2)式を代入することで(2.7.4)式となる。

$$\mathcal{L}_{ij}=\widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j \qquad (2.7.4)$$

すなわち$\mathcal{L}_{ij}$はGSのみで与えられる計算可能な量である。ここで、τ_{ij} ((2.4.19)式), T_{ij} ((2.7.2)式)をSmagorinskyモデルに基づいて以下のようにモデル化する。

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=-2C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \qquad (2.7.5)$$

$$T_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}=-2C\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij} \qquad (2.7.6)$$

ここで $\bar{\Delta}$: グリッドフィルタのフィルタ幅
$\hat{\Delta}$: フィルタ値$\hat{f}$に対応するフィルタ幅

$$\bar{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right),\ \hat{\bar{S}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{\bar{u}}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (2.7.7)$$

$$|\bar{S}|=2(\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2},\ |\hat{\bar{S}}|=2(\hat{\bar{S}}_{ij}\hat{\bar{S}}_{ij})^{1/2} \qquad (2.7.8)$$

モデル係数CはSmagorinsky定数Csの２乗に対応する。Germanoらのモデルではτ_{ij}のモデル化（(2.7.5)式）とT_{ij}のモデル化（(2.7.6)式）で係数Cは同じと仮定する。なお、ここではτ_{ij}, T_{ij}をSmagorinskyモデルでモデル化しているが、後述するように、その後、他の様々なモデルを用いるdynamicモデルが提案されている。(2.7.5)式にテストフィルタを施したものと(2.7.5)式を(2.7.3)式に代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ij}&=T_{ij}-\hat{\tau}_{ij}\\&=(\tfrac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}-2C\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij})-(\tfrac{1}{3}\widehat{\delta_{ij}\tau_{kk}}-\widehat{2C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}})\end{aligned} \qquad (2.7.9)$$

ここでGermanoらは$\widehat{C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}=C\widehat{\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$を仮定し、(2.7.9)式よりCの計算式である次式を導出している。次節で述べるlocal dynamicモデルと比較する際には、テストフィルタの外にCが出ている点に注意されたい。

$$C=-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{kl}\bar{S}_{kl}}{(\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij}\bar{S}_{ij}-\bar{\Delta}^2\widehat{|\bar{S}|\bar{S}_{pq}}\bar{S}_{pq})} \qquad (2.7.10)$$

(2.7.10)式においてモデルパラメータは2つのフィルタースケールの比$\hat{\Delta}/\bar{\Delta}$のみとなるが、GermanoらはChannel流を対象とした数値実験より$\hat{\Delta}/\bar{\Delta}=2$が良いとしている。

Germanoらのdynamic SGSモデルの特徴は、$1/\bar{\Delta}$と$1/\hat{\Delta}$の間の波数帯のレイノルズストレスへの寄与（Resolved stress）$\mathcal{L}_{ij}$がモデル化なしに陽に計算できることを利用し、$\mathcal{L}_{ij}$をあえてモデル化（１つの未知係数Cを含む）して求め、モデル係数を計算結果を用いて動的に同定する点である。この時の唯一の仮定はτ_{ij}とT_{ij}が同じ形式でモデル化され、係数Cの最適値が共通ということのみである。

Germanoらによれば、dynamic SGSモデルでは、層流及び壁近傍の場合、$\mathcal{L}_{ij}$は０に近づき、SGSストレスτ_{ij}は０になる。また、このモデルによって計算された壁面近傍のSGS応力の漸近挙動は$x_n{}^{+3}$となり、実験結果と一致する。従って、damping functionは必要とされない。さらに、Cの計算値は負値を取りうるので

$$Pk_{SGS}=-\tau_{ij}\bar{S}_{ij}=2\nu_{SGS}(\bar{S}_{ij})^2=2C\bar{\Delta}^2|S|(\bar{S}_{ij})^2 \qquad (2.7.11)$$

より、Pk_{SGS}のbackward scatterを表現できる。ただし、Cが負値のまま計算をすると計算が不安定になるため、Germanoらは(2.7.10)式の分母、分子を流れの一様な方向に平均している。

Lilly (1992)はGermanoらのモデルに対して、(2.7.9)式の残差を最小とするCを最小自乗法によって決定する方法を提案している。(2.7.9)式の辺々の差を平方したものをとして以下の式を導く。

$$Q=\left\{\pounds_{ij}-\left(-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\hat{\tau}_{kk}\right)+2C\left(\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij}-\widehat{\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}\right)\right\}^2 \qquad (2.7.12)$$

ここで｛　｝中第２項を$\frac{1}{3}\delta_{ij}\pounds_{kk}$、第３項を$2CM_{ij}$とすると（又、後述するlocal dynamicモデルと比較する際には、(2.7.12)式右辺最後の項の〜の外にCが出ている点に注意）、(2.7.12)式は更に次のように書ける。

$$Q=\left(\pounds_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\pounds_{kk}+2CM_{ij}\right)^2 \qquad (2.7.13)$$

このとき　$M_{ij}=\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij}-\widehat{\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$ (2.7.14)

Qは(2.7.9)式の残差の２乗値であるから、なるべく小さいことが望ましい。そこで、あるCにおいて$\partial Q/\partial C=0$、即ちQが極値でかつ、$\partial^2 Q/\partial C^2>0$、即ち下に凸であればQが最小値であり、そのCが最適値であると考える。

(2.7.12)式中、$(\pounds_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\pounds_{kk})=m$、$2M_{ij}=n$と書けば(2.7.12)式は

$$Q=m^2+2mnC+n^2C^2 \qquad (2.7.15)$$

m, nがCに独立であると仮定し（本当は独立ではないと考えられる）、(2.7.15)式の両辺をCで偏微分すれば、以下の式を得る。

$$\frac{\partial Q}{\partial C}=2mn+2n^2C \qquad (2.7.16)$$

$\partial Q/\partial C=0$とすれば(2.7.16)式より、$2mn+2n^2C=0$。従って

$$C=-\frac{mn}{n^2}=-\frac{2L_{ij}M_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}M_{ij}L_{kk}}{4M_{ij}^2} \qquad (2.7.17)$$

また(2.7.16)式を再度Cで編微分すれば$\partial^2 Q/\partial C^2=2n^2>0$である。

また連続式より、$\delta_{ij}M_{ij}=(\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|-\widehat{\bar{\Delta}^2|\bar{S}|})\delta_{ij}\hat{\bar{S}}_{kk}=0$であるから、(2.7.17)式は次式となる。

$$C=-\frac{1}{2}\frac{\pounds_{ij}M_{ij}}{{M_{kl}}^2} \qquad (2.7.18)$$

(2.7.18)式がLillyの改良によるCの定義式であり、現在、ほとんどの場合、Cの同定にはこの方法が用いられる。但し、第５章で述べるように、一様流中の２次元角柱の解析では、(2.7.18)式の分母((2.7.14)式)は、一様流のような$\bar{S}_{ij}=0$の領域では０となり計算不能となる。複雑乱流場への適用という点からみると、これは大きな障害となる可能性があり、今後、改善を加える必要がある。

2.7.2　テストフィルタの定式化

dynamic SGSモデルの解析では、一般に、フィルタ値$\hat{\bar{f}}$に対応するフィルタ幅$\hat{\bar{\Delta}}$はテストフィルタの幅$\hat{\Delta}$そのものとして取り扱っている。しかしながら谷口, 小林, 戴(1994)の指摘によれば$\hat{\bar{\Delta}}$と$\hat{\Delta}$は同じではない。

今、簡単のために１次元で考える。変数fのグリッドフィルタ値$\bar{f}$とテストフィルタ値$\hat{\bar{f}}$は実空間では次式で定義される。

$$\bar{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{G}(x-x')f(x')dx' \qquad (2.7.19)$$

$$\hat{\bar{f}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(x-x')\bar{f}(x')dx' \qquad (2.7.20)$$

これらの実空間でconvolutionの形で表されるフィルターの定義は、波数空間におけ

る積の演算へと変形できる。すなわち次式となる。

$$\bar{f}(k)=\overline{G}(k)f(k) \tag{2.7.21}$$

$$\hat{\bar{f}}(k)=\widehat{G}(k)\bar{f}(k)=\widehat{G}(k)\overline{G}(k)f(k) \tag{2.7.22}$$

$\widehat{G}(k)\overline{G}(k)$をまとめて$\overset{\frown}{G}(k)$と表すと

$$\overset{\frown}{G}(k)=\widehat{G}(k)\overline{G}(k) \tag{2.7.23}$$

ここでフィルタとしてGaussianフィルタを用いる場合を考える。

Gaussianフィルタの場合

$$\overline{G}(x)=\sqrt{\frac{6}{\pi\bar{\Delta}}}\exp\left\{-\frac{6x^2}{\bar{\Delta}^2}\right\} \tag{2.7.24}$$

又、波数空間では

$$\overline{G}(k)=\exp\left\{-\frac{(\bar{\Delta}k)^2}{24}\right\} \tag{2.7.25}$$

同様に

$$\widehat{G}(k)=\exp\left\{-\frac{(\hat{\Delta}k)^2}{24}\right\} \tag{2.7.26}$$

従って(2.7.25), (2.7.26)式より

$$\overset{\frown}{G}(k)=\exp\left\{-\frac{(\overset{\frown}{\Delta}k)^2}{24}\right\}=\exp\left\{-\frac{(\bar{\Delta}k)^2}{24}\right\}\times\exp\left\{-\frac{(\hat{\Delta}k)^2}{24}\right\}=\exp\left\{-\frac{(\bar{\Delta}^2+\hat{\Delta}^2)k^2}{24}\right\} \tag{2.7.27}$$

よって(2.7.27)式より、Gaussianフィルタの場合の$\overset{\frown}{\Delta}$と$\bar{\Delta}$、$\hat{\Delta}$の関係は

$$\overset{\frown}{\Delta}^2=\bar{\Delta}^2+\hat{\Delta}^2 \tag{2.7.28}$$

谷口らによれば、この関係は体積フィルタの場合でも十分正確な評価であるとしている。谷口らの指摘を考慮するなら、$\overset{\frown}{\Delta}/\bar{\Delta}=2$とするためには$\hat{\Delta}=\sqrt{3}\bar{\Delta}$となるように与えるべきである。

また谷口らは、差分法におけるテストフィルタの定式化として次式を提案している。

る。まず変数f(x')をf(x)のまわりにテイラー展開すると次式を得る。

$$f(x')=f(x)+f'(x)(x'-x)+\frac{1}{2}f''(x)(x'-x)^2+O(|x'-x|^2) \tag{2.7.29}$$

f(x)に１次元のフィルタリングを施すと

$$\bar{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')f(x')dx'$$

$$=f(x)-\gamma_1+f'(x)+\frac{1}{2}\gamma_2 f''(x) \tag{2.7.30}$$

ここでγ_nはフィルタ関数G(x)によるn次のモーメントであり、次式で定義される。

$$\gamma_n=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')(x-x')^n dx' \tag{2.7.31}$$

