

論文審査の結果の要旨

氏名 林 晋

トポロジカル相は近年物性物理学において注目されている概念である。トポロジカル相においてバルクエッジ対応と呼ばれる現象が、普遍的に観察されている。数学的なひとつの定式化においては、とくに相互作用のないフェルミオンに対して、強結合近似モデルにおいては、バルクエッジ対応は Toeplitz 作用素に対する指数定理と密接にかかわることが J. Kellendonk, T. Richter, H. Schulz-Baldes たちによって知られている。バルクエッジ対応とは、(1) バルクがギャップをもつとき、Block 束と呼ばれるベクトル束からバルク指数と呼ばれる量を定義し、(2) エッジに局在する解を記述するエッジ指数と呼ばれる量を定義し、(3) 両者の対応を主張するものである。

申請者は相互作用のないフェルミオンに対する強結合近似モデルにおけるバルクエッジ対応についてのふたつの結果を得た。

- (i) バルクエッジ対応に対し、指数のコボルディズム不変性を用いたアプローチを提案し、それを用いた証明を与えた。
- (ii) バルクとふたつのエッジからきまるある不変量と、角（コーナー）に局在する解を与える不変量とを定式化し、両者の対応を示した。

(i) 相互作用のないフェルミオンにおいて、バルクエッジ対応の数学的アプローチは複数知られている。初貝安弘による、ハミルトニアンに付随するリーマン面を考察する先駆的方法に続き、 C^* 環の K 理論における 6 項完全列の境界準同型を Toeplitz 拡大に対して適用するアプローチ (J. Kellendonk, T. Richter, H. Schulz-Baldes)、ハミルトニアンが 3 項漸化式である場合に、エッジ指数を表示するベクトル束を導入するアプローチ (G. M. Graf, M. Porta) が代表的である。

申請者はバルクエッジ対応への次のような新たなアプローチを提案した。第一に、Graf-Porta によるベクトル束の構成を、ハミルトニアンが一般の形のハミルトニアンに拡張し、第二に、そのベクトル束のねじれをあらわす指数 \mathcal{I}_{GP} がエッジ指数 \mathcal{I}_{Edge} と同じ情報をもつことを示し、第三に Bloch 束のねじれを表現するバルク指数 \mathcal{I}_{Bulk} と \mathcal{I}_{GP} との関係、指数の幾何学的な性質であるコボルディズム不変性を直接用いて示す。

定理 $\mathcal{I}_{\text{Bulk}} = -\mathcal{I}_{\text{GP}}, -\mathcal{I}_{\text{GP}} = \mathcal{I}_{\text{Edge}}$.

(ii) 申請者は、3次元のバルクを二通りの角度で切断して得られる二つの切断面（エッジ）において、二つのエッジハミルトニアンが共にギャップをもつ状況を考察した。このとき、バルクもギャップをもち、バルク指数及びふたつのエッジにおけるエッジ指数はいずれもゼロである。この状況下において、申請者は第一に、ふたつのエッジにおけるエッジ指数の消え方の相違を捕らえる指数 $\mathcal{I}_{\text{Bulk-Edge}}$ を定義し、第二に、ふたつのエッジの交わるコーナーにおいてそこに局在する解を記述する指数 $\mathcal{I}_{\text{corner}}$ を定義し、第三に、両者の次の関係を見定めた。

定理 $\partial_0 \mathcal{I}_{\text{Bulk-Edge}} = \mathcal{I}_{\text{corner}}$

ここで ∂_0 は C^* 環の K 理論における 6 項完全列の境界準同型であって Park による quarter-plane Toeplitz 拡大に付随するものである。

(i) におけるアプローチは、エッジ指数とバルク指数の一致を数値的に見るだけでなく、ベクトル束の間の関係をコボルディズムによって与えている。特に、両者がともに消えてゼロとなる時、その消え方の関係が幾何学的に考察可能であることを示唆する。これを受け、申請者の研究 (ii) は、消えてゼロになるふたつの状況の相違を捕らえる指数を実際に提案している。これらの研究は、トポロジカル相の数学的理論において新たに secondary 不変量の考え方を導入するものである。

よって、論文提出者 林 晋 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。