

延性破壊における空孔発生・成長の  
微視的機構の研究

森本 哲也

①

目次

延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究

第1章 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の意義と目的

1.1 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の意義

1.2 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の目的

1.3 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の概要

第2章 研究の目的および論文構成

東京大学 大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻 博士論文

指導教官 塩谷 義 教授

27098 森本 哲也

第3章 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の概要

3.1 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の概要

3.2 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の概要

3.3 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の概要

3.4 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の概要

第4章 延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の結果

第5章 結論：延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構の研究の意義と目的

# 目次

本論文で使用した記号.....	i
第1章 序.....	1
第1.1節 材料の破壊.....	2
第1.2節 延性破壊における微視空孔の発生、成長および破面形成の過程に 関する従来の研究.....	7
1.2.1 延性破壊における、微視空孔の発生条件の研究.....	7
1.2.2 微視空孔の成長、および破面の形成の過程の研究.....	7
1.2.3 微視空孔の体積含有率を尺度とした破壊基準の研究.....	9
第1.3節 本研究の目的および論文構成.....	11
第2章 微視空孔の成長機構に対する、力学モデルを用いた研究.....	17
第2.1節 力学モデルの作成に関する考え方.....	18
2.1.1 構成関係式.....	18
2.1.2 境界条件.....	18
2.1.3 解析方法.....	19
2.1.4 空孔周りの速度場を与える関数形の検討.....	20
第2.2節 剛粘塑性体に含有された、単一楕円空孔の成長機構.....	22
第2.3節 考察：微視的くびれによる端部の急速な変形を伴う、楕円空孔の	

成長 .....	34
2.3.1 2次元モデル .....	37
2.3.2 3次元モデル .....	43
2.3.3 考察 .....	47
2.3.4 結論 .....	62
第2.4節 第2章を通しての結論 .....	63
第3章 超音波法を応用した引き張り試験による、延性破壊における微視空孔成長の解析 .....	64
第3.1節 実験の目的 .....	65
第3.2節 実験方法 .....	66
3.2.1 超音波検査法 .....	66
3.2.2 試験片アルミニウムの熱処理および結晶観察 .....	73
3.2.3 破面観察による、微視空孔の寸法および分布の考察 .....	76
3.2.4 受信ピーク高さの無次元化 .....	81
3.2.5 散乱減衰による、微視空孔の体積含有率の導出 .....	87
第3.3節 実験結果 .....	90
3.3.1 実験に使用したアルミニウムの材料定数 .....	91
3.3.2 散乱断面積に見る、微視空孔の体積増加 .....	93
第3.4節 考察 .....	98
第4章 結論 .....	100
Appendix .....	104

A1	微視的くびれが生じた空孔端部における、歪増分場の導出	105
A2	弾性体に含有された粒子あるいは空孔の、散乱断面積	107
A3	ノッチ付円断面引き張り試験片の、応力3軸度	118

参考文献	122
------	-----

謝辞	130
----	-----

## 本論文で使用した記号

$\sigma_{\max}$	最大応力
$\sigma_{\text{yield}}$	降伏応力
$\sigma_m$	平均応力
$\bar{\sigma}$	相当応力
$\sigma'$	偏差応力
$\sigma_{ij}$	応力の $ij$ 成分
$\Sigma_{ij}$	無次元化応力
$\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}$	応力 3 軸度
$St_{\min}$	空孔形状の微分方程式における分岐点の、応力 3 軸度
$\varepsilon_{ij}$	歪の $ij$ 成分
$\varepsilon^r$	PZT の特性を表記する際の、機械的応力が一定時の誘電率
$x, y$	直交座標成分
$\eta, \xi$	楕円座標成分
$u$	$x$ 方向の速度
$v$	$y$ 方向の速度
$\nu$	ポワソン比
$a$	楕円空孔の長軸、試験片ノッチ部半径、球形空孔の半径
$b$	楕円空孔の短軸
$a_n, b_n$	無次元軸長
$D$	電気的変位
$d$	圧電定数
$E$	弾性定数、電界

- $G$  ..... せん断弾性定数  
 $h$  ..... ピーク高さ  
 $H$  ..... ハンケル関数  
 $J$  ..... ベッセル関数  
 $l$  ..... 波の透過距離、破面解析における山間隔  
 $L$  ..... 体積の3乗根、破面解析における基準長さ  
 $R$  ..... 試験片ノッチの曲率半径  
 $S$  ..... 面積（平面問題においては体積）、  
 PZTの特性を表記する際には機械的歪  
 $S_m$  ..... 破面解析における、平均山間隔  
  
 $p$  .....  $x$ 方向の荷重、音圧  
 $P$  ..... ルジャンドル多項式  
 $q$  .....  $y$ 方向の荷重  
  
 $t$  ..... 時間  
 $T$  ..... 無次元時間、PZTの特性を表記する際には機械的応力  
  
 $V_{input}$  ..... 入力起電力  
 $I_{output}$  ..... 出力電流  
 $I$  ..... 計算の際に定義する関数  
  
 $\mu$  ..... 弾性定数、粘性係数に相当する材料定数  
 $\Gamma$  ..... 粘性係数に相当する材料定数  
 $n$  ..... 材料定数（非線形性を表わす、 $n$ 乗に相当）  
 $S^E$  ..... PZTの特性を表記する際の、電界が一定の時の弾性定数  
 $c$  ..... 縦波の音速  
  
 $W_{Matrix}$  ..... 材料が消費する塑性仕事

$W_{Load}$  ..... 荷重が行う仕事

$\alpha, \beta, \gamma$  ..... 計算の際に定義する定数

$k$  ..... 計算の際に定義する定数

$c_i$  ( $i:1,2,3,\dots$ ) 計算の際に定義する定数

$f, g$  ..... 計算の際に定義する関数

$\gamma$  ..... 散乱断面積、PZTの特性を表記する際の半値幅

$\lambda$  ..... 弾性定数、ポワソン分布における分散 (=平均)

$\omega$  ..... 角振動数

$\Omega$  ..... 立体角

$\theta$  ..... 角度

$\psi$  ..... 角度、散乱の計算で定義するポテンシャル

$\rho$  ..... 密度、曲率半径

$\Pi$  ..... 散乱の計算で定義するベクトル

$Q$  ..... コンデンサーの帯電

$R$  ..... 回路の抵抗

$Z$  ..... 回路のインピーダンス



## 第1.1節 材料の破壊

構造材料として多用される多結晶金属材料は、荷重状態や温度、雰囲気等によって様々に異なる破壊形態を見せる。それらを巨視的な破壊形態から分類する場合、破壊の過程が短時間で完結し変形が小さい場合を脆性破壊、大きな変形を見せながら緩やかに破壊する場合を延性破壊と大別する。

材料の丸棒試験片を対象に引き張り試験を行い、公称応力—公称歪関係を得た例を模式的に図1-1 (a) (b) (c) に示す。理想的に脆性な材料の場合、図1-1 (a) の様にあまり歪を伴わずに応力が直線的に増加し破断する。しかし延性の大きな材料の場合は図1-1 (b) に示す様に、最大荷重を経過した後も直ちには破断せず、大きく変形しながら緩やかに破断する。この様な試験を行い、破断に至るまでに記録される最大公称応力  $\sigma_{max}$  は引き張り強さと定義され、脆性が高い材料の場合は使用基準の一つとなる。延性の大きな材料の場合は降伏応力  $\sigma_{yield}$  がこの様な基準となる。ところで、図1-1 (c) に示す様に、 $\sigma_{max}$  や  $\sigma_{yield}$  が大きな材料でも破壊に必要なエネルギー、すなわち公称応力—公称歪曲線の下部面積が小さな場合には容易に破壊に至るが、逆に  $\sigma_{max}$  や  $\sigma_{yield}$  が小さくとも公称応力—公称歪曲線の下部面積が大きく、破壊に必要なエネルギーが大きな場合には容易には破壊しないことが考えられる。この様な、破壊の際に必要なエネルギーが大きい、すなわち破壊に抵抗する性質を靱性と呼び、構造材料に求められる重要な性質の一つである。

高強度金属材料は延性が小さなものが多く、脆性的な破壊形態を見せることがしばしばである。そのため脆性破壊に関する研究は急務とされ、理論実験両面における多方面での取り組みがなされた。その結果、線形弾性体における亀裂進展問題をエネルギーバランスの概念で説明する Griffith の報告[1]を基に破壊力学の手法が生まれるに至り、今日では航空機の設計基準等に引用されている[2]。

この様に材料の特性を理想的な脆性であると見なすことの出来る場合はむしろ稀であり、多くの構造材料は延性的な性質を併せて備えている。中でも高靱性材料すなわち破壊に伴うエネルギー消費が大きな材料の場合、亀裂の

起点付近で塑性変形を伴う緩やかな破壊形態を示し、破面にはクレーター状の窪み (dimple) が観察される等、延性破壊に顕著な特徴を伴うことが多い。

延性破壊は一般に滑り面分離と空孔合体型破壊を伴う。いずれも大規模な塑性変形を伴う破壊現象であるが、滑り面分離は巨視的には点状あるいはのみの刃先状の破壊形態を示し高純度金属に典型的に見られる。これに対して空孔合体型破壊は多数の微小な dimple が破面に見られ、第2相粒子が母相に含まれている材料に顕著である等性質の異なる破壊現象である。空孔合体型破壊は材料の降伏、塑性変形の開始に引き続く過程、すなわち1) 微視空孔 (void) 発生、2) 空孔の成長、3) 各々の空孔の合体による破面形成、なる3段階により説明されている。dimpleは3) の段階における破面形成の結果、空孔が切断されて生ずる窪みである。微視空孔の発生核は結晶3重点や第2相粒子であると考えられており、変形の過程でそれらの割れや剥離の結果空孔が生ずる。通常、材料内部には性質の異なる様々な種類の第2相粒子が含有されている。そのため発生時点の異なる空孔が混在することになり、破壊が複雑なものになる一因となっている。また空孔の成長に引き続く破面形成の過程は、個々の空孔が成長して接するだけでは無く空孔端部での微視的なくびれの発生、あるいは空孔の成長に伴う応力集中や塑性変形の結果2次空孔の出現を伴う等、様々な要素が複雑に作用するため理解が困難である。

この様に延性破壊は様々な要素が複雑に影響し合う現象であるため、線形破壊力学の適用による予測が困難であり理論実験手法両面で長年研究されている。しかし、これまで理論的に導かれた破壊基準の多くは線形破壊力学の拡張、あるいは塑性変形場を線形流体の場合と同様に扱う等材料の特性を大幅に近似しており、必ずしも実際の破壊と一致する結果が得られていない。また延性材料の場合、微視的観点では結晶サイズや第2相粒子の間隔など材料固有の寸法があることから、破面に観察される dimple の寸法が材料の大きさに左右されずほぼ一定である等の寸法効果が現われる。しかしこれまでのところその様な材料固有の長さの次元を表現した破壊基準は導かれておらず、寸法効果を説明出来ないのが現状である。これは巨視的な破壊現象のみを考慮し、空孔の挙動に代表される微視的な視点に欠ける解析を行っているためである。脆性材料の場合も、破壊靱性が材料の寸法に依存する等の寸法効果

の存在が知られているが、亀裂端での小規模降伏域を考え、線形破壊力学を拡張することによって、この寸法効果の存在を説明している。すなわち、微視的現象を考察し、長さの次元のある破壊基準を導き巨視的寸法効果を表現することに成功している。

今後高靱性材料の使用が進むに伴い破面にdimpleが観察される等、延性破壊に顕著な特徴を伴う破壊形態を示す例が、増加すると考えられる。これに対応するためには微視的現象を考察し、寸法効果を明らかにした上で破壊基準を導く必要がある。そのため延性破壊における微視空孔の発生成長、および空孔相互の結合による破面形成の過程を明らかにすることが求められている。

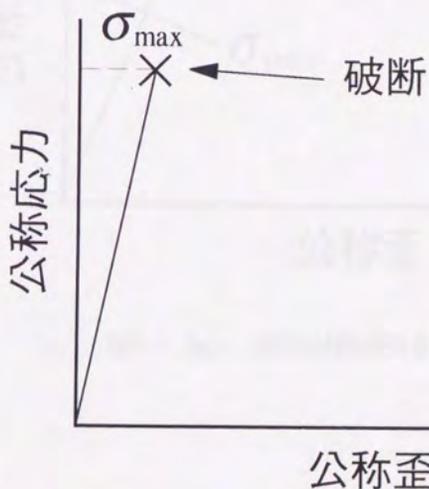


図1-1 (a) 脆性材料の引き張り試験

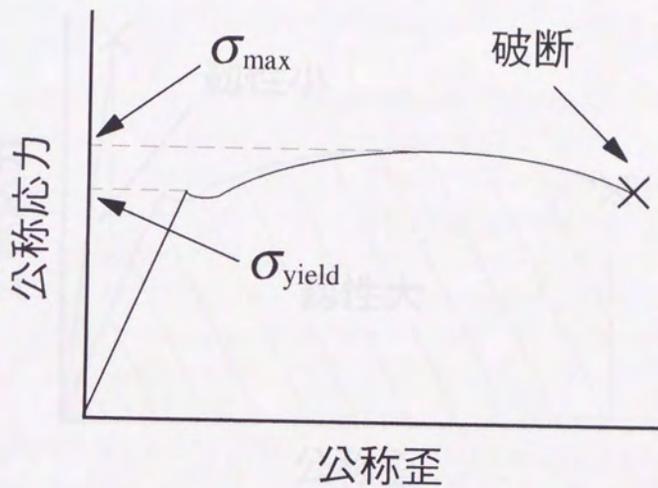


図1-1 (b) 延性材料の引き張り試験

第1章 金属材料における脆性破壊現象、試料の  
形状に関する変換的研究

1.1 脆性破壊における、脆性破壊の発生条件の研究

金属材料は、常温で引張り試験を行うと、ある一定の引張り力に達すると、急に破断する。この破断は、脆性破壊と呼ばれる。脆性破壊は、引張り力が増加するにつれて、急に破断する。脆性破壊は、引張り力が増加するにつれて、急に破断する。脆性破壊は、引張り力が増加するにつれて、急に破断する。

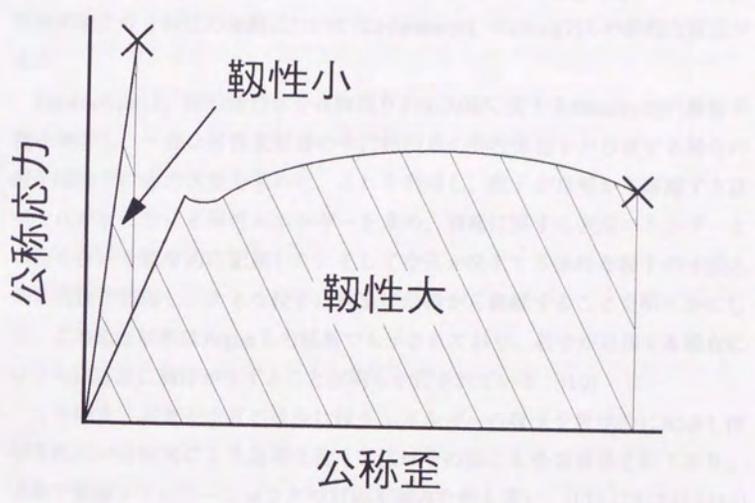


図1-1 (c) 引き張り試験における、材料の靱性

## 第1.2節 延性破壊における微視空孔発生、成長の過程に関する従来の研究

### 1.2.1 延性破壊における、微視空孔の発生条件の研究

微視空孔の発生は多結晶金属の結晶3重点、あるいは第2相粒子の母相からの剥離や粒子自体の破壊によって生ずる。塑性変形下の材料に線形弾性体の粒子が含有されている場合、粒子の周囲に歪、より微視的には転位が集積するため応力が増加し、このような剥離や破壊がもたらされる[3][4][5]。こうした、塑性変形に伴う転位の運動についてはJohnston[6]、Gilman[7]らの詳細な報告がある。

Tanakaら[8]は、線形弾性体介在物周りの応力場に関するEshelby[9]の解析手法を使用し、一様な塑性変形場の中に楕円形の弾性体粒子が存在する場合の粒子周囲での応力状態を求めた。これを利用し、粒子が母相から剥離する前後それぞれにおける弾性エネルギーを求め、剥離に要する表面エネルギーとの釣り合いを数学的に記述した。そして空孔が発生する条件を粒子の寸法と塑性歪量で整理し、大きな粒子は容易に母相から剥離することを明らかにした。この様な結果はArgonらの解析でも示されており、粒子が近接する場合にはさらに容易に剥離が生ずることが明らかにされている。[10]

この様な、剥離や空孔の成長に伴うエネルギーの収支を数学的に記述し微分方程式の分岐図による説明を行う手法はその他にも多数報告されており、実験や数値シミュレーションとの対応を試みた例も多い。[11][12][13][14][15][16][17][18][19][20]

### 1.2.2 微視空孔の成長、および破面の形成の過程の研究

空孔成長の段階は破面形成の過程と併せて解析される例が多く、力学モデルを使った解析により破断歪を導出して実験と対応させる手法が多用される。その際材料の特性を速度効果の無い剛塑性体に近似する例や、線形粘性体で

近似する例等が見られる。

Berg[21] は、Muskhelishviliによる線形弾性体中の楕円空孔周りの応力場に関する平面問題の解析に対応原理を用い、線形粘性体中の楕円空孔の変形を解いている。また、Eshelby[9]による、線形弾性体に含有された粒子周りの応力場の解析を踏まえ、Budianskyら[22][23]は線形粘性体の無限体の中に含有されている、回転楕円体形状の空孔成長について調べている。その中で空孔が楕円形状を保っている瞬間に限り、非線形粘性に含有されている場合についても変形の色度を与えている。

Rice と Tracey[24] は、無限に大きい剛塑性体に含有されている空孔の周りの速度場に関する変分原理を導き、荷重の静水圧成分が大きい場合における球形の空孔の成長挙動を応力3軸度で整理した。このモデルは後に Le Roy [13]らにより楕円体の成長に拡張されている。

この様な空孔成長モデルを利用して破断歪を求めた例にMcClintock[25]のものがある。彼は、Bergの解析を利用し

- 1) 空孔は楕円形の断面を持つ柱状
- 2) 空孔相互の干渉が小さく、単一の空孔が無限体中に存在している場合の成長則が適用出来る
- 3) 破断は空孔が成長し、径が空孔の平均間隔に等しくなった場合に生ずる

なる仮定のもとに、破壊歪を導いている。この解析例で求められた破壊歪は、実際の金属材料のものよりも過大に見積もられていることが知られており、その原因が延性破壊の研究における一つの課題となっている。

こうした、空孔が相互干渉せずに成長することを仮定する手法とは対照的に、Thomason[26][27] は長方形で近似された空孔の列を考え、破面は荷重方向に伸びた空孔間の母相での不安定現象による微視的くびれの発生により形成されるとの仮定の下、破断歪を与えている。その際くびれの開始条件には、上界定理による Kudo[28]の解析結果を利用している。この様な仮定に基づく解析は、Melanderら[29]も行っている。これらの解析例ではくびれの開始条件を適切に設定することにより、実験と良く対応する破断歪を与えることが出

来る。しかし、微視的くびれの開始条件や空孔の初期形状における任意性について検討が必要であろう。

上記の例の他にも空孔の成長を解析した例も多数報告されている。Fleckら[30]はせん断帯における微視空孔の成長を、非線形粘性体に含有されている空孔の変形で近似し解析している。Michel と Suquet[31] は非線形粘性体に含有された円形空孔の成長を、静水圧引き張り荷重下で解析している。そして多孔質の構成関係を導き、同一の体積含有率の場合多数の小さな空孔の方が単一の大きな空孔よりも破壊に及ぼす影響が深刻であることを予想している。さらに Lee ら[32]は等軸楕円空孔を含有する非線形粘性体を解析し、空孔の形状が破壊に及ぼす影響について解析している。

有限要素法や境界要素法に代表される数値解析法の進歩に伴い、空孔の成長挙動を数値解析で調べる研究報告も増加する傾向にある。例えば、Andersson[33] は亀裂前方での空孔の挙動を数値的に解析している。また、Tvergaard[34][35] は、せん断帯の不安定現象等、McMeeking ら[36]は弾塑性体中の空孔の挙動を3次元問題として、それぞれ有限要素法を使用して解析している。さらに、井関ら[37]は2軸荷重下、岸本ら[38]は混合荷重下で、それぞれ空孔を含有する材料に対する、有限要素法による解析を行っている。また、富田ら[39]は歪速度依存性のある材料の、非可逆変形に伴う粘塑性仕事による熱発生と熱軟化を表現した構成関係を用い、亀裂前方に空孔がある場合の変形挙動を有限要素法で解析している。

### 1.2.3 微視空孔の体積含有率を尺度とした破壊基準の研究

微視空孔を含有する材料の力学特性を表現する際、個々の空孔では無く微視空孔の体積含有率に代表される、材料内部の損傷状態を尺度とする手法を用いる例も見られる。それらの中には材料の構成関係や降伏条件を導く際に、空孔周りの速度場について言及する例も見られる。

Gurson[40] は多孔質弾性体の降伏条件式を応力と空孔の体積含有率で整理し、多孔質の場合には応力の静水圧成分も降伏に寄与することを示したが、

その際空孔の成長に伴う歪場について言及している。長岐ら[41][42]も同様に、多孔質の降伏条件を求める際に空孔周囲の歪場を記述している。

村上ら[43]はクリープ損傷における微視空孔や亀裂を数学的にテンソルで表現し、一般の多孔質損傷体の力学を論ずる可能性について言及している。小林ら[44]はこの様な、空孔によるクリープ損傷に関する実験を行い微視空孔の数や大きさが歪とともに指数関数的に増加することを確認している。

Perzyna[45]は内部に欠陥のある、弾粘塑性体を解析している。その際微視空孔の体積含有率に関する変数を用いて多孔質体の構成関係を表現し実験データとの対応を調べ、材料の破壊条件を導いている。

以上の例の多くは寸法に関するパラメータを考慮しておらず、寸法効果が存在しないものとしてモデル化を行っている。しかし実験的にはディンプルの大きさや数密度については、荷重状態や第2相粒子の数密度、あるいは外部条件により一定の値が得られ、試験片のサイズには左右されないなどの寸法効果が知られており[15][16][46][47]、今後とも基礎的な研究を続ける必要性が認識される。

### 第1.3節 本研究の目的および論文構成

微視空孔の成長則、中でも1) 空孔の体積増加率2) 空孔の形状変化に関する理論面での、従来の研究では次の様な問題が指摘出来る。

1) 延性破壊における微視空孔の体積増加率については負荷応力の静水圧成分による影響が議論される傾向にあり、せん断成分のある多軸応力による影響に関する取り組みが手薄であった。また材料の応力-歪速度の構成関係を線形粘弾性の様に簡略化する解析例が多く、実際の材料の破壊とは食い違う結果がもたらされている懸念がある。

2) 空孔の形状変化についても議論の余地が残されている。特に応力-歪速度の構成関係が線形では無い場合、空孔の偏平が線形の場合とどの様に異なるものになるのか、これまで十分に明らかにされていない。空孔が負荷応力の主軸に対して垂直方向に偏平する場合には、空孔相互の結合が早期に行われ破壊が短時間で完結することが考えられる。これに対して負荷応力の主軸方向に偏平する場合には応力の集中が小さくなり、空孔の相互干渉も顕著には見られなくなる等、空孔の形状が破壊の形態を大きく左右する可能性があり、解明が待たれている。

そこで本研究では延性破壊における微視空孔の成長の過程に注目し、材料の歪速度に関する構成関係が、相当応力の指数乗と偏差応力の積で与えられる非線形性がある場合における、多軸応力下の空孔形状変化および体積増加を明らかにすることを目的に、図1.3-1に示す構成で研究を行う。

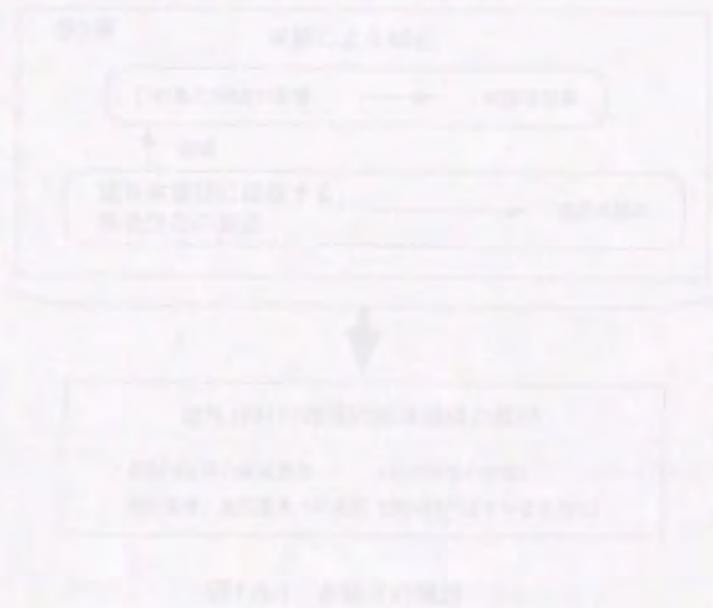
第2章では力学モデルを利用して、多軸応力下にある微視空孔の成長を解析する。その際図1.3-2および図1.3-3が示す様に、空孔の体積増加率と形状変化に焦点を合わせる。第2.2節では、剛粘塑性体で近似された材料に含有された、微視空孔の成長挙動を平面歪状態の場合についてモデル化する。その際空孔相互の干渉が十分に小さい場合を仮定し、流れの速度場を定めて、系のエネ

ルギー消費率を表現する。すると速度場が満たさなければならない条件式が得られる。これを空孔面にあてはめ、空孔の成長を記述する。

次に第2.3節では、空孔の間の領域での微視的くびれが発生する場合、空孔の成長挙動を考察する。その際、空孔は楕円形であり長短軸は遠方での荷重主軸と一致するものと仮定して解析を進め、空孔の縦横比に関する非線形微分方程式の分岐図を、荷重の3軸度と構成方程式の非線形項なる2つの媒介変数で整理する。さらに、このモデルを3次元等軸楕円体に拡張した場合についての解析を行う。

この様な理論的考察を踏まえ、第3章では図1.3-4に示す様、延性材料の破壊実験を行い微視空孔の成長挙動を解析する。その際実際に延性破壊が進行している材料の内部の様子を超音波検査法によって実時間的に観察することを試みる。

