論文審査の結果の要旨

氏　名　梅　崎　直　也

正標数の多様体上のエタール層に対して，その特性サイクルが余接束上に定義され，その類として特性類が定まる．さらに定義体が有限体とすると，ε 因子とよばれる，エタール層の L 関数の関数等式の定数項が定まる．本論文では，有限体上の射影非特異多様体上のエタール層に対し，ε 因子を用いた特性類の特徴づけを与えた．さらにこれを用いて，特性類の固有射による順像に関する関手性を証明し，Grothendieck が SGA5 の非公刊部分で予想した Riemann-Roch 型の公式を示した．

k を完全体とし，X を k 上のスムーズなスキームで次元が n のものとする．ℓ を k の標数と異なる素数とし，Λ を標数 ℓ の有限体または $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ とする．$\mathcal{F}$ を X 上の Λ 加群の構成可能層とする．Beilinson により $\mathcal{F}$ の特異台とよばれる余接束 T^*X の錐閉集合 $SS\mathcal{F} \subset T^*X$ で次元が n のものが定義され，さらに斎藤毅により特性サイクル $CC\mathcal{F}$ が $SS\mathcal{F}$ の既約成分の整数係数線形結合として定義されている．

特性類 $cc_X\mathcal{F} \in \mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{CH}_n(T^*X)$ は $CC\mathcal{F}$ の有理同値類として定義される．X 上の Λ 加群の構成可能層のなすアーベル圏の Grothendieck 群を $K(X,\Lambda)$ で表すと，層の同値類にその特性類を対応させることにより，加群の射

$$cc_X\colon K(X,\Lambda) \to \mathrm{CH}_0(X) \tag{1}$$

が得られる．

さらに k を有限体とし，X を k 上の固有スキームとすると，X 上の Λ 加群の構成可能層 $\mathcal{F}$ に対し，その ε 因子 $\varepsilon(X,\mathcal{F})$ が

$$\varepsilon(X,\mathcal{F}) = \det(-Fr_k : R\Gamma(X_{\bar{k}},\mathcal{F}))^{-1}$$

により定義される．これには，Grothendieck の跡公式と Poincaré 双対性により，$\mathcal{F}$ の L 関数の関数等式の定数項という意味がある．

$\mathcal{G}$ を X 上の Λ 加群のスムーズ層とする．$\mathcal{G}$ の最高次外巾 $\det\mathcal{G}$ は基本群のアーベル化の指標 $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \Lambda^\times$ を定める．この指標も $\det\mathcal{G}$ で表す．X が有限体上非特異射影的とすると，類体論の相互写像 $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{CH}_0(X)$ との合成写像 $\det\mathcal{G} : \pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \to \Lambda^\times$ の特性類 $cc_X\mathcal{F} \in \mathrm{CH}_0(X)$ での値 $\det\mathcal{G}(cc_X\mathcal{F}) \in \Lambda^\times$ が定義される．

本論文の主定理は次のとおりである．

定理 1 X を有限体 k 上の射影非特異スキームとし，$\mathcal{F}$ を X 上の Λ 加群の構成可能層とする．$\mathcal{F}$ の特性類 $cc_X\mathcal{F} \in \mathrm{CH}_0(X)$ は，X 上の Λ 加群のスムーズ層 $\mathcal{G}$ に対し，

$$\det\mathcal{G}(-cc_X\mathcal{F}) = \frac{\varepsilon(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})}{\varepsilon(X,\mathcal{F})^{\mathrm{rank}\mathcal{G}}} \tag{2}$$

をみたす．

これは，$\mathcal{F}=\Lambda$ の場合の斎藤秀司氏の結果を一般化するものである．

Λ が有限体のときも，$\mathcal{F}\in K(X,\Lambda)$ の標数 0 へのもちあげを考えることにより，(2) は $\mathcal{F}$ の特性類 $cc_X\mathcal{F}\in \mathrm{CH}_0(X)$ の特徴づけを与える．この特徴づけから，特性サイクルの固有射による順像に関する次のような関手性がしたがう．

$f\colon X\to Y$ を k 上のスムーズなスキームの固有射とし，$n=\dim X,\ m=\dim Y$ とおく．射影と微分形式の引き戻しが定める射 $T^*Y\leftarrow X\times_Y T^*Y\to T^*X$ に交点理論を適用することにより，加群の射 $f_*\colon \mathrm{CH}_0(X)\to \mathrm{CH}_0(Y)$ が定まる．また関手 Rf_* は加群の射 $f_*\colon K(X,\Lambda)\to K(Y,\Lambda)$ を定める．

系 2 X,Y を有限体 k 上の射影非特異スキームとし，$f\colon X\to Y$ を k 上の射とする．X 上の Λ 加群の構成可能層に対し

$$cc_Y Rf_*\mathcal{F}=f_*cc_X\mathcal{F} \tag{3}$$

がなりたつ．

系 2 は，射 (1) が Grothendieck が予想した Riemann-Roch 型の可換図式

$$\begin{array}{ccc} K(X,\Lambda) & \xrightarrow{cc_X} & \mathrm{CH}_0(X) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K(Y,\Lambda) & \xrightarrow{cc_Y} & \mathrm{CH}_0(Y) \end{array} \tag{4}$$

をみたすことを示している．

定理 1 の証明は，$\mathcal{F}=\Lambda$ の場合の斎藤秀司氏の証明と同様に次のようにしてなされる．基礎体 k は有限次拡大してよいので，X が射影的という仮定より，特異台 $SS\mathcal{F}$ に関する Lefschetz 束をとることができる．$CC\mathcal{F}$ の横断的射による引き戻しについての関手性より，X のブローアップに関して示せば十分なので，スムーズな射影代数曲線 Y への射 $f\colon X\to Y$ で，$SS\mathcal{F}$ に関する孤立特性点しかもたないものがある場合に帰着される．この場合には，Y 上の $Rf_*\mathcal{F}$ に対し Deligne-Laumon による ϵ 因子の積公式を適用し，さらに次元に関する帰納法の仮定と特性サイクルの特徴づけである Milnor 公式を適用して局所 ε 因子を計算することで証明を完了する．

共著者の Enlin Yang 氏と Yigeng Zhao 氏とは独立に研究を進めていたが，同じ結果を同じ方法で得たため，論文は共著としたものである．

以上のように，本論文では有限体上の代数多様体上のエタール層の特性類に対し重要な結果が証明されている．よって、論文提出者梅崎直也は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。