論文の内容の要旨

論文題目　Entanglement Entropy in Algebraic Quantum Field Theory

（代数的場の量子論におけるエンタングルメント・エントロピー）

氏名　　オオタニ　ユウ　(Yul Otani)

本論文では代数的場の量子論、特にカイラル・ネットにおけるエンタングルメント・エントロピー（Entanglement Entropy、以下EE）を論じる。

エンタングルメント・エントロピーは通常、ある部分系に制限された量子状態のフォン・ノイマン・エントロピーとして定義される。それは量子エンタングルメントを測る量として考えられ、そしてより複雑な量子系の基底状態の多くの場合には「面積則」が成り立つ（一方、古典物理では、エントロピーは示量変数である）[1]。場の理論においては、EEは「ブラックホールの熱力学」や「ホログラフィー原理」と結びついていると考えられている。従来のアプローチでは場の量子論をある有限量子系の極限とし、lattice 正則化を通して場の量子論のEEはその lattice の EE の極限として求められている。この方法によって多くの結果が導き出された [2]。

しかし、連続極限に直接得られた結果は今にも存在していない。エントロピーに関わる概念は作用素環を通して定義されるため、EE は代数的場の量子論での考察が適切であろう。代数的概念では、各時空の（有限）領域 $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^{1+d}$ に作用素環 $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset B(\mathcal{H})$ が与えられる。その局所代数全体の作用素環の族$\{\mathfrak{A}(\mathcal{O})\}$はHaag-Araki-Kastler族と呼ばれ、代数的場の理論の本質的な性質を全て構成している。ただし、4次元での非自明な場の量子論のモデルの存在は現在でも確立されていない。しかし代数的場の量子論は、モデルによらない一般の場の量子論の性質についての考察を与える。例えば、熱平衡状態（thermal states）の表現論と超選択側（superselection rules）の理論等である。

本論文は、代数的場の量子論の視点において EE の概念を定式化することを目指す。具体的に時空を円周S^1としたカイラル理論、すなわち Möbius 共変ネット [3] $(\mathfrak{A}, U, \Omega, \mathcal{H})$ を扱う。ここでは、$\mathcal{H}$ がヒルベルト空間であり、$\Omega \in \mathcal{H}$ が真空状態 ω を生成するユニット・ベクトルである。また、対称性群$\widetilde{\text{Möb}}$の共変性は $\mathcal{H}$ 上の強連続ユニタリ表現 U から生じる。最後に、$\mathfrak{A} : I \in \mathcal{J} \mapsto \mathfrak{A}(I) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は、円周の非稠密開区間の集合$\mathcal{J} := \{I \subset S^1, I \text{ open, non-dense interval}\}$ を添字集合としたフォン・ノイマン環の族である。ネットは単調性、局所性、Möbius 共変性、真空状態の存在と cyclicity とエネルギーの正値性を満たすと仮定する。さらに、ネットは以下のように split 条件を満たすとする。すなわち任意の区間 $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$ が $I_1 \Subset I_2$を満たすとき、包含 $\mathfrak{A}(I_1) \subset \mathfrak{A}(I_2)$ は（ベクトルΩに対しての）フォン・ノイマン環の standard split 包含となる。従って、中間ペア $(u, \mathfrak{R}_u)$ が存在する。ここでは $u : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ は $*$-isomorphism $\mathfrak{A}(I_1) \vee \mathfrak{A}(I_2)' \cong \mathfrak{A}(I_1) \bar{\otimes} \mathfrak{A}(I_2)'$を実行するユニタリ作用素となり、そして $\mathfrak{R}_u$ は中間I型因子環であり、$\mathfrak{A}(I_1) \subset \mathfrak{R}_u := u^*(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes 1)u \subset \mathfrak{A}(I_2)$によって定義される。

本研究の目的は、区間 $I \in \mathcal{J}$ に制限された正規状態 ψ のエンタングルメント・エントロピーを定義するものである。従来の定義は ψ を $\mathfrak{A}(I)$ に制限されたフォン・ノイマン・エントロピーであるが、それに関して二つの課題がある。一つ目は、フォン・ノイマン環 $\mathfrak{A}(I)$ はI型でないため、フォン・ノイマン・エントロピーは定義されない点である。それに対し、正則化パラメータ $\delta > 0$ を取り込み、それによって増加区間 $I_\delta \in \mathcal{J}$ を作る。そして、$I \Subset I_\delta$ に対しての中間ペア $(u, \mathfrak{R}_u)$ の存在はネットの split 条件から成り立ち、中間I型因子環$\mathfrak{R}_u$上ではフォン・ノイマン・エントロピーを扱える。二つ目はエネルギーによる発