最後に第4章では、本研究活動を通しての結論を述べる。



# 微視空孔の成長機構

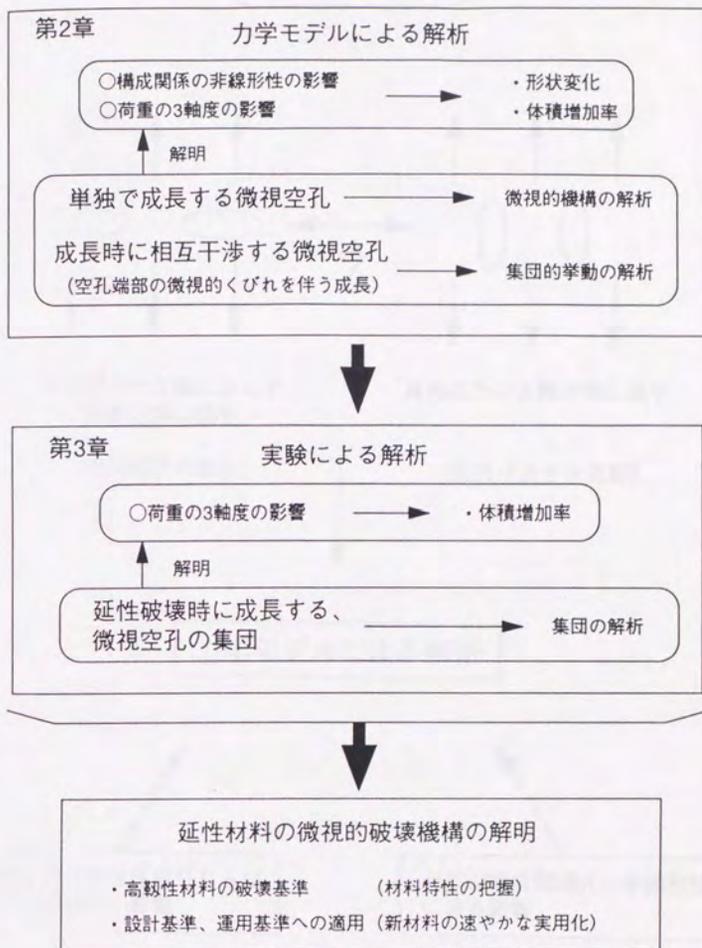
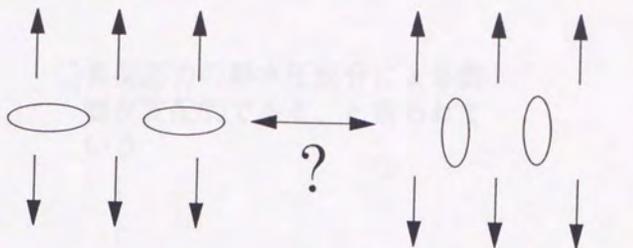


図1.3-1 本論文の構成

# 空孔の形状変化



負荷応力の主軸に対して  
垂直方向に扁平

(空孔相互の結合)

負荷応力の主軸方向に扁平

(延性が大きな変形)

## 力学モデルによる解析

負荷応力の静水圧成分ならび  
にせん断成分の影響

材料の構成関係式の非線形性  
による影響

図1.3-2 力学モデルによる、微視空孔形状の解析

空孔の体積増加率

○ 負荷応力の静水圧成分による影響が支配的である、と言われている

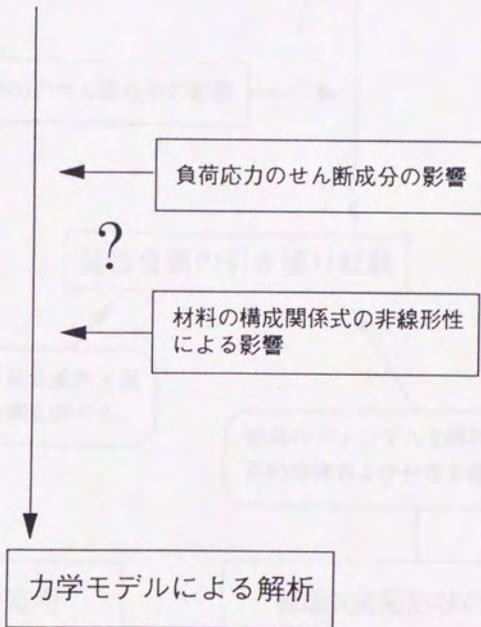


図1.3-3 力学モデルによる、微視空孔体積増加率の解析

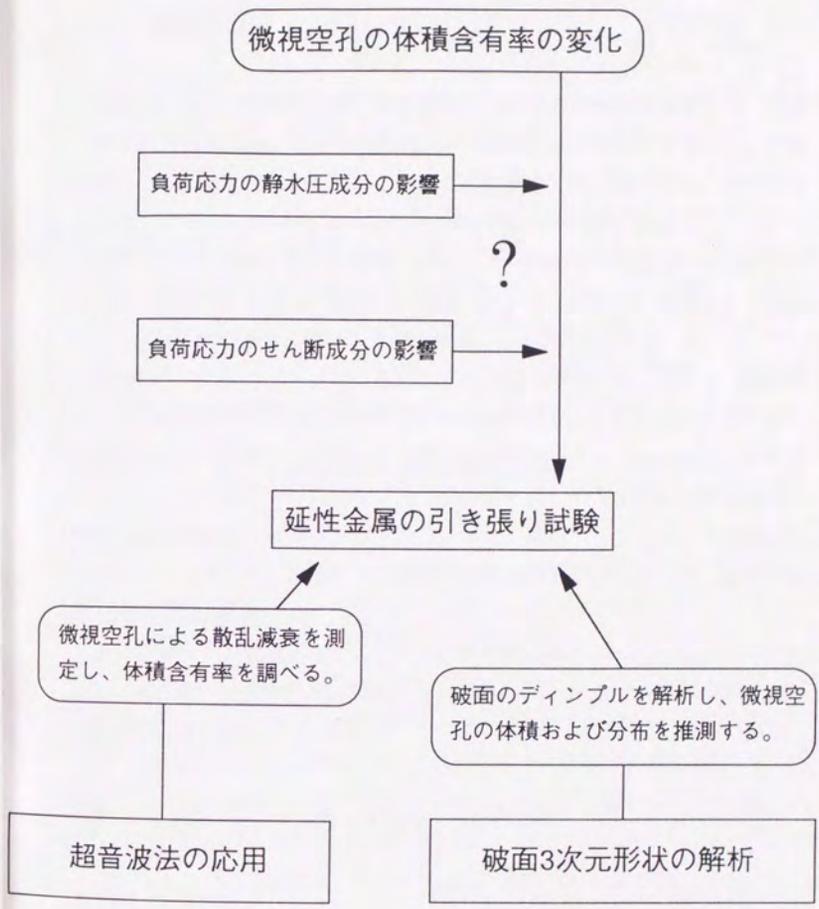


図1.3-4 引き張り試験による、空孔の解析

## 第2章 微視空孔の成長機構に対する、力学モデルを用いた研究

### 2.1.1 成長機構

微視空孔の成長機構は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の形成は、材料の内部に存在する欠陥や不純物に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。

空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。

空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。

空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dV}{d\epsilon} \dot{\epsilon}$$

### 2.1.2 成長条件

微視空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。空孔の成長は、材料の弾性変形と塑性変形、および空孔の形成と成長に起因する。

## 第2.1節 力学モデルの作成に関する考え方

### 2.1.1 構成関係式

微視空孔成長を解析する際に使用する、材料の構成関係を検討する。金属材料の構成関係には、転位の移動速度が荷重の指数乗に比例することとの対比から、その様な速度効果のあるものが提案されており[6][7][48]、本解析でも歪速度が相当応力 $\bar{\sigma}$ の指数乗に比例する、非線形粘弾性を考える。

さらに以下の考察を行い、弾性歪が0となる極限を考え塑性歪のみを解析する。これは材料の弾性定数を無限に大きく設定した場合に相当する。すなわち空孔成長の解析では、塑性域を剛粘塑性とみなすことにする。

構造材料の変形の解析に用いられる(歪増分法等の解析における)構成方程式は、通常歪速度(増分)が応力と歪状態の関数として与えられている。例えば加工硬化の項がある場合、歪の履歴が歪速度のパラメータの一つである。しかし、空孔の成長に伴う材料の塑性歪は著しく大きく、大変形問題の解析(大歪の構成方程式および形状の大変化の解析)を伴うため変形場の決定は著しく複雑である。そこで、歪速度が応力だけで決定される、簡潔な構成方程式を選択する。

以上を満足する構成関係として、次に示す剛粘塑性のものを選択する。これは、歪速度が相当応力 $\bar{\sigma}$ の指数乗と偏差応力 $\sigma'_{ij}$ との積で与えられる、非線形の構成関係である。

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \mu \cdot \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma} \sqrt{3}} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \right)^n, \quad d\epsilon_{ii} = 0 \quad (\mu, n \text{ は材料定数}) \quad \dots (2.1.1-1)$$

### 2.1.2 境界条件

微視空孔の発生・成長は材料の降伏、塑性変形の進行に伴うくびれの発生に引き続く過程である。そのため空孔の発生は、すでに著しく大きな塑性変

形が進行している領域の内部での現象であり、空孔の寸法に対して塑性領域は十分に大きいと考えられる。

以上の考察より、ここでは空孔の寸法に対して塑性域が無限に大きく、かつ無限遠方で一定荷重が負荷される場合を解析する。なお、空孔面は自由表面である。

### 2.1.3 解析方法

弾塑性問題の場合、構成方程式が弾性部では応力-歪関係が線形であり、塑性域の応力-歪速度関係についても線形であるならば（線形粘弾性であるならば）、線形弾性体の応力場解析の結果に対応原理を適用して、塑性域の変形場を記述することが出来る。また弾塑性問題の場合は通常、まず弾塑性境界での応力および歪の連続条件を表記し、エネルギー変分原理を適用した解析を行う。

しかしここでは剛粘塑性問題を考えており、歪速度が相当応力の指数乗と偏差応力との積で与えられる非線形の構成方程式を選択しているため、線形粘弾性における対応原理が成立しない。また、塑性域が剛粘塑性であり、塑性域の境界条件が無限遠方と空孔面で定義されているため弾塑性問題とは異なる解析法が求められる。そこで次の様に考えを進める。

まず空孔周りの速度場を、力学的に妥当な関数形で表記する。次に、この速度場と材料の応力-歪速度関係の構成関係式を用いて、材料が消費するエネルギーを記述する。さらに速度場を遠方で考え、負荷が行う仕事を記述する。材料が消費するエネルギーと、負荷の行う仕事と一致することから空孔周りの速度場が決定される（様々な関数形の中から、ある関数が決定される）。これを空孔面に適用すれば、空孔の変形速度を記述出来る。

以上の方法で、空孔の成長をモデル化する。この手法では、通常弾塑性解析で行われる手法とは異なり、力の釣り合い条件等は材料の各点で記述されず、各境界における条件のみを考えることになる。

## 2.1.4 空孔周りの速度場を与える関数形の検討

### 1) 単独の空孔が成長する場合

単独の空孔が成長する場合をとりあげ、空孔周囲の速度場を与える関数形を検討する。まず力学的に考えて、この速度場には不連続点や渦の発生、消滅等が無く、滑らかである。そのため関数形には滑らかなものが適当である。次に空孔を一回りする、任意の閉じた経路を考える。この経路を通り、空孔を一回りすると速度場は元に戻らなければならない。すなわち空孔を一回りする経路の上では、空孔周囲の速度場を与える関数は周期関数として振る舞うことになる。また、空孔周囲の速度場を与える関数は、空孔の内部から外部へと向かう放射状の経路の上では滑らかな関数として振る舞うことになる。そこでここでは、一般性を考え多項式による表記を試みる。

以上の考察を、空孔の形状が楕円である場合について深める。その際以下の楕円座標を使用する。

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - b^2} \cos \eta \cosh \xi \\ y = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \eta \sinh \xi \end{cases} \quad (a: \text{楕円の長軸}, b: \text{楕円の短軸}) \quad \dots (2.1.4-1)$$

空孔周囲の速度場を与える関数形は、 $\eta$ と $\xi$ をパラメータとする多項式で与えられる。空孔の形状と楕円座標の性質から、速度場を与える関数形は $\eta$ について周期関数であり、 $\xi$ について滑らかな関数である。そのため $\eta$ についてはフーリエ級数による表記が可能であり、 $\xi$ についてはテイラー級数による表記が可能である。すなわち $\eta$ をパラメータとするフーリエ級数と、 $\xi$ をパラメータとするテイラー級数との積で、空孔周囲の速度場を与える関数形を網羅することが出来る。

## 2) 空孔が複数存在する場合

空孔が複数存在する場合は、空孔周囲の速度場を網羅する関数形を与えることが實際上困難である。例えば、空孔を一回りする閉じた経路が別の空孔を横切る可能性がある等、空孔周りの速度場の周期性についての一般化に困難が伴う上に、個々の空孔自体が境界（自由表面）を与えるため、境界条件の設定も複雑であり困難を伴う。言うまでもなく、空孔相互が十分に離れている場合には単独の空孔の場合と同様の議論が可能である。しかし空孔が近接している場合には、空孔周囲の速度場を与える関数形に何らかの仮定を伴う解析を行う必要がある。そこで空孔面（自由表面）における速度場を与える、関数形に対する仮定を検討する。

線形粘弾性体中に単一の楕円空孔が存在する場合には、空孔面上の点は原点（楕円の長短軸の交点）を通る直線上を移動することが知られている [21][22][23]。剛粘塑性体の中に複数の楕円空孔が近接して存在する場合には、空孔面上の点が移動する道筋はより複雑である。しかし、空孔の間の領域でくびれが進行するに伴い、空孔面上の点が移動していく方向は、主荷重方向への傾斜を強める傾向を示すことが実験的に知られている。そこで、ここでは楕円空孔の端部近傍において、空孔面上の点が移動していく方向が面に直交する場合を仮定し、空孔が近接している場合の空孔面（楕円の端部近傍）の速度場を代表させる。

空孔面上の点が移動していく方向が面に直交すると仮定することは、必ずしも一般的ではなく、他の仮定に基づく速度場も可能なことも事実である。そのため今後他の解との比較検討が必要であるが、ここでは空孔の相互干渉を理解する一つの方法として解析を進めることにする。

以上の考え方にに基づき、第2.2節では、応力-歪速度の構成関係が非線形粘性で近似される材料に含有されている単一の楕円空孔周りの速度場を平面歪状態の場合について解析し、荷重状態と非線形性が及ぼす空孔の変形および体積増加率への影響について論じる。次に第2.3節では、空孔相互の干渉による端部の急速な変形を伴う場合を考察する。

## 第2.2節 剛粘塑性体に含有された、単一楕円空孔の成長機構

金属材料が延性破壊をする際に生ずる微視空孔の、成長におよぼす負荷応力の多軸性および材料の構成関係による影響を解析する。そのため次の仮定の下、空孔の成長をモデル化する。仮定の多くは第2.1節で既に説明済みであるが、モデル化の流れを示すため改めて表記する。

### 仮定

- ・微視空孔を含有している材料は、剛粘塑性体で近似される
- ・空孔は無限体中に単独で存在している
- ・平面歪状態を考える
- ・空孔面は自由表面である
- ・負荷は遠方で一様に与える
- ・負荷応力の主軸は、楕円空孔の主軸に一致する
- ・空孔の形状は真円に近い楕円である

延性材料の構成方程式には様々なものが提案されているが、結晶材料の場合、転位の運動との関連から、荷重の指数乗の項を持つものがしばしば提案される[6][7][48]。ここでは、その様な項を持つ最も簡潔な構成関係である、歪速度が相当応力 $\bar{\sigma}$ の指数乗と偏差応力 $\sigma'_{ij}$ との積で与えられる非線形剛粘塑性のものを考えることにする。

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \mu \cdot \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma} \sqrt{3}} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \right)^n, \quad d\epsilon_{ii} = 0 \quad \dots (2.2-1)$$

図2.2-1に示す様に、直交座標系 $(x,y)$ の原点が空孔の中心と一致し、長短軸 $(a,b)$ がそれぞれ $(x,y)$ 軸上になる様に楕円形の空孔を配置する。 $a$ は楕円空孔の長軸、 $b$ は短軸である。遠方での負荷応力は $x$ 方向に $p$ 、 $y$ 方向に $q$ 、ただし $q \geq p$ とする。また、材料上の点の $(x,y)$ 方向の速度

成分をそれぞれ $(u, v)$ とする。

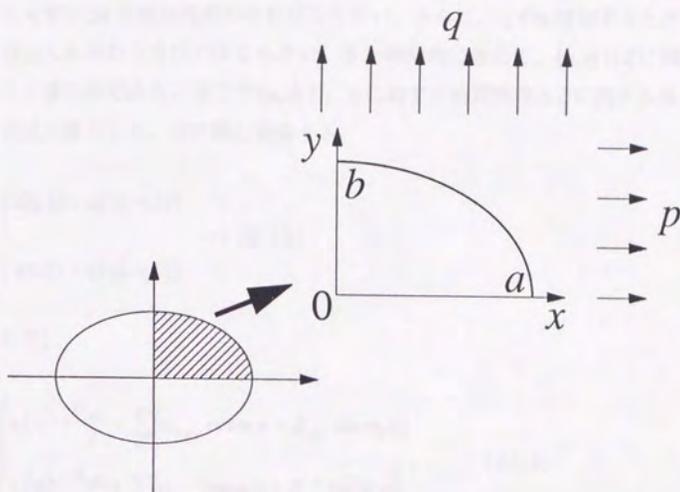


図2.2-1 楕円空孔 (対称性から1/4部を示す)

ここで一般性および簡便性を考え、次の様に無次元量を定義する。

- ・無次元化応力  $\Sigma_{ij}$  :  $\Sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_m^{\infty}}$ 、 $\sigma_m^{\infty}$ は遠方での平均応力  $\frac{p+q}{2}$
- ・無次元軸長  $a_n$ 、 $b_n$  :  $a_n = \frac{a}{\sqrt{\pi a_0 b_0}}$ 、 $b_n = \frac{b}{\sqrt{\pi a_0 b_0}}$ 。添え字の0は初期状態を表わす
- ・無次元時間  $T$  :  $T = \mu \cdot (\sigma_m^{\infty})^n$

計算の便宜上、楕円座標 $(\eta, \xi)$ を次の様に定める。

$$\begin{cases} x = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \cos \eta \cosh \xi \\ y = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \sin \eta \sinh \xi \end{cases} \quad \dots (2.2-2)$$

空孔の形状と座標の性質から、 $(u, v)$  は  $\xi$  一定なる曲線上では、 $\eta$  に関して常に  $2\pi$  の周期性がなければならない。さらに、 $\eta$  が  $\pi$  増加すると正負が入れ替わらなければならない。また物理的に考えて、 $(u, v)$  は  $\xi$  に関して滑らかである。そこで  $(u, v)$  を、 $\eta$  に関する周期関数と  $\xi$  に関する多項式の積として、次の様に近似する。

$$\begin{cases} u(\eta, \xi) = u_1(\eta) \cdot u_2(\xi) \\ v(\eta, \xi) = v_1(\eta) \cdot v_2(\xi) \end{cases} \quad \dots (2.2-3)$$

ただし、

$$\begin{cases} u_1(\eta) = \frac{\alpha_{u_0}}{2} + \sum_{m_1} (\alpha_{u_{m_1}} \cos m_1 \eta + \beta_{u_{m_1}} \sin m_1 \eta) \\ v_1(\eta) = \frac{\alpha_{v_0}}{2} + \sum_{m_1} (\alpha_{v_{m_1}} \cos m_1 \eta + \beta_{v_{m_1}} \sin m_1 \eta) \end{cases}, \quad \dots (2.2-4)$$

$$\begin{cases} u_2(\xi) = \sum_{m_2} \gamma_{u_{m_2}} \cdot \xi^{m_2} \\ v_2(\xi) = \sum_{m_2} \gamma_{v_{m_2}} \cdot \xi^{m_2} \end{cases} \quad \dots (2.2-5)$$

( $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  : 定数) である。

式 (2.2-3) は次に示す非圧縮性の条件式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad \dots (2.2-6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

さらに、無限遠方での速度場の勾配は有限確定値を持つものとする。これは遠方での荷重が一定であることに相当する。

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi \rightarrow \infty} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx}\right)_{\xi \rightarrow \infty} = \text{Const.} \\ \left(\frac{du}{dy}\right)_{\xi \rightarrow \infty} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dy}\right)_{\xi \rightarrow \infty} = \text{Const.} \\ \left(\frac{dv}{dx}\right)_{\xi \rightarrow \infty} &= \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx}\right)_{\xi \rightarrow \infty} = \text{Const.} \\ \left(\frac{dv}{dy}\right)_{\xi \rightarrow \infty} &= \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dy}\right)_{\xi \rightarrow \infty} = \text{Const.} \end{aligned} \quad \dots (2.2-7)$$

式 (2.2-3) ~ (2.2-5) を式 (2.2-6)、(2.2-7) に代入する。ただし、式 (2.2-2) より得られる次の関係を利用する。

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \frac{-1}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \cdot \frac{\sin \eta \cosh \xi}{(\sin \eta \cosh \xi)^2 + (\cos \eta \sinh \xi)^2} \\ \frac{d\xi}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \cdot \frac{\cos \eta \sinh \xi}{(\sin \eta \cosh \xi)^2 + (\cos \eta \sinh \xi)^2} \\ \frac{d\eta}{dy} &= \frac{1}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \cdot \frac{\cos \eta \sinh \xi}{(\sin \eta \cosh \xi)^2 + (\cos \eta \sinh \xi)^2} \\ \frac{d\xi}{dy} &= \frac{1}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \cdot \frac{\sin \eta \cosh \xi}{(\sin \eta \cosh \xi)^2 + (\cos \eta \sinh \xi)^2} \end{aligned} \quad \dots (2.2-8)$$

その結果、式 (2.2-3) ~ (2.2-5) における定数が規定され、次の様な速度場が与えられる。

$$\begin{aligned} u(\eta, \xi) &= c_1 \cos \eta \cosh \xi + c_2 \cos \eta \sinh \xi \\ &\quad + c_3 \sin \eta \cosh \xi + c_4 \sin \eta \sinh \xi \\ v(\eta, \xi) &= c_5 \cos \eta \cosh \xi + c_6 \cos \eta \sinh \xi \\ &\quad - c_7 \sin \eta \cosh \xi - c_8 \sin \eta \sinh \xi \end{aligned} \quad \dots (2.2-9)$$

この時遠方での歪速度場を、次の様に定めることができる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right)_{\xi \rightarrow \infty} &= \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \\ \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} \right)_{\xi \rightarrow \infty} &= \frac{2c_3 + c_4 + c_5}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \quad \dots (2.2-10) \\ \left( \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right)_{\xi \rightarrow \infty} &= -\frac{c_1 + c_2}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \end{aligned}$$

ただし、遠方での回転  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\xi \rightarrow \infty}$  を0と与えるならば  $c_4 = c_5$  となる。  
以下の計算では  $c_4 = c_5$  とする。

材料が消費する塑性仕事を考える。空孔の周りのエネルギー消費率  $\frac{dW_{\text{Matrix}}}{dt} = \iint_x (\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}) dx dy$  は次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\text{Matrix}}}{dt} &= \iint_x (\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}) dx dy \quad \dots (2.2-11) \\ &= 2 \cdot \iint_x \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{n+1}{2n}} dx dy \end{aligned}$$

ただし、式の変形には構成方程式 (2.2-1) および次の関係

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots (2.2-12) \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} &= \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

を利用している。

式 (2.2-12) を  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ 、 $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$  なる領域にあてはめ、式 (2.2-9) を代入すると、次の関係が得られる。

$$\frac{dW_{\text{Matrix}}}{dt} = - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\left\{ \begin{array}{l} (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + c_4^2) \cos 2\eta + 2(c_1 c_3 - c_2 c_4) \sin 2\eta \\ -(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) \cosh 2\xi - 2(c_1 c_2 + c_3 c_4) \sinh 2\xi \end{array} \right\}^{\frac{n+1}{2n}}}{(a_n^2 - b_n^2)(\cos 2\eta - \cosh 2\xi)} \right] d\eta d\xi$$

$$\times (a_n^2 - b_n^2)(\cos 2\eta - \cosh 2\xi)$$

… (2.2-13)

ここで速度場の対称性を考えると  $c_3 = c_4 = 0$  となる。以下  $c_3 = c_4 = 0$  とする。

荷重が行う仕事率  $\frac{dW_{\text{Load}}}{dt}$  を考える。曲線  $\xi = \xi_1$  上で、 $(x, y)$  方向にそれぞれ  $(p, q)$  なる荷重を負荷する。これは  $\xi_1 \rightarrow \infty$  なる極限を与える時、遠方で一様な荷重を座標軸に平行に負荷した場合に相当する。この時荷重が行う仕事率  $\frac{dW_{\text{Load}}}{dt} = \int_{\xi=\xi_1} (u \cdot p dx + v \cdot q dy)$  は次の様に与えられる。

$$\frac{dW_{\text{Load}}}{dt} = \int_{\xi=\xi_1} (u \cdot p dx + v \cdot q dy)$$

$$= \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \int_{\xi=\xi_1} \left\{ \begin{array}{l} p \cdot \cos^2 \eta \sinh \xi (c_1 \cosh \xi + c_2 \sinh \xi) \\ -q \cdot \sin^2 \eta \cosh \xi (c_2 \cosh \xi + c_1 \sinh \xi) \end{array} \right\} d\eta$$

$$= \frac{\pi \sqrt{a_n^2 - b_n^2}}{2} \{ c_1 \sinh 2\xi_1 (p - q) + c_2 \cosh 2\xi_1 (p - q) - c_2 (p + q) \}$$

… (2.2-14)

ただし、式 (2.2-9) を代入して式変形を行っている。

$\frac{dW_{Load}}{dt} = \frac{dW_{Matrix}}{dt}$ であることから次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}
 & -\int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\{ (c_1^2 - c_2^2) \cos 2\eta - (c_1^2 + c_2^2) \cosh 2\xi - 2c_1 c_2 \sinh 2\xi \}^{\frac{n+1}{2n}}}{(a_n^2 - b_n^2) (\cos 2\eta - \cosh 2\xi)} \right] d\eta d\xi \\
 & \quad \times (a_n^2 - b_n^2) (\cos 2\eta - \cosh 2\xi) \\
 & = \frac{\pi \sqrt{a_n^2 - b_n^2}}{2} \{ c_1 \sinh 2\xi_0 (p-q) + c_2 \cosh 2\xi_0 (p-q) - c_2 (p+q) \}
 \end{aligned}$$

… (2.2-15)

定数 $c_1$ と $c_2$ は、式(2.2-15)を $\xi_1 \rightarrow \infty$ なる極限で与え、また式(2.2-1)および式(2.2-10)より得られる次の関係

$$\left( \frac{p-q}{2} \right)^n = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \quad \dots (2.2-16)$$

を使って決定される。構成方程式が線形すなわち $n=1$ の場合、式(2.2-15)は積分可能であり、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\alpha + \beta(a_n - b_n)^2 + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta(a_n - b_n)^2 + \beta^2(a_n - b_n)^2}}{2(a_n - b_n)^2} \\
 c_2 &= \frac{-\alpha + \beta(a_n - b_n)^2 - \sqrt{4a_n b_n \beta^2 (a_n - b_n)^2 + \{\alpha - \beta(a_n - b_n)^2\}^2}}{2(a_n - b_n)^2} \\
 & \dots (2.2-17)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}(a_n^2 - b_n^2)^{\frac{3}{2}}(p+q) \\ \beta = \frac{1}{2}(a_n^2 - b_n^2)^{\frac{1}{2}}(p-q) \end{cases} \quad \dots (2.2-18)$$

構成方程式が線形ではない、すなわち  $n > 1$  の場合、式 (2.2-15) の積分を与える一般的な解法は知られていない。しかし空孔が十分円に近い場合には、 $\xi$  に関する1次近似を考えて得られる次の関係 (2.2-19) より、定数  $c_1$  と  $c_2$  を近似することが出来る。

$$\begin{cases} \left( c_1^2 + c_2^2 + \frac{4a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2} \cdot c_1 c_2 \right)^{\frac{n+1}{2n}} = f c_2 \\ c_1 + c_2 = g \\ f = \frac{(a_n^2 - b_n^2)^{\frac{2n+1}{2n}}}{2(a_n^2 + b_n^2)} \\ g = -(a_n^2 - b_n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\sum_m}{\bar{\Sigma}} \right)^{-n} \end{cases} \quad \dots (2.2-19)$$

