論文の内容の要旨

論文題目 Radon transforms for twisted D-modules on partial flag varieties
(一般旗多様体上の捻られた D-加群のラドン変換)

氏名 八尋耕平

本論文では一般旗多様体上の捻られた D 加群に対する絡関手 (ラドン変換) の性質およびリー環の表現との関係を調べる。

Beilinson と Bernstein は旗多様体 G/B 上の捻られた D 加群の圏と $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\ G$ の包絡環のある原始イデアルによる商の表現の圏が同値であることを示した (局所化定理、[1])。彼らはこれを用いて Kazhdan-Lusztig 予想の証明を与えた。また Beilinson と Bernstein は旗多様体上の捻られた D 加群に対して旗多様体の直積の G 軌道に関する積分変換として絡関手を定義した [2]。彼らはそれを用いて Casselman の部分表現定理の別証明を与えた。その論文の中で、絡関手が導来圏の同値を与えることが示されている。Marastoni は一般旗多様体 G/P とその反対の一般旗多様体 G/P^{op} に対して、直積の開軌道による D 加群に対するラドン変換が導来圏の同値を与えることを示した [4]。本論文では絡関手を一般旗多様体の場合に、ある条件を満たす軌道に関する積分変換として一般化した。本論分の主結果のひとつはこれらの絡関手が圏同値であり、逆関手も絡関手であるということである (定理 1)。旗多様体の直積の G 軌道はワイル群の元でパラメータ付けられ、絡関手はそれに応じて捻りのパラメータを変える。Miličić は絡関手が反支配的な方から支配的な方向へ捻りが変化する場合に大域切断を変えないことを示した [5]。本論文のもうひとつの主結果はこの結果の一般旗多様体への拡張である (定理 2)。

以下主結果の正確な定式化を与える。G を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群とし、B をボレル部分群、H を B に含まれるカルタン部分群とする。これらのリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$ などで表す。Π を単純ルートの集合とし、 ρ で正ルートすべての和の半分のウェイトを表す。 Π の部分集合 I に対し、対応する放物型部分群を P_I、レビ部分群を L_I と書く。

Beilinson と Bernstein の結果を述べるには捻られた微分作用素の層が必要である。捻られた微分作用素の層は (一般) 旗多様体の場合には、局所的に微分作用素のなす環の層と同型であるような環の層である。旗多様体 G/B 上の捻られた微分作用素の層は $\mathfrak{h}^*$ の元でパラメータ付けられる。$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対応するものを $\mathcal{D}^\lambda_{G/B}$ とかく。準連接 $\mathcal{D}^\lambda_{G/B}$ 加群の圏を $\mathcal{D}^\lambda_{G/B}$-mod で表す。Beilinson と Bernstein の局所化定理とは、次の主張である [1]。λ が支配的であれば、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda - 2\rho) \to \Gamma(\mathcal{D}^\lambda_{G/B})$ は同型であり大域切断を取る関手 $\Gamma : \mathcal{D}^\lambda_{G/B}\text{-mod} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda - 2\rho)\text{-mod}$ は圏同値である。Beilinson と Bernstein は λ が正則であれば、非支配的でなくても導来関手 $\mathbb{R}\Gamma$ が導来圏の同値を与えることを示した [2]。I を Π の部分集合とする。一般旗多様体 G/P_I 上の捻られた微分作用素の層は $(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_I)^* \subset \mathfrak{h}^*$ で分類される。 ここで $\mathfrak{h}_I$ はコルート $\check{\alpha}, \alpha \in I$ で生成される $\mathfrak{h}$ の部分環を表す。一般旗多様体の場合にも $\lambda \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_I)^*$ が反支配的で正則であれば局所化定理が成立する [1]。本論文の補題 48 と命題 51 で $\lambda \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_I)^*$ が反支配的でない場合にも導来圏のレベルでは局所化定理が成り立つことを示す。ここで言う導来圏のレベルでの局所化定理とは、$\psi^\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(\mathcal{D}^\lambda_{G/P_I})$ が全射であり、$\mathbb{R}\Gamma : D^b(\mathcal{D}^\lambda_{G/B}\text{-mod}) \to D^b(\psi^\lambda(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))\text{-mod})$ が圏同値であるということである。命題 51 は定理 2 の証明で必要となる。

I、J を Π の部分集合とする。旗多様体の直積 $G/P_J \times G/P_I$ の G 軌道は $W_J\backslash W/W_I$ で分類される。本論文では $wJ = I$ を満たすような $w \in W$ に対応する軌道 $\mathbb{O}_w$ に関する絡関手のみを考える。絡関手 $R^{w,\mu}_+$、

$R_!^{w,\mu}(\mu \in X^*(P_I))$ は、$\mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda}$ 加群を $\mathbb{O}_w$ に引き戻し、直線束 $\mathcal{L}^\mu \otimes \det(\Theta_{p_1^w})$ をテンソルし、G/P_J へと押し出すことによって定義される。$\mathcal{L}^\mu$ は $\mathbb{O}_w$ 上の μ に付随する直線束である。 $\det(\Theta_{p_1^w})$ は射影 $p_1^w : \mathbb{O}_w \to G/P_J$ の相対接束の行列式束である。絡関手 $R_+^{w,\mu}$、$R_!^{w,\mu}$ は $\mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda}$ 加群を $\mathcal{D}_{G/P_J}^{w^{-1}(\lambda-\rho)+\rho+w^{-1}\mu}$ 加群に移す。本論文の第一の主結果はここで定義した絡関手が圏同値を与え、さらに逆関手も絡関手で与えられるということである。