フィルタ関数として偶関数が用いられる場合、n次モーメントはnが奇数のとき0で、nが偶数のときのみ値を持つ。Gaussianフィルタ、Top hatフィルタ、Cut offフィルタはいずれも偶関数である。ここでは、以下のTop hatフィルタを考える。

$$G(x)=\begin{cases}1/\bar{\Delta} & \left(|x|\le\frac{\bar{\Delta}}{2}\right)\\ 0 & \left(|x|>\frac{\bar{\Delta}}{2}\right)\end{cases} \tag{2.7.32}$$

するとγ_nは次のように表せる。

$$\gamma_1=1 \tag{2.7.33}$$

$$\gamma_2=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')(x-x')^2dx'$$

$$=\frac{1}{\bar{\Delta}}\int_{-\bar{\Delta}/2}^{\bar{\Delta}/2}y^2dy=\frac{1}{\bar{\Delta}}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\bar{\Delta}/2}^{\bar{\Delta}/2}=\frac{\bar{\Delta}^2}{12} \tag{2.7.34}$$

従って、(2.7.30)式より

$$\bar{f}(x)=f(x)+\frac{\bar{\Delta}^2}{24}f''(x)+\cdots \qquad (2.7.35)$$

(2.7.35)式にテストフィルタを施せば

$$\hat{\bar{f}}(x)=\bar{f}(x)+\frac{\hat{\Delta}^2}{24}\bar{f}''(x)+\cdots \qquad (2.7.36)$$

Gaussianフィルタの場合も全く同様の形になる。

2.7.3 dynamic SGSモデルのその後の展開

2.7.3.1 local dynamic モデル

Germanoらのdynamicモデル及びLillyの改良においては、 Cの空間的変化が小さいものとしてCをテストフィルタの操作の外に出し、$\widehat{C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$ の項を$C\widehat{\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$と近似している（(2.7.12)式）。Ghosalら(1992)は、この仮定に問題があるとして、(3.1)式をそのままの形で用いてCを求めるモデルを提案している。同モデルではCの空間分布を前提とし、Cをテストフィルタの外に出さず定式化することから、local dynamicモデルと呼ばれる。Lillyの方法では、基本的には各点において(2.7.18)式の残差を最小とする（$\widehat{C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}} = C\widehat{\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$の仮定も用いるが）のに対して、Ghosalらのlocal dynamicモデルでは空間全体の残差のtotalが最小となるようにC の空間分布を求める。最終的には次式の第２種のフレドホルム型積分方程式を解く（詳細はGhosal et al.(1992)参照）。

$$C(\mathbf{x}) = \left[\int K(\mathbf{x},\mathbf{y})C(\mathbf{y})d\mathbf{y} + f(\mathbf{x})\right]_+ \qquad (2.7.37)$$

ここでKとfは$\alpha_{ij} = 2\hat{\Delta}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij}$と$\beta_{ij} = 2\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}$の関数である。$[\,]_+$は全ての実数に対して$x_+=\frac{1}{2}(x+|x|)$とする操作（すなわち xが正の場合はそのまま、負の場合は０とする）を示す。この方法では、Cをテストフィルタ外に出すという問題点は解消されるが、モデルはかなり複雑になり、計算量は増大する。

一方、Piomelli(1994)は、より簡便なlocal dynamicモデルを提案している。(2.7.9)式において$\pounds^a_{ij}=\pounds_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\pounds_{kk}$、$\alpha_{ij} = 2\hat{\Delta}^2|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij}$、$\beta_{ij} = 2\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}$とおき、次式を得る。

$$\pounds^a_{ij}=-2C\alpha_{ij}+\widehat{C\beta_{ij}} \qquad (2.7.38)$$

ここで右辺第２項のCをC* として、最小自乗法により(2.7.38)式の残差が最小となるC を求めると次式となる。

$$C=-\frac{1}{2}\frac{(\pounds^a_{ij}-\widehat{C^*\beta_{ij}})\alpha_{ij}}{\alpha_{kl}\alpha_{kl}} \qquad (2.7.39)$$

Piomelliはn時点のC^*を求めるために次式を用いている。

$$C = C^{n-1}+\Delta t\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{n-1} \qquad (2.7.40)$$

ただし単純に$C = C^{n-1}$としても、計算結果にそれほど差が現れなかったと報告している。

2.7.3.2 Dynamic mixed subgrid-scaleモデル

これまでのdynamicモデルでは、τ_{ij}, T_{ij}のモデルとしてSmagorinskyモデルが用いられてきたが、Zangら(1993)は前節で紹介したmixedモデルを用いたdynamicモデルによる解析を行っている。前述のmixedモデルは、C_{ij}, R_{ij}のモデルとしてのみBardinaモデルを使用し、それにSmagorinskyモデルを加えるものであった。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=L_{ij}- \frac{1}{3}\delta_{ij}L_{kk}+(\overline{u}_i\overline{u}_j-\overline{\overline{u}}_i\,\overline{\overline{u}}_j) - \frac{1}{3}\delta_{ij}(\overline{u}_k\overline{u}_k-\overline{\overline{u}}_k\,\overline{\overline{u}}_k)-2\nu_{SGS}S_{ij} \qquad (2.7.41)$$

一方、Zang et al.(1993)は(2.7.41)式の$C_{ij}+R_{ij}$のモデルにLeonard項L_{ij} ($\overline{\overline{u}}_i\,\overline{\overline{u}}_j - \overline{u}_i\overline{u}_j$) も合わせたものをmodified Leonard項と呼び、このL_{ij}を用いて、mixedモデルを以下のように書き換えている。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=L^m_{ij}- \frac{1}{3}\delta_{ij}L^m_{kk}-2C\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij} \qquad (2.7.42)$$

$$\begin{aligned} L^m_{ij}&=L_{ij}+C_{ij}+R_{ij} \\ &=\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\overline{\overline{u}}_i\overline{\overline{u}}_j \end{aligned} \qquad (2.7.43)$$

(2.5.47)式では、C_{ij}とR_{ij}のみがBardinaモデルでモデル化されていたのに対して、(2.7.43)式では、さらにLeonard項も含んだ形でBardinaモデルでモデル化されている。

T_{ij} ($=\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j$) も$\tau_{ij}$と同様に以下のようにmixedモデルによりモデル化する。

$$T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}= L^T_{ij}- \frac{1}{3}\delta_{ij}L^T_{kk}-2C\hat{\overline{\Delta}}^2|\hat{\overline{S}}|\hat{\overline{S}}_{ij} \qquad (2.7.44)$$

$$L^T_{ij}=\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j \qquad (2.7.45)$$

ここでGermanoら(1991)のdynamicモデルのプロセスと同様に$\pounds_{ij}$を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \pounds_{ij} &= T_{ij}-\hat{\tau}_{ij} \\ &= \widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j} - \hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j \end{aligned} \qquad (2.7.46)$$

次にモデル化したτ_{ij},T_{ij}を用いてを表す。

$$\begin{aligned} \pounds_{ij} &=T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} \\ &= \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}-2C\hat{\overline{\Delta}}^2|\hat{\overline{S}}|\hat{\overline{S}}_{ij}+L^T_{ij}- \frac{1}{3}\delta_{ij}L^T_{kk} -\left(\frac{1}{3}\delta_{ij}\widehat{\tau_{kk}}-2C\widehat{\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}}+\widehat{L^m_{ij}}- \frac{1}{3}\delta_{ij}\widehat{L^m_{kk}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\delta_{ij}(T_{kk}-\widehat{\tau_{kk}})+L^T_{ij}-\widehat{L^m_{ij}}- \frac{1}{3}\delta_{ij}(L^T_{kk}-\widehat{L^m_{kk}})-2C(\hat{\overline{\Delta}}^2|\hat{\overline{S}}|\hat{\overline{S}}_{ij}-\widehat{\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}}) \end{aligned} \qquad (2.7.47)$$

ここで(2.7.47)式中の各項をそれぞれ次のようにおくと、

$$\hat{\overline{\Delta}}^2|\hat{\overline{S}}|\hat{\overline{S}}_{ij}-\widehat{\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}}=M_{ij} \qquad (2.7.48)$$

$$(T_{kk}-\widehat{\tau_{kk}})-(L^T_{kk}-\widehat{L^m_{kk}})=P_{kk} \qquad (2.7.49)$$

$$\begin{aligned} L^T_{ij}-\widehat{L^m_{ij}}&=\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j-(\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\widehat{\overline{\overline{u}}_i\overline{\overline{u}}_j}) \\ &=\widehat{\overline{\overline{u}}_i\overline{\overline{u}}_j}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j= B_{ij} \end{aligned} \qquad (2.7.50)$$

(2.7.47)式は次のようになる。

$$\pounds_{ij}= B_{ij}-2CM_{ij}+\frac{1}{3}\delta_{ij}P_{kk} \qquad (2.7.51)$$

Lilly(1992)と同様に最小2乗法で最適なCを求めると次式となる。

$$C = -\frac{1}{2}\frac{M_{ij}(\pounds_{ij}- B_{ij})}{M_{kl}^2} \qquad (2.7.52)$$

このとき、 $M_{ij}=\hat{\Delta}^2|\hat{S}|\hat{\overline{S}}_{ij}-\widehat{\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij}}$ (2.7.53)

$\pounds_{ij}=\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_i}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_i$ (2.7.54)

$B_{ij}=\widehat{\overline{\overline{u}}_i\overline{\overline{u}}_j}-\hat{\overline{\overline{u}}}_i\hat{\overline{\overline{u}}}_j$ (2.7.55)

前節で示したSmagorinskyモデルに基づくdynamicモデルのCの定義式（(2.7.18)式)）と(2.7.52)式の相違は右辺の分子に含まれる((3.7.55)式)の有無である。このがBardinaモデルに由来する項である。Zang et al.(1993)はこのモデルを用いてcavity流れを解析し、Smagorinskyモデルに基づくdynamicモデルに比べて係数Cの変動が抑えられ、Cの負値が現れる領域が減ったと報告している。第５章で詳しく述べるように、このdynamic mixed SGSモデルを２次元角柱周辺流れの解析に適用した結果、Smagorinskyモデルに基づくdynamicモデルと比較して、風速分布等が実験に近づく結果を得た。またCの変動が抑えられたために、計算時間は通例のdynamicモデルの約半分となった。

2.7.3.3 １方程式型のDynamicモデル

Wong(1993)は１方程式型のdynamicモデルとしてLinearモデルとNon-linearモデルの２種類を提案している。Non-linearモデルはSpeziale(1987)のNon-linear 型k-εモデルの形を使用している。ここではLinearモデルについてのみ述べる。