散である。それに対し、正則化パラメータは conformal energy cutoff $E > 0$ として導入する。 それによって状態の正則化を次のように定義できる。射影作用素 $P_E := \chi_{[0,E]}(L_0)$ をとり、cutoff 射影作用素 $Q_E^u := u^*(P_E \otimes 1)u$ を定義する。状態 ψ から E と $(u, \mathfrak{R}_u)$ に対して正則化された状態 $\psi^{E,u}$ を $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対し、式 $\psi^{E,u}(x) := \psi\big(Q_E^u\, x\, Q_E\big)$ で定義される。

従って、以下のような「conformal energy cutoff E に対しての正則化されたエンタングルメント・エントロピー」の定義を示すことができる。

定義 1 $(\mathfrak{A}, U, \Omega, \mathcal{H})$ **は** *split* 条件を満たす *Möbius* 共変ネットと仮定する。 $\mathfrak{A}(S^1)$上の正規状態 ψ 、区間 $I \in \mathcal{J}$ に対し、 有限 *conformal energy cutoff* パラメータ $E > 0$ をとり、それらに対しての正則化された エンタングルメント・エントロピー $H_I^E(\psi)$ は以下のように定義される。

$$H_I^E(\psi) := \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{(u,\mathfrak{R}_u)} \inf_{(\phi,\lambda_\phi)} \frac{1}{\lambda_\phi} S_{\mathfrak{R}_u}\big(\phi^{E,u}/\|\phi^{E,u}\|\big).$$

ここでは、距離パラメータ $\delta > 0$ により増加区間 I_δ が構成されて、$\mathfrak{A}(I) \subset \mathfrak{A}(I_\delta)$ は *standard split* 包含となる。 最初の *inf* の $(u, \mathfrak{R}_u)$ は *split* 包含による任意の *intermediate pair* である。二つ目のの *inf* には、ϕは$\mathfrak{A}(S^1) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$上のノーマル状態 ϕ であり、そして $\mathfrak{A}(I) \vee \mathfrak{A}(I_\delta)'$ 部分環上では次のふたつの条件を満たしたとする *(i)* $\phi \succeq \omega$が成り立ち、*(ii)* あるパラメータ $\lambda_\phi \in (0, 1]$ が存在し、$\phi^{E,u} \geq \lambda_\phi \psi^{E,u}$ が成り立つ。

その定義を用いて、次を証明した。

定理 2 $(\mathfrak{A}, U, \Omega, \mathcal{H})$ が *split* 条件を満たす *Möbius* 共変ネットだと仮定する。 このとき、真空状態 ω に対し、任意の開区間$I \in \mathcal{J}$と *conformal energy cutoff* E に対し 正則化されたエンタングルメント・エントロピーは有限である。その上、ある関数 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ が存在し、それに対し

$$\begin{cases} C_E := 2\|f\|_\infty \displaystyle\sum_{N=0}^{E} \dim\ker(L_0 - N), \\ S_E := 4\|\eta \circ |f|\|_\infty \displaystyle\sum_{N=1}^{E} \dim\ker(L_0 - N), \\ H_I^E(\omega) \leq S_E + C_E \log C_E < +\infty. \end{cases}$$

が成り立つ。

References

[1] J. Eisert, M. Cramer and M. B. Plenio, *Colloquium : Area laws for the entanglement entropy*, Rev. Mod. Phys. **82**, 277–306 (Feb 2010) (arXiv:0808.3773).

[2] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2004**(06), P06002 (2004) (hep-th/0405152).

P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and conformal field theory*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **42**(50), 504005 (2009) (arXiv:0905.4013).

H. Casini and M. Huerta, *Entanglement entropy in free quantum field theory*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **42**(50), 504007 (2009) (arXiv:0905.2562).

[3] F. Gabbiani and J. Fröhlich, *Operator algebras and conformal field theory*, Communications in Mathematical Physics **155**(3), 569–640 (1993).