定理 1. 絡関手 $R_+^{w,\mu}$ と $R_!^{w^{-1},-w^{-1}\mu}$ は互いに逆関手である。

この定理で $\lambda = 0$, $\mu = \rho - w\rho$, w をワイル群の最長元の最短代表元とすると Marastoni の結果が得られる。この定理は一般旗多様体 G/P が極大放物型部分群 P から来るときに帰着して証明される。

次に絡関手と大域切断関手の整合性について述べる。この場合には $\mu = 0$ とする必要があるので以下これを仮定し、絡関手を R_+^w、$R_!^w$ で表す。環準同型 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(G/P_I, \mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda})$ は全射ではないので、二つの環 $\Gamma(G/P_I, \mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda})$ と $\Gamma(G/P_J, \mathcal{D}_{G/P_J}^{w^{-1}(\lambda-\rho)+\rho+w^{-1}\mu})$ は一般には一致するかわからない。しかし、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ からの環準同型の像は同型であることが知られている。この像を U_I^{λ} と書く。大域切断関手 $\mathbb{R}\Gamma : D^b(\mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda}\text{-mod}) \to D^b(\Gamma(G/P_I, \mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda})\text{-mod})$ と環準同型 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(G/P_I, \mathcal{D}_{G/P_I}^{\lambda})$ による引き戻しで与えられる関手の合成を $\mathbb{R}\Gamma_I^{\lambda}$ とかく。命題 52 で次のような関手の間の射を構成した。

$$I_+^w : \mathbb{R}\Gamma_I^{\lambda} \to \mathbb{R}\Gamma_J^{w^{-1}*\lambda} \circ R_+^w\ ,\ I_!^w : \mathbb{R}\Gamma_I^{\lambda} \circ R_!^{w^{-1}} \to \mathbb{R}\Gamma_J^{w^{-1}*\lambda}$$

本論文の第二の主結果ではこれら関手間の射がいつ同型になるかの条件を与える。主張を述べるために必要な記号を用意する。$\alpha \in \Pi \setminus I$ に対してワイル群の元 $v[\alpha, I] \in W$ を $v[\alpha, I] = w_0^I w_0^{I\cup\{\alpha\}}$ で定める。$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を命題 25 のようにとり、$I_0 = I = v[\alpha_1, I_1]I_1, I_1 = v[\alpha_2, I_2]I_2, \ldots, I_{r-1} = v[\alpha_r, I_r]I_r, I_r = J$ と定める。$\mathfrak{p}_I$ の指標 μ に対し一般化 Verma 加群を $M_{\mathfrak{p}_I}^{\mathfrak{g}}(\mu) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_I)} (\mu)$ で定義する。Π の部分集合 $K_1 \subset K_2$ に対し、 $\mathfrak{l}_{K_2}$ の放物型部分リー環を $\mathfrak{l}_{K_2} \cap \mathfrak{p}_{K_1}$ で定める。

このとき I_+^w および $I_!^w$ が同型になるための条件は次のように与えられる。

定理 2. $\lambda_0 = \lambda \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_I)^*$ とし、$\lambda_i := v[\alpha_i, I_i]^{-1} * \lambda_{i-1}$ によりウェイト $\lambda_i (1 \leq i \leq r)$ を定める。λ は正則であり、各 i に対しレビ部分リー環 $\mathfrak{l}_{I_i\cup\{\alpha_i\}}$ の一般化 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}_{I_i}^{I_i\cup\{\alpha_i\}}}^{\mathfrak{l}_{I_i\cup\{\alpha_i\}}}(v[\alpha_i, I_i]^{-1}\lambda_{i-1})$ が既約であると仮定する。このとき関手の間の射 $I_+^w : \mathbb{R}\Gamma_I^{\lambda} \to \mathbb{R}\Gamma_J^{w^{-1}*\lambda} \circ R_+^w$ と $I_!^w : \mathbb{R}\Gamma_I^{\lambda} \circ R_!^w \to \mathbb{R}\Gamma_J^{w^{-1}*\lambda}$ は同型である。

この定理に現れる一般化 Verma 加群は単純リー環の極大放物型部分リー代数の 1 次元表現から定まる一般化 Verma 加群と 1 次元表現のテンソル積として得られる。単純リー環の極大放物型部分リー代数の 1 次元表現から定まる一般化 Verma 加群に対しては既約性の判定条件が Jantzen により与えられているので [3]、それにより与えられた λ に対し定理の仮定が成立するかを確かめることができる。特に各ステップで λ_i が $\mathfrak{l}_{I_i\cup\{\alpha_i\}}$ のウェイトとして反支配的であればこの一般化 Verma 加群は既約である。定理 2 の $P_I = B$ の場合は Miličić[5] により証明されている。

参考文献

[1] Beilinson, A.; Bernstein, J. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 1, 15-18.

[2] Beilinson, A.; Bernstein, J. A generalization of Casselman's submodule theorem. Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 35-52, Progr. Math., 40, Birkhäuser Boston,

Boston, MA, 1983.

[3] Jantzen, J. C. Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren. Math. Ann. 226 (1977), no. 1, 53-65.

[4] Marastoni, C. Integral geometry for $\mathcal{D}$-modules on dual flag manifolds and generalized Verma modules. Math. Nachr. 286 (2013), no. 10, 992-1006.

[5] Miličić, D. Localization and Representation Theory of Reductive Lie Groups. https://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/book.pdf