まずν_{SGS}, k_{SGS}, τ_{ij}を次のように関係付ける。

$$\nu_{SGS}=C_k\overline{\Delta}k_{SGS}^{1/2} \quad (2.7.56)$$

後に示すようにk_{SGS}はその輸送方程式((3.39)式)より与えられる。τ_{ij}の非等方成分は勾配拡散近似により、

$$\tau_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k_{SGS}=2\nu_{SGS}\overline{S}_{ij} \quad (2.7.57)$$

ただし　$\overline{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$

(2.7.56), (2.7.57)式より

$$\tau_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k_{SGS}=-2C_k\overline{\Delta}k_{SGS}^{1/2}\overline{S}_{ij} \quad (2.7.58)$$

ただし$\tau_{ij}=\overline{u_iu_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j$ (2.7.59)

$k_{SGS}=\frac{1}{2}\tau_{kk}$ (2.7.60)

同様にテストフィルタを用いて以下の量を定義する。

$$T_{ij}=\widehat{\overline{u_iu_j}}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j \quad (2.7.61)$$

$$K_T=\frac{1}{2}T_{kk} \quad (2.7.62)$$

このときに(2.7.58)式と同じく次式が成り立つと仮定する。

$$T_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}K_T=-C_k\hat{\overline{\Delta}}K_T^{1/2}\hat{\overline{S}}_{ij} \quad (2.7.63)$$

(2.7.59), (2.7.61)式のτ_{ij}, T_{ij}を用いて$\pounds_{ij}$を(2.7.64)式のように定義する。

$$\pounds_{ij}=T_{ij}-\hat{\tau}_{ij} \quad (2.7.64)$$

既に述べたように、$\pounds_{ij}$はGSの量からモデルを用いずに陽に計算可能な量である。これを(2.7.58),(2.7.63)式のモデル化されたτ_{ij}, T_{ij}を用いて計算し、係数C_kの動的同定を行う。

$$\pounds_{ij}=\widehat{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\hat{\overline{u}}_i\hat{\overline{u}}_j \quad (2.7.65)$$

$$=\frac{2}{3}\delta_{ij}(K_T-\widehat{k_{SGS}})-2C_v(\hat{\overline{\Delta}}K_T^{1/2}\hat{\overline{S}}_{ij}-\widehat{\overline{\Delta}k_{SGS}^{1/2}\overline{S}_{ij}}) \quad (2.7.66)$$

ここで$\hat{\overline{\Delta}}K_T^{1/2}\hat{\overline{S}}_{ij}-\widehat{\overline{\Delta}k_{SGS}^{1/2}\overline{S}_{ij}}=M'_{ij}$とおく。

Lilly(1992)の方法に従い、最小２乗法でC_kを求めると、最適なC_kを与える式は次式となる。

$$C_k=-\frac{1}{2}\frac{M'_{ij}\pounds_{ij}}{{M'_{kl}}^2} \quad (2.7.67)$$

またWongのモデルではk_{SGS}の輸送方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial k_{SGS}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}_j k_{SGS}}{\partial x_j}=-\tau_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\varepsilon_v+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu+\frac{C_v\bar{\Delta}k_{SGS}^{1/2}}{\sigma_k}\right]\frac{\partial k_{SGS}}{\partial x_j} \tag{2.7.68}$$

ここで $$\varepsilon_v=\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}-\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.7.69}$$

一方、ε_vは次のようにモデル化される。

$$\varepsilon_v=\frac{C_\varepsilon k_{SGS}^{3/2}}{\bar{\Delta}} \tag{2.7.70}$$

以下、(2.7.70)式中のC_εをdynamicに同定するプロセスをを示す。k_{SGS}と同様に、K_Tの輸送方程式は次のようになると仮定する。

$$\frac{\partial K_T}{\partial t}+\frac{\partial \hat{\bar{u}}_j K_T}{\partial x_j}=-T_{ij}\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}-\varepsilon_T+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu+\frac{C_v\hat{\bar{\Delta}}K_T^{1/2}}{\sigma_k}\right]\frac{\partial K_T}{\partial x_j} \tag{2.7.71}$$

ここで $$\varepsilon_T=\nu\left(\widehat{\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}-\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.7.72}$$

ここでも、ε_Tは次のようにモデル化される。

$$\varepsilon_T=\frac{C_\varepsilon K_T^{3/2}}{\hat{\bar{\Delta}}} \tag{2.7.73}$$

dynamic Smagorinskyモデルの場合と同様に、(2.7.70)式にテストフィルタを施すと

$$\hat{\varepsilon}_v=\nu\left(\widehat{\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}-\widehat{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}\right) \tag{2.7.74}$$

$$=\frac{C_\varepsilon \widehat{k_{SGS}^{3/2}}}{\bar{\Delta}} \tag{2.7.75}$$

(2.7.72), (2.7.74)式より

$$\varepsilon_T-\hat{\varepsilon}=\nu\left(\widehat{\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}-\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\right)-\nu\left(\widehat{\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}-\widehat{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}\right)$$
$$=\nu\left(\widehat{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}-\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.7.76}$$

Resolved stress £ijと同様に、(2.7.76)式に示すように$\varepsilon_T-\hat{\varepsilon}$はGSの速度勾配より陽に計算可能である。一方、$\varepsilon_T$と$\hat{\varepsilon}$のモデルは(2.7.73), (2.7.75)式より

$$\varepsilon_T-\hat{\varepsilon}=\frac{C_\varepsilon K_T^{3/2}}{\hat{\bar{\Delta}}}-\frac{C_\varepsilon \widehat{k_{SGS}^{3/2}}}{\bar{\Delta}} \tag{2.7.77}$$

以上より、dynamicにC_εを同定する評価式を得る。

$$C_\varepsilon=\frac{\nu\left(\widehat{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}-\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\right)}{\left(\frac{K_T^{3/2}}{\hat{\bar{\Delta}}}-\frac{\widehat{k_{SGS}^{3/2}}}{\bar{\Delta}}\right)} \tag{2.7.78}$$

またWongはk_{SGS}の輸送方程式((2.7.68)式)の拡散項に現れるσ_kについてはσ_k=1.0としている。しかし、C_εの同定と同様の手続き（MSD :Multidimensional Statistical Dynamic closure method）を用いて、算出してもよいとも記している。このモデルによる実際の流れ場の計算例は現在のところ報告されていない。

2.7.4 Dynamic SGSモデルの浮力流れ場への適用

2.7.4.1 SGSへの浮力効果を陽には組み込まないモデル

Smagorinskyモデル型のdynamic SGSモデルを浮力乱流場に適用する場合、SGSのヒートフラックスのモデル化については既にLilly (1992)がdynamicモデルを用いた展開を示している。

グリッドフィルタの施された温度の輸送方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}=-\frac{\partial h_j}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2.7.79}$$

ここでh_{ij}はSGSのヒートフラックスであり、次式で定義される。

$$h_j=\overline{u_j\theta}-\bar{u}_j\bar{\theta} \tag{2.7.80}$$

同様にテストフィルタを施した温度の輸送方程式は

$$\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial t}+\hat{\bar{u}}_j\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j}=-\frac{\partial H_j}{\partial x_j}+\frac{\partial^2\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j\partial x_j} \tag{2.7.81}$$

ここで $H_j=\widehat{\overline{u_j\theta}}-\hat{\bar{u}}_j\hat{\bar{\theta}}$ (2.7.82)

h_jとH_jをそれぞれSmagorinskyモデルに基づいて勾配拡散近似をする。

$$h_j=-\frac{C\bar{\Delta}^2}{Pr_{SGS}}|\bar{S}|\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j} \tag{2.7.83}$$

$$H_j=-\frac{C\hat{\bar{\Delta}}^2}{Pr_{SGS}}|\hat{\bar{S}}|\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j} \tag{2.7.84}$$

Pr_{SGS}はSGSのプラントル数（$Pr_{SGS}=\nu_{SGS}/\alpha_{SGS}$）である。但し、$\alpha_{SGS}$はSGS温度拡散係数。ここで$P_j$を次のように定義する。$P_j$が$£_{ij}$に対応する陽に計算可能な量である。

$$\begin{aligned}P_j&=H_j-\hat{h}_j\\&=\widehat{\bar{\theta}\,\bar{u}_j}-\hat{\bar{\theta}}\,\hat{\bar{u}}_j\end{aligned} \tag{2.7.85}$$

(2.7.83), (2.7.84)式を用いてP_jをモデル化すると次式になる。

$$\begin{aligned}P_j&=\widehat{\frac{C\bar{\Delta}^2}{Pr_{SGS}}|\bar{S}|\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j}}-\frac{C\hat{\bar{\Delta}}^2}{Pr_{SGS}}|\hat{\bar{S}}|\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j}\\&=\frac{C}{Pr_{SGS}}\left(\bar{\Delta}^2\widehat{|\bar{S}|\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j}}-\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j}\right)\end{aligned} \tag{2.7.86}$$

ここで$\bar{\Delta}^2\widehat{|\bar{S}|\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j}}-\hat{\bar{\Delta}}^2|\hat{\bar{S}}|\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j}=R_j$ とおき、最小自乗法を用いてdynamicに変化する$1/Pr_{SGS}$についての式を導くと次式となる。

$$\frac{1}{Pr_{SGS}}=\frac{1}{C}\frac{P_jR_j}{R_l^2} \tag{2.7.87}$$

松井,村上,持田(1994)はこのモデルを非等温室内気流に適用し、Van Driest型のwall damping functionを併用したSmagorinskyモデルに比べて格段に実験に近づく結果を得た。このLillyのモデルを用いて非等温流れを解析した場合でも、SGSレイノルズストレスのモデル化には、等温の場合と同じSmagorinskyモデル型の式（(2.7.5),(2.7.6)式)）が使われている場合が多い。そもそもSmagorinskyモデルはk_{SGS}の輸送方程式中の局所平衡から導かれるので、非等温の流れ場では、正確にはSGSストレスのモデル化にも、Smagorinskyモデルに浮力の効果を組み込んだモデル（前節Masonモデル参照）を用いるべきである。従ってこのモデルではSGSへの浮力効果は陽には組み込まれていない。

2.7.4.2 SGSへの浮力効果を陽に組み込むモデル

これに対して、k_{SGS}の輸送方程式中の浮力項を評価して、SGSストレスのモデル化にも、浮力の効果を組み込んだSmagorinskyモデルを用いることも可能である。すなわち(2.7.5),(2.7.6)式に対して浮力項を組み込んで評価すれば次のようになる。

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=-2C\bar{\Delta}^2\left(1+\frac{g\beta}{Pr_{SGS}|\bar{S}|^2}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_3}\right)^{1/2}|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \tag{2.7.88}$$

$$T_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}=-2C\hat{\bar{\Delta}}^2\left(1+\frac{g\beta}{Pr_{SGS}|\hat{\bar{S}}|^2}\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_3}\right)^{1/2}|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij} \tag{2.7.89}$$

