

論文審査の結果の要旨

氏名 吉川 祥

有理数体上の楕円曲線の保形性は志村・谷山予想とよばれ、Wiles による Fermat の最終定理の証明の核心部分であり、Breuil-Conrad-Diamond-Taylor により有理数体上のすべての楕円曲線について証明された。近年この総実代数体への拡張が研究され、Freitas-Le Hung-Siksek は実 2 次体上の楕円曲線の保形性を証明した。総実代数体上の楕円曲線が保形的であるとは、その L 関数が Hilbert 保形形式の L 関数と一致することである。

本論文では、有理数体上アーベルな総実代数体上の楕円曲線の保形性について、次の 2 つの定理を証明した。1 つめは実 2 次体いくつかの合成体に関するものである。

定理 1 $p = 5$ または 7 とし、 K を有限個の実 2 次体の合成体で $2, 3, p$ で不分離なものとす。 X でレベル $3p$ のモジュラー曲線 $X_0(3p)$ を表し、ガロワ群 $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の任意の指標 $s: \text{Gal}(K/\mathbf{Q}) \rightarrow \{\pm 1\}$ に対し、 X を s でひねったもの $X^{(s)}$ の有理点は有限個であると仮定する。

このとき K 上の楕円曲線はすべて保形的である。

もう 1 つは $3, 5, 7$ で不分離な拡大体に関するものである。

定理 2 有理数体上アーベルな総実代数体 K が $3, 5, 7$ で不分離であるとする。このとき K 上の楕円曲線はすべて保形的である。

上記の実 2 次体の場合を含め、Freitas, Le Hung, Thorne らの先行研究により、総実代数体上の楕円曲線で保形性が証明されていないものはかなり限定的であることがわかっている。そこで残された楕円曲線について、既存の保形性もちあげ定理を適用することにより、保形性を確認するのが証明の方針である。その際、鍵となるのが次の新しい結果である。

定理 3 総実代数体 K が 7 で不分離であるとする。 K 上の楕円曲線 E が定める法 7 表現 $\bar{\rho}_{E,7}: G_K \rightarrow GL_2(\mathbf{F}_7)$ が既約ならば、 E は保形的である。

定理 3 の証明は、先行研究により、 7 をわりきるすべての K の素点で E が加法的還元をみたく場合に帰着される。この場合には、さらに先行研究と、Kraus による p 進体上の楕円曲線の法 p 表現の研究をくみあわせることにより、潜超特異還元の場合を排除することが証明の核心である。残った場合は Skinner-Wiles による保形性もちあげ定理を適用することで証明を完了する。

定理 1 の証明は先行研究と定理 3 を用いると、法 p 表現が可約な場合に帰着される。このとき、 E が定めるモジュラー曲線の K 有理点を考えて定理 1 の仮定を用いると、 E の j 不変量が有理数体あるいは実 2 次体に含まれるという既知の場合に帰着される。

定理 2 の証明も先行研究と定理 3 を用いると、法 5 表現と法 7 表現がともに可約な場合に帰着される。この場合に、 $GL_2(\mathbf{F}_5)$ と $GL_2(\mathbf{F}_7)$ の上三角行列のなす部分群の位数と構造を考えると、3 をわる素点での惰性群への制限の位数は 2 以下であることがわかる。このことから、3 をわるすべての素点で E が準安定還元をもつという既知の場合に帰着され、証明が完了する。

以上のように、本論文では総実代数体上の楕円曲線について、その保形性に関する既知の結果と、 p 進体上の楕円曲線の法 p 表現についての結果を巧妙に組み合わせることにより、総実代数体上の楕円曲線の保形性という整数論の重要な問題について優れた結果を証明した。これは、ガロワ表現の保形性や楕円曲線が定めるガロワ表現についての深い理解がなければできない業績である。よって、論文提出者吉川祥は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。