ただし荷重成分  $p+q$ 、 $p-q$  について、理解を容易にするため応力3軸度  $\frac{\sum_m}{\bar{\Sigma}}$  を使った表記を使用している。応力3軸度  $\frac{\sum_m}{\bar{\Sigma}}$  は平均応力  $\bar{\Sigma}_m$  と相当応力  $\bar{\Sigma}$  の比で定義され、値が小さければせん断成分が大きな場合に相当し、値が大きければ静水圧成分が大きな場合に相当する。

定数  $c_1$  と  $c_2$  を定め、式 (2.2-9) に代入すれば空孔の周りの速度場が決定される。空孔自体の成長を記述するためには、 $\xi = \xi_0$  として空孔面の速度を考えれば良い。空孔長短軸の速度  $\frac{da_n}{dT}$ 、 $\frac{db_n}{dT}$  は次の様に与えられる。

$$\begin{cases} \frac{da_n}{dT} = \frac{c_1 b_n + c_2 a_n}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \\ \frac{db_n}{dT} = -\frac{c_1 a_n + c_2 b_n}{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}} \end{cases} \quad \dots (2.2-20)$$

式 (2.2-20) に式 (2.2-19) で近似された定数を代入し、空孔の縦横比

の変化率  $\left(\frac{da_n}{dT}\right) \cdot \left(\frac{db_n}{dT}\right)^{-1}$  および体積増加率  $\left(\frac{dS}{dT}\right) \cdot T^{-1}$  を与えた例を、図 2.2-2 ~ 2.2-4 に示す。ただし、 $S = \pi a_n b_n$  は空孔の体積である。

空孔の形状変化の図 2.2-2 (a) ~ 2.2-4 (a) より空孔には、荷重方向に成長していく傾向があることを読み取ることが出来る。しかし  $n$  の値を大きく設定し、歪速度が相当応力の指数乗と偏差応力との積で与えられる場合の非線形性を増すにつれて、形状の変化率は鈍化する傾向を示す。また、体積増加の図 2.2-2 (b) ~ 2.2-4 (b) より、荷重のせん断成分は、空孔の体積増加率にあまり影響しないことを読み取ることが出来る。これは  $n$  の値を大きく設定し、歪速度が相当応力の指数乗と偏差応力との積で与えられる場合の非線形性を増すにつれて、より顕著に読み取ることが出来る様になる。

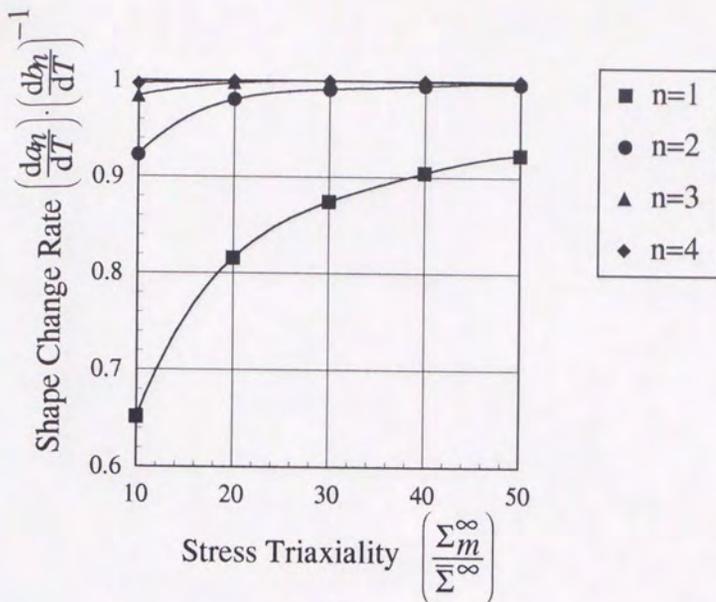
以上をまとめる。

○空孔は荷重方向に成長する。

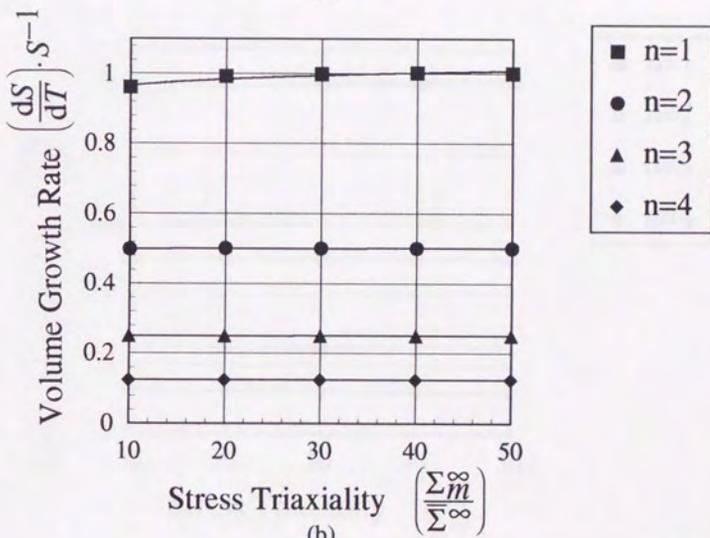
○材料の歪速度が相当応力の指数乗と偏差応力との積で与えられる場合の非線形性を増すにつれて、空孔形状の変化率は小さくなり円に近い形を保つ傾向が見られる。

○空孔の体積増加率は荷重の静水圧成分に大きく影響され、せん断成分による影響は顕著では無い。この傾向は材料の歪速度が相当応力の指数乗と偏差応力との積で与えられる場合の非線形性を増すにつれて、より明確になる。

○空孔の初期形状が及ぼす、体積増加率および形状の変化率への影響は顕著では無い。この傾向は、材料の歪速度が相当応力の指数乗と偏差応力との積で与えられる場合の非線形性を増すにつれて、より明確になる。

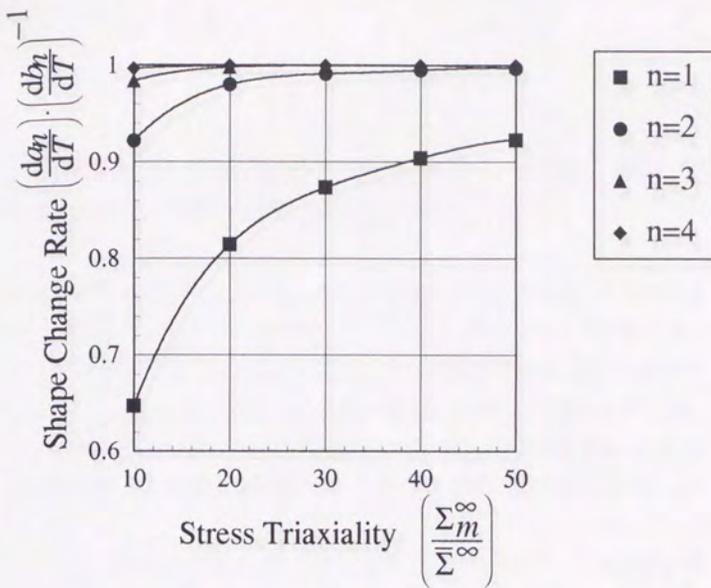


(a)

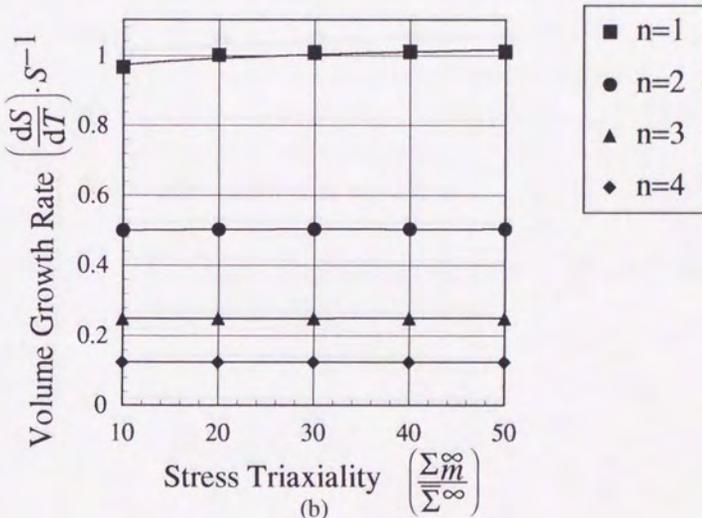


(b)

図2.2-2 微視空孔の成長 ( $a_n : b_n = 10 : 9$ )

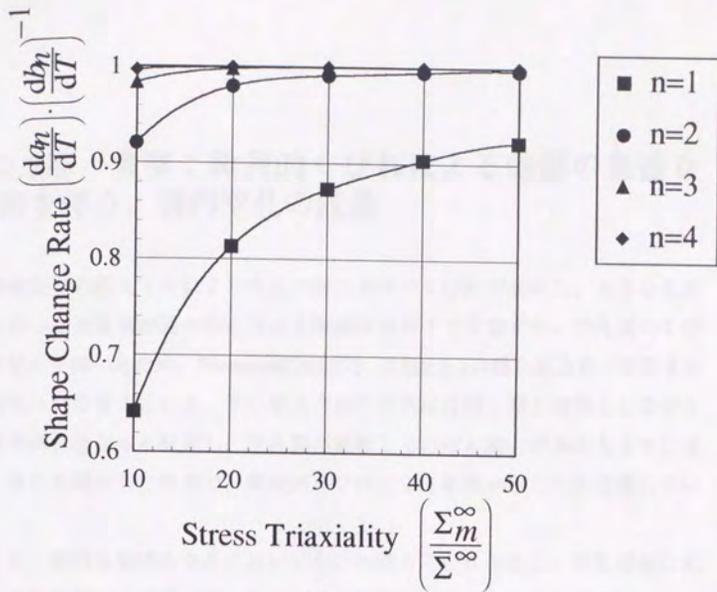


(a)

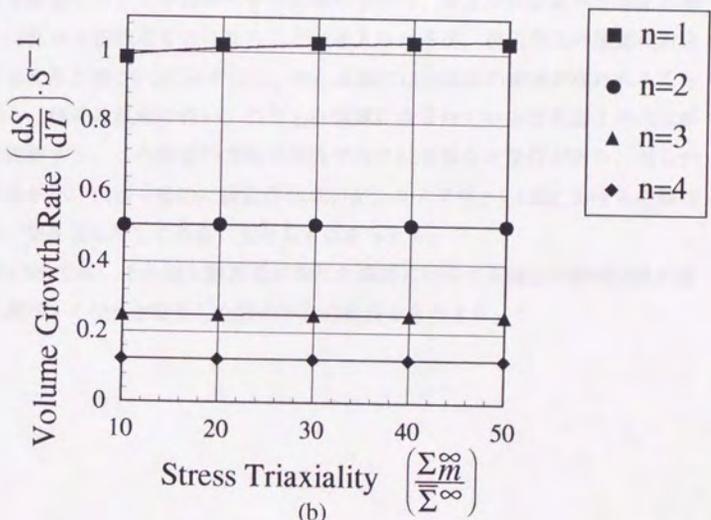


(b)

図2.2-3 微視空孔の成長 ( $a_n : b_n = 5:4$ )



(a)



(b)

図2.2-4 微視空孔の成長 ( $a_n : b_n = 10 : 7$ )

### 第2.3節 考察：微視的くびれによる端部の急速な変形を伴う、楕円空孔の成長

微視空孔の相互干渉により空孔の間の領域のくびれが発生し、大きな歪速度を持つ変形領域が現われた場合を平面歪条件下で考察する。空孔間のくびれの発生を調べるため、Thomason[26][27] は図2.3-1の様な長方形で近似された空孔の列を考えている。その際長方形の空孔は母相と同じ変形をしながら荷重方向に伸びると仮定し、空孔間の破線上でのせん断力がある大きさに達し、滑りを開始した時点で、微視的くびれによる破壊が生じたと定義している。

より一般的な形状の空孔においてもこの様なくびれが生じ、空孔端部に大きく塑性変形する領域が現われるが、本解析では空孔の形状が楕円形に近いことを仮定する。くびれが生ずる領域の形状は、長方形の空孔列を考える場合とは異なり複雑なものになることが考えられるが、楕円空孔の端部に限定して考えると図2.3-2に示す様に、空孔端部には円弧状の領域が現われることになる。空孔の成長に伴い、こうした領域に含まれている空孔面上の点は移動を開始する。この移動の道筋は幾何学的には多様な可能性があり、何らかの条件がなければ一意的に決定されないが、ここでは2.1.4節における考察により、空孔面に対して垂直に交わるものを与える。

第2.3節では、その様な膨張場が空孔の端部に存在する場合の微視空孔の変形を調べ、くびれが発生した後の空孔の成長を考察する。

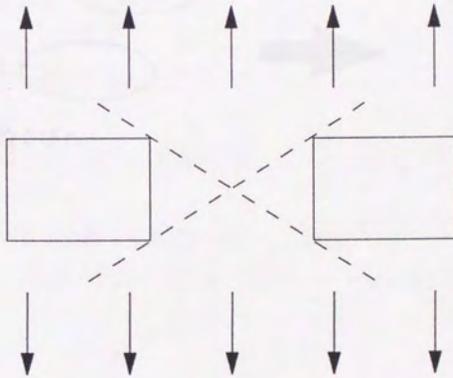
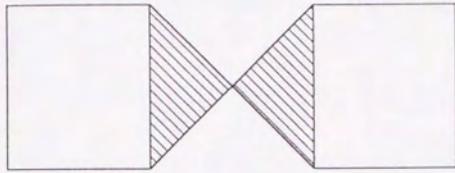


図2.3-1 長方形空孔における、微視的くびれ

### 2.3.3 微視的くびれ

図2.3-2の図で、表面のくびれによる空孔の形成が示されています。表面のくびれが深くなると、くびれの間に空孔が形成され、空孔の成長が促進されます。これは、表面のくびれが深くなるにつれて、くびれの間に空孔が形成され、空孔の成長が促進されることを示しています。

#### 図説

図2.3-2の図で、表面のくびれによる空孔の形成が示されています。表面のくびれが深くなると、くびれの間に空孔が形成され、空孔の成長が促進されます。これは、表面のくびれが深くなるにつれて、くびれの間に空孔が形成され、空孔の成長が促進されることを示しています。

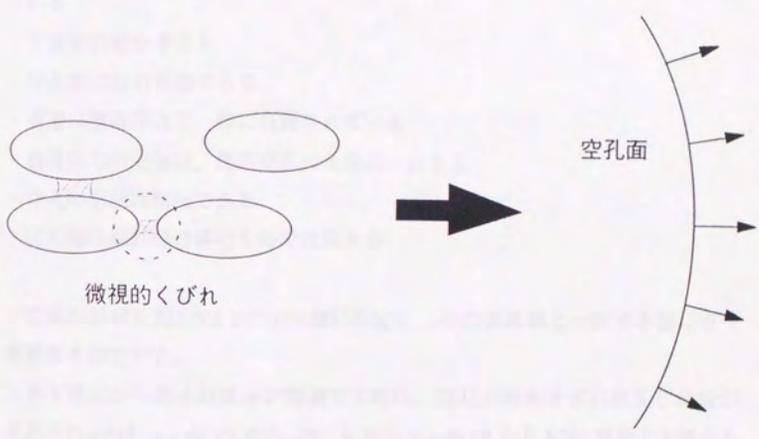


図2.3-2 楕円空孔における、微視的くびれ

### 2.3.1 2次元モデル

楕円空孔の端部で、微視的くびれによる変形領域が現われた場合を解析する。そのため次の仮定の下、空孔の成長をモデル化する。仮定の多くは第2.1節で既に説明済みであるが、モデル化の流れを示すため再び表記する。

#### 仮定

- ・変形領域における構成関係は、剛粘塑性で近似される
- ・微視的くびれにより、空孔端部に大きな変形速度を持った領域が存在している
- ・平面歪状態を考える
- ・空孔面は自由表面である
- ・荷重は無限遠方で一様に負荷されている
- ・負荷応力の主軸は、楕円空孔の主軸に一致する
- ・空孔の形状は楕円である
- ・応力場は線形弾性体のもので近似する

空孔の形状を図2.3.1-1に示す様に仮定し、その長短軸と一致する様に直交座標系を設定する。

ある時点から微小時間  $dt$  が経過する時に、空孔が回転せずに成長し軸長がそれぞれ  $a$  から  $a+da$  ( $A$  から  $A'$ )、 $b$  から  $b+db$  ( $B$  から  $B'$ ) に増加する場合を考える。

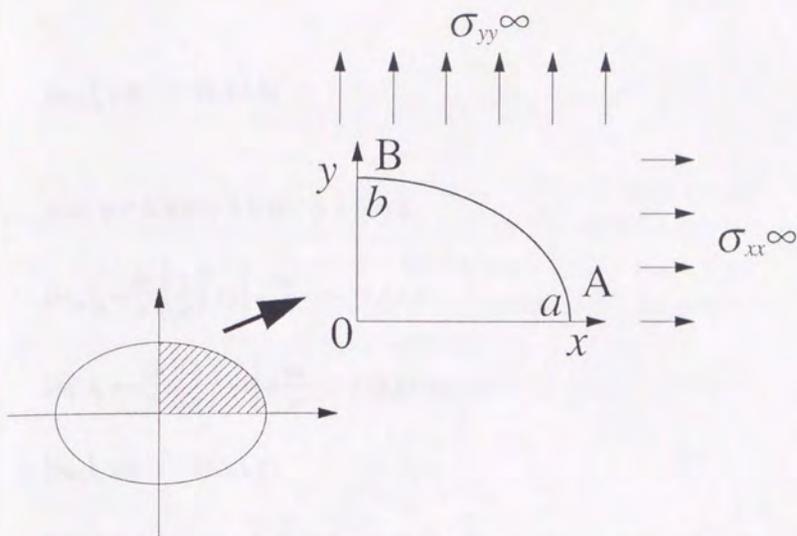


図2.3.1-1 楕円空孔 (対称性から1/4部を示す)

先に述べた様に、空孔面上の点は空孔に対して垂直に交わる道筋の上を移動すると考える。これは流れ場が空孔面に対して直交することを意味している。

この条件の下では点Aにおける歪増分場  $d\epsilon_{yy}$  は下記の様に、一意的に定まる。

$$\begin{aligned}
 (d\epsilon_{yy})_A &= \lim_{\overline{AP} \rightarrow 0} \frac{\overline{A'P} - \overline{AP}}{\overline{AP}} \\
 &= \frac{da}{a} \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{db}{b} \quad \dots (2.3.1-1)
 \end{aligned}$$

式2.3.1-1の導出は Appendix A1に記す。面に直交する成分  $d\epsilon_{xx}$  と面外成分  $d\epsilon_{zz}$  は以下の様に与えられる。

$$(d\epsilon_{xx})_A = -\frac{da}{a} \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right\} + \frac{db}{b} \quad \dots (2.3.1-2)$$

$$(d\epsilon_{zz})_A = 0 \quad \dots (2.3.1-3)$$

点Bにおける歪増分も同様に与えられる。

$$(d\epsilon_{xx})_B = \frac{db}{b} \left\{ \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{da}{a} \quad \dots (2.3.1-4)$$

$$(d\epsilon_{yy})_B = -\frac{db}{b} \left\{ \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 1 \right\} + \frac{da}{a} \quad \dots (2.3.1-5)$$

$$(d\epsilon_{zz})_B = 0 \quad \dots (2.3.1-6)$$

荷重条件としては、無限遠方での引張り応力  $\sigma_{xx}^\infty$ 、 $\sigma_{yy}^\infty$  および  $\sigma_{zz}^\infty$  ( $\sigma_{xx}^\infty \geq \sigma_{yy}^\infty$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = \sigma_{yz}^\infty = \sigma_{zx}^\infty = 0$ ) を仮定する。

空孔端部の領域は、剛粘塑性の構成方程式に従うものとする。

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \Gamma \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}/\sqrt{3}} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \right)^n, \quad d\epsilon_{ii} = 0 \quad \dots (2.3.1-7)$$

ただし、 $n$  と  $\Gamma$  は材料定数である。

先に与えられた点AおよびBにおける歪場は、この構成方程式で与えられる歪場に一致する。従って次の関係式が得られる。

$$\frac{da}{a} \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{db}{b} = \Gamma \frac{(\sigma'_{yy})_A}{(\bar{\sigma})_A/\sqrt{3}} \left( \frac{(\bar{\sigma})_A}{\sqrt{3}} \right)^n dt \quad \dots (2.3.1-8)$$

$$-\frac{da}{a} \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right\} + \frac{db}{b} = \Gamma \frac{(\sigma'_{xx})_A}{(\bar{\sigma})_A/\sqrt{3}} \left( \frac{(\bar{\sigma})_A}{\sqrt{3}} \right)^n dt \quad \dots (2.3.1-9)$$

$$\frac{db}{b} \left\{ \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{da}{a} = \Gamma \frac{(\sigma'_{xx})_B}{(\bar{\sigma})_B/\sqrt{3}} \left( \frac{(\bar{\sigma})_B}{\sqrt{3}} \right)^n dt \quad \dots (2.3.1-10)$$

$$-\frac{db}{b} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 1 \right] + \frac{da}{a} = \Gamma \frac{(\sigma'_{rr})_R}{(\bar{\sigma})_R / \sqrt{3}} \left( \frac{(\bar{\sigma})_R}{\sqrt{3}} \right)^n dr \quad \dots (2.3.1-11)$$

空孔の周りにおける応力場が与えられるならば、上記の関係式によって空孔の形状変化が微分方程式として記述されることになる。塑性場の応力状態は一般に数値解析を使い、エネルギー変分問題の解を導くことによって決定されるが、ここでは単一楕円空孔を含有している線形弾性体のもので見積り、上/下界定理的に歪場を与えて以下の解析を進める。

問題の一般性および簡便性を考慮し、解析に使用する変数の無次元化を以下の様に行う。

無次元化応力  $\Sigma_{ij}$  :

$$\Sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_m^\infty} \quad \dots (2.3.1-12) \text{、ただし、}\sigma_m^\infty \text{は遠方での平均応力である。}$$

無次元軸長 :

$$\begin{cases} a_n = \frac{a}{\sqrt{S_0}} \\ b_n = \frac{b}{\sqrt{S_0}} \end{cases} \quad \dots (2.3.1-13)$$

ただし、

$$S = \pi ab \quad \dots (2.3.1-14) \text{。}$$

なお、添え字の'0'は初期状態を表わす。

無次元時間 :

$$T = t \cdot \Gamma (\sigma_m^\infty)^n \quad \dots (2.3.1-15)$$

これらの無次元量を使い、構成方程式2.3.1-7を書き直す。

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dT} = \frac{\Sigma'_{ij}}{\Sigma/\sqrt{3}} \left( \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right)^n \quad \dots (2.3.1-16)$$

方程式2.3.1-8～2.3.1-11は無次元量  $a_n$  と  $b_n$  に関する連立方程式に書き直される。すなわち、軸長の増加率が次の様に記述される。

$$\frac{da_n}{dT} = \left( f \left( \frac{b_n}{a_n}, -\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} \right) + f \left( \frac{a_n}{b_n}, \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} \right) \times g \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \right) \times \frac{a_n}{g \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \times g \left( \frac{b_n}{a_n} \right) - 1}$$

… (2.3.1-17)

$$\frac{db_n}{dT} = \left( f \left( \frac{a_n}{b_n}, \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} \right) + f \left( \frac{b_n}{a_n}, -\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} \right) \times g \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \right) \times \frac{b_n}{g \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \times g \left( \frac{b_n}{a_n} \right) - 1}$$

… (2.3.1-18)

ただし、以下の定義を用いる。

$$f \left( \frac{a_n}{b_n}, \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} \right) = \text{sign} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3} \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}} \times \left( 1 + \frac{a_n}{b_n} \right) + \frac{a_n}{b_n} \right\} \times \left| \frac{1}{\sqrt{3} \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}} \times \left( 1 + \frac{a_n}{b_n} \right) + \frac{a_n}{b_n} \right|^n$$

… (2.3.1-19)

$$g \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + 1 \quad \dots (2.3.1-20)$$

$$\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} \quad \dots (2.3.1-21) : \text{遠方での応力3軸度}$$

同様に、空孔のアスペクトレシオ  $(a_n/b_n)$  に関しては次の様に記述される。

$$\begin{aligned}
& \frac{d\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{dT} \\
&= \frac{a_n}{b_n} \left[ f\left(\frac{a_n}{b_n}, \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}\right) \times \left\{ g\left(\frac{b_n}{a_n}\right) - 1 \right\} - f\left(\frac{b_n}{a_n}, -\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}\right) \times \left\{ g\left(\frac{a_n}{b_n}\right) - 1 \right\} \right] \\
&\times \frac{1}{g\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \times g\left(\frac{b_n}{a_n}\right) - 1} \quad \dots (2.3.1-22)
\end{aligned}$$

また、空孔の面積増加率  $dS_n/dT$  についても同様に、次の記述が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{dS_n}{dT} \\
&= \frac{d(\pi a_n b_n)}{dT} \\
&= S_n \left[ f\left(\frac{b_n}{a_n}, -\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}\right) \times \left\{ g\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + 1 \right\} + f\left(\frac{a_n}{b_n}, \frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}\right) \times \left\{ g\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + 1 \right\} \right] \\
&\times \frac{1}{g\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \times g\left(\frac{b_n}{a_n}\right) - 1} \quad \dots (2.3.1-23)
\end{aligned}$$

これらの連立微分方程式を初期値問題として数値解析する。その際遠方で与える荷重の応力 3 軸度、および構成方程式の指数  $n$  がパラメータとして用いられる。

### 2.3.2 3次元モデル

3次元解析では、Z軸を中心とする回転楕円体を空孔の形状に仮定する。その他は2次元モデルと同様の仮定を与える。図2.3.2-1に示す様、空孔のZ方向の軸長を $a$ 、回転半径方向の軸長を $b$ と表記する。

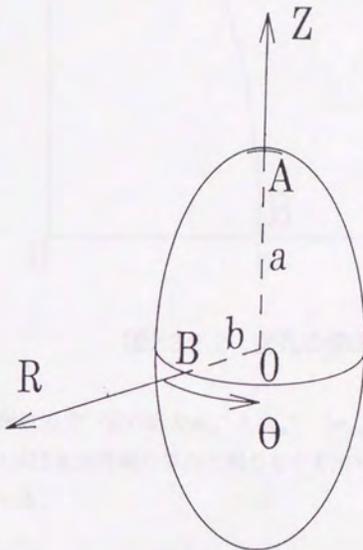


図2.3.2-1 3次元空孔の形状

RZ平面に投影された側面図を図2.3.2-2に示す。

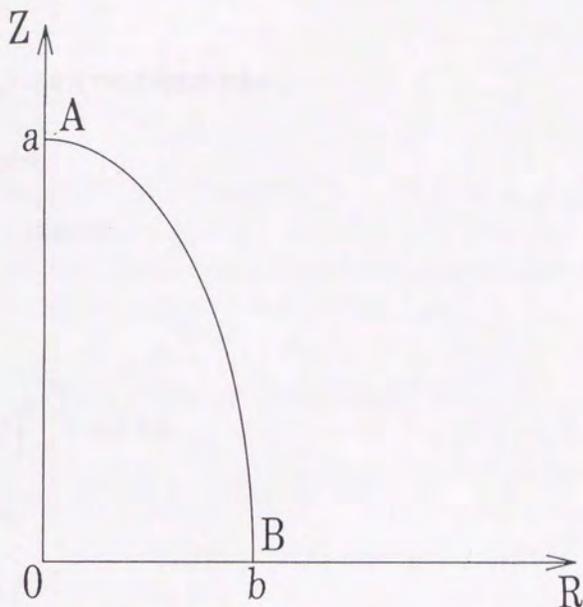


図2.3.2-2 空孔の側面図

荷重は無限遠方で一定の応力  $\sigma_{zz}^{\infty}$  と  $\sigma_{rr}^{\infty}$  ( $\sigma_{zz}^{\infty} \geq \sigma_{rr}^{\infty} \geq 0$ ) を仮定する。構成方程式には2次元問題の場合と同じものを用いる。しかし便宜上、異なる表記法を用いる。

