論文の内容の要旨

論文題目 Topological invariants and localized wave functions for some topological phases

(ある種のトポロジカル相に対する位相不変量と局在化した波動関数の関係について)

氏名 林 晋

本論文では, 主に物性物理学で扱われる物質上のハミルトニアンをモデルとする, ある種の自己共役作用素に対して定まる位相不変量を考察する．また, これらの位相不変量と物質の一部に局在化した波動関数との対応関係を考察する．本論文ではこれらの不変量と対応関係を, 特に K 理論と指数定理の観点から考察する．このような位相不変量に対応して現れる局在化した波動関数は, 系の摂動に対してロバストであるという特徴を持ち, 物性物理学で広く着目されているものである．

本論文の結果は大きく二つに分けることができる．最初の結果（主結果１）では, 主に物性物理学でよく知られている, ある種の絶縁体に対する位相不変量と, その境界に局在化した波動関数の対応関係（バルクエッジ対応）が, 指数の基本的な性質であるコボルディズム不変性の直接の帰結であることを示す．ここでは既存の議論を K 理論と指数定理の観点から考察し, 背後にある幾何学的な描像とその役割を明らかにする．

次に, 上記の従来の位相不変量に対して, ある種 secondary な位相不変量の定義を与える（主結果２）．これは従来着目されてきたトポロジカル相に対し, ある種 secondary なトポロジカル相が存在し得ることを意味している．またこの位相不変量の性質として, 物質の角（コーナー, 境界の境界）に局在した波動関数との対応関係があることを証明する．得られた対応関係から, コーナーに局在化した波動関数で, 系の摂動に対してロバストなものが存在することがわかる．

2 次元的な物質があるとして, その境界をエッジ, 内側をバルクという（図１）．上記のバルクエッジ対応は量子ホール効果の研究から認識されたものである．量子ホール効果は 1980 年に K. von Klitzing, G. Dorda と M. Pepper によって発見された．彼らは強磁場中の 2 次元の電子ガスにおいてホール電導度が量子化することを観測した．D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale と M. den Nijs はホール電導度の量子化をトポロジーの観点から説明した．彼らはある 2 次元無限系の周期的なハミルトニアンで Fermi 準位にスペクトルギャップを持つ系に対し, Fermi 準位以下の波動関数からなるベクトル束の第 1Chern 数（と一致する数）を定義した．この数は TKNN 数と呼ばれており, バルクの不変量である．彼らはこの整数が系のホール電導度に一致することを久保公式を用いて証明した．Y. Hatsugai はエッジのある系で量子ホール効果を考察し, ホール電導度があるリーマン面上で数えたある回転数（またはスペクトル流）に対応することを証明した．これはエッジの不変量である．さらに Hatsugai はバルクの不変量とエッジの不変量が等しいことを, リーマン面上での考察によって証明した [2]．この対応関係はバルクのトポロジーを反

映してエッジに局在した波動関数が現れることを述べており, バルクエッジ対応と呼ばれている.

2005 年に C. L. Kane と E. J. Mele はいわゆる量子スピンホール効果を提唱した [3]. 量子スピンホール効果はその後 König らによって実験で観測されている. Kane と Mele は時間反転対称性を持つ系に対し, $\mathbb{Z}_2$ に値を持つ位相不変量を定義した. この不変量はエッジに沿うスピン流と対応することが知られている. これは量子スピンホール系に対するバルクエッジ対応である.

数学の側では, J. Bellissard を中心として, 量子ホール効果に対して非可換幾何の観点からの研究が進められてきた. J. Kellendonk, T. Richter と H. Schulz-Baldes は, disorder のある系に対しても, バルクエッジ対応を証明した. 彼らの証明は Toeplitz extension に同伴する C^* 環の K 理論における 6 項完全列の境界準同型を用いるものである [4]. Thouless–Kohmoto–Nightingale–den Nijs や Hatsugai の波動関数から不変量を取り出す方法と比較して, ハミルトニアンのなす C^* 環をまず考え, ひとつのハミルトニアンから C^* 環の K 群の元を定義し, そこから不変量を取り出す点が特徴である.

一方, G. M. Graf と M. Porta は [1] においてある別のベクトル束を用いてバルクエッジ対応を証明した. 彼らはハミルトニアンの（形式的な）解であって, ある特定の方向に減少するものを用いて, エッジの無い無限系に対してあるトーラス上のベクトル束を定義した. このベクトル束はエッジのある系の回転数と密接に関連しており, 彼らはこのベクトル束を用いて量子ホール系と量子スピンホール系におけるバルクエッジ対応を証明した. 彼らの証明は関数解析と基本的なホモトピー論を用いた初等的なものである. ある種の波動関数から位相不変量を定義し, 議論の中である種の Riemann 面を用いる. この意味で Graf–Porta の証明は Hatsugai の証明に近い.