$£_{ij}$を次のように定義すれば

$$\begin{aligned}£_{ij}&=T_{ij}-\hat{\tau}_{ij}\\&=\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}-2C\hat{\bar{\Delta}}^2\left(1+\frac{g\beta}{Pr_{SGS}|\hat{\bar{S}}|^2}\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_3}\right)^{1/2}|\hat{\bar{S}}|\hat{\bar{S}}_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}-2C\bar{\Delta}^2\widehat{\left(1+\frac{g\beta}{Pr_{SGS}|\bar{S}|^2}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_3}\right)^{1/2}|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}\end{aligned} \tag{2.7.90}$$

等温の場合と同様に最小2乗法によりCの式を導出すると次式となる。

$$C=-\frac{1}{2}\frac{£_{ij}M_{ij}}{M_{kl}^2} \tag{2.7.91}$$

ここで $M_{ij}=\hat{\Delta}^{2}\left(1+\frac{g\beta}{Pr_{SGS}|\hat{S}|^{2}}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_3}\right)^{1/2}|\hat{S}|\hat{S}_{ij}-\bar{\Delta}^{2}\overline{\left(1+\frac{g\beta}{Pr_{SGS}|\bar{S}|^{2}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_3}\right)^{1/2}|\bar{S}|\bar{S}_{ij}}$ (2.7.92)

既にこのモデルを用いた解析例がCabot(1992),Sullivan and Moeng(1992)により報告されているが、このモデルではCの定義式((2.7.91)式)にもPr_{SGS}が現れるために(2.7.87)式,(2.7.91)式をiterativeに解いてCとPr_{SGS}を計算する必要があり計算量は増加する。

2.7.4.3 Scalling formulationモデル

Wong and Lilly(1994)は上記のCを求める際にPr_{SGS}が必要になるという煩雑さを避け得るScalling formulationと呼ばれるdynamicモデルを提案している。このモデルではSGSの粘性散逸率ε_vとSubtest-scale ($\hat{\Delta}$より小さいスケール,以下STS) の粘性散逸率が等しいと仮定し、ε_vを局所平衡等を仮定することなしに、dynamic procedureにより直接的に同定している。

まずν_{SGS}をグリッドスケール$\bar{\Delta}$とε_vで表現する。

$$\nu_{SGS} = C^{2/3}\bar{\Delta}^{4/3}\varepsilon_v^{1/3} \qquad (2.7.93)$$

ここで$C^{2/3}\bar{\Delta}^{4/3}=C_v$とおけば

$$\nu_{SGS} = C_v\bar{\Delta}_v^{4/3} \qquad (2.7.94)$$

通例のSmagorinskyモデルでは局所平衡を仮定し、(2.7.93)式のε_vを$\varepsilon_v=Pk_{SGS}$とする。また、Masonのモデル等では、$\varepsilon_v=Pk_{SGS}+Gk_{SGS}$とおかれる。この様な局所平衡の仮定を用いず$\nu_{SGS}$の定義式に$\varepsilon_v$を残し、それをdynamicに求める。これが従来のdynamicモデルとの大きな差異であり、より原義に忠実なモデルと解釈される。しかし、この場合、物理的仮定からでなく数値プロセスのみから、ε_vを同定するため、グリッド分割、フィルターの定義等に関して問題があれば、結果に大きな誤差が生じる可能性があると考えられる。 τ_{ij} ($=\overline{u_iu_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j$) は次式で表される。

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=-2\nu_{SGS}\bar{S}_{ij} \qquad (2.7.95)$$

同様にT_{ij} ($=\widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j$) は次式でモデル化される。

$$T_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}=-2\nu_{SGS}^{T}\hat{\bar{S}}_{ij} \qquad (2.7.96)$$

ただし $\nu_{SGS}^{T}=C_v\hat{\Delta}^{4/3}$ (2.7.97)

ここで$\pounds_{ij}$をGermanoらと同様に定義し

$$\pounds_{ij}\equiv T_{ij}-\hat{\tau}_{ij}=\widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j \qquad (2.7.98)$$

$\pounds_{ij}$を(2.7.95)式,(2.7.96)式等によりモデルで表せば

$$\pounds_{ij}=\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}-2C_v\hat{\Delta}^{4/3}\hat{\bar{S}}_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}-2C_v\widehat{\bar{\Delta}^{4/3}\bar{S}_{ij}}$$

$$\pounds_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\pounds_{kk}=2C_v(\bar{\Delta}^{4/3}-\hat{\Delta}^{4/3})\hat{\bar{S}}_{ij} \qquad (2.7.99)$$

ただし$\pounds_{kk}=T_{kk}-\hat{\tau}_{kk}$

最小自乗法により最適なC_vを求めると次式が得られる。

$$C_v=\frac{1}{2}\frac{\pounds_{ij}\hat{\bar{S}}_{ij}}{\hat{\bar{S}}_{kl}^{2}} \qquad (2.7.100)$$

このScalling formulationでは、非等温の場合でもC_vの定義式((2.7.100)式)にPr_{SGS}が現れないので、反復計算を行う必要がなく、計算時間が削減できる点が大きな利点である。

同様にSGS,STSのヒートフラックスh_j ($=\overline{u_j\theta}-\bar{u}_j\bar{\theta}$) , H_j ($=\widehat{\bar{u}_j\bar{\theta}}-\hat{\bar{u}}_j\hat{\bar{\theta}}$) をモデル化する。

$$h_j=-\frac{C_v}{Pr_{SGS}}\bar{\Delta}^{4/3}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_j} \qquad (2.7.101)$$

$$H_j=-\frac{C_v}{Pr_{SGS}}\hat{\Delta}^{4/3}\frac{\partial\hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j} \qquad (2.7.102)$$

P_jは(2.7.101)式,(2.7.102)式より次のように表す。

$$
\begin{aligned}
P_i &= H_i - \hat{h}_i \\
&= \widehat{\bar{u}_j\bar{\theta}} - \hat{\bar{u}}_j\hat{\bar{\theta}} \\
&= \frac{C_v}{Pr_{SGS}} \frac{\partial \hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j} \left(\bar{\Delta}^{4/3} - \hat{\bar{\Delta}}^{4/3} \right)
\end{aligned}
\tag{2.7.103}
$$

最小自乗法により最適なPr_{SGS}を求めると次式となる。

$$
\frac{1}{Pr_{SGS}} = \frac{1}{C_v} \frac{P_j \dfrac{\partial \hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j}}{\left(\bar{\Delta}^{4/3} - \hat{\bar{\Delta}}^{4/3} \right) \left(\dfrac{\partial \hat{\bar{\theta}}}{\partial x_j} \right)^2}
$$

ここで、C_vは(2.7.100)より与えられている。Wongらはこのモデルを用いて加熱されたチャンネル流の解析を行い、Cabotらのモデル((2.7.91)式)に比べて、DNSの解に近い結果を得ている。

2.7.8 Dynamic SGSモデルの特徴とまとめ

極めて精緻なSGSのSecond-moment型のSGSモデルがあり、モデル係数も最適化された値が判っていたとする。又、Near wall, Non-near wallの低Re効果（浮力による減衰効果も含めて）を模擬するdamping functionも判っているとすると、モデル係数をdynamicに変化させる必要は生じないと思われる。すなわち、モデル係数を変化させる必要があるのは、SGSモデル（damping functionの形も含めた）の不完全さによるものであると考えられる。Dynamic SGSモデルでは、使用する物理モデルが不完全であることを前提とし、その足りない部分をモデル係数の変化により補償する。この時のモデル係数の変更は、物理的考察ではなく２重のフィルタ操作等、数値的プロセスを通じて行われる所が大きな特徴である。

Yoshizawa(1991)のC_sを場の関数とするモデルも、Cを時間的・空間的に変化させるという意味ではDynamicモデルと言うことも可能であるが、上記の意味でのDynamic

モデルとはやや異なる。吉澤モデルはstaticな高Re版の１方程式型のSGSモデルの簡略版であり、Csの評価式はk_{SGS}の輸送方程式の移流項（拡散項）にいくつかの近似を加えることにより導出される。すなわち、移流（拡散）の効果が陽に組み込まれた物理モデルと言える。このモデルで考慮されるのはk_{SGS}の移流（拡散）の効果によるν_{SGS}の変化のみである。従って、低Re効果、浮力等他の要因の影響はCsの変化には反映されない。

これに対して、Dynamicモデルでは、数値プロセスのみからモデル係数Cの変化を決める。従って、Cの変化を要求する物理的な要因（移流、拡散、浮力etc.）の種類を特定せず、Resolvable scaleの中のcut off波数に近い高周波成分に現れる流れ場の変化から各物理現象の影響を自動的に取り込む。すなわち、物理的モデルが陽には組み込まれていない物理現象の効果を数値的プロセスを通じて係数をcalibrationすることにより計算に反映させるのがDynamicモデルと言える。

2.8 まとめ

本章では、まずLESの基本的な考え方から始めて、Smagorinskyモデルの導出過程及びその問題点について整理した。その結果、従来より指摘されてきたSmagorinskyモデルの欠点は、その導出過程より理論的に裏付けられることが明らかとなった。そして、その改良の方向として改良型のSmagorinskyモデル、その他の代表的なSGSモデルについて解説を行った。Smagorinskyモデルに限らず、1方程式型のSGSモデルやさらに高次のモデルを用いたとしても、数値定数の最適化という問題は避けて通れない。その意味であらゆる物理的モデリングに対して適用可能であり、しかも自動的に数値定数の最適化が行われるdynamic SGSモデルは今後、さらに様々な流れ場に適用され、発展していくものと考えられる。dynamic SGSモデルの今後の課題としては、①モデル係数の負値に対する計算の安定化の対策、②速度勾配や温度勾配のない領域でモデル係数算出式の分母が0になり、計算不能になる場合の対策、③モデル係数の空間分布を厳密に組み込んだ(モデル係数をフィルタの外に出さない) local dynamicモデルの高精度化及びこのモデルを簡便に適用する手法の開発、④1方程式型あるいは応力方程式型のdynamicモデルの開発及び性能評価 等が考えられる。

第3章

LESの数値計算手法

第３章　LESの数値計算手法

3.1　序

LESは従来多くの場合、チャンネル流や等方性乱流の様に比較的単純な流れに適用され、その精度の検証，手法の改良が加えられてきた。一方、多くの工学上の流れの問題はこれよりもはるかに複雑である。第２章では、Subgrid scale(SGS)モデリングを中心に、LESを複雑乱流場へ適用する際の問題点を述べたが、単純にSubgrid scale (SGS)のモデル化をプログラムに組み込めば、直ちに正しいLESの計算が実行できるわけではない。本章では、LES計算に必要な境界条件等の取り扱い、計算手法、データ処理手法等について注意すべき点を整理するとともに、本研究での取り扱いを述べる。