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \Gamma' \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} (\bar{\sigma})^n, \quad de_{ii} = 0 \quad \dots (2.3.2-1)$$

ただし、 $\Gamma$  と  $n$  は材料定数である。また、 $\sigma'_{ij}$  は偏差応力テンソル、 $\bar{\sigma}$  は相当応力である。

無次元化を2次元問題の場合と同様に行う。

無次元化応力：

$$\Sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_m} \quad \dots (2.3.2-2)$$

ただし、 $\sigma_m^\infty$ は遠方での平均応力である。

軸長の無次元化：

$$\begin{cases} a_n = \frac{a}{L} \\ b_n = \frac{b}{L} \end{cases} \dots (2.3.2-3)$$

ただし、

$$L = \left( \frac{4}{3} \pi a_0 b_0^2 \right)^{\frac{1}{3}} \dots (2.3.2-4)$$

と定義する。

無次元時間：

$$T = t \times \Gamma (\sigma_m^\infty)^n \dots (2.3.2-5)$$

この時構成方程式2.3.2-1は次の様になる。

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dT} = \frac{\Sigma'_{ij}}{\Sigma} (\Sigma)^n, \quad d\epsilon_{ii} = 0 \quad \dots (2.3.2-6)$$

空孔の成長を、2次元問題の場合と同じ手法で解析する。空孔内面上の点A、Bにおける歪増分テンソルは、次の様に与えられる。

$$(d\epsilon_{RR})_A = \frac{da_n}{a_n} \left\{ \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{db_n}{b_n} \quad \dots (2.3.2-7)$$

$$(d\epsilon_{ZZ})_A = -2(d\epsilon_{RR})_A \quad \dots (2.3.2-8)$$

$$(d\epsilon_{\theta\theta})_A = \frac{db_n}{b_n} \quad \dots (2.3.2-9)$$

$$(d\varepsilon_{zz})_B = \frac{db_n}{b_n} \left\{ \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{da_n}{a_n} \quad \dots (2.3.2-10)$$

$$(d\varepsilon_{RR})_B = - \left\{ (d\varepsilon_{\theta\theta})_B + (d\varepsilon_{zz})_B \right\} \quad \dots (2.3.2-11)$$

上記の歪増分場は構成方程式によって決定される場と一致しなければならない。すなわち次の方程式が満たされなければならない。

$$\frac{da_n}{a_n} \left\{ \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{db_n}{b_n} = \frac{(\Sigma'_{RR})_A}{(\bar{\Sigma})_A} (\bar{\Sigma})_A^n dT \quad \dots (2.3.2-12)$$

$$-2 \left[ \frac{da_n}{a_n} \left\{ \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{db_n}{b_n} \right] = \frac{(\Sigma'_{zz})_A}{(\bar{\Sigma})_A} (\bar{\Sigma})_A^n dT \quad \dots (2.3.2-13)$$

$$\frac{db_n}{b_n} = \frac{(\Sigma'_{\theta\theta})_B}{(\bar{\Sigma})_B} (\bar{\Sigma})_B^n dT \quad \dots (2.3.2-14)$$

$$\frac{db_n}{b_n} \left\{ \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 + 1 \right\} - \frac{da_n}{a_n} = \frac{(\Sigma'_{zz})_B}{(\bar{\Sigma})_B} (\bar{\Sigma})_B^n dT \quad \dots (2.3.2-15)$$

応力場に関しては2次元問題の場合と同様、線形弾性体のもので見積もる。すると空孔の成長は、次の連立微分方程式で記述される。

$$\frac{da_n}{dT} = \frac{\left\{ \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 + 1 \right\} \frac{(\Sigma'_{\theta\theta})_A}{(\bar{\Sigma})_A} (\bar{\Sigma})_A^n + \frac{(\Sigma'_{zz})_B}{(\bar{\Sigma})_B} (\bar{\Sigma})_B^n}{1 + \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 + \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2} \cdot a_n \quad \dots (2.3.2-16)$$

$$\frac{db_n}{dT} = \frac{\frac{(\Sigma'_{\theta\theta})_A}{(\bar{\Sigma})_A} (\bar{\Sigma})_A^n + \left\{ \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + 1 \right\} \frac{(\Sigma'_{zz})_B}{(\bar{\Sigma})_B} (\bar{\Sigma})_B^n}{1 + \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 + \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^2} \cdot b_n \quad \dots (2.3.2-17)$$

### 2.3.3 考察

図2.3.3-1～2.3.3-4に2次元モデル、図2.3.3-5～2.3.3-8に3次元モデルの解析例を示す。図2.3.3-1は、初期形状を円で与えられた空孔が成長する様子を時間を追って示したものである。図2.3.3-2は空孔の体積変化、図2.3.3-3および図2.3.3-4は空孔の形状変化を、それぞれグラフ化したものである。図2.3.3-5(a)～(c)は、成長途上にある3次元空孔の外観を表わしたものである。図2.3.3-6、2.3.3-7は3次元空孔の形状変化を調べるため、様々な初期形状を与えた例である。また、図2.3.3-8は空孔の形状変化に及ぼす、材料の構成関係の影響を調べた例である。これらの解析結果より、構成方程式の指数 $n$ が大きな場合には、空孔は荷重方向に対して垂直方向に成長するが、指数 $n$ の値が小さくなるにつれて、より丸みを帯びた形になることを読み取ることが出来る。

空孔形状についてより議論を深めるため、2次元モデルを考察する。空孔のアスペクトレシオ  $\frac{a_n}{b_n}$  が一定の値を保つ条件は、式(2.3.1-22)において  $\frac{d\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{dT} = 0$  となることであり、これを応力3軸度  $\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty}$  について整理すると、次の関係が与えられる。

$$\frac{\Sigma_m^\infty}{\Sigma^\infty} = \frac{1}{\sqrt{3} \frac{b_n}{a_n}} \cdot \frac{\left(\frac{b_n}{a_n} + 1\right) \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{4}{n-1}} + 1 \right\}}{1 - \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{4}{n-2}}} \quad \dots (2.3.3-1)$$

この式で表わされる曲線を図2.3.3-9に示す。図2.3.3-9(a)は指数 $n$ の値を様々な設定した例である。また、図2.3.3-9(b)、(c)、(d)は空孔のアスペクトレシオ  $\frac{a_n}{b_n}$  の変化に対応している。図2.3.3-9(b)、(c)は指数 $n$ の値を小さく設定した例である。図2.3.3-9(b)、(c)に示された曲線の上側の領域は  $d\left(\frac{a_n}{b_n}\right) < 0$  なる場合に対応しており、アスペクトレシオ  $\frac{a_n}{b_n}$  は減少することになる。また、曲線の下側の

領域では  $d\left(\frac{a_n}{b_n}\right) > 0$  となることからアスペクトレシオ  $\frac{a_n}{b_n}$  が増加する傾向が見られることがわかる。この領域においては、応力 3 軸度の値が図 2.3.3-9(c) に示す  $St_{min}$  よりも大きい場合、空孔のアスペクトレシオ  $\frac{a_n}{b_n}$  がある値に収束していくことがわかる。しかしながら応力 3 軸度の値が  $St_{min}$  よりも小さいならば、 $\frac{a_n}{b_n}$  が発散し、空孔は荷重方向に伸びた形に変形していく。この様な解の分岐は図 2.3.3-9(a) に示される様に、 $n=2$  を境界にして  $n$  が小さい場合に生ずる。

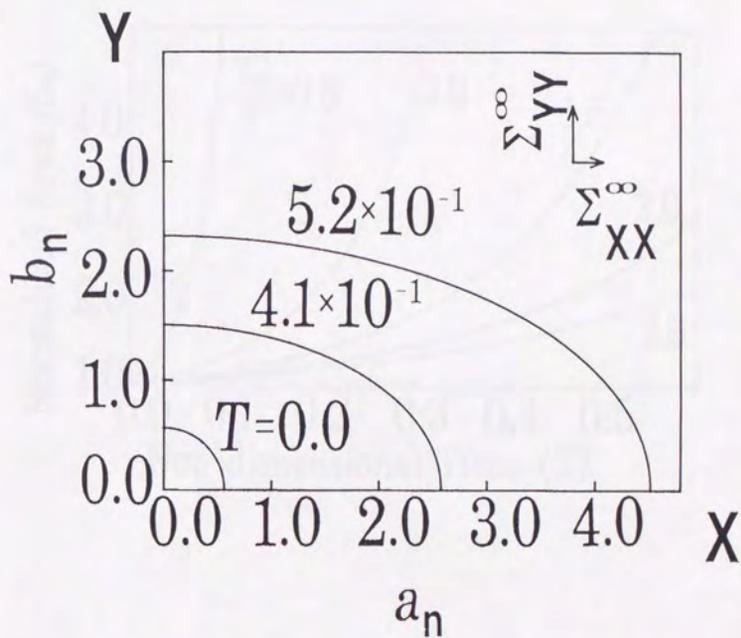


図 2.3.3-1 2次元楕円空孔の成長  $\left( n=3.0, \frac{\sum_m^{\infty}}{\sum^{\infty}} = 2.0 \right)$

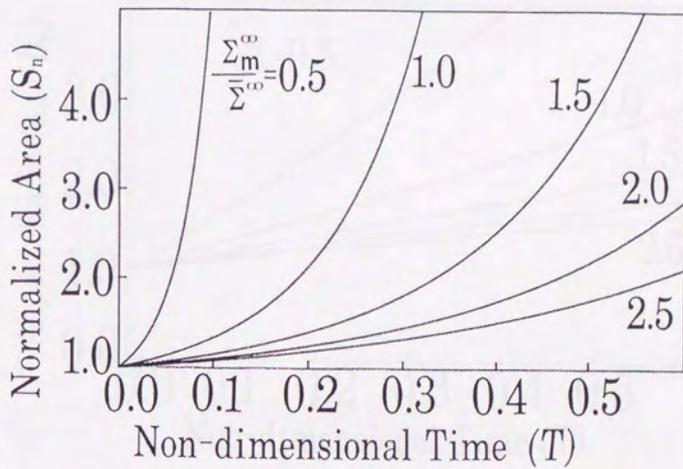


図2.3.3-2 2次元楕円空孔の体積（面積）増加 ( $n=3.0$ )

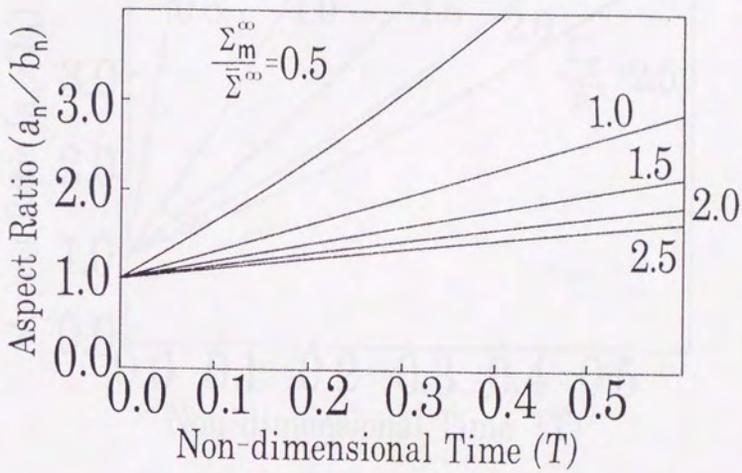


図2.3.3-3 2次元楕円空孔の形状変化 ( $n=1.0$ )

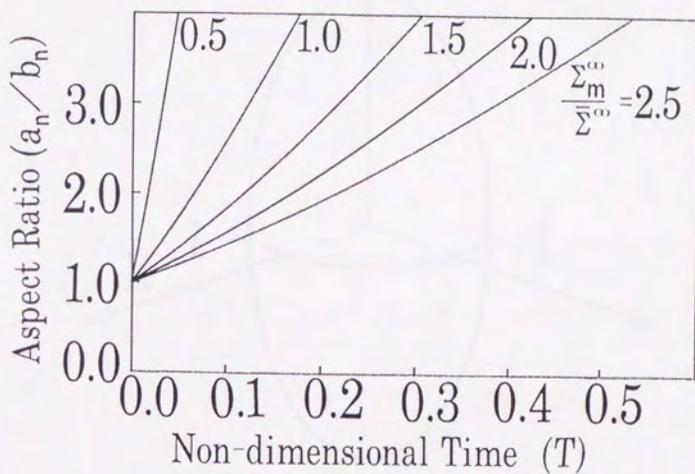


図2.3.3-4 2次元楕円空孔の形状変化 ( $n=3.0$ )

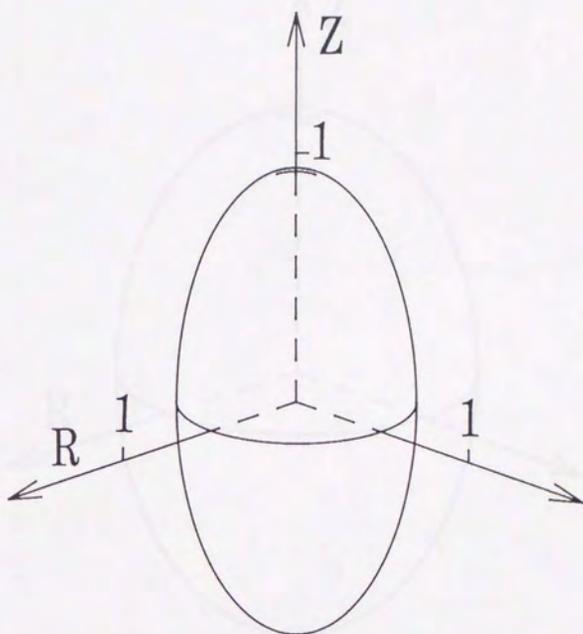


図2.3.3-5 (a) 3次元楕円空孔の成長、初期形状  
 $\left( n=1.0, \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \dots}{\sum_{m=1}^{\infty} \dots} = 1.0, T=0.0 \right)$

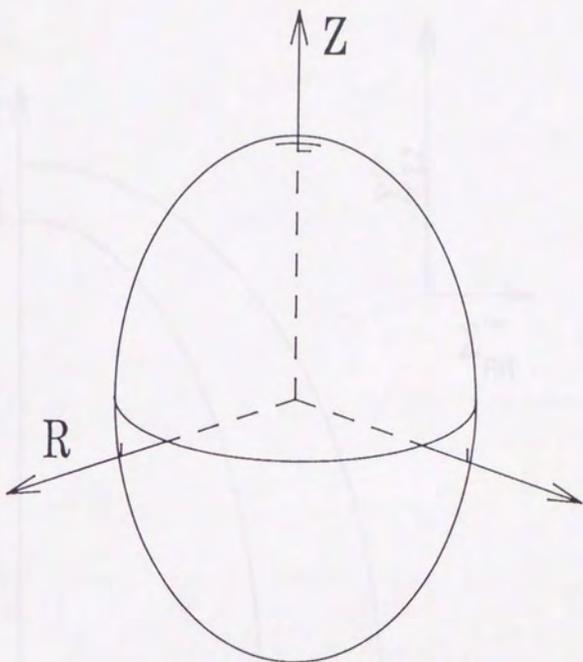


図2.3.3-5 (b) 3次元楕円空孔の成長、成長途上

$$\left( n=1.0, \frac{\sum_m^{\infty}}{\Sigma} = 1.0, T=0.5 \right)$$

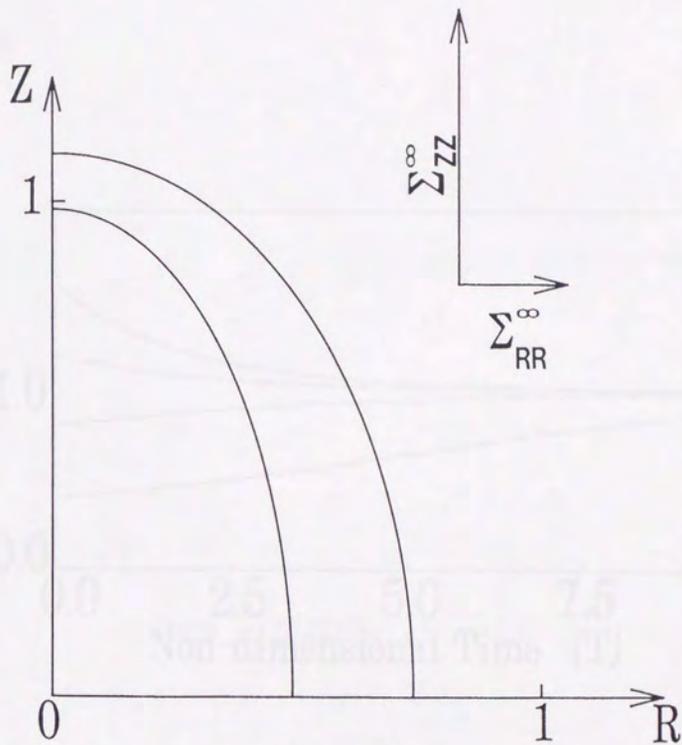


図2.3.3-5 (c) 3次元楕円空孔の成長、(a) (b) の側面図

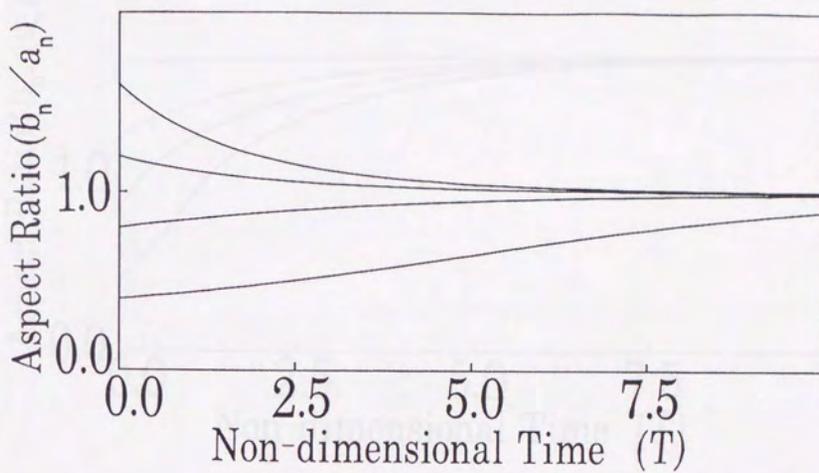


図2.3.3-6 3次元楕円空孔の形状変化  $\left( n=1.0, \frac{\Sigma_n}{\Sigma} \rightarrow \infty \right)$

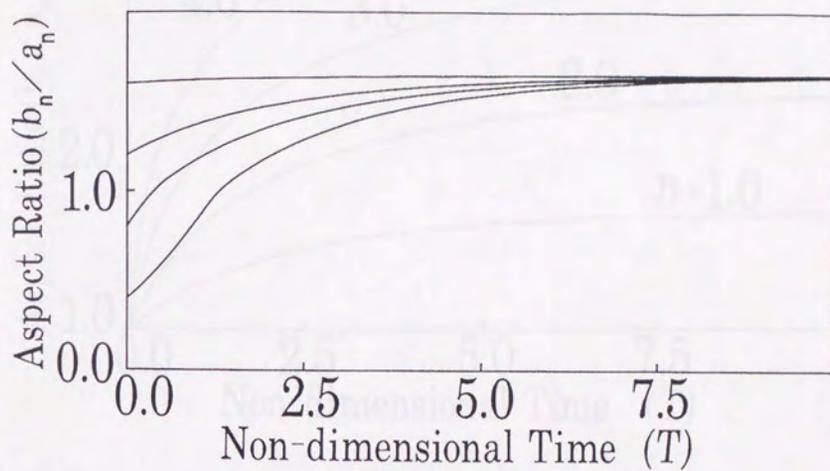


図2.3.3-7 3次元楕円空孔の形状変化  $\left( n=1.0, \frac{\Sigma_n}{\Sigma} = 1.0 \right)$

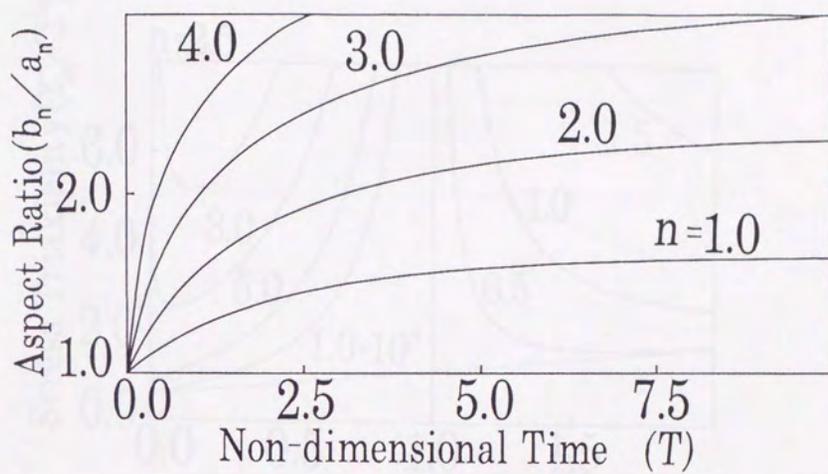


図2.3.3-8 3次元楕円空孔の形状変化  $\left(\frac{\Sigma_{xx}}{\Sigma_{yy}} = 1.0\right)$

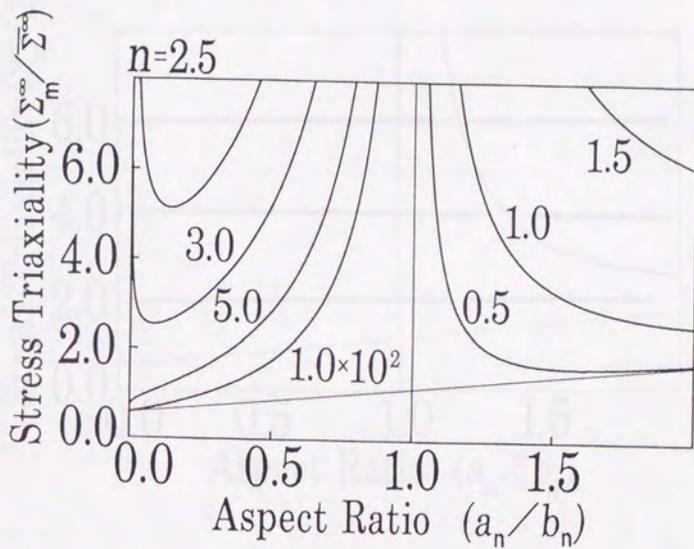


図2.3.3-9 (a) 2次元楕円空洞の、形状安定条件

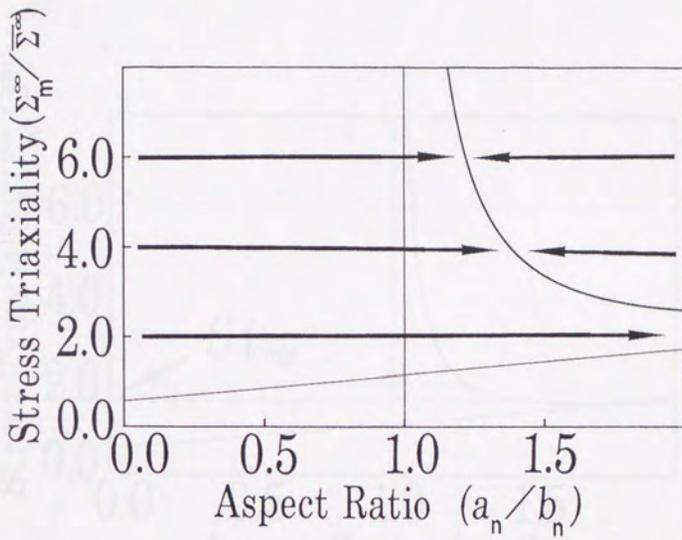


図2.3.3-9 (b) 2次元楕円空孔の、形状安定条件 ( $n=1.0$ )

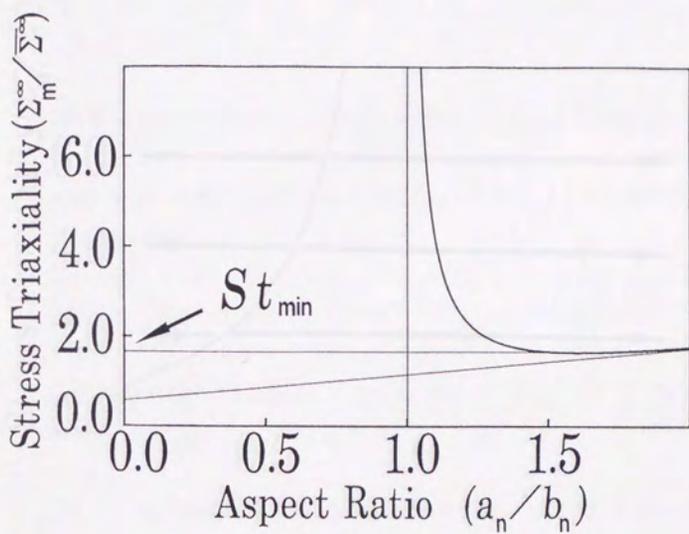


図2.3.3-9 (c) 2次元楕円空孔の、形状安定条件 ( $n=1.0$ )

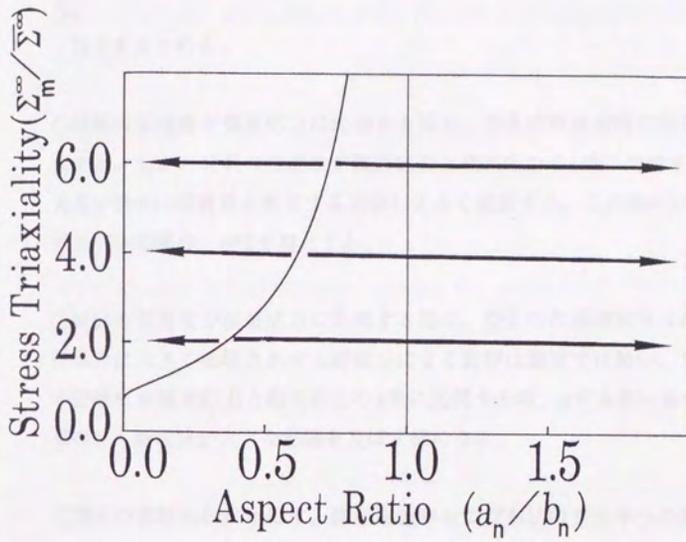


図2.3.3-9 (d) 2次元楕円空孔の、形状安定条件 ( $n=5.0$ )

### 2.3.4 結論

端部に大きな変形領域のある楕円空孔の成長過程を2次元および3次元モデルを使い、考察した。その結果空孔の形状変化と体積成長率は荷重の3軸度と空孔の初期形状および構成方程式に関係付けられ、荷重軸と空孔の扁平する方向との関係が構成方程式に現われる指数型の速度効果と対応付けて示された。

以上をまとめる。

○材料の歪速度が偏差応力に比例する場合、空孔は荷重方向に伸びた形に成長する。しかし材料の歪速度が偏差応力と相当応力の $n$ 乗に比例する時、 $n$ が大きい場合には荷重と直交する方向に大きく成長する。この解の分岐は、2次元モデルの場合、 $n=2$ を境とする。