これらの研究とは独立に, Toeplitz 作用素の研究に関連して, quarter-plane Toeplitz 作用素の研究が R. G. Douglas と R. Howe によって始められた. E. Park によって, quarter-plane Toeplitz 作用素のなす C^* 環に対してある short exact sequence が得られている [5].

主結果 1

$\mathbb{T}$ を複素平面の単位円とする. V をエルミート内積を持つ有限次元の複素ベクトル空間とする. $\{H(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $l^2(\mathbb{Z},V)$ 上の周期的な有界自己共役作用素で hopping matrices のノルムの和が L^1 有界なもの $(\ast)$ の作用素ノルムに関する連続族とする. ある実数 μ があって, 任意の t に対し μ が $H(t)$ のスペクトルに含まれないと仮定する. このとき Fourier 変換によって 2 次元トーラス $\mathbb{S}^1_\eta \times \mathbb{T}$ によってパラメトライズされるエルミート行列の族 $\{H(\eta,t)\}_{(\eta,t)\in\mathbb{S}^1_\eta\times\mathbb{T}}$ が得られる. 仮定から μ 以下の固有値に対する固有空間の族を集めることでトーラス $\mathbb{S}^1_\eta \times \mathbb{T}$ 上のベクトル束 E_{B} が得られる. この第 1Chern 数がバルクの不変量であり, 論文中では $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk}}$ と書く. また, $l^2(\mathbb{Z},V)$ から $l^2(\mathbb{N},V)$ への射影を $P_{\geq 0}$ と書くとき, Toeplitz 作用素の族 $\{P_{\geq 0}H(t)P_{\geq 0}-\mu\}_{t\in\mathbb{T}}$ は自己共役 Fredholm 作用素の族である. このスペクトル流を論文中では $\mathcal{I}_{\mathrm{Edge}}$ と書く. これはエッジの不変量である. このとき量子ホール系に対するバルクエッジ対応は以下のように定式化できる.

Theorem 1. $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk}} = \mathcal{I}_{\mathrm{Edge}}$.

ここで複素平面のループ γ で μ を通って $\{H(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ の μ 以下のスペクトルを全て内側に含むも

のをとる. 可逆な作用素の族 $\{H(t)-z\}_{(z,t)\in\gamma\times\mathbb{T}}$ を考え, ここからある種の "特定の方向に減少する解" を考える. それらのパラメータに対する族を考えることで, 2 次元トーラス $\gamma\times\mathbb{T}$ 上のベクトル束 E_{GP} が得られる. これは hopping matrices が可逆であるときに 2 階の差分方程式が初期値で解けることを用いて Graf–Porta によって考察されたものである. この第 1Chern 数を $\mathcal{I}_{\mathrm{GP}}$ と書く. 本論文では Graf–Porta に従って, バルクエッジ対応を次の二つの式を示すことで証明する.

Proposition 2. $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk}}=-\mathcal{I}_{\mathrm{GP}},\quad -\mathcal{I}_{\mathrm{GP}}=\mathcal{I}_{\mathrm{Edge}}$.

ベクトル束 E_{B}, E_{GP} はそれぞれの底空間の K 群の元を定める. 二つ目の式 $\mathcal{I}_{\mathrm{GP}}=\mathcal{I}_{\mathrm{Edge}}$ は, ある種の K 群の元の Dirichlet 境界条件を用いた局所化によって簡単な計算から得られる. 一つ目の式 $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk}}=\mathcal{I}_{\mathrm{GP}}$ は次の二つのステップで証明できる. まずベクトル束 E_{Bulk} と E_{GP} がある種の波動関数を集めて定義されたことに注意すると, それぞれがあるコンパクト K 群の元 α_z, α_η の族の指数であることがわかる. 次に Graf–Porta が考察した Riemann 面に着目すると, α_z と α_η の間のコボルディズムを構成することができる. 指数のコボルディズム不変性により, $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk}}=\mathcal{I}_{\mathrm{GP}}$ が証明される. これにより, バルクエッジ対応が指数のコボルディズム不変性から従うことがわかる.

量子スピンホール系はハミルトニアンが時間反転対称性と呼ばれる量子力学的対称性を持つ場合である. この場合も J. L. Dupont による KSp 理論を用いることで, 同様にバルクエッジ対応を証明することができる.

主結果 2

本論文の後半では 3 次元の格子の上の周期系（バルク）と, そのある 2 つの部分半群への制限（エッジ）, 部分半群の共通部分への制限（コーナー）の 3 つを考える. これは図 2 のように 2 つのエッジとその交差としてのコーナーのある物質を考えることに対応している.