3.2　初期条件

統計的に定常な乱流のLES計算を行う場合、基本的には、どのような初期条件を用いたとしても、解が定常に達した後の精度には影響を及ぼさないものと考えられる。しかしながら、どのような初期条件を用いるかは、計算が定常状態に達するまでに要する数値積分時間の長さに大きく影響する。大規模な計算を長時間継続することは高価であるため、初期条件の最適な選択によって、できるだけ、その計算時間を短縮することが望ましい。実験結果や既往の計算結果等により平均速度分布が既知の場合、各格子点上で平均速度分布に一様乱数による乱れを与えて、初期速度分布を構成する方法がしばしば使われる。このような乱れはほとんど格子間隔程度のスケールの乱れであり、SGSレイノルズ応力によって最も散逸されやすい構造で、流れの非線形性によって乱流に特有な大スケールの乱れに発達するまでには、長い時間がかかることが予想される。筆者の経験によれば、かなりの大きい強度の乱れを与えないと計算は層流化してしまうことが多い。

また時間発達の遷移過程及び統計的に定常ではない乱流（減衰乱流、層流化現象など）を対象とする場合、流れの発達状態は初期条件に大きく依存するため、実在性のある流れ場を初期条件として採用しなければならない。

本研究では、２次元角柱周辺流れに関しては、計算領域内に一様流速U_0を与え、計算当初に限り、カルマン渦列を放出させるため、境界条件を左右非対称にした。立方体周辺流れに関しては、林(1992)の行ったLESの結果を用いた。

3.3　速度及び圧力境界条件

数値計算における境界には大きく分けて２つある。一つは建物や地表面等の物理的な境界であり、もう一つは計算機の能力に制限があることによって、空間をある領域で切断しなければならないために生じる非物理的境界である。

3.3.1　固体壁面境界条件

固体壁面境界条件については、通常no-slip条件を課すことが望ましいが、工学的な計算では、粘性低層まで解像するためには膨大な格子数が必要となる。例えば、模型高さH=20cm、実験風速U_∞=5m/sの建物周辺気流に関する風洞実験を例に取ると、粘性低層の厚さδ_vは摩擦速度u*と動粘性係数νで無次元化された壁からの距離$x_n^+(=x_n u^*/\nu)$で約5程度と言われ、$u^*=0.05U_\infty$として$x_n^+=5$の時のx_n、すなわち粘性低層の厚さδ_vは0.03cmとなる。数値シミュレーションにおいて、建物に接するセルの幅Δを1/20Hとした場合、建物に接するセルの幅Δは20cm/20=1.00cmとなり、セルの幅と粘性底層の間にはかなりのオーダーの差がある。従って、工学的な計算では、何らかの壁関数を用いた壁面境界のモデル化が必要となる。従来のLESの解析で用いられてきた代表的なno-slip型でない壁関数型の境界条件については、文献（持田(1993)）に詳しいので参照されたい。

壁関数を用いる場合、壁関数を瞬時値に適用する場合と平均値に適用する場合に大別される。多くの場合、平均風速にlog law等の分布を仮定し、壁面応力の平均値$\langle\tau_w\rangle$を算出し、これに瞬間風速と平均風速との比$(u_1)_P/\langle(u_1)_P\rangle$等を乗じることにより壁面応力の瞬時値$\tau_w$を与えている（ここでPは壁面第１セルを示す添字）。この場合、あらかじめ風速の時間平均値のデータが必要となり、計算量と手間が増加する点がこの手法の問題であり、計算時間の厳しい制約の下では不利となる場合が予想される。一方、瞬間風速に一定の流速分布を仮定する場合もある。

本研究では、次式に示すWerner and Wengle (1983)により提案されたlinear-power law

型の壁関数を瞬時値に対して適用している。

$$\frac{V_P}{\tau_w} = x_n^+ \quad (x_n^+ \leqq 11.81) \tag{3.1}$$

$$\frac{V_P}{\tau_w} = 8.3 x_n^{+1/7} \quad (x_n^+ > 11.81) \tag{3.2}$$

ここでV_Pは壁面第１セルの接線方向速度成分の絶対値を示す（例えば、地上面及び建物屋上面の場合は、$V_P = (<(u_1)_P>^2 + <(u_2)_P>^2)^{1/2}$となる。以下では地上面及び建物屋上面の場合に関して説明するが、他の壁面でも取り扱いは同様である）。x_n^+は壁面第１セルの速度定義点の壁座標（$h_P V_P / 2\nu$）である。

具体的には$x_n^+ \leqq 11.81$では(3.1)式より

$$|\tau_w| = \frac{2\nu V_P}{h_P} \tag{3.3}$$

又、$x_n^+ > 11.81$では(3.2)式を、セル内で積分することにより

$$|\tau_w| = \left[\frac{1+B}{A}\left(\frac{\nu}{h_P}\right)^B V_P + \frac{1-B}{2} A^{\frac{1+B}{1-B}} \left(\frac{\nu}{h_P}\right)^{\frac{1-B}{A}}\right]^{\frac{2}{B+1}} \tag{3.4}$$

但し、A=8.3, B=1/7

で与える。最終的には、次式より瞬時の壁面シアストレスを与える。

$$\tau_{13,w} = |\tau_w| \frac{(u_1)_P}{V_P} \tag{3.5}$$

$$\tau_{23,w} = |\tau_w| \frac{(u_2)_P}{V_P} \tag{3.6}$$

ここで用いたpower lawの速度分布は、持田,村上, 林(1991)により用いられてきたlog lawの速度分布とほぼ変わらず、瞬時値に対してlog lawを適用した場合に反復計算によりτ_wを求めなければならないのに対して、power lawでは陽にτ_wを求めることができるという利点がある。

建物周辺気流を正しく予測するために、最も重要なことは、屋根面の剥離流の性状を正しく再現することであり、この領域の風速や乱流エネルギー等の分布に含まれる誤差は、風下側の循環流域の性状に大きな影響を及ぼす。多くの建物は鋭いコーナーを有するBluff Bodyであるため、剥離点はレイノルズ数の大小にかかわらず風上コーナーに存在している。この剥離点付近では流れは通常主として移流により支配的影響を受け、従って、移流フラックスが壁面上で0であるという条件を満たしていれば壁面摩擦応力をそれ程精密に与えなくても、それ程大きな問題は生じない場合が多い。しかし、ドームや円柱形の建物等のようなSmooth Bodyの場合、剥離点がレイノルズ数の変化に伴って移動し、これを正しく再現するためには、境界条件に関する充分な配慮が必要となる。

3.3.2　流入境界条件

一般に建物は、風速の変動レベルが極めて高い接地境界層流中に存在する。従って、流入境界条件として接地境界層内の風速変動の統計的性状を正しく模擬した変動風を与えることが極めて重要になる。流入風の平均風速プロファイルだけでなく流入風の乱流エネルギーの分布を正しく与えなければ、屋上面の逆流や後方再付着距離を正しく再現できないことは既往の多くの風洞実験から明らかである。さらに、もうひとつ大切となるのは流入風が持つ渦のスケールを正しく与えることである。流入風に変動を与えてもそれが実現象に対応する空間的、時間的相関を有していなければ正しい解析は望めない。従って、別途（又は建物周辺気流の解析と同時に）流入風を作成するための計算を行う必要がある。最も理想的な方法は、対象建物のまわりの市街地ラフネスを正しくモデル化した地上面境界条件の下で、主流方向に圧力勾配０の境界層流の解析を行い、これを流入境界条件として用いることであると思われるが、この場合、流れ方向の境界層の発達を考慮した流入・流出の境界条件の工夫が必要となる（Spalart(1988)）。流入境界面の速度場の確率過程に関する観測値がある場合、条件付き確率場の理論を用いて瞬時流入速度分布を生成する方法もある（盛川, 丸山(1993)）。

本研究では、第４，５章では、流入に乱れがない場合を対象としているため、流入境界は空間、時間に一定値としている。第６，７章では、都市の市街地ラフネスに対応するような粗な壁面を有するチャンネル流の計算により得られた境界層流を利用することにより、概ね都市境界層を模擬した風洞実験と統計的性状が対応する流入風を作成している（林(1992)）。

3.3.3　流出境界条件

流出境界条件については流出境界で正しい非定常流出速度を予め課すことは不可能であるため、流出速度に関しても何らかの近似モデルが必要となる。一つの主流方向を持つ流れ（混合層、噴流、後流、チャンネル流等）の場合、乱流構造は主流によって下流へ流される対流効果が支配的であるため、流出境界面で対流速度を用いる対流型境界条件が良い流出境界条件となることが検証されている（戴, 小林(1992)）。具体的には流出境界条件として次式を与える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=U_c\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{3.7}$$

ここで、ϕはある変数を表し、Ucは位相速度を表す。

Ucの取り扱いについては、戴, 小林(1992)は平均流速を用いており、川上, 西田, 里深(1993)は数値的に計算している。本研究では、平均流速を用いている。

3.4 空間離散化手法

従来行われてきた、一様等方性乱流、チャンネル流等の単純形状の流れ場のLESにおいては、３方向あるいは２方向に周期境界条件を課せるため、スペクトル法を用いることが多い。しかしながら建物周辺気流等の解析を行う場合、一般に物体が計算領域内にあり、３方向ともに非周期境界条件となる。その場合、通常、有限差分法、有限体積法、有限要素法等の方法を用いることになる。有限差分法は、解析領域全体に格子を生成し、格子点上に定義される離散的な値を用いて方程式の微分を差分近似に置き換えて離散化を行う。高精度の空間離散化が求められる場合には、高次精度の有限差分法が用いられる。これに対して、有限体積法では各離散点間で平均化した値である点が異なるが、有限差分法との差に明確な定義はない。有限体積法は運動量を保存するスキームを構成しやすいため、実用計算にはよく用いられている。LESでは、離散点にフィルタリングを施して、離散点上の値そのものではなく平均化された値を扱うため、本研究では、有限体積法を用いて離散化したものと考える。また有限要素法は、解析領域を有限要素に分割して物理量を定義する接点を与え、定義する補間係数を要素ごとに用いて、重み付き積分された方程式を解く。

有限要素法は複雑形状に適用しやすいため、工学的実用性の高い計算手法と言えるが、通常、計算時間と記憶容量が他の両手法よりかなり多くかかるため、乱流計算に対する有限要素法の研究と応用は現在のところ十分に行われていない。

3.5　時間離散化手法

LESの時間離散化において、移流項は非線形であるのでexplicitに取り扱われる。メッシュが比較的粗い場合には、通常、時間刻みの制限は移流項に関するものが支配的であり、クーラン数により規定される。このような場合は、拡散項についても、時間ステップあたりの計算量が少なくてすむ陽的な解法が用いられる。壁近傍等でかなり細かい格子を切る場合、粘性安定条件による時間刻みが非常に小さくなってしまうので、計算の経済性からimplicitな解法を用いる場合が多い。この様なsemi-implicit解法の主な利点は、安定条件が緩まることで時間刻みを大きくとれることである。しかし、半陰解法では高周波成分の粘性拡散を人工的に減衰させると言われ、時間刻みを大きくした場合、高周波成分の計算精度の保証はなくなる可能性がある（森西(1994)）。特に、移流に支配される非定常流れに対しては、移流項の高周波成分（時間スケールが小さい）を解像できる程度の時間刻みを確保しなければならない。