○材料の歪速度が偏差応力に比例する場合、空孔の体積増加率は荷重の静水圧成分に大きく影響されせん断成分による影響は顕著では無い。しかし材料の歪速度が偏差応力と相当応力の $n$ 乗に比例する時、 $n$ が大きい場合には、荷重のせん断成分が大きな影響を及ぼす様になる。

○空孔の初期形状が及ぼす、体積増加率および形状の変化率への影響は顕著である。この傾向は、材料の歪速度が偏差応力と相当応力の $n$ 乗に比例する時、 $n$ が大きくなるにつれてより明確になる。現実の材料の場合、空孔の初期形状は明確ではない。しかし第2相粒子等、発生点の形状が空孔の形状に反映されるならば、この結論は発生点の形状が破壊形態を決定する因子になることを支持している。

## 第2.4節 第2章を通しての結論

第2.2節では、微視空孔の成長におよぼす、負荷応力の多軸性および材料の構成関係の影響を解析するため、空孔の成長をモデル化して解析した。その際空孔の相互干渉が小さい場合を取り上げ、無限体中に単独で存在する楕円空孔の成長を調べた。これに対して第2.3節では、微視空孔の相互干渉により空孔の間の領域のくびれが発生し、大きな歪速度を持つ変形領域が現われた場合を取り上げ、モデル化して考察した。これら2つの場合に得られた結論をまとめる。

○空孔の形状変化について、空孔相互の干渉が小さい場合には荷重方向に成長する。

微視空孔の相互干渉が生ずる場合についても構成関係が線形に近いならば、空孔は荷重方向に伸びた形に成長することが示唆された。しかし材料の歪速度が偏差応力と相当応力の $n$ 乗に比例する時、 $n$ の値が大きい場合には荷重と直交する方向に大きく成長する傾向を見ることが考察された。

○空孔の体積増加率に及ぼすせん断荷重の影響は、相互干渉が小さい場合には顕著ではない。

微視空孔の相互干渉が生ずる場合についても構成関係が線形に近いならば、空孔の体積増加率は荷重の静水圧成分に大きく影響されせん断成分による影響は顕著では無いことが示唆された。しかし材料の歪速度が偏差応力と相当応力の $n$ 乗に比例する時、 $n$ の値が大きい場合には、荷重のせん断成分が大きな影響を及ぼす様になる傾向を見ることが考察された。

○空孔の初期形状が及ぼす、体積増加率および形状の変化率への影響は、空孔相互の干渉が小さい場合には顕著ではない。

微視空孔の相互干渉が生ずる場合には、初期形状の影響が顕著になることが示唆された。

### 第3章 超音波法を応用した引き張り試験による、延性破壊における微視空孔成長の解析

この章では、超音波法を応用した引き張り試験における延性破壊のメカニズムが解析され、微視空孔の成長が定量的に評価される。また、超音波法を用いた延性破壊の解析は、従来の破壊試験とは異なり、破壊に至るまでの過程をリアルタイムで観察できるという特徴がある。この章では、超音波法を用いた延性破壊の解析の原理と、その応用について詳しく説明する。

まず、超音波法を用いた延性破壊の解析の原理について説明する。超音波法は、材料の内部に発生した微小な空孔や亀裂を検出するために用いられる。超音波が材料を通過する際に、空孔や亀裂があると、超音波の反射や散乱が生じ、その変化を検出することで、材料の内部状態を評価することができる。この章では、超音波法を用いた延性破壊の解析の原理と、その応用について詳しく説明する。

次に、超音波法を用いた延性破壊の解析の応用について説明する。超音波法を用いた延性破壊の解析は、材料の内部状態をリアルタイムで観察できるという特徴がある。この章では、超音波法を用いた延性破壊の解析の応用について詳しく説明する。

この章では、超音波法を用いた延性破壊の解析の原理と、その応用について詳しく説明する。超音波法を用いた延性破壊の解析は、材料の内部状態をリアルタイムで観察できるという特徴がある。この章では、超音波法を用いた延性破壊の解析の原理と、その応用について詳しく説明する。

### 第3.1節 実験の目的

第2章では、応力-歪速度の構成関係式における非線形性の大きな材料が延性破壊する場合の微視空孔の成長について、成長に伴う形状変化はあまり顕著ではないことを示した。その結果、微視空孔の体積含有率および体積増加率が、延性破壊に支配的な影響を及ぼす変数であることが予想された。これを確認するため、この章では延性破壊における微視空孔の体積増加率を実験的に調べる。

従来こうした実験は破面や試料の切断面の観察、あるいはシリコン等透明な線形粘弾性体に含有された気泡の変形からの類推が主に行われている。しかし延性金属は一般に、線形粘弾性体とは異なる応力-歪速度特性を有する上に不透明である。また破面観察では得られる情報が限られ、試料を切断して内部を確認する手法では空孔の成長を連続的に観察出来ない等問題が多く、新たな手法が求められていた。

先に筆者らは、非破壊検査法として多用される超音波透過法 (Ultrasonic Transmission Method, UT法) を軟鋼の引き張り試験に応用し、微視空孔の成長挙動の実時間的な観察を試みた。その際超音波パルスの減衰具合から空孔の体積増加を推測したが、粘性による減衰等空孔による散乱減衰とは異なる原因による減衰が生ずるため、定量的な評価は困難であった[17][49]。

ところで、微視空孔による散乱減衰は、粘性等他の減衰の原因とは異なった周波数特性を有していることが、線形弾性体の振動解析の結果導かれている。(Appendix A2に示す)そこで実験に使用する超音波の周波数を複数設定し、それぞれの場合における減衰の測定結果を利用すれば、微視空孔による散乱減衰のみを解析することが可能である。本章ではこの手法を採用して散乱断面積の解析を行い、延性破壊時の微視空孔の体積含有率の変化を明らかにする。この手法は従来試みられることが稀であり、本研究における新たな工夫の一つである。

## 第3.2節 実験方法

### 3.2.1 超音波検査法

今日主流となっている超音波検査法は、次の3種類に大別される。

#### 1) 透過法

検査を行う物体の一方の面から超音波を入射し、向かい合った面に透過してくる音波の強さから内部の欠陥を推定する手法である。音波の経路が短く設定できることから減衰が大きな材料で多用される。

#### 2) パルス反射法

超音波パルスを物体に入力し、欠陥や他端からの反射状況から内部の欠陥を推定する手法である。この原理に基づく探傷器は反射型超音波探傷器と呼ばれている。水晶などの基準信号発振器と組み合わせ、超音波厚み計としても広く使用されている。

#### 3) 共振法

板状の試料に入射する超音波の波長を連続的に変化させる。この時板厚が半波長の整数倍になると共振が起きることを利用して厚みの測定を行う手法である。異種材料の接合面や広い範囲の剥離面を検出することが出来るが、小さな欠陥の検出には不適當である。

延性破壊が進行している材料は超音波の減衰が大きいため超音波の透過距離を短く設定出来る、1) に示す透過法を選択する。

実験装置の構成および外観を図3.2.1-1 (a)、(b) に示す。超音波発振器から出力された連続波と、矩形波の論理和によりパルス状の超音波を構成し、増幅した後PZT製トランスデューサーに導入する。トランスデューサーで電気的振動を機械的振動に変換し、平面状の粗密波を試験片に投入する。超音波は減衰しながら試験片を透過し、再度電気的振動に変換され増幅、検波を経てオシロスコープに表示される。また、超音波パルスの波形を図3.2.1-2に示す。

この装置を使用して、超音波の減衰に加えて音速の測定も同時に行う。これは実験中に超音波の波長が変化した場合、微視空孔による散乱減衰が影響を受けることが考えられるためである。音速の算出には透過波と試験片端部からの反射波の時間差および試験片長さを使用し、試験片に熱電対を装着して温度の測定も行った。また、微視空孔が発生すると思われる試験片最狭部の応力状態および歪増分を調べるためノッチ部の直径の変化を測定した。その際互いに直交する2方向で測定した直径を平均し、ノッチ部の直径を定めた。

試験片の引き張りにはインストロン社製万能試験機model4505を使用し、クロスヘッドスピードを0.1mm/minに設定して行う。試験片は図3.2.1-3 (a) ~ (d) に示すノッチ付のものを使用し、滑りによる雑音の発生を防止するためねじ式の治具で試験機に装着する。図3.2.1-4 (a)、(b) にこの治具を示す。

実験は、引き張りと測定を交互に行う以下の(1) ~ (3)のステップを、破断に至るまで繰り返すものである。

(1) 5mm程の引き張りを行い、荷重測定後除荷する

(2) 以下の項目を手早く測定する

- ・ 試験片長さ
- ・ ノッチ部の直径
- ・ 試験片の温度

- ・ 端部からのエコー間隔
- ・ 7MHzから15MHzまで0.5MHz毎の受信ピーク高さ

(3) 荷重を戻し、再度引き張りを行う

このような実験に適切な材料は限られている。特に、除荷による影響が懸念される。そこで3.2.2節では、この実験に使用する材料の選択と処理法について触れる。

また、超音波の散乱減衰を調べる場合には局所的な多重散乱が懸念されることが望ましい。そのため3.2.3節では破面観察を行う。

さらに、3.2.4節では回折やトランスデューサーの特性による影響を排除するための無次元化について述べる。

3.2.5節では散乱減衰と微視空孔との関係を示す。超音波検査法を引き張り試験に応用し、延性破壊が進行する材料内部に生ずる微視空孔の体積が増加する様子を実時間的に観察する。

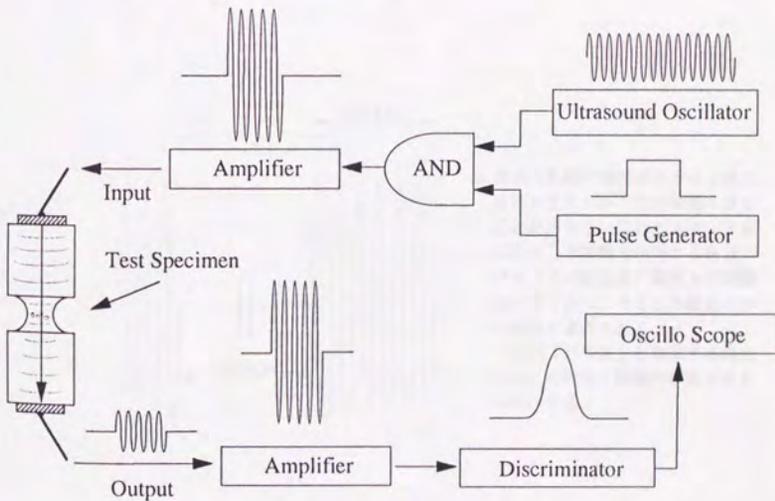
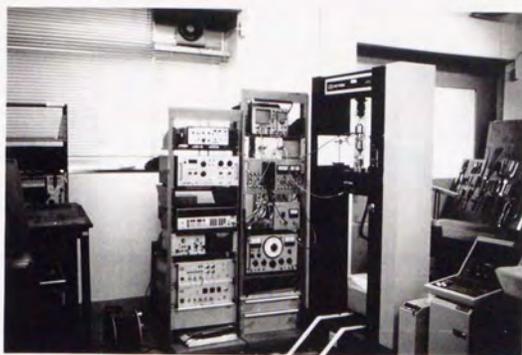


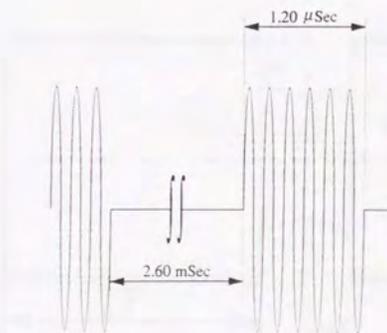
図3.2.1-1 (a) 実験装置の構成



※実験装置の構成要素

- ・引き張り試験機 : INSTRON 4505 (クロスヘッドスピード0.1mm/minに設定)
- ・超音波発振器 : HEWLETT PACKARD 8656B
- ・入力側アンプ : R&K A2005 (最高出力15W)
- ・受信用プローブ : HEWLETT PACKARD1121A
- ・受信側アンプ : R&K model A-2  
(15dBのモジュールを2段で構成し、線形性を確保)
- ・オシロスコープ : HEWLETT PACKARD 1715A
- その他は手製である。

図3.2.1-1 (b) 実験装置の外観



※搬送波の幅や間隔が不十分な場合、波形が乱れパルス状の波動を得ることが出来ない恐れがある。左記に示す、本実験で使用する音波のパルスでは搬送波の幅および間隔は十分であり、そうした懸念のない波形が達成されている。

以下「パルス」と表記する場合には、この点を既知の事実であるものとする。

図3.2.1-2 超音波パルス

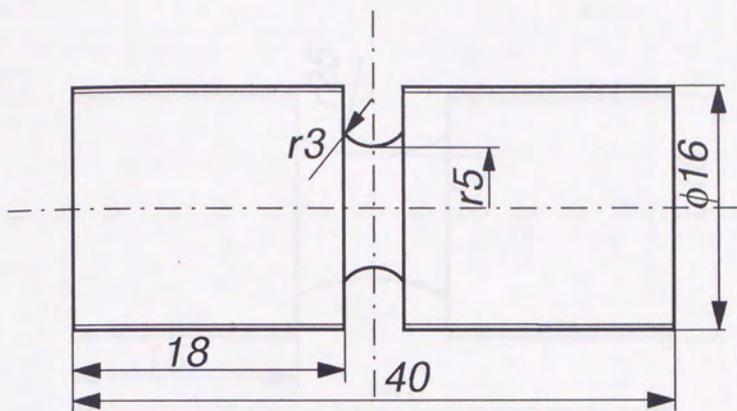


図3.2.1-3 (a) 試験片

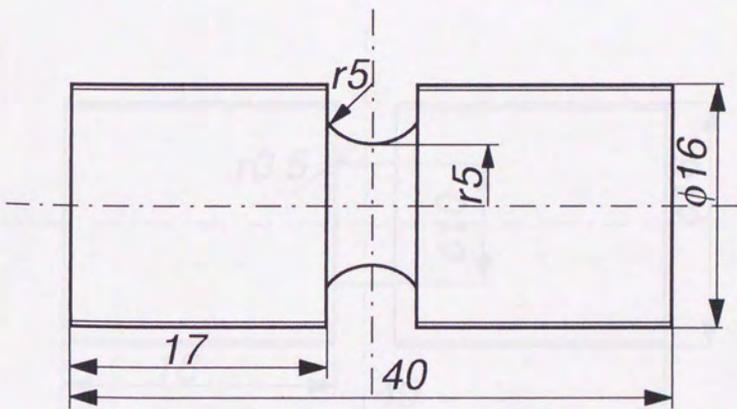


図3.2.1-3 (b) 試験片

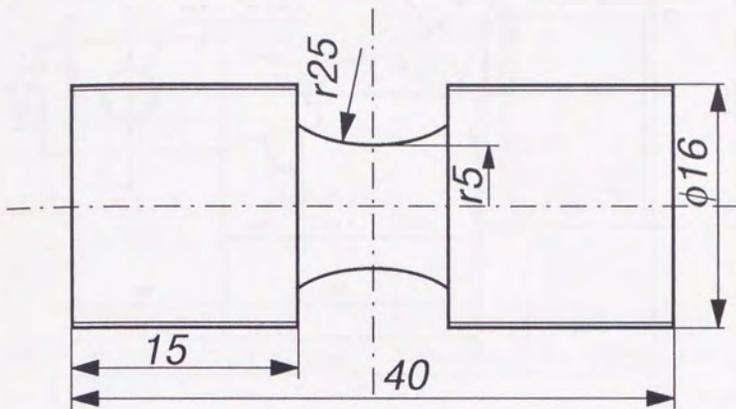


図3.2.1-3 (c) 試験片

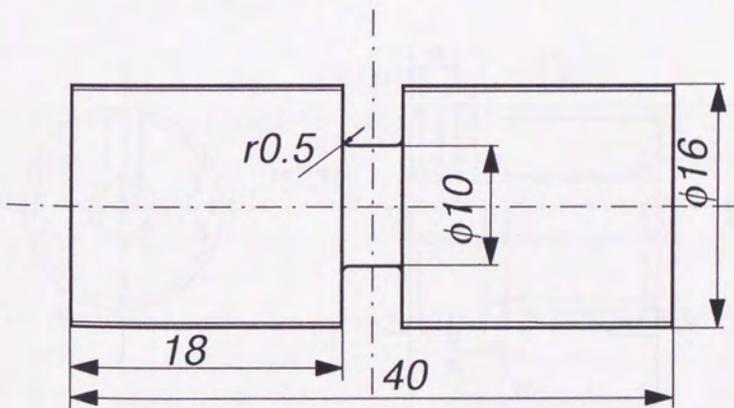


図3.2.1-3 (d) 試験片

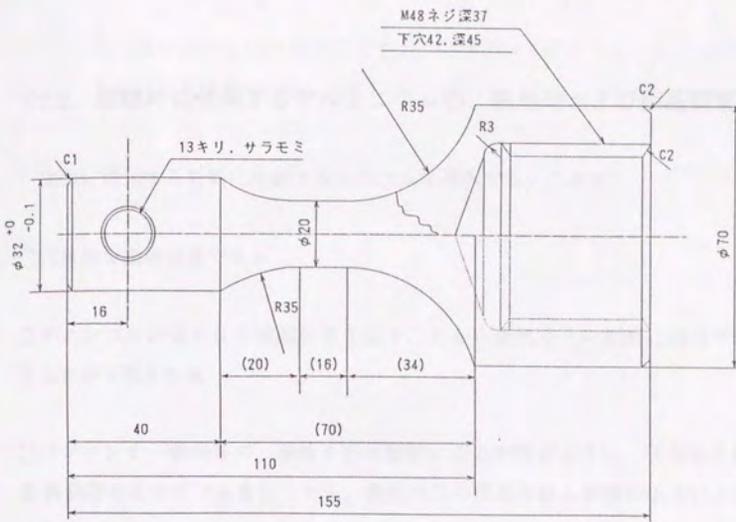


図3.2.1-4 (a) 試験片装着用治具

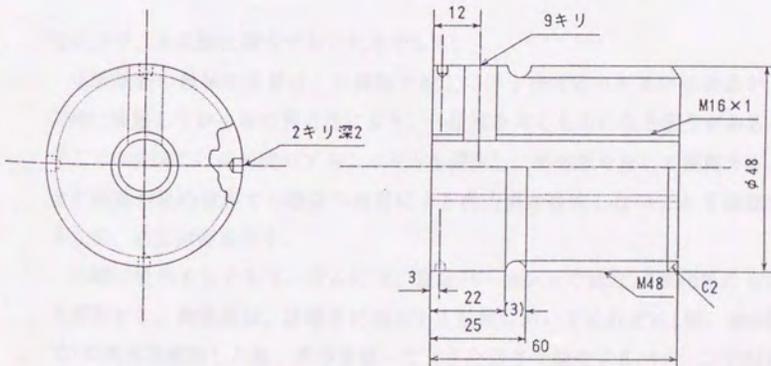


図3.2.1-4 (b) 試験片装着用治具

### 3.2.2 試験片に使用するアルミニウムの、熱処理および結晶観察

実験に使用する材料には純アルミニウムを選択する。これは、

○代表的な延性金属である

○ディンプルが見られる破面形態を示すことから微視空孔の観察に適当であることが予想される

○バウジンガー効果等の、荷重や歪の履歴による影響が小さい、すなわち除荷・再負荷なるサイクルを行っても、微視空孔の成長が被る影響が小さいことが期待される

○超音波の受信が比較的容易である

○緩やかに破壊するため動作速度の大きな機器を必要とせず、簡潔かつ信頼性の高い測定系を構成出来る

等の点で、本実験に適当であるためである。

実験試料の機械的性質は、不純物や加工に伴う残留応力あるいは結晶が一方方向に伸展している等の異方性により、一般性を欠くものになる懸念がある。そこで本実験では高純度のアルミニウムを選択し、熱処理を施して使用する。また熱処理後の試料では結晶の伸展による異方性が存在しないことを確認するため、結晶観察を行う。

実験に使用するアルミニウムには、重量パーセントで純度99.999%のものを選択する。熱処理は、試験片に加工する前後においてそれぞれ1回、400℃で1時間真空焼鈍した後、真空を保ったまま室温まで徐冷するパターンで行われる。

熱処理を施したアルミニウムを図3.2.2-1の様に切断し、各切断面を鏡面仕

上げた後、腐食液で12時間程度腐食する。腐食液は重量パーセントで5%の水酸化ナトリウム水溶液であり、22℃に保たれている。腐食の結果得られた、結晶の写真を図3.2.2(a)、(b)に示す。これらの図から観察される様に結晶はほぼ方向性のない分布形態を示しており、このアルミニウムは、結晶が加工に伴い一方方向に伸展している等の、異方性の懸念が小さいものであることが確認された。

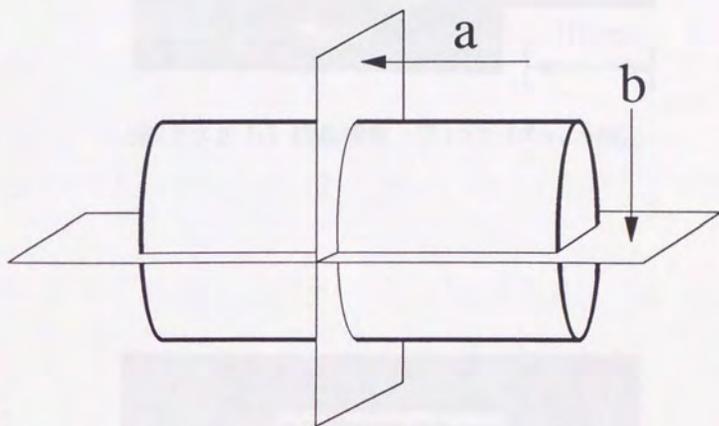


図3.2.2-1 試験片の切断

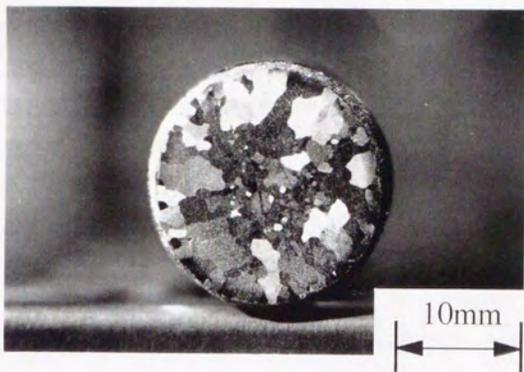


図3.2.2-2 (a) 結晶観察 図3.2.2-1のaに対応。

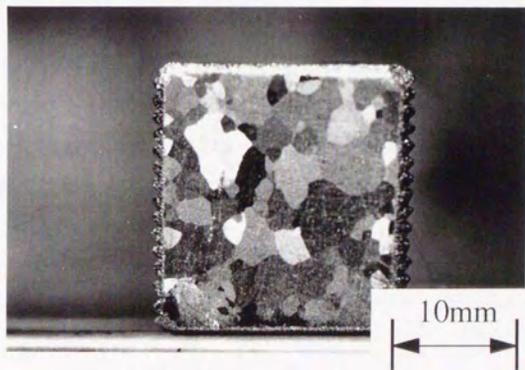


図3.2.2-2 (b) 結晶観察 図3.2.2-1のbに対応。

### 3.2.3 破面観察による、微視空孔の寸法および分布の考察

本実験で使用する超音波の波長は数ミリメートルであるが、超音波検査法を利用して微視空孔を検出する際には解析の都合上、微視空孔の寸法が超音波の波長に対して十分小さいことが望ましい（Appendix A2に記す）。ここでは破面を走査型電子顕微鏡を利用してdimpleの観察を行い、それらの条件が満たされていることを見積もる。

実験に使用する試験片は図3.2.3-1に示す丸棒であり、3.2.2に記した様熱処理を施して使用する。引き張りにはインストロン社製万能試験機を使用し、クロスヘッド速度0.1mm/minで緩やかに破壊させる。

高い純度の延性金属は、一般にのみの刃状あるいは点状の破壊形態を見せる。図3.2.3-2(a)(b)に示す様、ここで使用するアルミニウムの場合は滑りを伴いつつのみの刃状の破壊形態を見せる例と、滑らずにカップアンドコーンに近い破壊形態を見せる例とに大別される。滑りを伴う破壊形態を見せる場合、図3.2.3-3に示す様に破面のdimpleが歪むため不適當である。そこで滑らずに破壊した場合についてのみ、破面を観察する。

破面観察の例を図3.2.3-4(a)(b)に示す。この様な破面観察の結果、dimpleの寸法は超音波の波長に対して1桁以上小さく、また個々のdimpleの寸法は大きく異ならないことが確認された。この結果は破面を観察する実験上の困難のため、滑らずにカップアンドコーンに近い破壊形態を見せる試験片においてのみ確認することが出来る。しかし実験に使用するアルミニウムが高純度であり、個々の試験片の性質が大きく異なることは考え難いため、ここでの実験一般にあてはめても良いものとする。



図3.2.3-1 引き張り試験片

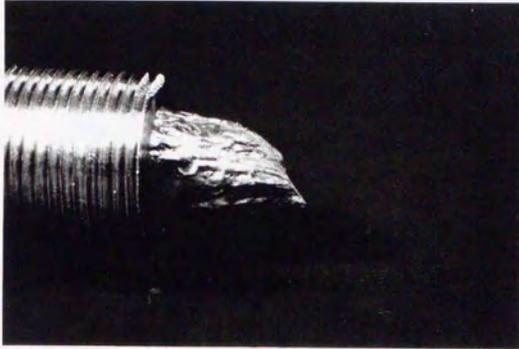


図3.2.3-2 (a) のみの刃状破壊

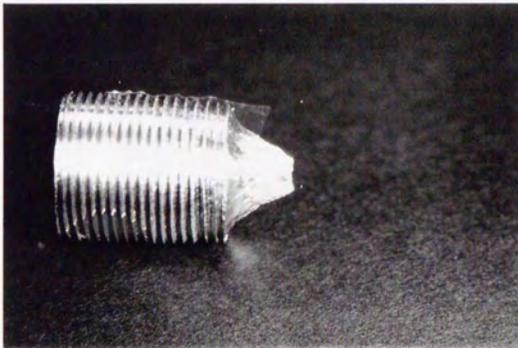


図3.2.3-2 (b) カップアンドコーン破壊

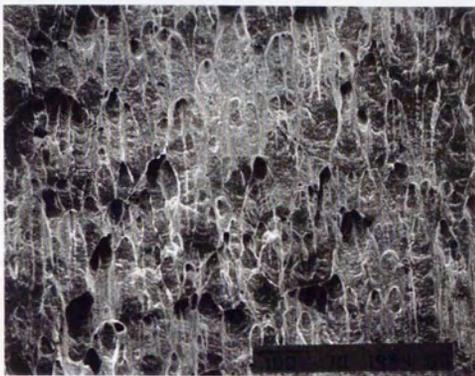


図3.2.3-3 滑りにより歪んだdimple

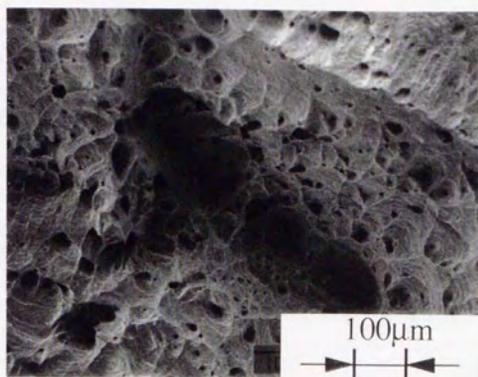


図3.2.3-4(a) 破面のdimple

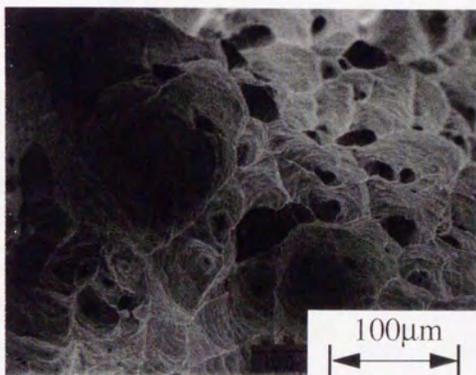


図3.2.3-4(b) 破面のdimple

### 3.2.4 受信ピーク高さの無次元化

圧電素子であるPZTを使用し、超音波の機械的振動と電気的振動を変換する。有限幅である平面状の粗密波は回折のため端部付近から波形が乱れる。そこで2mm×2mmの正方形である、小型のトランスデューサーを試験片の中心線上に装着し、乱れの少ない波形を変換する。図3.2.4-1に、このトランスデューサーを示す。ここで使用するPZトランスデューサーは、個々の周波数特性が微妙に異なっている。