$\{H(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},V)$ 上の周期的な有界自己共役作用素の連続族で hopping matrices について $(*)$ と同様の条件を満たすものとする. P^α, P^β を $P_{\geq 0}$ のように, 2 つのエッジへの制限を与える $l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},V)$ 上の射影とする. α と β は格子に対するエッジの角度を表すパラメータである. このとき $\{H(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\{P^\alpha H(t)P^\alpha\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\{P^\beta H(t)P^\beta\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\{P^\alpha P^\beta H(t)P^\alpha P^\beta\}_{t\in\mathbb{T}}$ はそれぞれ, バルク, 二つのエッジ, コーナーに対応するハミルトニアンである. $P^\alpha P^\beta H(t)P^\alpha P^\beta$ は quarter-plane Toeplitz 作用素と呼ばれる. ここで, ある実数 μ があって, 任意の $t\in\mathbb{T}$ に対し, μ が $P^\alpha H(t)P^\alpha$ と $P^\beta H(t)P^\beta$ のスペクトルに含まれないと仮定する. このとき μ は $H(t)$ のスペクトルにも含まれない. $P^\alpha H(t)P^\alpha-\mu$ と $P^\beta H(t)P^\beta-\mu$ に対する可逆性の仮定と, それぞれが共通のバルク $H(t)$ から定義されていることから, ある C^* 環の K 群の元 $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk-Edge}}$ が定義できる. 以上の考察は次のように述べることができる.

"Theorem" 3. バルクと二つのエッジの両者が絶縁体である物質に対し, ある位相不変量 $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk-Edge}}$ が定まる.

また, Douglas–Howe, Park [5] の結果から, quarter-plane Toeplitz 作用素の族 $\{P^\alpha P^\beta H(t)P^\alpha P^\beta-\mu\}_{t\in\mathbb{T}}$ が自己共役 Fredholm 作用素の連続族であることがわかる. この族が定める $K_1(C(\mathbb{T}))$ の元

を $\mathcal{I}_{\mathrm{Corner}}$ と書く．スペクトル流が定める同型 $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$ により $\mathcal{I}_{\mathrm{Corner}}$ に対応する整数は，コーナーに局在した波動関数を符号付きで数えたものである．このとき次がわかる．

Theorem 4. $\partial_0(\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk-Edge}}) = \mathcal{I}_{\mathrm{Corner}}$.

∂_0 は, Park による quarter-plane Toeplitz extension に同伴した, C^* 環の 6 項完全列における境界準同型である．証明はこの 6 項完全列の構成を追うことでなされる．

構成から, K 群の元 $\mathcal{I}_{\mathrm{Bulk-Edge}}$ は二つのエッジのハミルトニアンのスペクトルギャップが閉じない限りは不変である．この意味で $\mathcal{I}_{\mathrm{Corner}}$ と対応するコーナーに局在した波動関数は系の摂動に対してロバストである．また, エッジのハミルトニアンのスペクトルはバルクのハミルトニアンのみならず, エッジの角度 α, β にも依存しているため, ここで現れるコーナーに局在した波動関数は, 物理的には物質の形状に依存して現れることがわかる．

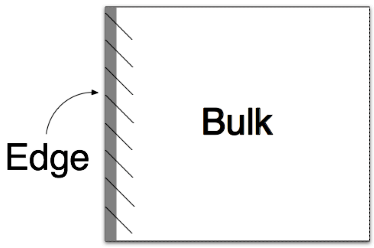

図 1　バルクとエッジ

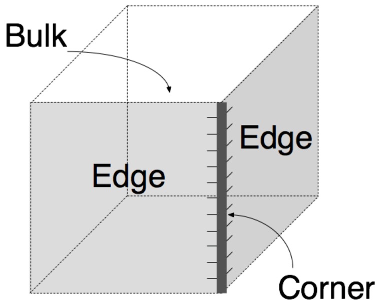

図 2　バルクとエッジとコーナー

参考文献

[1] Gian Michele Graf and Marcello Porta. Bulk-edge correspondence for two-dimensional topological insulators. *Comm. Math. Phys.*, 324(3):851–895, 2013.

[2] Yasuhiro Hatsugai. Chern number and edge states in the integer quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 71(22):3697–3700, 1993.

[3] C. L. Kane and E. J. Mele. Quantum spin Hall effect in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 95:226801, 2005.

[4] J. Kellendonk, T. Richter, and H. Schulz-Baldes. Edge current channels and Chern numbers in the integer quantum Hall effect. *Rev. Math. Phys.*, 14(1):87–119, 2002.

[5] Efton Park. Index theory and Toeplitz algebras on certain cones in $\mathbf{Z}^2$. *J. Operator Theory*, 23(1):125–146, 1990.

[6] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, 1982.