# 論文の内容の要旨

論文題目：On the quantitative shadowing property of topological dynamical systems

(位相的力学系の量的擬軌道追跡性について)

氏名： 川口徳昭

$(X,f)$ をコンパクト距離空間 $(X,d)$ と連続写像 $f:X\to X$ の組によって定められる位相的力学系とする．任意の $\epsilon>0$ についてある $\delta>0$ が存在して $f$ の任意の $\delta$-擬軌道が $\epsilon$-追跡可能であるとき $f$ は擬軌道追跡性 (shadowing property) をもつという．擬軌道追跡性の概念は双曲型の微分力学系の理論において導入された．それは Anosov, Bowen らによる初期の研究に端を発し，後に位相力学の枠組みに取り込まれ，以来力学系の定性的研究において興味深く豊かな結果をもたらしてきた．本論文では位相的力学系の量的擬軌道追跡性について研究を行った．本研究において一貫する問題意識は擬軌道追跡性の定量化である．量的擬軌道追跡性は第三章において定義されるが，本論文では可能な限りすべての結果を定量的な形式で与えた．以下で各章の要旨を述べる．第一章では各章の背景を述べるとともに，結果を定式化した．

第二章では初期値鋭敏性 (鋭敏性)，量的擬軌道追跡性の観点から，位相的力学系のある点がエントロピー点によって近似されるための十分条件を与えた．初期値鋭敏性はカオス的な力学系を特徴づける一性質であるとされるが，初等的な例が示すように，それ自体では系が正のエントロピーをもつことを必ずしも保証しない．最近のいくつかの研究はある点がエントロピー点であるための十分条件を，一点における鋭敏性，近傍における回帰性，そして擬軌道追跡性の観点から与えている (e.g. [5])．本章における主結果は，そのような研究の動向に沿いながら新しいタイプの定量的な結果を与えるものであり，従来の結果を補完する．

**定理 1** ([2])**.** $f:X\to X$ を連続写像とし，$S\subset X$ を $f$-不変なコンパクト部分集合とする．$0<2b<e$ をみたす定数 $e,b$ が存在し，

$$\{x\in S:\omega(x,f)\cap Sen_e(f|_S)\neq\emptyset\}$$

が $S$ において稠密，かつ $f$ が $S$ の近傍で $b$-擬軌道追跡性をもつならば，任意の $x\in S$ に対して，$d(x,y)\le b$ をみたすエントロピー点 $y\in X$ が存在する．

定理 1 は, 極限において鋭敏な点の稠密性の仮定, そして近傍での定量的な擬軌道追跡性の仮定の下で, その部分集合の任意の点がエントロピー点で近似されることを主張する．系として特に $f$ が $S$ の近傍において真の擬軌道追跡性をもつ場合には $S$ の任意の点がエントロピー点であることが結論される．最も単純な場合として次の系を得る．

**系 1.** *初期値鋭敏性をみたす連続写像 $f: X \to X$ が擬軌道追跡性をもつならば $X$ の任意の点はエントロピー点である．*

定理 1 の証明のアイデアは, $f$ の $\delta$-鎖による樹状構造の構成とその追跡である．ただし, $S$ の点がその $\omega$-極限集合に到達するまでの時間及び微小な初期条件のズレが一定以上に拡大するまでの時間が有界ではないため, 単に $f$ の軌道を接続するという構成によっては結論を得ることはできない．この技術的な困難は $\delta$-鎖による短絡の補題 (shortcut lemma) の導入によって乗り越えられた．$f$ が同相写像である場合には, 両側軌道を考慮し, 両側での拡大を許容することによって弱鋭敏性の概念が定義される．本章では弱鋭敏性をもつ同相写像に対しても同様の結果を得たが, それは本質的に定理 1 の系である．

