論文審査の結果の要旨

オオタニ　ユウ

本論文において論文提出者は，エンタングルメント・エントロピーについて，代数的場の量子論の立場から新たな研究を行った．

エンタングルメント・エントロピーは，近年数理物理学において盛んに研究されているテーマである．量子系とその部分系があるときに，状態を部分系に制限した際のエントロピーとして定義される量である．部分系とその残りの部分系がどの程度「エンタングル」しているかを測る量のことである．

場の量子論においてこの量を定義し，研究したいということが本論文の研究動機である．先行研究は，物理学の立場から格子系についてエンタングルメント・エントロピーを定義，計算したものがいくつかあるが，ここでは連続極限を取った場の理論で考えたいので，作用素環を用いた代数的場の量子論の枠組みを用いる．

代数的場の量子論においては，時空及び時空対称性の群に選択の余地があるが，本論文では，最もシンプルで勝つ研究が進んでいる場合として，カイラル共形場理論を取り上げている．考える状態は真空状態，部分物理系は円周内の区間に対応する局所環である．

カイラル共形場理論は 2 次元共形場理論を二つの光直線に分解したときに現れる「半分」の理論である．時空にあたるものは 1 次元円周 (コンパクト化された光直線)，時空対称性の群は Möbius 群，または円周の向きを保つ微分同相写像全体の群である．部分系を与える時空領域は円周上の区間であり，区間ごとに同じヒルベルト空間に作用するフォン・ノイマン環が対応する．これは区間での観測可能量 (に対応する自己共役作用素) の生成するフォン・ノイマン環と考えられ，局所環と呼ばれる．局所環たちの間には，単調性，局所性，共変性などの公理が要請される．これらの公理を課した局所環の族を局所共形ネットと呼ぶ．対称性の群として微分同相写像群を取ったときは，局所環の間にスプリット条件と呼ばれるものが自動的に成り立つことが知られている．Möbius 群を考えたときにはこれは自動的ではないので，スプリット条件が成り立つことを仮定しておく．この場合，それぞれの局所環は，すべて III_1 型 Araki-Woods 因子環に同型になることが知られている．

局所環は III 型であって I 型でないので，そこにはトレースが存在せず，フォン・ノイマン・エントロピーが定義できないという難点がある．しかし今カイラル共形場理論ではスプリット条件を仮定しているので，局所環には「十分近い」ところに I 型の作用素環が存在している．これによって，一般の状態 ψ, 十分小さい正の数 δ, 区間 I に対し，エントロピー $H_{I,\delta}(\psi)$ が定義される．

次にエネルギーカットオフと呼ばれる正の実数 E を導入する．これを用

いて一般の状態 ψ に対してエントロピー $H^E_{I,\delta}(\psi)$ を導入する．スプリット条件がある場合は，真空状態 ω に対し，$H^E_{I,\delta}(\omega)$ は有限であり，δ によらない上界が与えられることが示される．$\delta \to 0$ とすることにより，正則化されたエンタングルメント・エントロピー $H^E_I(\psi)$ が定義される．真空状態 ω に対しこれは有限値を持つことが示され，上からの評価が与えられる．上からの評価に使われるのは，コンフォーマル・ハミルトニアンの固有空間の次元 (有限と仮定されている) である．

この結果を物理学の文献で得られている評価と比べると，より悪いものになっている．しかし物理学の文献では厳密な証明が行われていないこと，設定も完全に同じではないことから，本論文の意義が劣っているわけではなく，むしろこのような数学的に厳密な設定で初めて上からの評価を具体的に与えたことが評価できる．

よって，論文提出者 オオタニ･ユウ は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．