一般に、方程式の時間項について１次精度で離散化すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=F(\phi) \tag{3.8}$$

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\Delta t}=F(\phi)^{n+1/2} \tag{3.9}$$

本研究では、移流項の時間スキームとして陽解法であるAdams-Bashforthスキーム

$$F(\phi)^{n+1/2}=\frac{3}{2}F(\phi)^{n}-\frac{1}{2}F(\phi)^{n-1} \tag{3.10}$$

を、拡散項には陰解法であるCrank-Nicolsonスキーム

$$F(\phi)^{n+1/2}=\frac{1}{2}F(\phi)^{n+1}+\frac{1}{2}F(\phi)^{n} \tag{3.11}$$

を用いるsemi-implicitスキームを用いた。

3.6 解法アルゴリズム

非圧縮流体の数値計算では、連続の式に時間微分項が存在せず、また運動方程式中に圧力勾配項が存在するので、連続の式を満足する速度場を求めると同時に圧力も計算する速度-圧力連成アルゴリズムが必要となる。このアルゴリズムに関して、基本的にはLESについても他の流れ場の解析手法と同じものが適用可能と思われるが、SIMPLE法系統の手法で安定な数値解析を行うには対流項に対する風上化が必須となるのでLESへの導入は行われていない。LESの応用計算では基本的にMAC法系統の手法が用いられる。MAC法系統の解法アルゴリズムとしては、MAC (Marker And Cell)、SMAC (Simplified MAC)、HSMAC (Highly SMAC)が挙げられる。MAC法では、保存系表示したN-S方程式を、圧力に関して陰的に、速度に関して陽的に離散化し、圧力に関するPoisson方程式を解く方法である。ここでは、反復誤差の自己修正法を用いており、即ち、方程式中に連続式を満たさない量を取り込んでいるため、誤差が累積することなく時間進行させることができる。しかし、この方法では境界条件の取り扱いが煩雑になるため、この点を改良する方法として、ポテンシャル関数に関するpoisson方程式を解くSMAC法が考案された。しかし、MAC法、SMAC法ともに、前者は圧力、後者はポテンシャル関数に関するpoisson方程式を解かなければならない。HSMAC法は圧力と速度を同時に修正していくことによりpoisson方程式を解く手続きを簡略化、高速化したものである。

本研究では、SMAC法を用い、Poisson方程式の解法としてはMICCG法を採用した（松井, 村上, 持田(1993)）。

3.7　複雑流れ場を対象としたLESにおける各種統計量の算出

LESの場合、計算の過程で各時刻における流れ場の３次元情報が再現される。チャンネル流のように流れの性状がhomogenousな面を持つ流れであれば、面内平均と時間平均を併用することにより、それ程長時間にわたって時間積分を行わなくても信頼性の高い各種の統計量の分布を得ることも可能であるが、建物周辺気流のように

局所的に流れの性状が大きく異なる流れ場の場合、面内平均値はなんら意味を持たない。従って、統計量算出のための処理をあらかじめ組み込んだ計算を実行する必要がある。このためには、必要とされる統計量等に関して事前に充分に検討する必要がある。

3.7.1 平均流に関わる情報

ある初期条件から計算を開始し、解が統計的な定常状態に達するまで計算を続行し、その後に各種統計量の採取を開始する。風速３成分及び圧力の平均値とこれらの諸量の二乗量の時間平均値を得ることが最低必要と思われる。さらにReynolds stressの分布が必要な場合は、風速各成分の相関量を求めるための準備が必要である。また、SGSのReynolds stressの各成分を算出するための準備も必要となる。

3.7.2 時系列データ

理想的には全時刻の全ポイントの風速、圧力のデータを記憶しておくことが望まれるが、実際上は不可能である。従って、一定の時間stepおきに興味の対象となる領域のみの情報をサンプリングせざるを得ない。従って、データサンプリングをどの程度の時間step毎にどの程度の観測時間に渡り行うかという選択が、統計処理をうまく行うための鍵となる。このためには、既往の実験や実測データより得られた風速等の変動のスペクトルを参考として、対象とする領域の変動がどのような周波数帯で生じているかを事前に充分検討する必要がある。この点はComputer Graphics（CG）を用いて流れを可視化する際にも同様である。又、スペクトル解析を行なう場合には、特定の数ポイントの非常に長時間のデータサンプリングが必要となる。

3.8　結論

本章では、LES計算に必要な境界条件等の取り扱い、計算手法、データ処理手法等に関して注意すべき点及び本研究での取り扱いを述べた。この他に、検討すべき項目としては、Poisoon方程式の高速解法、結果の表示・解析のためのCG等のポストプロセッサに関する事項が考えられる。

第4章

複雑形状、任意風向に適用可能な複合グリッドシステムの開発

4.1　序

建物周辺気流の数値シミュレーションでは、一般的に解析領域はなるべく広く、また建物近傍のグリッド分割は充分細かくする必要がある。特にLESではRANSモデルによるシミュレーションと比べて、より細かいメッシュ分割が必要とされる。しかし通常の単一の直交座標系に基づく解析を行なう限り、これを満足するためには、建物から離れた速度勾配のそれほど大きくない領域において不必要なグリッド数の増加を引き起こす。

また建物周辺気流の検討においては、風向の変化に応じて何ケースもの数値シミュレーションが要求されることが多い。この際、風向に応じてグリッドを作り直すことに多くの時間が要求される。複数の独立したグリッドから成る複合グリッドシステムを採用すれば、一方のグリッドの座標系のみを風向に応じて回転させることにより、グリッド作成の手間を大幅に削減することができる。さらにグリッドの接続面は建物から離れた位置に設定できるから、建物近傍においてはすべてのケースにわたり、同一のグリッドが適用され、グリッドの差異による影響を小さくすることができる。本研究では、複雑な形状、あるいは多様な計算条件に、速やかに対応可能な高精度の気流数値解析法の開発を目的として、解強制置換法（藤井(1992)）に基づく複合グリッドシステムを用いたLESによる数値解析手法を開発する。

4.2 数値解析手法の概要

4.2.1 コロケーショングリッド・セミスタガードスキームによる定式化

本研究ではMAC法のアルゴリズムを用いた複合グリッドシステムによる数値解析法を開発する。複合グリッド系において、一方のグリッドから他方のグリッドへ従属変数値を引き渡すためには、他方のグリッドの定義点に対し、そこに与える従属変数値を補間により計算し、与える必要がある。圧力と速度の定義点が異なり、しかも速度の３成分の定義点がそれぞれ異なるスタガードグリッドでは、補間計算が非常に複雑になる。そのため本研究では圧力と速度を同一点で定義するコロケーショングリッドを採用している。コロケーショングリッドを使用した場合、圧力振動の発生がしばしば問題になる。ここではコロケーショングリッドの節点で定義する速度に追加して、コントロールボリュームの界面（節点間の中点）における速度も計算して移流項に与えるセミスタガードスキームを採用している（Rhie and Chow(1983), 石田, 村上, 加藤, 持田(1993)）。通常、コロケーショングリッドの節点で定義された速度は、連続式を高精度では満足しないが、界面における速度はスタガードグリッドにおける速度と同様、連続式を高精度で満足する。これを移流項に与えて計算精度の向上を計る。また本計算では固体壁等の境界面をコントロールボリュームの界面に設定する。この場合、境界に一番近い節点における、境界に直交する速度の運動方程式を解く際に、この節点における圧力勾配が必要となる。ここでは境界に接する1/2コントロールボリュームを考え、その節点のコントロールボリュームが連続式を満足するように壁面上の圧力を決定し、これを用いて第１節点の圧力勾配を与えた（石田, 村上, 加藤, 持田(1993)）。

4.2.2 解強制置換法による複合グリッドシステム

図4.1に風向が建物に直交しない場合の計算に用いる２つのグリッドから成る複合グリッドシステムの一例を示す。粗いグリッド（グリッドB）は解析領域全体をおおい、細かいグリッド（グリッドA）は建物周辺の重要な領域のみを解析する。ここでお互いの座標系は完全に独立している。図4.2に２つのグリッドの接合領域を示す。接続領域においてグリッドA, Bをスムーズに接続するため、本手法では解強制置換法（藤井(1992)）を導入し、運動方程式及び圧力のポアソン方程式に解強制置換項を付加してい

る。また空間の離散化には２次精度の中心差分を、時間に関しては移流項に２次精度のAdams-Bashforth, 拡散項にCrank-Nicolsonのsemi-implicitスキームを用いた。

グリッドAで成立する主流方向（x_1）の運動方程式および圧力のポアソン方程式は表4.1のようになる。表4.1の(1), (2)式の下線部は付加された強制置換項である。添え字$^{A}(\ )$, $^{B}(\ )$はそれぞれグリッドAまたはグリッドBの値であることを示す。例えば$^{A}u_{1\ i,j,k}$はグリッドA上の節点(i,j,k)における値であることを示し、$^{B}u_{1\ (i,j,k)}$はグリッドB上の値を用いてグリッドAの節点(i,j,k)上に補間された値であることを示す。強制置換項におけるC^{BA}は置換の程度を調整するスイッチングパラメーターである。スイッチングパラメータは図4.2のグリッドAに覆われた領域に分布させる。添え字$(\ )^{BA}$はグリッドBからグリッドAへの強制置換を示す。同様に添字$(\ )^{AB}$はグリッドAからグリッドBの置換を示す。スイッチングパラメーターC^{BA}, C^{AB}は計算領域において０から∞まで変化する。表4.1の運動方程式を例に取れば、$C^{BA}=0$のとき、(1)式の下線部は消え通常の運動方程式となる。反対に$C^{BA}=\infty$のとき、表4.1の(1)式の他の項は無視できるので$^{A}u_{1\ i,j,k}={}^{B}u_{1\ (i,j,k)}$ となる。即ちグリッドAの値はグリッドBの値で完全に置き換えられる。$C^{BA}_{\ i,j,k}$が有限の値を持つ場合、グリッドAの風速$^{A}u_{1\ i,j,k}$は、グリッドBより補間された$^{B}u_{1\ (i,j,k)}$とブレンドされる。すなわち$^{A}u_{1\ i,j,k}$は、グリッドAとグリッドBの値の重み付け平均となる。このブレンデイングにより、接続領域における滑らかな強制置換が実現される。C^{BA}が大きくなるほど、重み付け平均における$^{B}u_{1\ (i,j,k)}$の寄与が大きくなる。