次に第三章の要旨を述べる．最近, Morales によって同相写像に対する擬軌道可追跡点 (shadowable points) の概念が導入された [6]．それは擬軌道追跡性を各点ごとの追跡に分解するものであり, 擬軌道追跡の理論の局所的な観点からの再考を促す．本章では擬軌道可追跡点の概念を連続写像に拡張するとともに, 追跡の精度を固定することによって量的擬軌道可追跡点 (quantitative shadowable points) を定義し, その基本的な性質といくつかの結果を証明した．まず冒頭部分で量的擬軌道追跡性 ($b$ 及び $c+$-擬軌道追跡性), 量的擬軌道可追跡点 ($b$ 及び $c+$-擬軌道可追跡点) を定義する．量的擬軌道可追跡点の導入によって連続写像または同相写像の任意の点における追跡可能性を定量的に測ることが可能となる．本章の一結果である次の定理はその定義の自然性を裏付けるものである．

**定理 2** ([3])**.** *$f: X \to X$ を同相写像, $c \geq 0$ とし, $f$ の $c+$-擬軌道可追跡点の集合を $Sh_{c+}(f)$ と表す．このとき $Sh_{c+}(f)$ は $f$-不変な $X$ の Borel 集合であり, 次の性質は同値である．*

- *$Sh_{c+}(f) = X$.*
- *$f$ は $c+$-擬軌道追跡性をもつ．*

次いで本章の主な結果を述べる．次の定量的な結果は Morales によって提起された問いに対する解答を含むものである．

**定理 3** ([3])**.** *同相写像 $f: X \to X$ が鎖推移的または推移的であるとき, 任意の $c \geq 0$ に対して $Sh_{c+}(f) = \emptyset$ または $Sh_{c+}(f) = X$ である．*

また次の結果は $c+$-擬軌道追跡性をもつ同相写像をエルゴード理論的観点から特徴づける．同相写像 $f: X \to X$ について, エルゴード的 $f$-不変測度の集合を $\mathcal{M}_f^{erg}(X)$ と表す．

**定理 4** ([3])**.** *$f: X \to X$ を同相写像, $c \geq 0$ とする．このとき次の性質は同値である．*

- *任意の $\mu \in \mathcal{M}_f^{erg}(X)$ に対して $\mu(Sh_{c+}(f)) = 1$.*
- *$f$ は $c+$-擬軌道追跡性をもつ．*

本章ではさらに Morales のある定理を定量化する結果を得た. また擬軌道可追跡点に類似する概念として, Akin による鎖連続性 (chain continuity) の概念があるが, それらの類似性を述べるとともに例を挙げることによって差異を示した.

最後に第四章の要旨を述べる. 第四章では (量的) 擬軌道可追跡点に関する研究を進めた. 主となるアイデアは擬軌道追跡性に関する議論をカオスまたは同程度連続性との関わりにおいて局所化, 定量化することである. まず本章における最初の主結果を述べる.

**定理 5** ([4])**.** *$f : X \to X$ を連続写像, $x \in X$ を $c+$-擬軌道可追跡点 ($c \geq 0$) とする. $e > 2c$ でかつ次の条件のどれか一つがみたされるならば, $d(x, w) \leq c$ をみたすエントロピー点 $w \in X$ が存在する.*

(1) $f$-不変なコンパクト部分集合 $S \subset X$ で $f|_S$ が鎖回帰的かつ
$$\omega(x, f) \cap Sen_e(f|_S) \neq \emptyset$$
をみたすものが存在する.

(2) $\{x, y\} \subset X$ が係数 $e$ の *Li-Yorke* 対となるような $y \in X$ が存在する.

(3) $f$-不変なコンパクト部分集合 $S \subset X$ で $S \subset \omega(x, f)$ かつ $\omega(x, f) \setminus B_e(S) \neq \emptyset$ をみたすものが存在する. ここで $B_e(S) = \{y \in X : d(y, S) \leq e\}$.

