

論文審査の結果の要旨

氏名 川口徳昭

論文提出者川口徳昭は、本論文においてコンパクト距離空間上の連続写像及び同相写像の擬軌道追跡性に関して、追跡軌道の精度を固定することにより量的擬軌道追跡性を導入し、これまでの擬軌道追跡性を精度 0 への極限と表される特別な場合として理解した。その過程において、擬軌道追跡性を持つ場合に制限しても新しい結果となるいくつかの定理を証明し、擬軌道追跡性をもつ位相的力学系の研究に新たな方向を見いだした。

位相的力学系の擬軌道追跡性は閉多様体においては連続写像の空間における 生成的性質 (**generic property**) であるため、擬軌道追跡性を調べることは、位相的力学系の大域的理解につながる。さらに量的擬軌道追跡性まで広げることにより非双曲的な力学系も許容するため、さらに一般的な位相的力学系を扱うことになる。一方で、可微分力学系における双曲型集合の持つ位相的な性質としてこれまでよく研究されてきた拡大性と擬軌道追跡性の両方をみたく位相的力学系から、擬軌道追跡性だけを仮定する新しい位相的力学系研究の流れがある。とりわけ **Morales** による擬軌道追跡性の局所化としての擬軌道可追跡点の導入はこれまでの大域的な枠組みの変更を試みた注目すべき概念である。

本論文は、大きく分けて 3 つのトピックスについて擬軌道追跡性の定量化とそれに伴う結果を証明した。それらはそれぞれ第二章、第三章、第四章に対応する。まず第二章において擬軌道追跡性をもつ連続写像が正の位相的エントロピーを持つための十分条件を量的な設定で証明した。すなわち量的擬軌道追跡性を持つ場合に、ある点の極限集合における鋭敏な依存性の下で、追跡する軌道の近似精度に応じてその点がエントロピー一点で近似されることを証明した。最も単純な場合として初期値鋭敏性をみたく連続写像が擬軌道追跡性を持つならば任意の点はエントロピー一点であることが従う。この結果の先行結果としては 2011 年に出版された点の回帰性を仮定する **Moothathu** の結果があるが、本論文では回帰性を仮定せずに、擬軌道の樹状構造から、新たに開発した短絡の補題(**shortcut lemma**)を適用して技術的困難を乗り越えたところにその新しさがある。次の第三章においては、**Morales** の導入した擬軌道可追跡点を定量的に拡張した量的擬軌道可追跡点を定義し、**Morales** の結果を精度 0 への極限として表現するとともに、**Morales** の論文において提起された 2 つの問題を強い形で解決した。まず一番目の問題

は擬軌道可追跡点の集合がボレル集合であるかという問題であるが、量的擬軌道可追跡点の集合がすでにボレル集合であることを示し、この事実を用いて量的擬軌道追跡性をもつ同相写像のエルゴード理論的特徴付けを得た。二番目の問題は、全体で位相推移的である同相写像の擬軌道可追跡点の集合で、空でない非コンパクトなものは存在するかという問題であるが、第二章では量的な設定の下で、空でなければ全体と一致することを証明することにより、系として二番目の問題に対する否定的な解答を得た。このように、擬軌道追跡性を定量化する過程において擬軌道可追跡点に関して提起された問題を解決したところに、量的擬軌道可追跡点の導入による理解の拡大と深化がうかがわれ、量的擬軌道追跡性の概念の妥当性とその価値が立証された形である。最後の第四章ではさらに、(量的) 擬軌道可追跡点の研究が進められた。擬軌道可追跡点の集合の内点に注目し、その点が鎖回帰的である場合に全シフトへの商写像や可算器への位相共役写像を構成した。特にその点が初期値鋭敏性を持つ点で近似される場合にはカオスのダイナミクスの典型例である全シフトと非カオスのダイナミクスの典型例である可算器または周期軌道が商写像や位相共役写像を通して共存することがわかる。この結果は最近の Li と Oprocha による結果を擬軌道可追跡点の概念を通して局所化し、さらに精密化したものであり、2003 年の Akin, Hurley, Kennedy 等による結果を補完する性質のものである。証明では Bowen による公理 A 微分同相写像の基本集合の分解のアイデアの類似を用いる。この結果以外にも擬軌道追跡性の下で位相的エントロピーが正であることと Li-Yorke カオスとの同値性、さらに量的擬軌道追跡性の下での位相的エントロピーの下からの評価など興味深いいくつかの結果を証明した。

非双曲型力学系も許容する量的擬軌道追跡性及び量的擬軌道可追跡点の導入により、これまでの双曲的な位相的力学系の枠組みを超えて擬軌道追跡性に関連する新たな知見を与えた本論文の意義は大きく、論文提出者川口徳昭は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があるものと認める。