およその特性は、11.5MHz付近に半波長での共振点を持ちそこから2MHz程度変動するとピーク高さが半分となることが確められている。すなわち特性を近似する際には、共振角振動数 $\omega_0$ は $23\pi \times 10^6$ (rad/sec)、半値幅 $\Delta\omega = \gamma$ は $4\pi \times 10^6$ (rad/sec)と見なすことができる。

PZTを等方かつ均一と扱う時、SI単位系では次の圧電現象の基礎式が得られる[50]。

$$\begin{cases} S = S^E T + dE \\ D = dT + \epsilon^T E \end{cases} \quad \dots (3.2.4-1)$$

ただし $d$ は圧電定数、 $E$ は電界、 $D$ は電気的変位、 $T$ は機械的応力、 $S$ は機械的歪を表わす。また、 $S^E$ は電界が一定の時の弾性定数に対応し、 $\epsilon^T$ は機械的応力が一定の時の誘電率に対応する。この基礎式は、CGS静電単位系では次のようになる。

$$\begin{cases} S = S^E T + dE \\ D = 4\pi dT + \epsilon^T E \end{cases} \quad \dots (3.2.4-2)$$

圧電素子の振動特性の等価回路は、共振周波数の周りでは図3.2.4-2の様に、直列共振回路とコンデンサーの並列で構成される。ここで直列共振回路の $L$ 、 $C$ 、 $R$ は素子の共振特性に対応し、コンデンサーの容量 $C_0$ は誘電体としての、素子の電気容量に対応する。水晶振動子の場合には電気的内部インピーダンスが高く、一般に数10pfの容量と数10～数100k $\Omega$ の抵抗と等価回路を与えなければならない。[50]これに対し、今回実験で使用するPZTは電気的インピーダンスが低く、共振点近傍では直列共振回路で近似出来る。直列共振回路に起電力 $V_{input}(t) = V_0 e^{i\omega t}$ を加えたときの電流 $I_{output}(t) = |I| e^{i(\omega t - \theta)}$ は次の微分方程式の解で与えられる。

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = V_0 e^{i\omega t} \quad \dots (3.2.4-3)$$

ただし、 $Q$ はコンデンサーの帯電である。これは非斉次の微分方程式であり、一般解は斉次方程式の解と特解の和として得られる。しかし特解は減衰振動に対応するため、ある時間が経過すれば無視して構わなくなる。この時回路

のインピーダンス  $Z$ 、および振幅  $|I|$  は次の様に得られる。

$$\begin{cases} Z = i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} & \dots (3.2.4-4) \\ |I| = \frac{V_0}{Z} \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} I_{\omega, \text{rms}}(t) = |I| e^{j(\omega t - \phi)} \\ |I|^2 = \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \cdot \frac{V_0^2}{R^2} & \dots (3.2.4-5) \end{cases}$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} \phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{R} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} & \dots (3.2.4-6) \\ \gamma = \frac{R}{2L} \end{cases}$$

である。

以上の結果より、機械的振幅から電氣的振幅への変換、あるいは逆に電氣的振幅から機械的振幅への変換は、次の関数  $g_r(\omega)$  との積の定数倍で近似的に与えられる。

$$g_r(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \dots (3.2.4-7)$$

引き張りを行う前の試験片を使用し、この実験系の周波数特性を調べた例を図3.2.4.3 (a) ~ (d) に示す。これらが一致しないことから実験系の周波数特性にはある程度の分散があることがわかる。これはトランスデューサーの特性が一様でないことに加え試験片との接着状態や試験片そのものの特性が微妙に異なる、あるいは回折の影響がある等の総合に原因があると思われる。この様に実験系の特性がそれぞれ異なっている点を考え負荷を加える以前の特性で無次元化を行い、実験系の特性が測定に及ぼす影響を排除する。この無次元化を行った例を図3.2.4-4に示す。

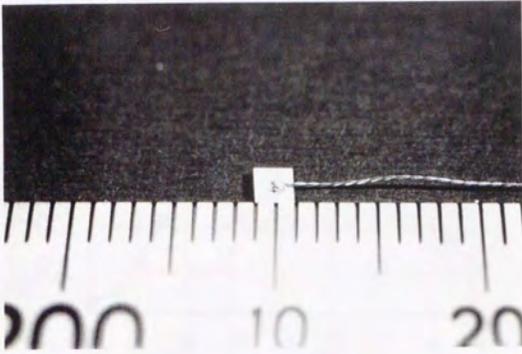


図3.2.4-1 PZTトランスデューサー

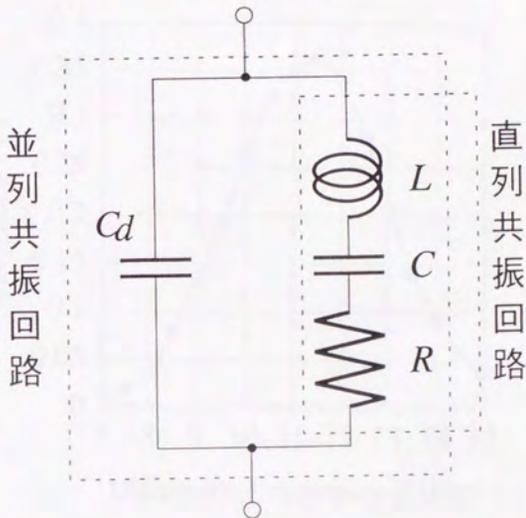


図3.2.4-2 トランスデューサー特性の近似

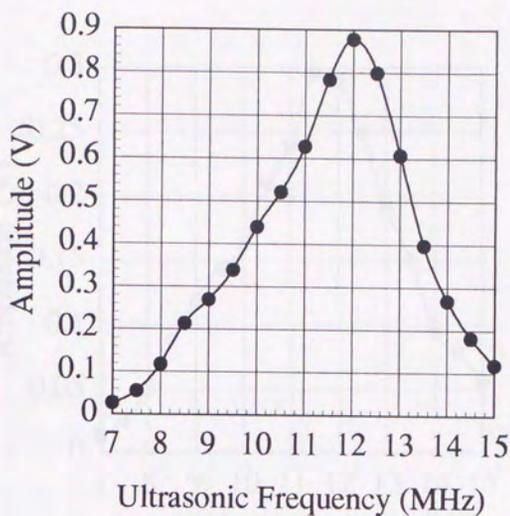


図3.2.4-3 (a) 実験系の周波数特性

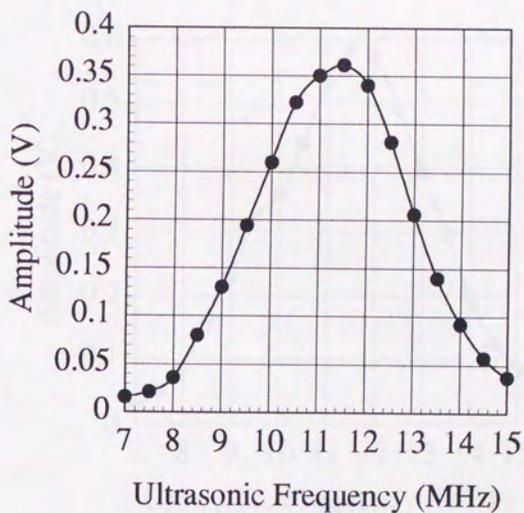


図3.2.4-3 (b) 実験系の周波数特性

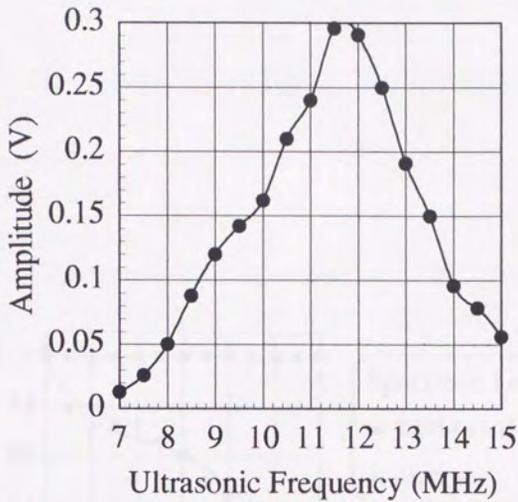


図3.2.4-3 (c) 実験系の周波数特性

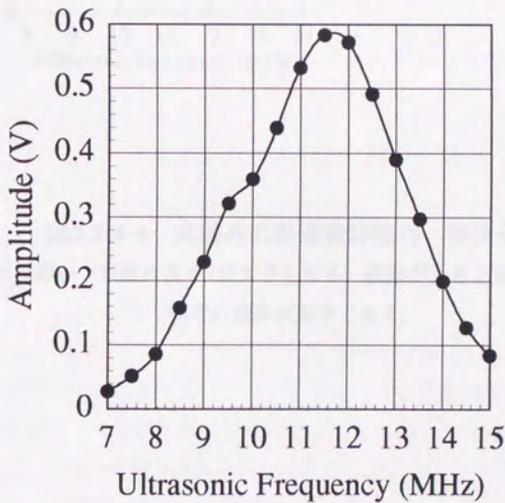


図3.2.4-3 (d) 実験系の周波数特性

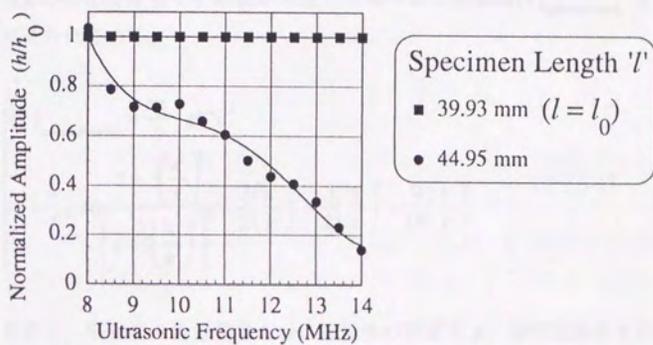


図3.2.4-4 実験系の周波数特性の、無次元化

引き張りに伴い（試験片長さ $l$ が大きくなる）減衰が大きくなる。特に高周波側での減衰が顕著である。

### 3.2.5 散乱減衰による、微視空孔の体積含有率の導出

延性破壊の最終段階にある試験片に超音波を透過させる。この時減衰の原因として定数項に加えて、

- ・微視空孔による散乱減衰
- ・粘性による減衰

なる2者を考える。

微視空孔の形状を球で近似する。無限に大きな線形弾性体中に存在する半径  $a$  の空孔に対して平面波が入射する時の散乱断面積  $(\gamma)_{\text{spherical cavity}}$  は次の様に与えられている。

$$\begin{aligned} (\gamma)_{\text{spherical cavity}} &= \frac{4\pi}{9} \cdot g k^4 a^6 \\ g &= \frac{4}{3} + 40 \frac{2 + 3\left(\frac{\kappa}{k}\right)^5}{\left[4 - 9\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2\right]^2} - \frac{3\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2}{2} + \frac{3\left(\frac{\kappa}{k}\right)^3}{2} + \frac{9\left(\frac{\kappa}{k}\right)^4}{16} \quad \dots (3.2.5-1) \end{aligned}$$

ただし、平面波の角振動数を  $\omega$ 、弾性体の密度を  $\rho$ 、弾性定数をそれぞれ  $\lambda$ 、 $\mu$  とする場合、

$$k^2 = 4\pi^2 \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \quad \dots (3.2.5-2),$$

$$\frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} + 2} \quad \dots (3.2.5-3)$$

である。式 (3.2.5-1) ~ (3.2.5-3) の導出は Appendix A2 に記す。これは単一の空孔についての解析である。しかし微視空孔の分布密度が十分小さい場合等多重散乱による影響を無視出来る場合には、個々の微視空孔の散乱断面積  $(\gamma)_{\text{spherical cavity}}$  の総和が微視空孔が発生している領域全体の散乱断面積を与える。よって、断面積  $S$  の領域に微視空孔が  $n$  個存在する場合、受信ピーク高さは  $\left(S - \sum_1^n \gamma_i\right)$  倍される。

粘性による平面波の減衰は、一般に次の様な指数則で与えられる[51][50]。

$$\frac{h}{h_0} = c_{v1} e^{-\alpha l} \quad \dots (3.2.5-4)$$

$$\alpha = c_{v2} \cdot \omega \quad \dots (3.2.5-5)$$

ただし、 $h$ は出力波のピーク高さ、 $h_0$ は入射波のピーク高さ、 $l$ は透過距離、 $c_{v1}$ と $c_{v2}$ は定数である。式(3.2.5-4)における $\alpha l$ が小さく、 $\alpha l \ll 1$ と仮定出来るならば、音圧 $p$ を次の様に近似出来る。

$$\frac{p}{p_0} \approx c_{v1} \{1 - \alpha l + (\alpha l)^2\} \quad \dots (3.2.5-6)$$

ここで、引き張り試験下にあるノッチ付試験片に超音波を透過させる場合を考える。微視空孔は破面を形成する狭い領域に集中して分布し、また塑性変形はノッチ部に限定されるため、延性破壊における超音波の減衰はノッチ部のみを考慮して解析すれば近似値が得られる。そこで解析の際には以下の様に仮定し、ノッチ部を図3.2.5-1の様に長さ $l$ の円柱でモデル化する。

- 全ての空孔は球形とする。
- 空孔の寸法に対して超音波の波長が十分に大きく、多重散乱は生じない。
- 空孔はノッチの最狭部断面上にのみ存在する。
- ノッチ部は、最狭部半径を半径とする円柱で近似出来る。

以上の結果を用いて、超音波の減衰は次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_0} &= \text{Const} \cdot c_{v1} \left\{ 1 - \alpha l + (\alpha l)^2 \right\} \left\{ S - \sum_n \gamma_n \right\} \\ &= \text{Const} \cdot c_{v1} \left\{ 1 - c_{v2} \cdot l \omega + (c_{v2} \cdot l \omega)^2 \right\} \left\{ 1 - c_4 \omega^4 \right\} \quad \dots (3.2.5-7) \\ &= c_1 (1 - c_2 \omega + c_3 \omega^2 - c_4 \omega^4) \end{aligned}$$

$c_4$ は式(3.2.5-1)における $a^6$ に比例する項の定数倍、すなわち微視空孔の体

積含有率の2乗に比例する項であり、これを図3.2.4-4の様に無次元化された、減衰の周波数特性の曲線から決定する。超音波トランスデューサーは音圧に比例した電圧を出力するため、式3.2.5-7を改めて表記すると、

$$\frac{p}{p_0} = c_1 \omega (1 - c_2 \omega + c_3 \omega^2 - c_4 \omega^4) \quad \dots (3.2.5-8)$$

となる。そこで、様々な角振動数 $\omega$ で音圧 $p$ を測定して最小2乗法で $c_4$ を決定すれば、微視空孔の体積含有率に関する手掛かりを得ることが出来る。

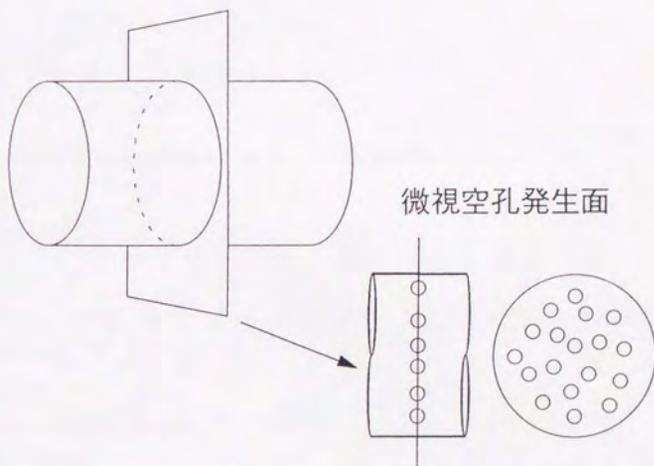


図3.2.5-1 試験片ノッチ部のモデル化

### 第3.3節 実験結果

本節の以下の構成を述べる。3.3.1節では、実験に使用したアルミニウムの材料定数の測定結果を示す。次に3.3.2節では、このアルミニウムの応力-歪速度の構成関係を解析した結果を示す。3.3.3節では散乱断面積を解析し、微視空孔の体積増加を調べた結果を示す。

$$\sigma = \frac{E \epsilon}{1 + \dot{\epsilon} \tau}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E(1 + \dot{\sigma} \tau)}$$

- $\sigma = 2.05 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$
- $\dot{\sigma} = 1.12 \times 10^7$
- $\epsilon = 2.10 \times 10^{-2} \text{ cm/cm}$
- $\dot{\epsilon} = 2.61 \times 10^{-2} \text{ 1/cm}^2$
- $\tau = 9.46 \times 10^{-4} \text{ sec}$
- $\tau = 0.5 \times 10^{-4} \text{ sec}$
- $\tau = 1.81 \times 10^{-4} \text{ 1/cm}^2$

### 3.3.1 実験に使用したアルミニウムの材料定数

以下の手順に従い、実験に使用するアルミニウムの材料定数を求める。その際熱処理を施した、図3.2-2 (d) の丸棒試験片を使用した。

- 1) 弾性域で引き張り試験を行いヤング率  $E$  を求める
- 2) 試験片端部で反射して来る超音波パルスエコー間隔と試験片長を測定し、縦波の音速  $c$  を導く
- 3) 水浸による体積測定および重量の測定結果から、密度  $\rho$  を算出する。
- 4) 線形弾性体に成立する次の関係に1) ~3) の結果を代入し、ポワソン比  $\nu$  を算出する。

$$c = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad \dots (3.3.1-1)$$

ただし  $K$  は体積弾性係数であり、次の関係がある。

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \dots (3.3.1-2)$$

以上の手順に従い、実験に使用するアルミニウムの材料定数は次の様に求められた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 2.69 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \nu = 3.45 \times 10^{-1} \\ E = 7.02 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ G = 2.61 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ c = 6.40 \times 10^3 \text{ m/s} \\ \mu = G = 2.61 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ \lambda = 5.81 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array} \right.$$

ただし、これらは22℃での値である。

なおこの時、半径 $a$ の球状の微視空孔における散乱の全断面積 $(\gamma)_{\text{spherical cavity}}$ は式3.2.5-1より、次の様に与えられる。

$$(\gamma)_{\text{spherical cavity}} = 2.86 \times 10^{-11} \cdot \omega^4 a^6 \quad (m^2) \quad \dots (3.3.1-3)$$

空孔の半径が異なる場合、散乱断面積は異なる値を示す。散乱断面積は空孔の半径の6乗に比例する。したがって、半径が異なる空孔の散乱断面積は異なる値を示す。散乱断面積は空孔の半径の6乗に比例する。したがって、半径が異なる空孔の散乱断面積は異なる値を示す。散乱断面積は空孔の半径の6乗に比例する。したがって、半径が異なる空孔の散乱断面積は異なる値を示す。

測定結果は、その測定条件下に理論値と一致を示す。式(3.3.1-3)より算出される値と比較すると、測定値は理論値とよく一致していることが確認された。これは、空孔の半径が異なる場合でも、散乱断面積は空孔の半径の6乗に比例していることを示している。

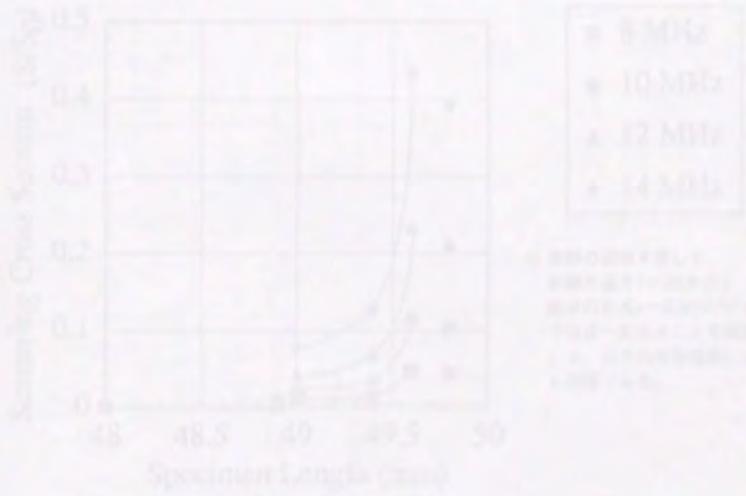


図3.2-1 (a) 延性材料における、散乱断面積の変化

### 3.3.2 散乱断面積に見る、微視空孔の体積増加

実験の結果より算出された、微視空孔の散乱断面積を試験片の引き張りと対応させたものを図3.3.2-1 (a) ~ (h) に示す。これらの図において、測定点が滑らかな曲線上に分布している範囲では、微視空孔相互の距離が十分小さく、散乱の乱れが生じていないことが予想される。破断の直前には超音波の減衰が非常に大きくなるため、十分な感度の測定は困難になる。図3.3.3-1 (a) (b) では破断の直前での散乱断面積の減少が観察されるが、これは微視空孔相互が近接した結果の多重散乱の発生や、滑りによって空孔が変形した結果に原因があると考えられる。

散乱断面積は、ある時点で急に増加することが、図3.3.2-1 (a) ~ (h) から読み取ることが出来る。これは材料内部で発生した何らかの現象を検出したためであり、微視空孔の大量発生を検出していると思われる。