定理 5 は力学系のカオス的な性質との関わりにおいて, 量的擬軌道可追跡点がエントロピー点で近似されるための十分条件を与えている. 系として擬軌道可追跡点がエントロピー点であるための比較的簡明な十分条件を得る. 定理 5 の証明は, (1)-(3) のいずれかがみたされるならば $x$ の軌道がある点に集積し, その点を通過する十分に分離された $f$ の $\delta$-サイクルの対が存在するという観察に基づく. 実際 $x$ を始点とし, 最終的にそれらのサイクルに沿って走り続ける擬軌道を構成して追跡することによって結論が得られる. そのような分離された $f$ の $\delta$-サイクルの対と擬軌道追跡性の組み合わせによって $f$ のある冪の部分系から全シフトへの商写像が構成可能であることは既知の事実であるが, 本章では分離された $f$ の $\delta$-サイクルの対を明示的に定義し, そのような対象が存在するための十分条件を与えることにより定理 5 を証明した. 定理 5 の帰結として擬軌道追跡性の仮定の下での二つのカオスの定義の一致, すなわち Li-Yorke カオスと正のエントロピーの同値性が示される. さらに第二章で証明した短絡の補題のバリエーションによって, Li-Yorke 対の存在と量的擬軌道追跡性の仮定の下でのエントロピーの下限を与えた. 最後に本章におけるもう一つの主結果を述べる.

**定理 6** ([4])**.** *$f : X \to X$ を連続写像とし, その擬軌道可追跡点の内点集合を $\mathrm{Int}\, Sh^+(f)$ と表す. $\mathrm{Int}\, Sh^+(f)$ を含む $f$-不変なコンパクト部分集合 $S \subset X$ で $f|_S$ が鎖回帰的なものが存在するとき, 任意の $x \in \mathrm{Int}\, Sh^+(f)$ に対して以下の二つの性質の族 (S1)-(S5) 及び (E1)-(E4) の各々は同値な性質から成り, (S1) か (E1) の一方のみが成り立つ.*

(S1) $x \in \overline{Sen(f)}$.

(S2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B_\epsilon(x)$ に含まれる $f$ のある冪の部分系 $Y$ から全シフトへの商写像が存在し, かつ, 周期点であるかその軌道閉包がある加算器に位相共役であるような $B_\epsilon(x)$ の点が存在する.

(S3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B_\epsilon(x)$ の点でその軌道閉包が極小かつ初期値鋭敏的な部分系であるものが存在する.

(S4) $x$ はエントロピー点である.
(S5) $x \notin \mathrm{Int}\, RR(f)$.（$RR(f)$ は正則回帰点の集合）
(E1) $x \in \mathrm{Int}\, EC(f)$.（$EC(f)$ は同程度連続点の集合）
(E2) $x$ のある近傍 $U$ が存在し, $U$ の任意の点が, 周期点であるかまたは軌道閉包がある加算器に位相共役であるような点からなる.
(E3) $x$ はエントロピー点でない.
(E4) $x \in \mathrm{Int}\, RR(f)$.

さらに $x \in EC(f)$ ならば $x$ は周期点であるかまたは $x$ の軌道閉包はある加算器に位相共役である.

定理 6 は鎖回帰性の仮定の下で $\mathrm{Int}\, Sh^+(f)$ の点についての二分法を提示する. その証明は Bowen による公理 A 微分同相写像の基本集合の分解のアイデアの類似による. 本定理は特に鎖回帰集合において全シフトの拡大と加算器がいかに混在するかを描写するが, それは非双曲的な現象の理解に向けた一つの知見を加えるものと考えられる [1].

## References


[1] E. Akin, M. Hurley, J. Kennedy, Dynamics of topologically generic homeomorphisms. *Mem. Amer. Math. Soc.* **164** (2003), no. 783.
[2] N. Kawaguchi, Entropy points of continuous maps with the sensitivity and the shadowing property, *Topol. Appl.* **210** (2016), 8-15.
[3] N. Kawaguchi, Quantitative shadowable points, *Dynamical Systems*, to appear.
[4] N. Kawaguchi, Properties of shadowable points: chaos and equicontinuity, submitted.
[5] T.K.S. Moothathu, Implications of pseudo-orbit tracing property for continuous maps on compacta, *Topol. Appl.* **158** (2011), 2232-2239.
[6] C.A. Morales, Shadowable points, *Dynamical Systems* **31** (2016), 347-356.