図4.2で、領域I（$C^{BA}=\infty$, $C^{AB}=0$）はグリッドAの計算において、グリッドBで計算された速度、圧力の補間値（$^{B}u_i$, ^{B}p）をグリッドAの外側の境界条件として課す領域である。領域III（$C^{BA}=0$, $C^{AB}=\infty$)はグリッドBの計算において、グリッドAで計算された建物近傍における速度、圧力を補間によりグリッドBに境界条件として返す領域である。領域II ($0<C^{BA}<\infty$, $0<C^{AB}<\infty$)は、有限なスイッチングパラメーターを用いて、ブレンディングを行う領域である。領域II-1($0<C^{BA}<\infty$, $C^{AB}=0$)ではグリッドAの速度、圧力がグリッドBの値とブレンドされる。すなわち、グリッドAの諸量がAとBの重み平均となる。このとき、グリッドBの諸量は置換項なし（$C^{AB}=0$）で解かれる。反対に領域II-3($C^{BA}=0$, $0<C^{AB}<\infty$)ではグリッドBの下での計算において、グリッドB上の諸量がグリッドAの値によりブレンドされる。グリッドに余裕がある場合は領域II-1と領域II-3の間に、領域II-2（$C^{BA}=0$, $C^{AB}=0$) を設けるとさらによい。なお、接続領域IIを特に設定しなくとも、ほぼ滑らかな解の接続が得られる。

グリッドAからグリッドBへの強制置換の場合もまったく同様である。この場合、スイッチングパラメーターはC^{AB}で表わされる。

4.3 計算結果

4.3.1 2次元層流解析

4.3.1.1 計算概要

まず任意の風向角を持つ正方形断面の2次元角柱まわりの層流解析を行い、本手法の有効性を調べる。ここで角柱一辺(D)と流入風速(U_0)で定義されるレイノルズ数(Re)は100である。解析領域は主流(x_1)方向に25D(角柱風上側に4.5D、後方に20.5D)、横(x_2)方向に10.0Dとした（日本機械学会(1988)）。図4.3に計算に用いたグリッド分割を示す。グリッド数は解析領域全体を覆うグリッドBは35(x_1)×20(x_2)、建物周辺の任意の角度に回転可能なグリッドAは30(x_1)×30(x_2)。本研究では層流計算の場合、グリッド間の接続は一つの領域（図4.2,領域I）で行われており、ブレンディングの手法は用いていない（図4.2の領域IIを設けていない）。しかしこの場合でも層流解析では図4.4、図4.5に示すようにグリッドA, B間で解はスムーズに接続されている。一方、次節に示すLESによる乱流解析の場合、スムーズな接続を行うためにはブレンディングの手法が必要とされる。角柱壁面に接するグリッドの幅は0.1D。境界条件は、流入面では$u_1=U_0$、$u_2=0$。流出面では$\partial u_1/\partial x_1=0, \partial u_2/\partial x_1=0$。解析領域側面ではslip壁($u_2=0$, $\partial u_1/\partial x_2=0$)。角柱壁面上ではno-slip。

4.3.1.2 計算結果

図4.4に風向角45°の場合の瞬間風速ベクトル、圧力を示す。速度ベクトル及び圧力は滑らかに接続されている。また図4.5は3ケース（風向角0°, 25.5°, 45°）の平均速度ベクトルである。各ケースで滑らかに接続されている。図4.6に3ケースの平均圧力分布($\langle p \rangle_t /\rho U_0^2$)分布を示す。この場合も各ケースとも滑らかに接続されている。また風向角0°の風速ベクトルの結果は、松井, 村上, 持田(1994)が行った単一グリッドを用いた解析結果とよく一致しており、本手法の妥当性が確認された。なおこの単一グリッドによる計算でも角柱壁面に接するグリッドの幅は0.1Dであり、角柱近傍の分解能はほぼ同じである。しかしながら本計算で使用した総グリッド数は、単一グリッドの場合の約1/3であり、本手法の有効性を示すものと云える。このように様々な風向角に対応した

計算を容易に実現できる点に本手法の大きな特長があり、この点が風工学の分野の解析には極めて有効である。

4.3.2 LESによる3次元乱流解析

4.3.2.1 計算概要

離散スキームは、空間に2次精度中心差分、時間には、移流項に2次精度Adams-Bashforth, 拡散項にCrank-Nicolsonスキームを使用。フィルタとしては2次精度の中心差分による離散化の際にグリッド幅のtop hatフィルタが陰に施されているとみなした（森西(1993)）。Re数($=U_0D/\nu$)は2.2×10^4。解析領域は主流(x_1)方向に20D(角柱風上側に4.5D, 後方に14.5D)、横(x_2)方向に14.0D、角柱スパン(x_3)方向に2.0Dとした。流入面では$\bar{u}_1=U_0$、$\bar{u}_2=0$、$\bar{u}_3=0$、解析領域側面ではslip壁（$\bar{u}_2=0$、$\partial\bar{u}_1/\partial x_2=\partial\bar{u}_3/\partial x_2=0$）、角柱に直交する境界面では周期境界。流出面は速度3成分に対して$\partial/\partial x_1=0$とした。角柱壁面上の速度境界条件はlinear-power law型の2層モデル(Werner and Wengle(1991))。無次元時間差分間隔 $\Delta tU_0/D$は 1×10^{-3}。LESのSubgrid ScaleモデルはVan Driest型のwall damping functionを併用した通例のSmagorinskyモデル。Smagorinsky定数C_Sは0.13。ブレンディング領域のスイッチングパラメーターは図4.2の領域II-1で（$C^{BA}=1.0, C^{AB}=0$）、領域II-3で（$C^{BA}=0, C^{AB}=1.0$）として与えた。計算に用いたグリッド分割を図4.6に示す。グリッド数は解析領域全体を覆うグリッドBは57(x_1)×41(x_2)×10(x_3)、建物近傍のグリッドAは63(x_1)×44(x_2)×20(x_3)。角柱壁面に接する格子の幅は0.01D。

4.3.2.2 計算結果

図4.8 (1),(2)に水平断面、鉛直断面（角柱側方）における瞬間の圧力分布を示す。また図4.9に図4.8 (1),(2)と同時刻、同断面の風速ベクトルを示す。速度、圧力は接続面において滑らかに接続されていることがわかる。また図4.9(3)は従来の単一グリッドによる2次元角柱周辺流れの解析結果の一例である（第5章参照）。図4.9 (3)の単一グリッドの解析は総グリッド数71,760、一方、今回の複合グリッドの解析はグリッドA, B合わせて総グリッド数76,890であるが、角柱背後のグリッド幅は単一グリッドでは角柱より1.5D後方でx_1方向のグリッド幅が0.08Dであるのに対して、複合グリッドでは同じ場所で0.04Dである。瞬時の風速ベクトルをみると、複合グリッドを用いた今回の結果では、

単一グリッドによる結果では観察されない細かいスケールの速度変動、特に活発な鉛直方向成分の変動が観察される。このように複合グリッドシステムの採用により、同程度の総グリッド数でもより微細な流れ場の構造を解析することが可能となる。

4.4　結論

解強制置換法を用いて、複数のグリッドの任意方向の接続を可能とする複合グリッドシステムを開発し、2次元層流解析、LESによる3次元乱流解析を行った。本手法は様々な風向における構造物周辺の非定常流れ場、圧力場の性状の解析が必要とされる風工学分野の解析に極めて有効であると考えられる。

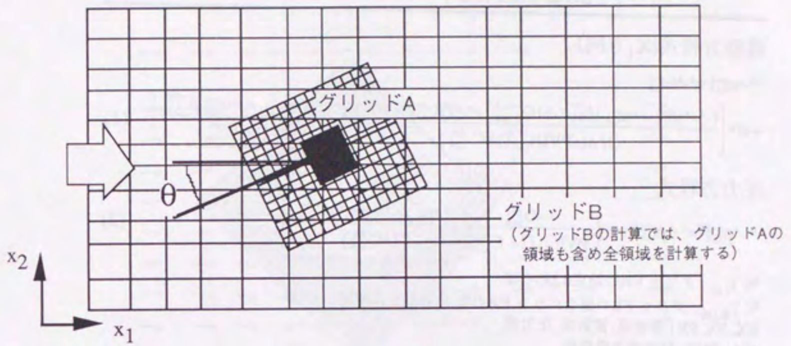


図4.1　任意方向の２つのグリッドの接続

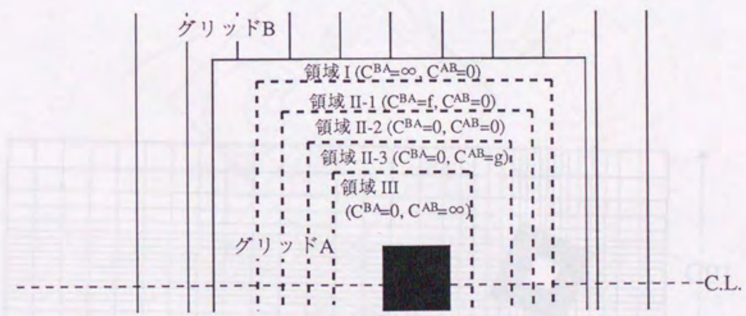


図4.2　接続領域とスイッチングパラメータの分布

表4.1 グリッドAで用いられる解強制置換法による緩和式

(グリッドBの場合は上付添字のAとBを入れ替えた形となる)

運動方程式(X_1方向)

$$
\begin{aligned}
{}^{l+1,A}u_{i,j,k}^{n+1} &= {}^{l\,A}u_{i,j,k}^{n+1} \\
&+\omega^{u}\left[\frac{(-{}^{l,A}u_{i,j,k}^{n+1}+{}^{A}u_{i,j,k}^{n})/\Delta t-{}^{l,A}HX_{i,j,k}^{n+1/2}+{}^{l\,A}FX_{i,j,k}^{n+1/2}-{}^{A}PX_{i,j,k}^{n+1/2}}{(1/\Delta t+PVU)_{i,j,k}(1+C_{i,j,k}^{BA})}+\frac{({}^{B}u_{(i,j,k)}-{}^{l,A}u_{i,j,k}^{n+1})C_{i,j,k}^{BA}}{(1+C_{i,j,k}^{BA})}\right]
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

圧力方程式

$$
{}^{l+1,A}p_{i,j,k}^{n+1/2}={}^{l\,A}p_{i,j,k}^{n+1/2}+\omega^{p}\left[\frac{{}^{l\,A}D_{i,j,k}^{n+1}}{PVP_{i,j,k}(1+C_{i,j,k}^{BA})}+\frac{({}^{B}p_{(i,j,k)}-{}^{l,A}p_{i,j,k}^{n+1/2})C_{i,j,k}^{BA}}{(1+C_{i,j,k}^{BA})}\right] \qquad (2)
$$