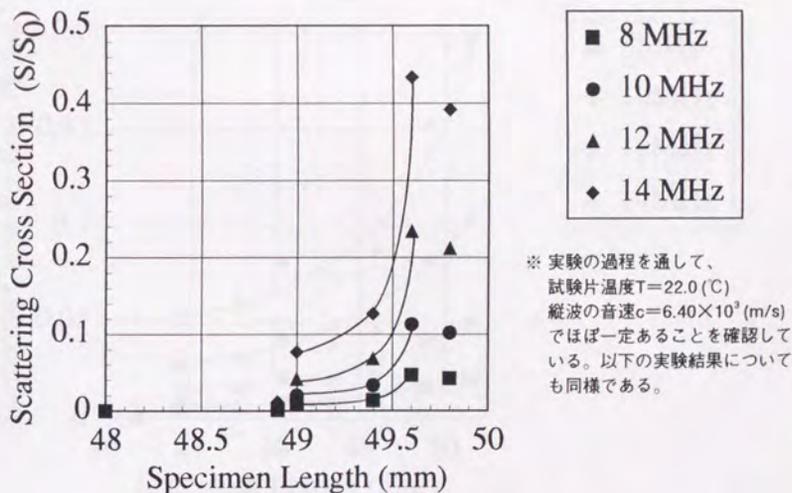


図3.3.2-1 (a) 延性破壊における、散乱断面積の変化

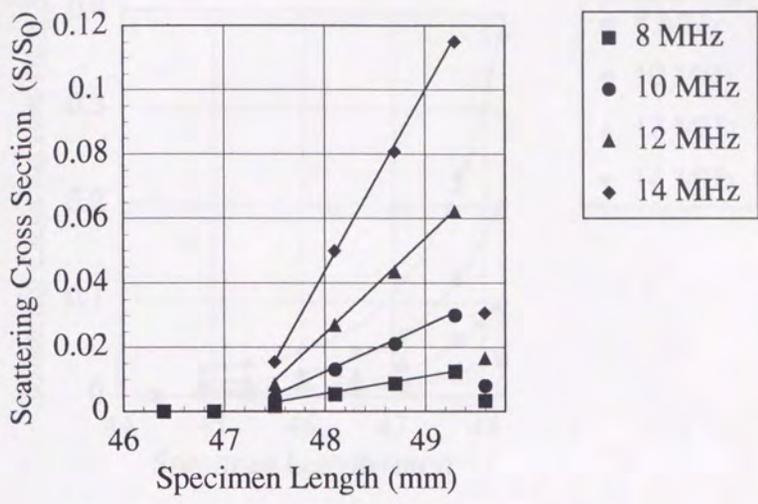


図3.3.2-1 (b) 延性破壊における、散乱断面積の変化

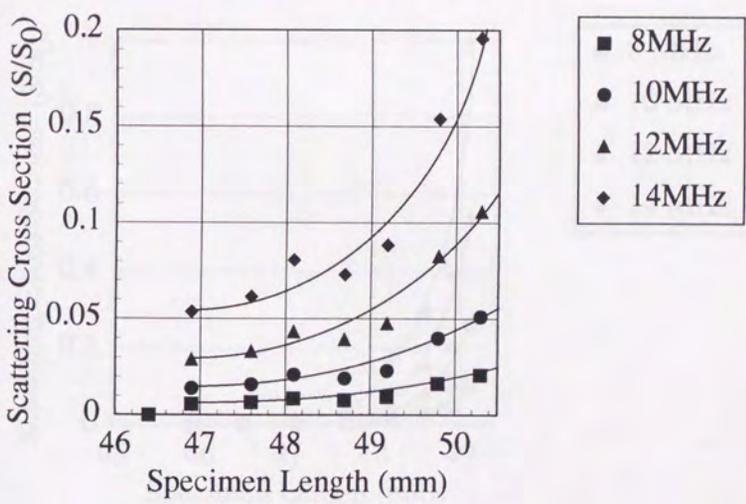


図3.3.2-1 (c) 延性破壊における、散乱断面積の変化

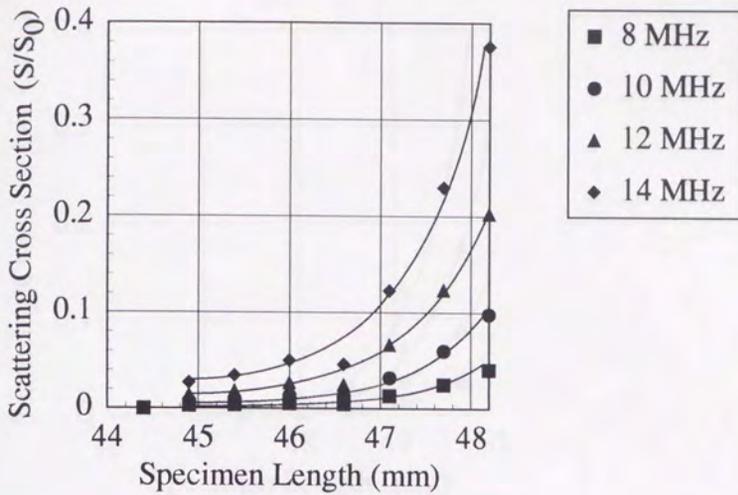


図3.3.2-1 (d) 延性破壊における、散乱断面積の変化

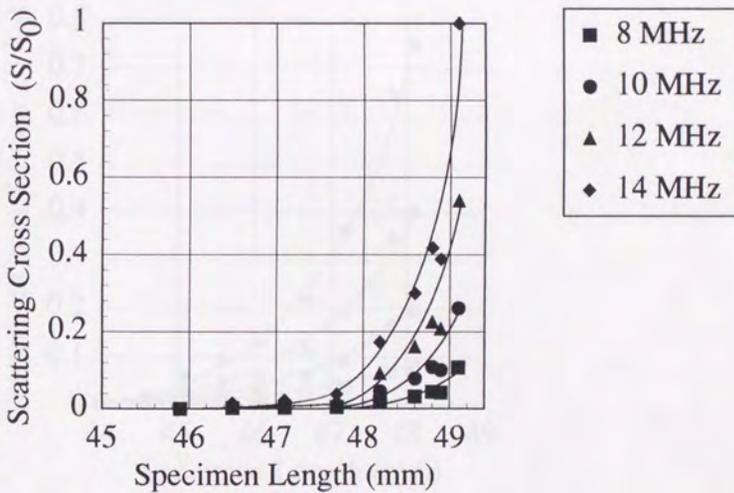


図3.3.2-1 (e) 延性破壊における、散乱断面積の変化

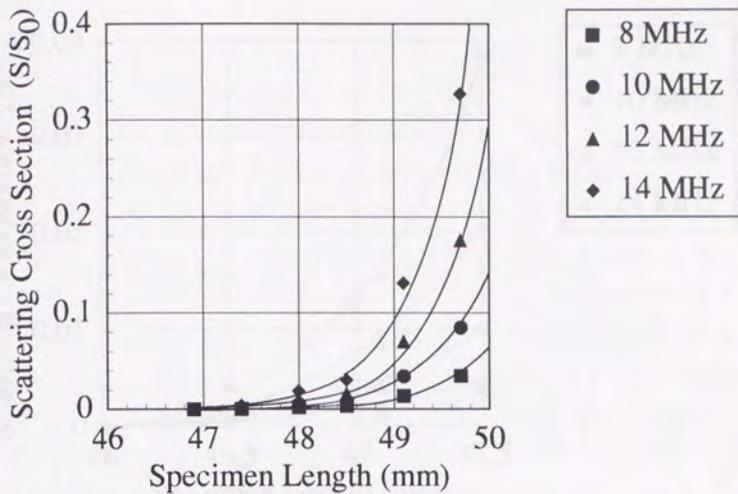


図3.3.2-1 (f) 延性破壊における、散乱断面積の変化

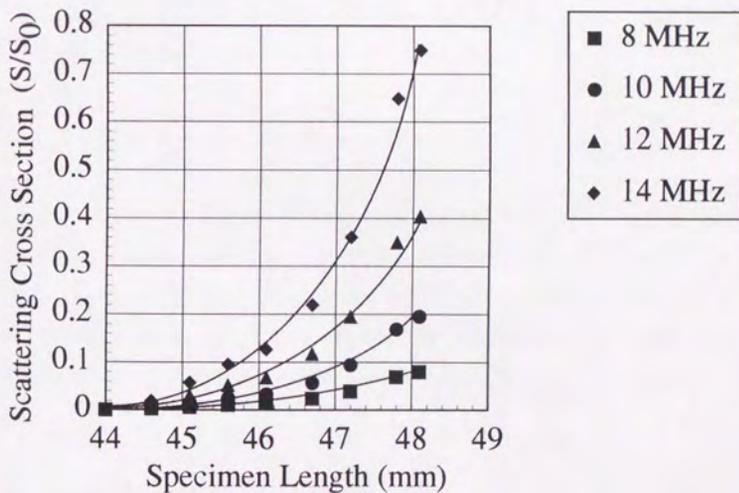


図3.3.2-1 (g) 延性破壊における、散乱断面積の変化

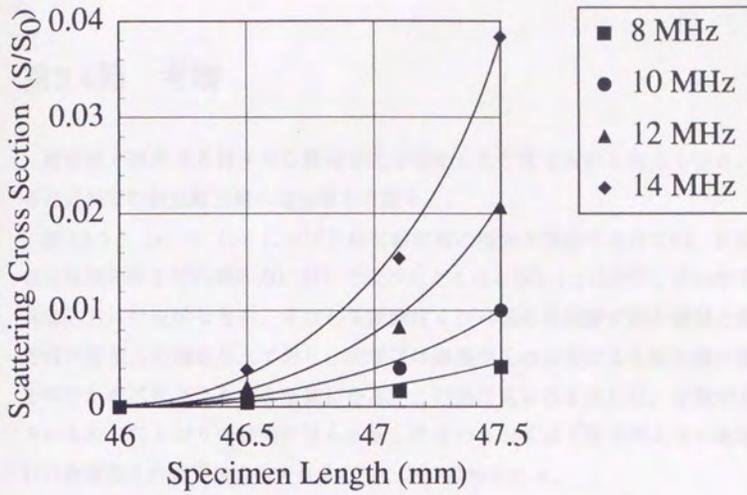


図3.3.2-1 (h) 延性破壊における、散乱断面積の変化

### 第3.4節 考察

超音波が減衰する様子から微視空孔が発生したと考えられる時点を定め、その近傍での散乱断面積の増加率を考察する。

図3.3.3-1 (a) ~ (h) における散乱断面積の増加が開始する点での、散乱断面積増加率を平均軸応力に対して表示したものを図3.4-1に示す。その際平均軸応力は巨視的なもの、すなわち試験片くびれ部の外周線が囲む面積と軸方向の荷重との商を与えており、実際には微視空孔の存在による断面積の減少等のためこれよりも大きな値になる。この図に見られる点には、分散が大きいものの右上がりの傾向が見られる。すなわち引き張り荷重が大きい場合には微視空孔の成長速度も大きくなることが推測される。

次に、散乱断面積増加率を平均軸応力ではなく応力3軸度に対応させる。一般に、塑性変形下にある試験片のノッチ部の厳密な応力状態は、材料の構成関係とエネルギー原理から数値的に定めなければならない。しかし、材料をMisesの降伏条件に従う完全剛塑性で近似することが出来る場合には、試験片中央部の応力3軸度は次の様に見なすことが出来る。

$$\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} + \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \quad \dots (3.4-1)$$

ただし、 $a$ はノッチ最小断面半径であり、 $R$ はノッチの曲率半径である。この導出は Appendix A3に記す。あまり高い精度を必要としないここでの考察では、この式3.4-1を使用して応力3軸度を見積もることとする。すると図3.4-2に示す様に分散は大きいものの、散乱断面積の増加率には、応力3軸度による影響が見られなくなることを示唆する結果が得られた。すなわち微視空孔の成長には、

○引き張り荷重の大小による影響が顕著である

○応力3軸度による影響は小さい

なることを支持する結果が、実験により与えられた。

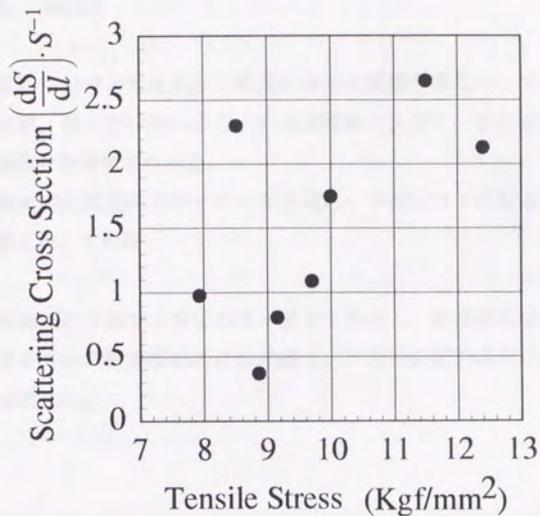


図3.4-1 引き張り荷重と散乱断面積

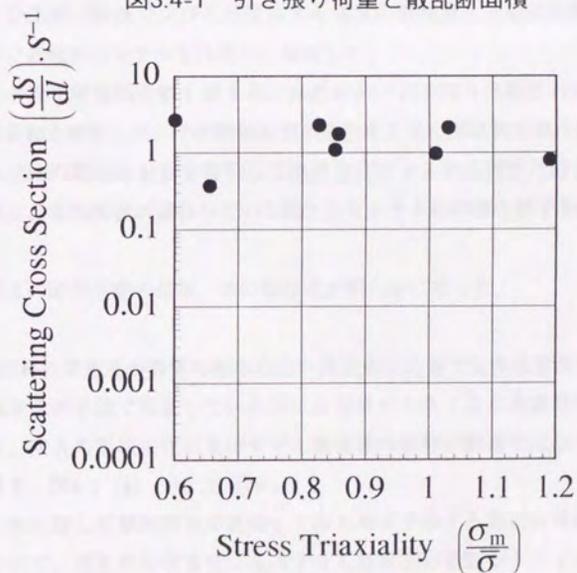


図3.4-2 応力3軸度と散乱断面積

## 第4章 結論

延性破壊における空孔発生・成長の微視的機構を明らかにするために、負荷応力状態、および材料の応力-歪速度関係の及ぼす、空孔成長への影響に焦点を合わせた研究を行った。

まず微視空孔成長の力学モデルを提案し、多軸応力下にある微視空孔の成長を解析した。その際

1) 空孔相互の干渉が十分に小さい場合を仮定し、剛粘塑性体で近似される材料に含有された微視空孔の成長挙動を、平面歪状態の場合についてモデル化し、解析した。

次いで

2) 空孔間の領域でくびれが発生する場合の微視空孔の成長挙動を見積もるために近似的なモデルを作成し、検討した。

この様な理論的考察を踏まえ、延性材料の引き張り実験を行い微視空孔の成長挙動を解析した。その際超音波検査法を工夫し周波数を様々に変化させ、それぞれの場合の減衰を解析して微視空孔による散乱減衰だけを導く手法を確立し、延性破壊が進行している純アルミニウムの内部の様子を観察した。

以上の研究活動の結果、次の様な点が明らかになった。

1) 材料の歪速度が負荷の相当応力の指数乗に比例する非線形性を示す場合、微視空孔が単独で成長している際には指数が大きくなり非線形性が増すにつれて、空孔の形状変化に及ぼすせん断荷重の影響が顕著ではなくなる。この関係を、図4-1 (a) (b) に示す。

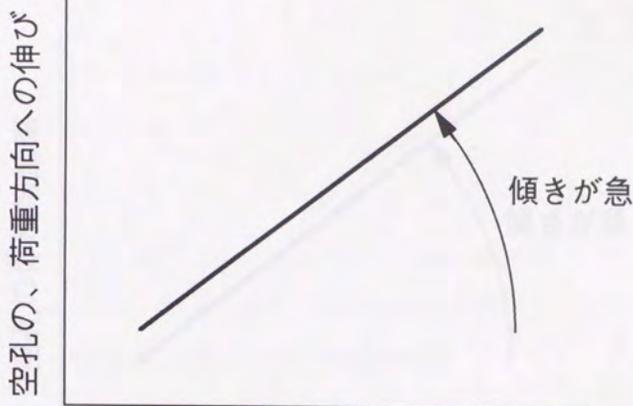
これに対して微視空孔が近接しており相互干渉する際には非線形性が増すにつれて、空孔の形状変化に及ぼすせん断荷重の影響が大きくなる傾向が示

唆される。すなわち材料の歪速度が負荷の相当応力の指数乗に比例する非線形性を示す場合に、指数が大きく空孔の含有率が大きい場合には、空孔が互いに近接する方向に伸展し、破壊の過程が短時間で終了することが考えられる。

2) 微視空孔相互の干渉が十分に小さい場合、空孔の体積増加率は負荷応力の静水圧成分に大きく依存するが、せん断成分にはあまり影響されない。これは1)と同様に、材料の歪速度が負荷の相当応力の指数乗に比例する非線形性を示す場合、指数が大きく非線形性が大きな場合について特に顕著である。この関係を図4-2 (a) (b) に示す。

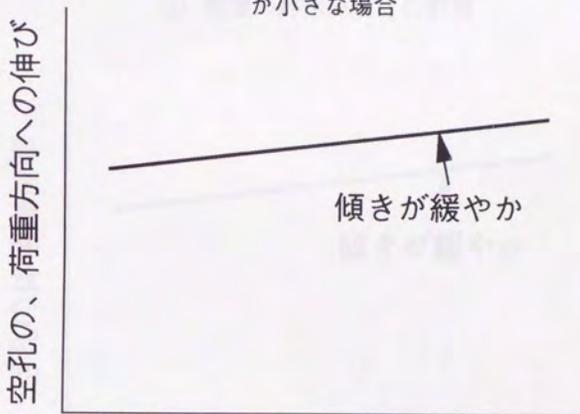
ところが、微視空孔が近接している等相互干渉が問題になる場合にはせん断成分の影響が現れる可能性が示唆される。これは材料の非線形性が大きな場合特に顕著である。

一般の多結晶金属材料は非線形性が大きいため、これらの結論には重要な意味がある。例えば、材料の応力-歪速度に関する構成関係を線形であると仮定して算出された破断歪は実際の金属材料のものよりも過大に見積もられることが知られているが、その原因が、材料の歪速度が負荷の相当応力の指数乗に比例する非線形性を示す場合、指数の大小が及ぼす微視空孔の成長挙動への影響にあることが予想出来る。これらの成果は今後、延性破壊の過程を明らかにし、靱性の高い材料の破壊基準を導く際の重要な手掛かりになると考えられる。



荷重のせん断成分

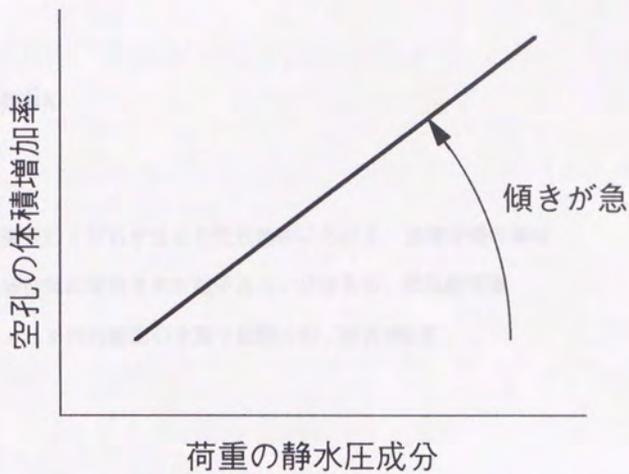
(a) 材料の歪速度が負荷の相当応力の指数乗に比例する時、指数が小さな場合



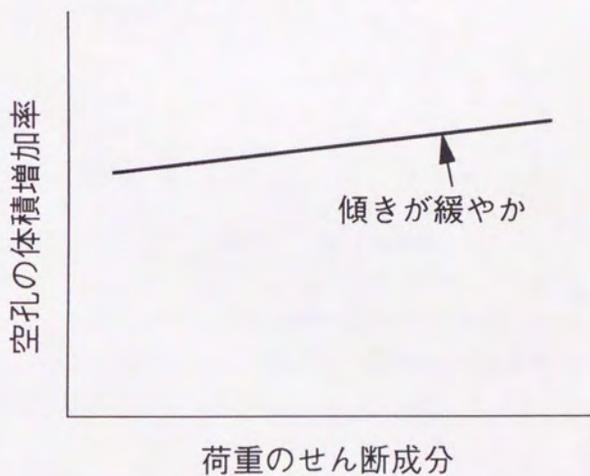
荷重のせん断成分

(b) 材料の歪速度が負荷の相当応力の指数乗に比例する時、指数が大きな場合

図4-1 空孔の変形に及ぼす、荷重のせん断成分の影響



(a) 荷重の静水圧成分の影響



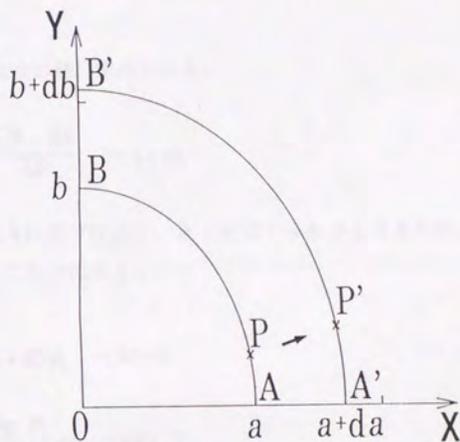
(b) 荷重のせん断成分の影響

図4-2 空孔の体積増加率に及ぼす、荷重状態の影響



Appendix1 微視的くびれが生じた空孔端部における、歪増分場の算出

空孔の成長に伴い図A1-1に示す様に、空孔面上のある一つの点 $P(x_0, y_0)$ が $P(x_1, y_1)$ に移動する場合の軌跡を考える。



図A1-1 空孔の成長

この点は空孔面に直交する方向に移動するものと仮定されているため、空孔が微小成長し、軸長が $(a_0, b_0)$ から $(a_1, b_1) = (a_0 + da, b_0 + db)$ となる場合には、次の直線上を移動することになる。

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0} x + const \quad \cdots(A1-1)$$

よって、

$$y_0 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0} x_0 = y_1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_0}{x_0} x_1 \quad \cdots(A1-2)$$

となる。また、次の対応を与える。

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \cos \theta_0 \\ y_0 = b_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad \cdots(A1-3)$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = b_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad \cdots(A1-4)$$

歪増分  $(d\varepsilon_{YY})_A$  は次の様に求められる。

$$(d\varepsilon_{YY})_A = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\overline{A'P} - \overline{AP}}{\overline{AP}} \quad \cdots(A1-5)$$

ここで点 P を点 A に近づけると、 $\theta_0$  と  $\theta_1$  は十分小さくなるため、式 A1-2 を次の様に書き直すことが出来る。

$$\left(b_0 + \frac{a_0}{b_0}\right) \theta_0 = (b_0 + db) \theta_1 \quad \cdots(A1-6)$$

$$(d\varepsilon_{YY})_A = \frac{a_0 + da}{a_0} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_0} - 1 \quad \cdots(A1-7)$$

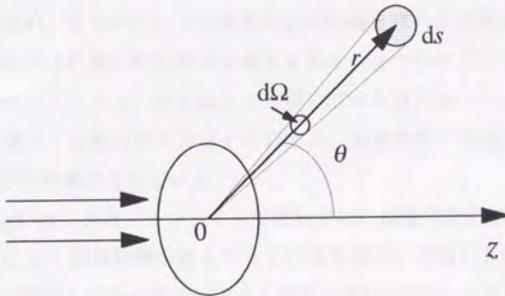
すなわち歪増分  $(d\varepsilon_{YY})_A$  は次の様に与えられる。

$$(d\varepsilon_{YY})_A = \frac{da}{a_0} \left\{ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2 + 1 \right\} - \frac{db}{b_0} \quad \cdots(A1-8)$$

他の歪成分についても同様の計算で得ることが出来る。

## Appendix2 線形弾性体に含有された粒子または空孔の、散乱断面 積の算出

微分断面積および全断面積とは音響学や波動論、あるいは量子力学においてしばしば用いられる概念である。図A2-1の様に、素粒子や空孔など散乱の原因となる標的を原点に配置し、 $z$ 方向に入射する平面波あるいは量子論で扱われる粒子を考える。



図A2-1 散乱断面積の算出

入射する波動を量子化された粒子と見なし、単位時間に単位面積を通過して標的に入射する数を  $N$  とする。また、原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の球面上の面要素  $dS$  に垂直に出てくる粒子の流れの強度、すなわち単位時間に  $dS$  を通過して散乱されてくる粒子数を  $\Delta N$  とする時次の関係がある。

$$\Delta N \propto N \cdot \frac{dS}{r^2} \quad \dots (A2-1)$$

$dS$  を原点から見た立体角を  $d\Omega$  とすると  $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$  なる関係があるので、

$$\Delta N = \psi(\theta) \cdot N d\Omega \quad \dots (A2-2)$$

と書き直すことが出来る。 $\psi(\theta)$ は単位時間に単位面積を通過して標的に入射した粒子が散乱角 $\theta$ の方向の単位立体角内に散乱されてくる確率を表わしており、面積の次元を持つことから微分断面積と称されている。これを全立体角について積分したものを全断面積と称する。つまり全断面積は同じ散乱の効果を持つ平面の面積を与える概念であり、十分に遠方で観察する場合散乱減衰の原因が面積 $S$ の平面であるのか、あるいは全断面積 $S$ を持つ空孔や介在物によるのかは区別が付かないことになる。

散乱を計算する手法にはいくつかのものがある。線形弾性体の場合振動ポテンシャルを求め、重ね合せにより散乱の全断面積を求める手法が多用される。空孔や弾性の介在物に超音波が入射する場合、3つのポテンシャルすなわち入力波のポテンシャル、介在物から外側に広がる波のポテンシャル、介在物の内側に進行する波のポテンシャルを求め、境界条件を考慮しつつ重ね合わせる解析例が多数報告されている。

Lord Rayleigh は、速度ポテンシャルで表わされた運動方程式に対して調和関数の多項式による振動問題の解を与える手法を用い、球面による音波の散乱について球が液体と完全な剛体の場合を解析している[52]。これを粘性流体の中にある、弾性体で構成された球体による散乱について拡張した解析は Herzfeld により、以下の様に行われている[53][54]。

直交座標系 $(x, y, z)$ と極座標系 $(r, \theta, \phi)$ を適宜使用する。球形の弾性体は中心が座標の原点と一致する様に配置される。

まず、球体だけが振動する場合のポテンシャルを導く。速度を $v$ とすると、弾性体の運動方程式は Love [55]によって次の様に書き直されている。

$$-\nu = \frac{1}{k_1^2} \cdot \text{grad div } v + \frac{1}{k_2^2} \cdot (\Delta v - \text{grad div } v) \quad \cdots (A2-3)$$

ただし、 $v$ が $e^{2m\alpha}$ に比例する振動問題について密度を $\rho_1$ 、弾性定数を $\lambda_1$ 、 $\mu_1$ とする時、

$$\begin{cases} k_1^2 = 4\pi^2 \omega^2 \frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \\ k_3^2 = 4\pi^2 \omega^2 \frac{\rho_1}{\mu_1} \end{cases} \dots (A2-4)$$

と定義する。次に、速度  $v$  を 2 つに分ける。すなわち  $v = v' + v''$  と表わす時の第 1 項は湧き出しと吸い込みのみに由来し、ポテンシャル  $\psi_1$  を使って

$$\begin{cases} \psi_1 = -\frac{1}{k_1^2} \operatorname{div} v \\ v' = -\operatorname{grad} \psi_1 \\ \Delta \psi_1 + k_1^2 \psi_1 = 0 \end{cases} \dots (A2-5)$$

と表わされるものとする。第 2 項は循環のみに由来するものとする。すると  $\operatorname{div} v'' = 0$  であるから

$$\begin{cases} \Delta v'' + k_3^2 v'' = 0 \\ -\operatorname{rot} \operatorname{rot} v'' + k_3^2 v'' = 0 \end{cases} \dots (A2-6)$$

となる。

ここで計算の便宜上、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを一つのベクトルで表わすことを考え、電磁気学における Hertz ベクトルに相当するベクトル  $\Pi_3$  を導入する。このとき  $v'' = \operatorname{rot} \operatorname{rot} r \Pi_3$  と表記する。 $z$  軸まわりの対称性のため、 $\Pi_3$  は  $\phi$  成分を持たない。(ただし、入射平面波は  $z$  軸方向に進行するものと仮定する。) すると、

$$\begin{cases} \Delta \Pi_3 + k_3^2 \Pi_3 = 0 \\ v_r'' = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Pi_3}{\partial \theta} \\ v_\theta'' = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} (r \Pi_3) \end{cases} \dots (A2-7)$$

となる。この式はヘルムホルツ方程式であり湯川ポテンシャルを基本解に持

ち、極座標表記を行うときにはベッセルの方程式となる。 $\phi$ 成分を持たないことからこの一般解は

$$\sum_n a_n \frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n(\cos\theta) \quad \dots \quad (\text{A2-8})$$

となる。 $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ は次数 $n+\frac{1}{2}$ 、偏角 $kr$  ( $k:k_1, k_3$ )なる円柱関数である。また、 $P_n$ は指数 $n$ のルジャンドル多項式である。

ここで境界条件を考え、球面を境界として内部と外部で別に計算し、重ね合わせて全体の場合を得ることにする。球の内部では、原点で有限な値をとる唯一の円柱関数であるベッセル関数 $J$ が解として適当である。以下の様な表記を行うとき、

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \quad \dots \quad (\text{A2-9})$$

ベクトル $\Pi_3$ とポテンシャル $\psi_1$ は次の様に求められる。

$$\begin{cases} \psi_1 = \sum A_n I_n(k_1 r) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_3 = \sum B_n I_n(k_1 r) P_n(\cos\theta) \end{cases} \quad \dots \quad (\text{A2-10})$$

球の外部は液体であると仮定しているため、運動方程式は次の様に表記する。

$$-\nu = \frac{1}{k_2^2} \cdot \text{grad div } \nu + \frac{1}{k_4^2} (\Delta \nu - \text{grad div } \nu) \quad \dots \quad (\text{A2-11})$$

ただし先程と同様に、以下の定義をする。

$$\begin{cases} k_2^2 = 4\pi^2 \omega^2 \frac{\rho_2}{\lambda_2 + 4\pi i \omega \mu_2} \\ k_4^2 = 2\pi \omega \frac{\rho_2}{i \mu_2} \end{cases} \quad \dots \quad (\text{A2-12})$$

ここで $\rho_2$ は液体の密度、 $\frac{1}{\lambda_2}$ は圧縮率、 $\mu_2$ は内部摩擦係数である。この式は弾

性体の場合の  $\mu_1$  を  $2\pi i \alpha \mu_2$  で置いたものであり、解析も同様に進めて良い。ただし、球の内部では原点での値が有限でなければならないためにベッセル関数が適当であったが、球の外部では無限遠方で波動が球面状に外部へ広がるためハンケルの第2関数（第3種円柱関数の内、第1種円柱関数から、第2種円柱関数と純虚数の積を引いたもの）が適当である。解は以下の様に得られる。

$$\begin{cases} \psi_2 = \sum C_n h_n(k_2 r) P_n(\cos\theta) \\ \Pi_4 = \sum D_n h_n(k_4 r) P_n(\cos\theta) \end{cases} \quad \dots (A2-13)$$

ただし、

$$h_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{H_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \quad \dots (A2-14)$$

と定義する。

次に、入射してくる平面波のポテンシャル  $\psi_e$  は、進行方向が  $z$  軸方向であるならば、

$$\psi_e = e^{-ik_z z} = e^{-ik_r r \cos\theta} = \sum (-i)^n (2n+1) I_n(k_2 r) P_n(\cos\theta) \quad \dots (A2-15)$$

となる。

こうした結果を用いて散乱の全断面積を求めた解析例の一つに Ying らのものがあ[56]。

球形の物体が弾性体に含有されている場合を解析する。弾性体は弾性係数が  $\lambda_1$  と  $\mu_1$ 、密度が  $\rho_1$  とする。入力波は  $z$  方向に進行する平面粗密波を考える。入力波による変位は、波の強度を 1 とする時次の様に与えられる。

$$\begin{cases} \vec{S}_i = \vec{s}_i \cdot e^{i\alpha z} \\ \vec{S}_i = \vec{s}_i \cdot e^{-ik_z z} \end{cases} \quad \dots (A2-16)$$