${}^{A}(\ )_{i,j,k}$: グリッドAの節点(i,j,k)の値

${}^{B}(\ )_{(i,j,k)}$: グリッドBの値をグリッドAの節点(i,j,k)上に補間した値

HX, FX, PX : 移流項, 拡散項, 圧力項

PVU, PVP : 対角項の係数和

ω^{u}, w^{P} : 減速緩和係数, $D_{i,j,k}$: 速度のDivergence

n: 時間積分のstep数, l: 緩和計算のstep数

C^{BA} : グリッドBからグリッドAへの置換の重みを調整するためのスイッチングパラメータ

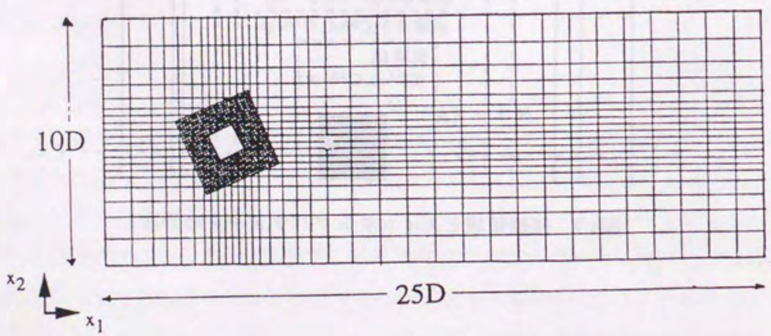
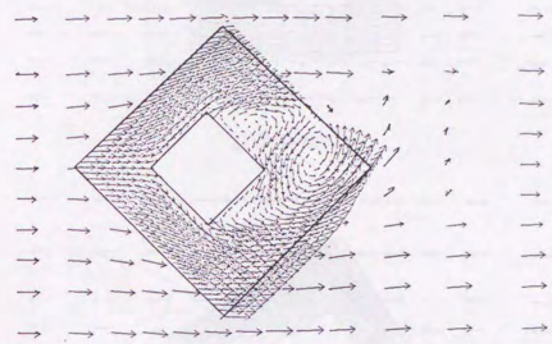
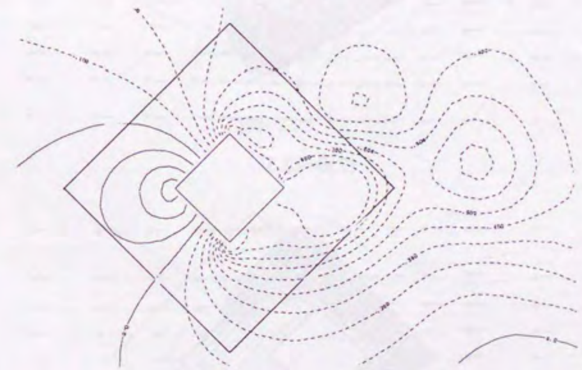


図4.3 計算領域及びグリッド分割 (2次元層流)

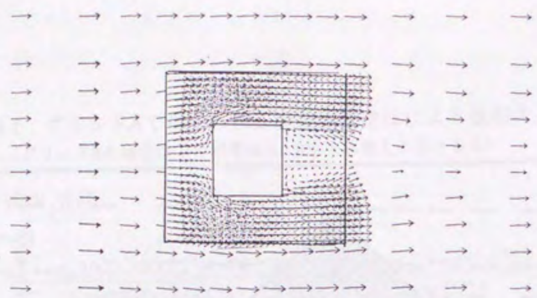


(1)速度ベクトル

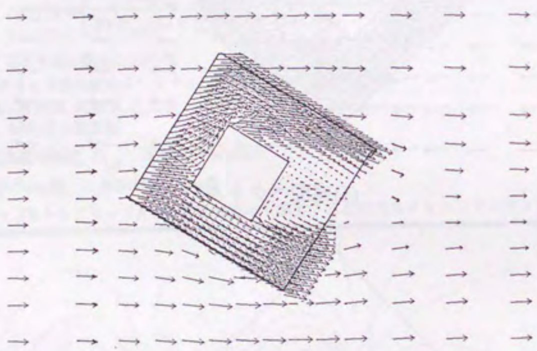


(2)圧力

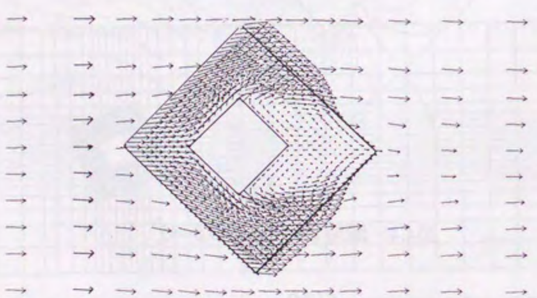
図4.4 瞬時値 (Re=100,θ=45°)



(1)θ=0°

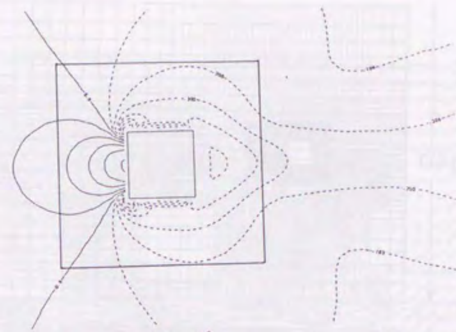


(2)θ=22.5°

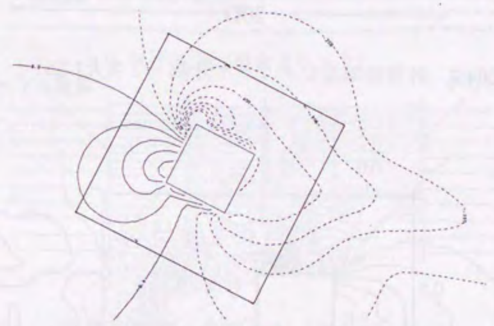


(3)θ=45°

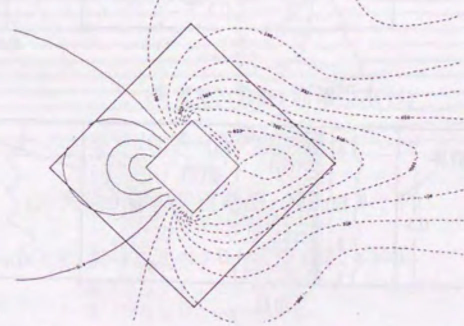
図4.5　平均風速ベクトル（Re=100）



(1)θ=0°



(2)θ=22.5°



(3)θ=45°

図4.6　平均圧力分布（$\langle p \rangle_t/\rho U_0^2$）（Re=100）

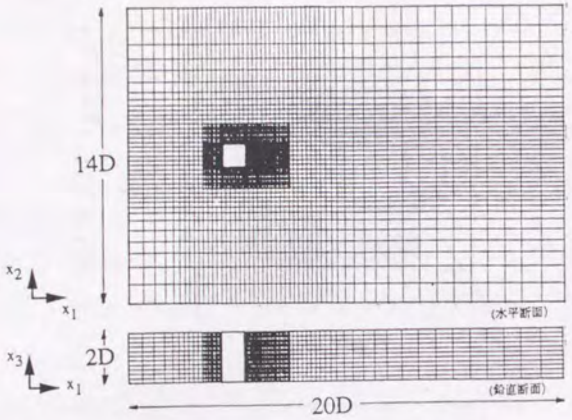
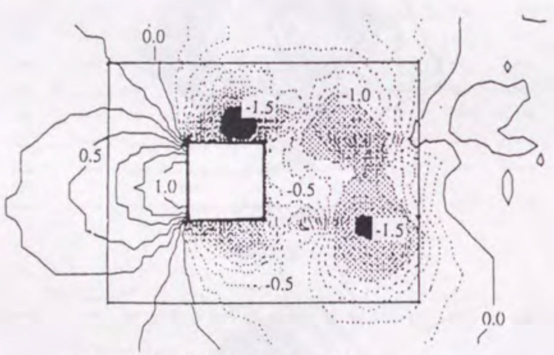
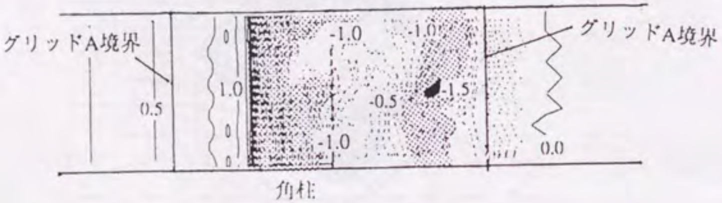


図4.7　計算領域及びグリッド分割（３次元LES）



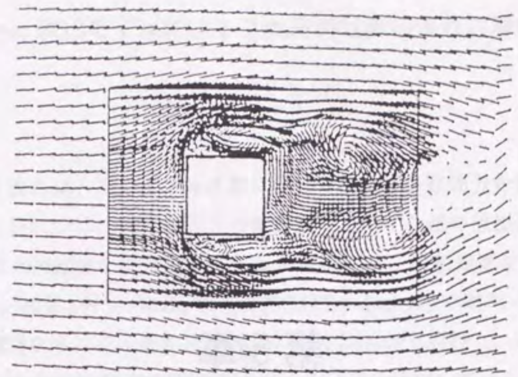
(1) 水平断面 (複合グリッド)



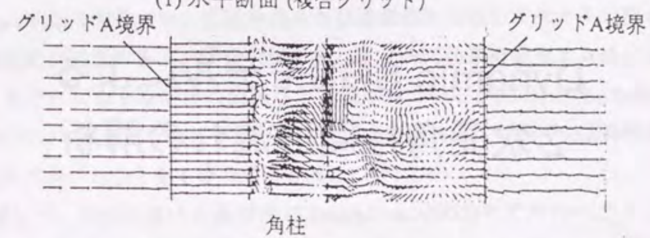
(2) 角柱側方の鉛直断面（複合グリッド）

(側面より0.005D離れた位置)

図4.8　瞬時圧力分布（ρU_0^2で無次元化, Re=2.2×10^4）

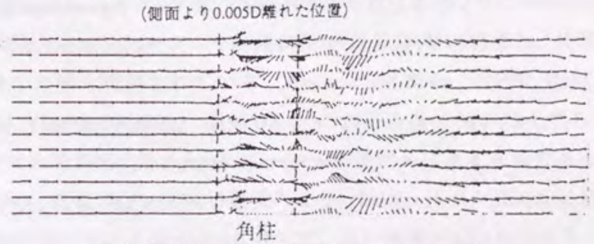


(1) 水平断面 (複合グリッド)



(2) 角柱側方の鉛直断面（複合グリッド）

(側面より0.005D離れた位置)



(3) 角柱側方の鉛直断面（単一グリッド）

図4.9　瞬時風速ベクトル（Re=2.2×10^4）

複合グリッド：55×39×10(グリッドA), 63×44×20(グリッドB)

単一グリッド：104×69×10