Herzfeldの解析と同様に、次の様に極座標で表記する。

$$\begin{cases} \bar{s}_i = -\nabla \psi_i \\ \psi_i = \frac{1}{k_1} \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m+1} (2m+1) j_m(kr) P_m(\cos\theta) \end{cases} \quad \cdots (A2-17)$$

ただし、 $\omega$ ：入力波の角振動数、 $k_1 = 2\pi/\Lambda$ 、 $\Lambda$ ：入力波の波長、 $\bar{z}$ ： $z$ の正の方向の単位ベクトル、 $j_m$ ： $m$ 次の球ベッセル関数、 $P_m$ ： $m$ 次のルジャンドル多項式である。また、

$$k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1 + \frac{2\mu_1}{\rho_1}}} \quad \cdots (A2-18)$$

と定義する。

球形の含有物による散乱波、および粒子内部に励起された波動による変位を計算するため、次の運動方程式を用いる。

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \bar{S} + \mu\nabla^2 \bar{S} = \rho \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial t^2} \quad \cdots (A2-19)$$

$\bar{S}$ は変位であるが、時間と空間に変数分離して

$$\bar{S} = \bar{s} \cdot e^{i\omega t} \quad \cdots (A2-20)$$

( $\bar{s}$ は空間変数のみの関数)と記述出来るならば、

$$\left( \begin{aligned} \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \bar{s} + \frac{1}{\kappa^2} (\nabla^2 \bar{s} - \nabla \nabla \cdot \bar{s}) + \bar{s} &= 0 \\ k &= \frac{\omega}{\sqrt{\lambda + \frac{2\mu}{\rho}}} \quad \dots \text{(A2-21)} \\ \kappa &= \frac{\omega}{\sqrt{\mu}} \end{aligned} \right.$$

となる。ここで  $\bar{s}$  は含有物に関して球対称であることから、

$$\left( \begin{aligned} \bar{s} &= -\nabla \psi + \nabla x [\nabla x (\bar{r} \cdot r \Pi)] \\ (\nabla^2 + k^2) \psi &= 0 \quad \dots \text{(A2-22)} \\ (\nabla^2 + \kappa^2) \Pi &= 0 \end{aligned} \right.$$

となる。ただし  $\psi$  と  $\Pi$  は  $\varphi$  を変数としない関数である。また  $\bar{r}$  は  $r$  が増加する方向の単位ベクトルである。この一般解は次の様に与えられる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{Z_{m+\frac{1}{2}}(lr)}{\sqrt{lr}} P_m(\cos\theta) \quad \dots \text{(A2-23)}$$

ただし、 $Z_{m+\frac{1}{2}}(lr)$  は  $m + \frac{1}{2}$  次のベッセル関数であり、 $l$  は  $k$  または  $\kappa$  である。 $c_m$  は定数であり、境界条件で決定される。

球形の含有物による散乱波、および粒子内部に励起された波動は式A2-20の様記述出来る。粒子は中心と座標の原点が一致する様に配置されているため、散乱波は原点を含まない領域で定義されている。散乱波の変位は次の様に定まる。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_s = \bar{s}_s \cdot e^{i\alpha x} \\ \bar{s}_s = -\nabla \psi_s + \nabla x \nabla x (\bar{r}_r \Pi_s) \\ \psi_s = \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m(k_1 r) P_m(\cos \theta) \quad \dots \text{(A2-24)} \\ \Pi_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m h_m(k_1 r) P_m(\cos \theta) \end{cases}$$

ただし、 $h_m(\xi)$ は次の様に定義される。

$$h_m(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{H_{m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \quad \dots \text{(A2-25)}$$

$H_{m+\frac{1}{2}}(\xi)$ はハンケルの第2関数である。

粒子内部に励起された波動による変位は次の様に定まる。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_q = \bar{s}_q \cdot e^{i\alpha x} \\ \bar{s}_q = -\nabla \psi_q + \nabla x \nabla x (\bar{r}_r \Pi_q) \\ \psi_q = \sum_{m=0}^{\infty} C_m j_m(k_2 r) P_m(\cos \theta) \quad \dots \text{(A2-26)} \\ \Pi_q = \sum_{m=0}^{\infty} D_m j_m(k_2 r) P_m(\cos \theta) \end{cases}$$

ただし、含有物の弾性定数を  $\lambda_2$  と  $\mu_2$ 、密度を  $\rho_2$  と定義しておく。

以上の結果を次の式に代入すれば応力が与えられる。

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \rho\omega^2 \left\{ \psi + \frac{2}{\kappa^2} \left[ \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\Omega \psi}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Omega \Pi}{r} \right) \right] \right\} \\ \sigma_{\theta r} = -2 \frac{\rho\omega^2}{\kappa^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\Pi}{r^2} \left( 1 + \frac{\kappa^2 r^2}{2} \right) + \frac{\Omega \Pi}{r^2} \right\} \quad \dots \text{(A2-27)} \\ \sigma_{\phi\theta} = 0 \end{cases}$$

ただし、

$$\begin{cases} \Omega = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \dots (A2-28) \\ \Pi_i = 0 \end{cases}$$

である。同様に変位は次の式で与えられる。

$$\begin{cases} s_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\Omega\Pi}{r} \\ s_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(r\Pi)}{\partial\theta\partial r} \dots (A2-29) \\ s_\varphi = 0 \end{cases}$$

以上の結果を使って散乱の計算を行う。含有物の半径を  $a$  とし、その外部に半径  $b$  の球形領域を考える。含有物に散乱され半径  $b$  の球形領域上の微小面積  $dA$  を通過するエネルギーを全領域で積分すると、単位時間について次の様に与えられる。

$$\iint \left[ \Sigma_{xr} \cdot \frac{\partial S_x}{\partial t} + \Sigma_{yr} \cdot \frac{\partial S_y}{\partial t} + \Sigma_{zr} \cdot \frac{\partial S_z}{\partial t} \right]_{\text{scattered wave}} dA \dots (A2-30)$$

ただし、 $\Sigma_{xr}$  はベクトル  $\vec{r}_1$  に垂直な面上で  $x$  方向に作用する応力成分を表わす。また  $S_x$  は  $x$  方向の変位を表わす。  $y$  と  $z$  についても同様である。ただし、

$$\begin{cases} [\Sigma_{xr}]_{\text{scattered wave}} = \sigma_{rx} \cdot e^{i\alpha x} \\ [S_x]_{\text{scattered wave}} = s_{rx} \cdot e^{i\alpha x} \end{cases} \dots (A2-31)$$

なる表記をする。式 (A2-30) の実部を極座標で表記する。  $\sigma$  の複素共役を  $\bar{\sigma}$  とする時、

$$\frac{i\omega}{2} \int_0^\pi \left[ (\sigma_{rr} \bar{s}_{rs} + \sigma_{\theta r} \bar{s}_{\theta s} + \sigma_{\varphi r} \bar{s}_{\varphi s}) - (\bar{\sigma}_{rr} s_{rs} + \bar{\sigma}_{\theta r} s_{\theta s} + \bar{\sigma}_{\varphi r} s_{\varphi s}) \right]_{r=b} \cdot 2\pi b^2 \sin\theta d\theta \dots (A2-32)$$

これに式 (A2-27) と式 (A2-29) を代入し、最終的に次の式を得る。

$$4\pi\omega^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left[ \frac{1}{k_1} |A_m|^2 + \frac{m(m+1)}{\kappa_1} |B_m|^2 \right] \quad \dots (A2-33)$$

散乱断面積  $\gamma$  は単位時間に散乱された全エネルギーと、単位面積を単位時間  
に通過する入射エネルギーとの比と定義される。よって式 (A2-33) から次の  
結果が得られる。

$$\gamma = 4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left[ |A_m|^2 + m(m+1) \frac{k_1}{\kappa_1} |B_m|^2 \right] \quad \dots (A2-34)$$

含有物が弾性体 (添え字 "2") ならば、次の様になる。

$$\left( \begin{aligned} (\gamma)_{\text{elastic sphere}} &= \frac{4\pi}{9} g_c k_1^4 a^6 \\ g_c &= \left( \frac{\frac{3\kappa_1^2}{k_1^2}}{\left( \frac{3\kappa_2^2}{k_2^2} - 4 \right) \frac{\mu_2 + 4}{\mu_1}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3} \left[ 1 + 2 \left( \frac{\kappa_1}{k_1} \right)^3 \right] \left[ \left( \frac{\kappa_2}{k_2} \right) \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1} - 1 \right]^2 \quad \dots (A2-35) \\ &+ 40 \left[ 2 + 3 \left( \frac{\kappa_1}{k_1} \right)^5 \right] \left( \frac{\frac{\mu_2 - 1}{\mu_1}}{2 \left( \frac{3\kappa_1^2}{k_1^2} + 2 \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} + \left( \frac{9\kappa_1^2}{k_1^2} - 4 \right)} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

ただし、

$$\frac{\kappa_1}{k_1} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\mu_1}} + 2 \quad \dots (A2-36)$$

である。

空孔の場合、波長に対して半径  $a$  が十分に小さく、

$$\begin{cases} k_1 a \ll 1 \\ \kappa_1 a \ll 1 \end{cases} \quad \dots \quad (\text{A2-37})$$

であるならば、次の様に簡略化出来る。

$$\begin{cases} (\gamma)_{\text{spherical cavity}} = \frac{4\pi}{9} g \frac{1}{k_1^2} (k_1 a)^6 \\ g = \frac{4}{3} + 40 \frac{2 + 3\left(\frac{\kappa_1}{k_1}\right)^5}{\left[4 - 9\left(\frac{\kappa_1}{k_1}\right)^2\right]^2} - \frac{3\left(\frac{\kappa_1}{k_1}\right)^2}{2} + \frac{3\left(\frac{\kappa_1}{k_1}\right)^3}{2} + \frac{9\left(\frac{\kappa_1}{k_1}\right)^4}{16} \quad \dots \quad (\text{A2-38}) \end{cases}$$

### Appendix3 ノッチ付円断面引き張り試験片の、応力3軸度

Bridgman[57]はMisesの降伏条件に従う材料の、円断面のノッチ付引き張り試験片について次の仮定の下、ノッチ部近傍での応力状態を見積もっている。

仮定

- ・材料は完全剛塑性である
- ・降伏の応力条件 $\bar{\sigma}$ は一定である
- ・軸対称の円断面の引き張り
- ・ノッチはあまり鋭くない
- ・最小断面部の各変形要素は一様

図A3-1の様に、座標系や記号を定める。この時仮定により、次の関係が成立する。

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta \quad \cdots (A3-1)$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad \cdots (A3-2)$$

さらに、平行方程式および降伏条件式から、次の関係が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad \cdots (A3-3)$$

ここで図A3-2の様に、 $\phi$ を子午面の主応力軸に対する傾斜角とする変数変換

を行う時、 $z=0$ の近傍で、

$$\begin{cases} \sigma_z \approx \sigma_3 \\ \sigma_r \approx \sigma_1 \\ \tau_{rz} \approx \bar{\sigma}\psi \end{cases} \quad \dots \text{(A3-4)}$$

なる近似式が成立する。この時、次の関係式が導かれる。

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \bar{\sigma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\bar{\sigma}}{\rho} \quad \dots \text{(A3-5)}$$

式 (A3-3) および (A3-5) に関して、境界条件を考慮し積分する。

$$\frac{\sigma_z}{\bar{\sigma}} \int_r^a \left( \frac{dr}{\rho} \right) \quad \dots \text{(A3-6)}$$

式 (A3-6) にはノッチ部の応力状態の解析解が無いため、 $\rho$ を $r$ の関数であると仮定し、 $\sigma_z$ を算出する。子午面の主応力線は、外側では試験片の表面( $\rho=R$ )に沿い、なだらかに変化して中心では軸と平行になる必要がある。そこで次の仮定を新たに行う。

・最小断面付近においては横方向主応力線は、表面と中心軸に直交する円弧を描く

この時、幾何学的考察から次の式が求められる。

$$\rho = \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2r} \quad \dots \text{(A3-7)}$$

式 (A3-6) および (A3-7) より、

$$\frac{\sigma_z}{\bar{\sigma}} = 1 + \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \quad \dots \text{(A3-8)}$$

なる関係を得ることが出来る。同様に、

$$\frac{\sigma_z}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_{\theta}}{\bar{\sigma}} = \ln\left(\frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR}\right) \quad \dots (A3-9)$$

$$\frac{\sigma_{mz}}{\bar{\sigma}} = \left(1 + \frac{2aR}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{2R}{a}\right) \quad \dots (A3-10)$$

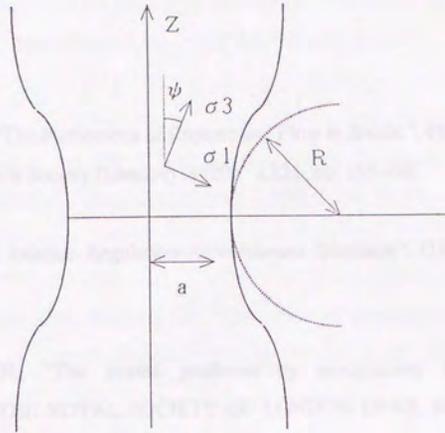
( $\sigma_{mz}$ : 平均軸応力)

$$\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR}\right) \quad \dots (A3-11)$$

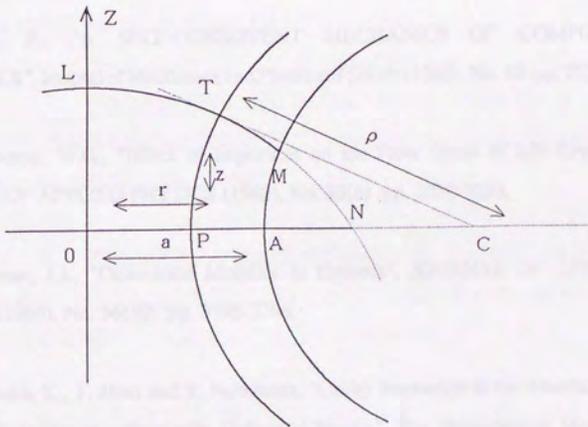
応力3軸度は試験片中心部で最大となることがわかる。試験片中心軸上での  
応力3軸度は式 (A3-11) で  $r=0$  とし、

$$\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} + \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \quad \dots (A3-12)$$

となる。



図A3-1 引き張り試験片ノッチ部



図A3-2 引き張り試験片ノッチ部の表記

## 参考文献

1. Griffith, A.A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids.". Philosophical Transactions of the Royal Society (London) (1920), **A221** :pp. 163-198.
2. FAA, "Federal Aviation Regulation Airworthiness Standards". (1978), **FAR 25-571**
3. Nabarro, F.R.N., "The strains produced by precipitation in alloys". PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON (1940), No. **175** :pp. 519-538.
4. Kröer, E., "ÜBER DIE BERECHNUNG DER VERZERRUNGSENERGIE BEI KEIMBILDUNG IN KRISTALLEN". ACTA METALLURGICA (1954), No. **2**(March) :pp. 302-309.
5. Hill, R., "A SELF-CONSISTENT MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS". Journal of Mechanics and Physics of Solids (1965), No. **13** :pp. 213-222.
6. Johnston, W.G., "Effect of Impurities on the Flow Stress of LiF Crystals". JOURNAL OF APPLIED PHYSICS (1962), No. **33**(6) :pp. 2050-2058.
7. Gilman, J.J., "Dislocation Mobility in Crystals". JOURNAL OF APPLIED PHYSICS (1965), No. **36**(10) :pp. 3195-3206.
8. Tanaka, K., T. Mori and T. Nakamura, "Cavity Formation at the Interface of a Spherical Inclusion in a Plastically Deformed Matrix". The Philosophical Magazine (1970), No. **21** :pp. 267-279.

9. Eshelby, J.D., "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems". Proceedings of the Royal Society of London (1957), A 241 :pp. 376-396.
10. Argon, A.S. and R. Safoglu, "Cavity Formation from Inclusions in Ductile Fracture". METALLURGICAL TRANSACTIONS A (1975), No. 6A(April) :pp. 825-837.
11. Edelson, B.I. and W.M. Baldwin JR., "The Effect of Second Phases on the Mechanical Properties of Alloys". TRANSACTIONS OF THE ASM (1962), No. 55 :pp. 230-250.
12. Gurland, J. and J. Plateau, "The Mechanism of Ductile Rupture of Metals Containing Inclusions". TRANSACTIONS OF THE ASM (1963), No. 56 :pp. 442-454.
13. LeRoy, G., J.D. Embury, G. Edward and M.F. Ashby, "A MODEL OF DUCTILE FRACTURE BASED ON THE NUCLEATION AND GROWTH OF VOIDS". Acta Metallurgica (1981), No. 29 :pp. 1509-1522.
14. Ball, J.M., "DISCONTINUOUS EQUILIBRIUM SOLUTIONS AND CAVITATION IN NONLINEAR ELASTICITY". Philosophical Transactions of Royal Society of London (1982), A306 :pp. 557-611.
15. 塩谷 義、町田 隆志、"延性破壊におけるボイドの発生・成長機構" 航空宇宙材料シンポジウム講演集、(第15回、昭和59年度、東京大学工学部境界領域研究施設)、昭和60年3月11日 :pp. 12-17.
16. 塩谷 義、竹村 誠洋、"延性破壊におけるボイドの発生・成長の1モデル" 航空宇宙材料シンポジウム講演集 (第16回、昭和60年度、東京大学工学部境界領域研究施設)、昭和61年3月10日 :pp. 19-24.

17. T. Shioya, T. Morimoto and K. Satoh, "MICROMECHANISM OF VOID NUCLEATION AND GROWTH IN DUCTILE FRACTURE". PROCEEDINGS OF THE THIRTYFOURTH JAPAN CONGRESS ON MATERIALS RESEARCH (1991), pp. 257-261.
18. Qiu, Y.P. and G.J. Weng, "THE INFLUENCE OF INCLUSION SHAPE ON THE OVERALL ELASTOPLASTIC BEHAVIOR". International Journal of Solids and Structures (1991), No. 27(12) :pp. 1537-1550.
19. Huang, Y., J.W. Hutchinson and V. Tvergaard, "CAVITATION INSTABILITIES IN ELASTIC-PLASTIC SOLIDS". Journal of Mechanics and Physics of Solids (1991), No. 39(2) :pp. 223-241.
20. Horgan, C.O., "VOID NUCLEATION AND GROWTH FOR COMPRESSIBLE NON-LINEARLY ELASTIC MATERIALS : AN EXAMPLE". International Journal of Solids and Structures (1992), No. 29(3) :pp. 279-291.
21. Berg, C.A., "The motion of cracks in plane viscous deformation." Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics (1962), Berkeley, Ca., June :pp. 885-892.
22. Budiansky, B. and J.W. Hutchinson, "SELF-SIMILAR SHAPES AND ASYMPTOTIC DILATATION-RATES FOR VOIDS IN VISCOUS SOLIDS". IUTAM (International Union of Theoretical and Applied Mechanics) (1980) :pp. 243-245.
23. Budiansky, B., J.W. Hutchinson and S. Slutsky, "Void Growth and Collapse in Viscous Solids". Mechanics of Solids (edited by Hopkins, H. G. and Sewell M. J., Pergamon Press, Oxford) (1982), pp. 13-45.

24. Rice, J.R. and D.M. Tracey, "ON THE DUCTILE ENLARGEMENTS OF VOIDS IN TRIAXIAL STRESS FIELDS". *Journal of Mechanics and Physics of Solids* (1969), No. **17** :pp. 201-217.
25. McClintock, F.A., "A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes". *Journal of Applied Mechanics* (1968), No. **35** :pp. 363-371.
26. Thomason, P.F., "A Theory for Ductile Fracture by Internal Necking of Cavities". *JOURNAL OF THE INSTITUTE OF METALS* (1968), No. **96** :pp. 360-365.
27. Thomason, P.F., "A Theoretical Relation Between  $K_{IC}$  and Basic Material Properties in Ductile Metals". *International Journal of Fracture Mechanics* (1971), No. **7**(4, December) :pp. 409-419.
28. Kudo, H., "AN UPPER-BOUND APPROACH TO PLANE-STRAIN FORGING AND EXTRUSION-1". *International Journal of Mechanics and Science* (1960), No. **1** :pp. 57-83.
29. Melander, A. and U. Stålberg, "The effect of void size and distribution on ductile fracture". *International Journal of Fracture* (1980), No. **16**(5, October) :pp. 431-439.
30. Fleck, N.A. and J.W. Hutchinson, "Void growth in shear". *PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON* (1986), **A 407** :pp. 435-458.
31. Michel, J.C. and P. Suquet, "THE CONSTITUTIVE LAW OF NONLINEAR VISCOUS AND POROUS MATERIALS". *Journal of Mechanics and Physics of Solids* (1992), No. **40**(4) :pp. 783-812.
32. Lee, B.J. and M.E. Mear, "AXISYMMETRIC DEFORMATION OF POWER-

LAW SOLIDS CONTAINING A DILUTE CONCENTRATION OF ALIGNED SPHEROIDAL VOIDS". *Journal of Mechanics and Physics of Solids* (1992), No. 40(8) :pp. 1805-1836.

33. Andersson, H., "ANALYSIS OF A MODEL FOR VOID GROWTH AND COALESCENCE AHEAD OF A MOVING CRACK TIP". *Journal of Mechanics and Physics of Solids* (1977), No. 25 :pp. 217-233.

34. Tvergaard, V., "Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions". *International Journal of Fracture* (1981), No. 17(4) :pp. 389-407.

35. Tvergaard, V., "On localization in ductile materials containing spherical voids". *International Journal of Fracture* (1982), No. 18(4, April) :pp. .

36. McMeeking, R.M. and C.L. Hom, "Finite element analysis of void growth in elastic-plastic materials". *International Journal of Fracture* (1990), No. 42 :pp. 1-19.

37. 井関 日出男、室田 忠雄、加藤 和典、林 茂夫、"二軸引張りを受ける金属多孔板の成形限界  
On the Forming Limit Diagram of Perforated Sheet Metals under Biaxial Tension". *日本機械学会論文集 (A編)* (1989), No. 55(512号) :pp. 994-999.

38. 岸本 喜久雄、吉田 勉、青木 繁、坂田 勝、"混合モード荷重下のき裂先端近傍における空孔の成長解析" *日本機械学会論文集 (A編)* (1989), No. 55(512号) :pp. 803-810.

39. 富田 佳宏、平田 治伸、"引張り荷重下での切欠きおよび有孔ブロックの熱弾粘塑性変形挙動  
Deformation Behaviors of thermo Elasto-viscoplastic Blocks with Notch or Hole under Tension". *日本機械学会論文集 (A編)* (1991), No. 57(539号) :pp. 1599-1605.

40. Gurson, A.L., "Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part 1- Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media". Journal of Engineering Materials and Technology (1977, JANUARY) :pp. 2-15.

41. 長岐 滋、R. Sowerby, "空孔を含む材料の塑性変形と異方性降伏関数 Plastic Deformation of a Material with Voids and its Anisotropic Yield Function". 日本機械学会論文集 (A編) (1991, No. 57(539号) :pp. 146-152.

42. 長岐 滋、R. Sowerby, "空孔を含む材料の塑性変形と異方性降伏関数 (第2報、単位セルの変形挙動と降伏曲面) Plastic Deformation of a Material with Voids and an Anisotropic Yield Function (2nd Report, Deformation Behavior of a Unit Cell and Yield Locus)". 日本機械学会論文集 (A編) (1991, No. 57(544号) :pp. 91-98.

43. 村上 澄男、大野 信忠, "微視的空げきによる有効面積の減少を陽に表した多軸クリープ損傷変数" 日本機械学会論文集 (A編) (1980, No. 46(409-号) :pp. 940-946.

44. 小林 謙一、久米 賢二, "密度変化率とボイド面積比による工業用純アルミニウムの第3次クリープ損傷評価 Evaluation of Tertiary Creep Damage on Pure Aluminium with both Methods of Change in Density and the Ratio of Creep Voids in an Area". 日本機械学会論文集 (A編) (1991, No. 57(539号) :pp. 124-128.

45. Perzyna, P., "On Constitutive Modelling of Dissipative Solids for Plastic Flow, Instability and Fracture, in PLASTICITY TODAY Modelling, Methods and Applications", A. Sawczuk and G. Bianchi, Editors. 1985, ELSEVIER APPLIED SCIENCE PUBLISHERS: LONDON and NEW YORK. pp.657-679.

46. Shioya, T. and T. Machida, "An Experimental Study of Void Nucleation and Growth in Ductile Fracture". Transaction of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences (1986), No. 29(85) :pp. 163-170.
47. 塩谷 義、竹村 誠洋、"延性破壊における微視的機構の研究"航空宇宙材料シンポジウム講演集、(第17回、昭和61年度、東京大学工学部境界領域研究施設)、昭和62年3月9日
48. Hahn, G.T., "A MODEL FOR YIELDING WITH SPECIAL REFERENCE TO THE YIELD-POINT PHENOMENA OF IRON AND RELATED BCC METALS". ACTA METALLURGICA (1962), No. 10(AUGUST) :pp. 727-738.
49. 塩谷 義、森本 哲也、"超音波透過法を用いた延性破壊の微視的機構の解析"第33回航空原動機・宇宙推進講演会講演集(1993), pp. 58-61.
50. 実吉 純一、菊池 喜充、能本 乙彦、"超音波技術便覧"(1960)、日刊工業新聞社。
51. 干潟 昭、"金属の塑性変形と超音波減衰の関係について"機械試験所報告(1960)、第39号(10月) :pp. 27-28.
52. Rayleigh, L., "The Theory of Sound". American Edition. Vol.2. 1877, The Macmillan Company, reprinted by Dover Publications, Inc. 236-284, Chapter 17.
53. Herzfeld, K.F., "The Scattering of Sound-Waves by small Elastic Spheres". Philosophical Magazine (1930), No. 9 :pp. 741-751.
54. Herzfeld, K.F., "Propagation of Sound in Suspensions.". Philosophical Magazine (1930), No. 9 :pp. 752-768.

55. Love, A.E.H., "A TREATISE ON THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY". 4th ed. 1926, Cambridge, reprinted by DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK.

56. Ying, C.F. and R. Truell, "Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Spherical Obstacle in an Isotropically Elastic Solid". JOURNAL OF APPLIED PHYSICS (1956), No. 27(9) :pp. 1086-1097.

57. Bridgman, P.W., "THE STRESS DISTRIBUTION AT THE NECK OF A TENSION SPECIMEN". Transactions of the A.S.M. (1944), No. 32 :pp. 553-574.

## 謝辞

本研究の遂行に際し終始熱心に御指導下さいました東京大学工学部航空宇宙工学科塩谷義教授に対し、ここに謹んで感謝の意を表します。

論文審査の主査である、東京大学先端科学技術センターの武田展雄助教授には多大な御指導と御助言を頂きました。また、東京大学工学部航空宇宙工学科近藤恭平教授、宇宙科学研究所の小野田淳次郎教授、東京大学生産技術研究所の木村好次教授には論文審査を御快諾頂きました。心からの感謝の意を表します。

塩谷研究室助手の佐藤勝彦氏および石田龍吉氏には実験の全過程を通じ、様々な御協力を頂きました。航空宇宙工学科工作室の百々悟氏には試験片や実験装置の制作にあたり、大変な御苦勞をおかけしました。ここに厚くお礼申し上げます。

最後に、輪講会等で貴重な御意見および励ましの言葉をいただきました博士課程2年の周風華氏、修士課程2年の上西幸司氏、修士課程1年の板東博氏、技官の瀬古智子氏、学部4年の秋和利祐氏、杉山昌宏氏、増田雄亮氏、吉増大氏に深く感謝します。

